John W. Milnor

Topologia dal punto di vista differenziabile

Dagli appunti di David W. Weaver

A Heinz Hopf

Traduzione italiana di *Topology from the Differentiable Viewpoint*
The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
Figure ridisegnate per questa edizione.

Indice

Prefazione **2**

1 Varietà lisce e applicazioni lisce **3**

2 Il teorema di Sard e Brown **8**

3 Dimostrazione del teorema di Sard **12**

4 Il grado modulo 2 di un'applicazione **14**

5 Varietà orientate **17**

6 Campi vettoriali e caratteristica di Eulero **20**

7 Cobordismo con riferimento normale. La costruzione di Pontrjagin **24**

8 Esercizi **29**

Appendice. Classificazione delle varietà unidimensionali **31**

Bibliografia **33**

Indice analitico e dei simboli **36**

Prefazione

Queste lezioni furono tenute all'Università della Virginia nel dicembre del 1963 sotto gli auspici della Page-Barbour Lecture Foundation. Vi si presentano alcuni temi che risalgono agli esordi della topologia e che hanno al centro la definizione di grado di un'applicazione, data da L. E. J. Brouwer nel 1912. I metodi adottati sono quelli della topologia differenziale, anziché i metodi combinatori di Brouwer. Un ruolo centrale spetta alla nozione di valore regolare e al teorema di Sard e Brown, secondo il quale ogni applicazione liscia ammette valori regolari.

Per semplificare l'esposizione supporremo che tutte le varietà siano infinitamente differenziabili ed esplicitamente realizzate come sottovarietà di uno spazio euclideo. Si presuppongono alcune nozioni di topologia generale e di teoria delle funzioni di variabile reale.

Desidero esprimere qui la mia gratitudine a David Weaver, la cui morte prematura ci ha tutti addolorati. È grazie ai suoi eccellenti appunti che questo manoscritto ha potuto vedere la luce.

J.W.M.
Princeton, New Jersey
Marzo 1965

1 Varietà lisce e applicazioni lisce

Cominciamo con il precisare alcuni termini. Indichiamo con $\mathbb{R}^k$ lo spazio euclideo di dimensione k. Un suo punto x è dunque una k-upla $(x_1, \dots, x_k)$ di numeri reali.

Siano $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^\ell$ aperti. Un'applicazione f di U in V (in simboli, $f : U \to V$) si dice *liscia* se tutte le derivate parziali $\partial^n f / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}$ esistono e sono continue.

Più in generale, siano $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ sottoinsiemi arbitrari di spazi euclidei. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *liscia* se per ogni $x \in X$ esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ contenente x e un'applicazione liscia $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ che coincide con f su tutto $U \cap X$.

Si osservi che, se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono lisce, anche la composta $g \circ f : X \to Z$ è liscia. L'identità di un insieme X è sempre liscia.

Definizione. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *diffeomorfismo* se è un omeomorfismo di X su Y e se tanto f quanto f^{-1} sono lisce.

Possiamo ora farci una prima idea dell'oggetto della *topologia differenziale*. Essa studia le proprietà di un insieme $X \subset \mathbb{R}^k$ invarianti per diffeomorfismi. Non intendiamo tuttavia occuparci di insiemi X del tutto arbitrari. La definizione seguente ne individua una classe particolarmente interessante e utile.

Definizione. Un sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^k$ si dice *varietà liscia di dimensione m* se ogni $x \in M$ possiede un intorno $W \cap M$ diffeomorfo a un aperto U dello spazio euclideo $\mathbb{R}^m$.

Ogni particolare diffeomorfismo $g : U \to W \cap M$ si chiama *parametrizzazione* della regione $W \cap M$. Il diffeomorfismo inverso $W \cap M \to U$ si chiama *sistema di coordinate* su $W \cap M$.

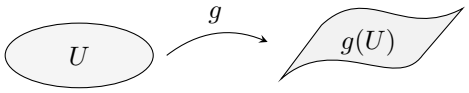


Figura 1. Una parametrizzazione identifica un aperto con una regione della varietà.

Talvolta avremo bisogno di considerare varietà di dimensione zero. Per definizione, M è una varietà di dimensione zero se ogni $x \in M$ possiede un intorno $W \cap M$ costituito dal solo punto x.

Esempi. La sfera unitaria S^2, costituita dai punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, è una varietà liscia di dimensione due. Infatti il diffeomorfismo

$$(x, y) \longmapsto \big(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\big), \qquad x^2 + y^2 < 1,$$

parametrizza la regione $z > 0$ di S^2. Scambiando i ruoli di x, y, z e cambiando i segni delle variabili, si ottengono parametrizzazioni analoghe per le regioni $x > 0$, $y > 0$, $x < 0$, $y < 0$ e $z < 0$. Poiché queste regioni, insieme alla prima, ricoprono S^2, ne segue che S^2 è una varietà liscia.

Più in generale, la sfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, formata dalle n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ per le quali $\sum x_i^2 = 1$, è una varietà liscia di dimensione $n - 1$. Per esempio, $S^0 \subset \mathbb{R}$ è una varietà costituita da due soli punti.

Un esempio di varietà liscia dal comportamento un po' meno consueto è l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \neq 0$ e $y = \sin(1/x)$.

Spazi tangenti e differenziali

Per definire il differenziale df_x di un'applicazione liscia $f : M \to N$ tra varietà lisce, associamo anzitutto a ogni punto $x \in M \subset \mathbb{R}^k$ un sottospazio vettoriale $T_xM \subset \mathbb{R}^k$ di dimensione m, detto *spazio tangente a M in x*. Il differenziale df_x sarà un'applicazione lineare da T_xM a T_yN, dove $y = f(x)$. Gli elementi di T_xM si chiamano *vettori tangenti* a M in x.

Intuitivamente, si pensi al piano affine di dimensione m che meglio approssima M in prossimità di x. Lo spazio T_xM è il piano parallelo a questo passante per l'origine. Analogamente si consideri l'applicazione affine dal piano tangente in x al piano tangente in y che meglio approssima f. Trasportando entrambi i piani nell'origine, si ottiene df_x.

Prima di dare la definizione vera e propria dobbiamo esaminare il caso particolare delle applicazioni tra aperti. Per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ poniamo $T_xU = \mathbb{R}^k$. Per un'applicazione liscia $f : U \to V$ definiamo il differenziale $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ mediante la formula

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}, \qquad x \in U, \quad h \in \mathbb{R}^k.$$

È chiaro che $df_x(h)$ dipende linearmente da h. Più precisamente, df_x è l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $\ell \times k$ delle derivate parziali prime, valutate in x.

Ricordiamo due proprietà fondamentali del differenziale.

1. *Regola della catena.* Se $f : U \to V$ e $g : V \to W$ sono lisce e $f(x) = y$, allora

   $$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

   In altre parole, a ogni triangolo commutativo di applicazioni lisce tra aperti di $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^m$ corrisponde un triangolo commutativo di applicazioni lineari.

2. Se I è l'identità di U, allora dI_x è l'identità di $\mathbb{R}^k$. Più in generale, se $U \subset U'$ sono aperti e $i : U \hookrightarrow U'$ è l'inclusione, anche di_x è l'identità di $\mathbb{R}^k$.

3. Osserviamo inoltre che, se $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ è lineare, allora $dL_x = L$.

Dalle prime due proprietà si deduce subito il risultato seguente.

Proposizione. *Se f è un diffeomorfismo tra gli aperti $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^\ell$, allora $k = \ell$ e l'applicazione lineare $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ è invertibile.*

Dimostrazione. La composta $f^{-1} \circ f$ è l'identità di U. Pertanto $d(f^{-1})_y \circ df_x$ è l'identità di $\mathbb{R}^k$. Analogamente $df_x \circ d(f^{-1})_y$ è l'identità di $\mathbb{R}^\ell$. Dunque df_x ammette un'inversa bilatera, da cui $k = \ell$.

Vale anche un inverso parziale di questa proposizione. Sia $f : U \to \mathbb{R}^k$ liscia, con U aperto in $\mathbb{R}^k$.

Teorema della funzione inversa. *Se $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è invertibile, f applica diffeomorficamente ogni intorno aperto U' di x sufficientemente piccolo sull'aperto $f(U')$.*

Si vedano Apostol [2, p. 144] o Dieudonné [7, p. 268]. Si osservi che f può non essere globalmente iniettiva anche quando df_x è invertibile in ogni punto. Un esempio istruttivo è l'applicazione esponenziale del piano complesso in sé.

Definiamo ora lo spazio tangente T_xM per una varietà liscia arbitraria $M \subset \mathbb{R}^k$. Scegliamo una parametrizzazione $g : U \to M \subset \mathbb{R}^k$ di un intorno $g(U)$ di x in M, con

$g(u) = x$. Qui U è aperto in $\mathbb{R}^m$. Considerando g come applicazione di U in $\mathbb{R}^k$, possiamo formarne il differenziale $dg_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Poniamo

$$T_xM = dg_u(\mathbb{R}^m).$$

Dobbiamo provare che il risultato è indipendente dalla parametrizzazione scelta. Sia $h : V \to M \subset \mathbb{R}^k$ una seconda parametrizzazione di un intorno $h(V)$ di x e sia $v = h^{-1}(x)$. Allora $h^{-1} \circ g$ applica diffeomorficamente un intorno U_1 di u su un intorno V_1 di v. Differenziando l'identità $g = h \circ (h^{-1} \circ g)$ si ottiene

$$dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u.$$

Poiché l'ultimo fattore è un isomorfismo, $\mathrm{Im}(dg_u) = \mathrm{Im}(dh_v)$. Lo spazio T_xM è dunque ben definito.

Dimostriamo che T_xM ha dimensione m. Poiché $g^{-1} : g(U) \to U$ è liscia, esistono un aperto W contenente x e un'applicazione liscia $F : W \to \mathbb{R}^m$ che coincide con g^{-1} su $W \cap g(U)$. Posto $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, la composta $F \circ g$ è l'inclusione di U_0 in $\mathbb{R}^m$. Ne segue che $dF_x \circ dg_u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$. Pertanto dg_u ha rango m e la sua immagine T_xM ha dimensione m.

Consideriamo ora due varietà lisce $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^\ell$ e un'applicazione liscia $f : M \to N$, con $f(x) = y$. Per definire $df_x : T_xM \to T_yN$, scegliamo un aperto W contenente x e un'applicazione liscia $F : W \to \mathbb{R}^\ell$ che coincida con f su $W \cap M$. Per ogni $v \in T_xM$ poniamo $df_x(v) = dF_x(v)$.

Per giustificare la definizione dobbiamo verificare che $dF_x(v)$ appartenga a T_yN e sia indipendente dalla scelta di F. Siano $g : U \to M$ e $h : V \to N$ parametrizzazioni di intorni di x e y. Restringendo U, possiamo supporre che $g(U) \subset W$ e $f(g(U)) \subset h(V)$. L'applicazione $h^{-1} \circ f \circ g : U \to V$ è dunque ben definita e liscia. Dall'identità

$$F \circ g = h \circ (h^{-1} \circ f \circ g)$$

segue, ponendo $u = g^{-1}(x)$ e $v = h^{-1}(y)$,

$$dF_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u.$$

Si vede subito che dF_x manda $T_xM = \mathrm{Im}(dg_u)$ in $T_yN = \mathrm{Im}(dh_v)$. Inoltre l'applicazione così ottenuta è indipendente da F, poiché possiamo scriverla nella forma

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1},$$

dove dg_u è considerato come isomorfismo sulla propria immagine. Abbiamo così provato che $df_x : T_xM \to T_yN$ è un'applicazione lineare ben definita.

Anche in questo caso il differenziale gode di due proprietà fondamentali.

1. *Regola della catena.* Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ sono lisce e $f(x) = y$, allora $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.

2. Se I è l'identità di M, allora dI_x è l'identità di T_xM. Più in generale, se $M \subset N$ e i è l'inclusione, allora $T_xM \subset T_xN$ e di_x è la corrispondente inclusione.

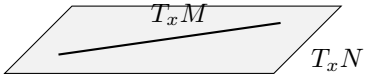


Figura 2. Lo spazio tangente alla sottovarietà è contenuto nello spazio tangente ambiente.

Le dimostrazioni sono immediate. Come prima, da queste due proprietà segue la proposizione seguente.

Proposizione. *Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, allora $df_x : T_xM \to T_yN$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare M e N hanno la stessa dimensione.*

Valori regolari

Sia $f : M \to N$ un'applicazione liscia tra varietà della stessa dimensione.[1] Diciamo che $x \in M$ è un *punto regolare* di f se df_x è invertibile. In questo caso il teorema della funzione inversa assicura che f applica diffeomorficamente un intorno di x in M su un aperto di N. Un punto $y \in N$ si dice *valore regolare* se $f^{-1}(y)$ contiene soltanto punti regolari.

Se df_x è singolare, x si dice *punto critico* di f e la sua immagine $f(x)$ si dice *valore critico*. Ogni $y \in N$ è dunque un valore critico o un valore regolare a seconda che $f^{-1}(y)$ contenga o meno un punto critico.

Osserviamo che, se M è compatta e $y \in N$ è un valore regolare, allora $f^{-1}(y)$ è un insieme finito, eventualmente vuoto. Infatti $f^{-1}(y)$ è compatto, essendo un chiuso dello spazio compatto M, ed è discreto, poiché f è iniettiva in un intorno di ciascun $x \in f^{-1}(y)$.

Per $f : M \to N$ liscia, con M compatta, indichiamo con $\#f^{-1}(y)$ il numero dei punti della fibra di un valore regolare y. La prima osservazione è che tale numero è localmente costante in funzione di y, al variare di y tra i valori regolari. Esiste cioè un intorno $V \subset N$ di y tale che $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$ per ogni $y' \in V$. Siano infatti $x_1, \dots, x_k$ i punti di $f^{-1}(y)$ e scegliamo intorni a due a due disgiunti $U_1, \dots, U_k$ che f applichi diffeomorficamente su intorni $V_1, \dots, V_k$ in N. Possiamo allora prendere

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i \;\setminus\; f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i\right).$$

Il teorema fondamentale dell'algebra

Come applicazione di queste nozioni dimostriamo il teorema fondamentale dell'algebra. *Ogni polinomio complesso non costante $P(z)$ ha almeno uno zero.*

Per la dimostrazione occorre anzitutto passare dal piano complesso a una varietà compatta. Consideriamo la sfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e la proiezione stereografica $h_+ : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ dal polo nord. Identifichiamo il piano equatoriale con il piano complesso. All'applicazione polinomiale P di questo piano in sé corrisponde un'applicazione $f : S^2 \to S^2$ data da

$$f(x) = h_+^{-1} P h_+(x) \quad (x \neq (0,0,1)), \qquad f(0,0,1) = (0,0,1).$$

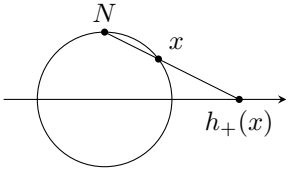


Figura 3. Proiezione stereografica dal polo nord, in una sezione meridiana.

È noto che l'applicazione così ottenuta è liscia anche in un intorno del polo nord. Per verificarlo introduciamo la proiezione stereografica h_- dal polo sud $(0,0,-1)$ e poniamo $Q = h_- f h_-^{-1}$. Per geometria elementare,

$$h_+ h_-^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

[1] Questa restrizione viene eliminata nel §2.

Se $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, con $a_0 \neq 0$, un breve calcolo dà

$$Q(z) = \frac{z^n}{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n}.$$

Dunque Q è liscia in un intorno di 0 e di conseguenza $f = h_-^{-1} Q h_-$ è liscia in un intorno del polo nord.

Osserviamo ora che f possiede soltanto un numero finito di punti critici. Infatti P è un diffeomorfismo locale tranne che negli zeri del polinomio derivato $P'(z)$, i quali sono in numero finito perché P' non è identicamente nullo. L'insieme dei valori regolari di f, ottenuto dalla sfera togliendo un numero finito di punti, è pertanto connesso. La funzione localmente costante $\#f^{-1}(y)$ è quindi costante su tale insieme. Poiché non può essere identicamente nulla, non si annulla in alcun valore regolare. Ne segue che f è suriettiva e che il polinomio P ha uno zero.

2 Il teorema di Sard e Brown

In generale sarebbe eccessivo sperare che l'insieme dei valori critici di un'applicazione liscia fosse finito. Questo insieme è tuttavia ńpiccoloż, nel senso precisato dal teorema seguente, dimostrato nel 1942 da A. Sard sulla scorta di precedenti lavori di A. P. Morse [30, 24].

Teorema. *Sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ liscia, con U aperto in $\mathbb{R}^m$, e sia $C = \{x \in U : \text{rango}\, df_x < n\}$. Allora $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ ha misura di Lebesgue nulla.*

In altri termini, dato $\epsilon > 0$, si può ricoprire $f(C)$ con una successione di cubi di $\mathbb{R}^n$ la somma dei cui volumi n-dimensionali sia minore di ϵ. Poiché un insieme di misura nulla non può contenere un aperto non vuoto, il complementare $\mathbb{R}^n \setminus f(C)$ è denso in $\mathbb{R}^n$. Quest'ultima affermazione fu dimostrata da Arthur B. Brown nel 1935 e riscoperta da Dubovickii nel 1953 e da Thom nel 1954 [5, 8, 36].

La dimostrazione sarà data nel §3. È essenziale che f ammetta derivate di ordine sufficientemente elevato (cfr. Whitney [38]). Ci interesserà soprattutto il caso $m \geq n$. Se $m < n$ si ha evidentemente $C = U$, sicché il teorema afferma semplicemente che $f(U)$ ha misura nulla.

Consideriamo, più in generale, un'applicazione liscia $f : M \to N$ tra varietà rispettivamente di dimensione m e n. Sia C l'insieme degli $x \in M$ nei quali $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ ha rango minore di n, ossia non è suriettivo. Diremo che C è l'insieme dei *punti critici*, $f(C)$ l'insieme dei *valori critici* e $N \setminus f(C)$ l'insieme dei *valori regolari* di f. Per $m = n$ ritroviamo le definizioni precedenti. Poiché M si può ricoprire con una famiglia numerabile di intorni diffeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^m$, otteniamo il seguente risultato.

Corollario (A. B. Brown). *L'insieme dei valori regolari di un'applicazione liscia $f : M \to N$ è denso in N.*

Per trarre profitto da questo corollario ci occorrerà il lemma seguente.

Lemma 1. *Sia $f : M \to N$ liscia tra varietà di dimensioni $m \geq n$. Se $y \in N$ è un valore regolare, $f^{-1}(y) \subset M$ è una varietà liscia di dimensione $m - n$.*

Dimostrazione. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Poiché y è regolare, df_x manda T_xM su T_yN. Il suo nucleo $K \subset T_xM$ ha perciò dimensione $m - n$. Se $M \subset \mathbb{R}^k$, scegliamo un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-n}$ la cui restrizione a K sia invertibile. Definiamo $F : M \to N \times \mathbb{R}^{m-n}$ ponendo $F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$. Il suo differenziale è dato da

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)).$$

Dunque dF_x è invertibile. Pertanto F applica diffeomorficamente un intorno U di x su un intorno V di $(y, L(x))$. Alla fibra $f^{-1}(y)$ corrisponde il piano $\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Più precisamente, F applica diffeomorficamente $f^{-1}(y) \cap U$ su $(\{y\} \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$. Ne segue la tesi.

Otteniamo così una facile dimostrazione del fatto che la sfera unitaria S^{m-1} è una varietà liscia. Consideriamo $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_m^2$. Ogni $y \neq 0$ è un valore regolare e la varietà liscia $f^{-1}(1)$ è precisamente la sfera unitaria.

Se M' è una varietà contenuta in M, abbiamo già osservato che T_xM' è un sottospazio di T_xM per $x \in M'$. Il suo complemento ortogonale in T_xM ha dimensione $m - m'$ e si dice *spazio dei vettori normali a M' in M nel punto x*. Consideriamo in particolare $M' = f^{-1}(y)$ per un valore regolare y di $f : M \to N$.

Lemma 2. *Il nucleo di $df_x : T_xM \to T_yN$ coincide con lo spazio tangente T_xM' della sottovarietà $M' = f^{-1}(y)$. Pertanto df_x manda il complemento ortogonale di T_xM' isomorficamente su T_yN.*

Dimostrazione. La composta dell'inclusione $M' \hookrightarrow M$ con f è costante e ha valore y. Differenziando vediamo che df_x si annulla su T_xM'. Il confronto delle dimensioni mostra che df_x manda lo spazio dei vettori normali a M' isomorficamente su T_yN.

Varietà con bordo

I lemmi precedenti si possono precisare in modo da applicarli ad applicazioni definite su una varietà liscia con bordo. Consideriamo anzitutto il semispazio chiuso

$$H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}.$$

Per bordo ∂H^m intendiamo l'iperpiano $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

Definizione. Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^k$ è una *varietà liscia di dimensione m con bordo* se ogni $x \in X$ ha un intorno $U \cap X$ diffeomorfo a un aperto relativo $V \cap H^m$ di H^m. Il *bordo* ∂X è formato dai punti di X che, in un tale diffeomorfismo, corrispondono a punti di ∂H^m.

Non è difficile provare che ∂X è ben definito ed è una varietà liscia di dimensione $m-1$. L'interno $X \setminus \partial X$ è una varietà liscia di dimensione m. Lo spazio tangente T_xX si definisce come nel §1 ed è uno spazio vettoriale di dimensione m anche quando x appartiene al bordo.

Ecco un modo di ottenere esempi. Sia M una varietà senza bordo e sia 0 un valore regolare di $g : M \to \mathbb{R}$.

Lemma 3. *L'insieme degli $x \in M$ tali che $g(x) \geq 0$ è una varietà liscia con bordo $g^{-1}(0)$.*

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del lemma 1. Per esempio, il disco unitario D^m, costituito dai punti di $\mathbb{R}^m$ per i quali $1 - \sum x_i^2 \geq 0$, è una varietà liscia con bordo S^{m-1}.

Consideriamo ora un'applicazione liscia $f : X \to N$ da una varietà con bordo di dimensione m a una varietà di dimensione n, con $m > n$.

Lemma 4. *Se $y \in N$ è un valore regolare sia per f sia per $f|_{\partial X}$, allora $f^{-1}(y) \subset X$ è una varietà liscia di dimensione $m - n$ con bordo. Inoltre $\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial X$.*

Dimostrazione. Poiché l'enunciato è locale, basta considerare un'applicazione $f : H^m \to \mathbb{R}^n$ con valore regolare y. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Se x è interno, come prima $f^{-1}(y)$ è una varietà liscia in un intorno di x.

Supponiamo che x appartenga al bordo. Scegliamo un'applicazione liscia $g : U \to \mathbb{R}^n$ definita in un intorno di x in $\mathbb{R}^m$ e coincidente con f su $U \cap H^m$. Restringendo U possiamo supporre che g sia priva di punti critici. Dunque $g^{-1}(y)$ è una varietà liscia di dimensione $m - n$. Sia $\pi : g^{-1}(y) \to \mathbb{R}$ la proiezione sull'ultima coordinata. Affermiamo che 0 è un suo valore regolare. Infatti, in ogni $x \in \pi^{-1}(0)$ lo spazio tangente a $g^{-1}(y)$ è il nucleo di $dg_x = df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. L'ipotesi che $f|_{\partial H^m}$ sia regolare in x garantisce che tale nucleo non sia interamente contenuto in $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$.

Ora $g^{-1}(y) \cap H^m = f^{-1}(y) \cap U$ è l'insieme dei punti di $g^{-1}(y)$ nei quali $\pi \geq 0$. Per il lemma 3 è dunque una varietà liscia con bordo $\pi^{-1}(0)$. Ciò conclude la dimostrazione.

Il teorema del punto fisso di Brouwer

Applichiamo questo risultato al lemma da cui ricaveremo il classico teorema del punto fisso di Brouwer. Sia X una varietà compatta con bordo.

Lemma 5. *Non esiste alcuna applicazione liscia $f : X \to \partial X$ che lasci fisso ogni punto di ∂X.*

Dimostrazione (secondo M. Hirsch). Supponiamo che una tale f esista e sia $y \in \partial X$ un suo valore regolare. Poiché y è certamente regolare anche per l'identità $f|_{\partial X}$, la fibra $f^{-1}(y)$ è una varietà liscia unidimensionale il cui bordo consiste del solo punto $f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}$. Ma $f^{-1}(y)$ è anche compatta, e le sole varietà compatte unidimensionali sono le unioni disgiunte finite di circonferenze e segmenti, come si dimostra nell'appendice. Il bordo deve perciò avere un numero pari di punti. La contraddizione dimostra il lemma.

In particolare il disco unitario D^n è una varietà compatta il cui bordo è la sfera unitaria S^{n-1}. Abbiamo così dimostrato che l'identità di S^{n-1} non si può estendere a un'applicazione liscia $D^n \to S^{n-1}$.

Lemma 6. *Ogni applicazione liscia $g : D^n \to D^n$ ha un punto fisso, ossia un punto x tale che $g(x) = x$.*

Dimostrazione. Supponiamo che g non abbia punti fissi. Per ogni $x \in D^n$ sia $f(x)$ l'intersezione con S^{n-1} della semiretta uscente da $g(x)$ e passante per x, prolungata oltre x. Si ottiene così un'applicazione liscia $f : D^n \to S^{n-1}$ che fissa ogni punto della sfera, in contraddizione con il lemma 5. Per verificare che f è liscia basta il calcolo esplicito $f(x) = x + tu$, dove

$$u = \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|}, \qquad t = -x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2}.$$

Il radicando è strettamente positivo. Qui e nel seguito $\|x\|$ indica la lunghezza euclidea $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

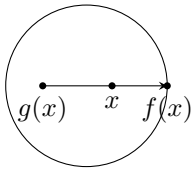


Figura 4. La semiretta da $g(x)$ attraverso x individua $f(x)$ sul bordo.

Teorema del punto fisso di Brouwer. *Ogni applicazione continua $G : D^n \to D^n$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Ricondurremo il teorema al lemma approssimando G con un'applicazione liscia. Dato $\epsilon > 0$, per il teorema di approssimazione di Weierstrass (si veda ad esempio Dieudonné [7, p. 133]) esiste una funzione polinomiale $P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|P_1(x) - G(x)\| < \epsilon$ su D^n. Poiché P_1 potrebbe mandare alcuni punti fuori dal disco, poniamo $P(x) = P_1(x)/(1 + \epsilon)$. Allora $P(D^n) \subset D^n$ e $\|P(x) - G(x)\| < 2\epsilon$ su D^n.

Se $G(x) \neq x$ per ogni x, la funzione continua $\|G(x) - x\|$ assume su D^n un minimo $\mu > 0$. Scegliendo $P : D^n \to D^n$ come sopra in modo che $\|P(x) - G(x)\| < \mu$ ovunque, si

ha $P(x) \neq x$ per ogni x. Avremmo così un'applicazione liscia del disco in sé senza punti fissi, contro il lemma 6.

Il procedimento qui impiegato si presta spesso a situazioni più generali. Per dimostrare una proprietà delle applicazioni continue si comincia con lo stabilirla per quelle lisce e si cerca poi di passare al caso continuo mediante un teorema di approssimazione (cfr. §8, problema 4).

3 Dimostrazione del teorema di Sard

La dimostrazione segue quella di Pontrjagin [28]. I dettagli si semplificano un poco grazie all'ipotesi che f sia infinitamente differenziabile. Ricordiamo l'enunciato.

Teorema di Sard. *Sia $f : U \to \mathbb{R}^p$ un'applicazione liscia, con U aperto in $\mathbb{R}^n$, e sia C l'insieme dei punti critici, ossia degli $x \in U$ nei quali* rango $df_x < p$. *Allora $f(C)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^p$.*

I casi $n \leq p$ sono relativamente semplici (cfr. de Rham [29, p. 10]). Daremo tuttavia una dimostrazione uniforme, che li fa apparire altrettanto difficili degli altri.

Procediamo per induzione su n. L'enunciato ha senso per $n \geq 0$ e $p \geq 1$, intendendo per $\mathbb{R}^0$ lo spazio costituito da un solo punto. Per $n = 0$ il teorema è evidente.

Indichiamo con $C_1 \subset C$ l'insieme degli $x \in U$ per i quali $df_x = 0$. Più in generale sia C_i l'insieme dei punti nei quali si annullano tutte le derivate parziali di f di ordine compreso fra 1 e i. Si ottiene una successione decrescente di chiusi relativi

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots .$$

La dimostrazione si articola in tre passi. Proveremo che hanno misura nulla, successivamente, $f(C \setminus C_1)$, ciascuno degli insiemi $f(C_i \setminus C_{i+1})$ per $i \geq 1$, e infine $f(C_k)$ per k abbastanza grande. Se f è analitica reale, l'intersezione dei C_i è vuota, a meno che f sia costante su un'intera componente di U. In questo caso bastano i primi due passi.

Primo passo. È forse il più difficile. Possiamo supporre $p \geq 2$, poiché per $p = 1$ si ha $C = C_1$. Ci servirà il noto teorema di Fubini, secondo cui un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^p = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$ ha misura nulla se interseca ogni iperpiano $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ in un insieme di misura $(p-1)$-dimensionale nulla. Per una dimostrazione elementare, e per una diversa dimostrazione del teorema di Sard, si veda Sternberg [35, pp. 51–52]. Sternberg suppone A compatto, ma il caso generale si deduce facilmente da questo caso particolare.

Per ogni $x \in C \setminus C_1$ troveremo un intorno aperto V tale che $f(V \cap C)$ abbia misura nulla. Poiché una famiglia numerabile di tali intorni ricopre $C \setminus C_1$, ciò dimostrerà l'asserto.

Poiché $x \notin C_1$, una delle derivate parziali, diciamo $\partial f_1/\partial x_1$, è diversa da zero in x. Poniamo $h(\xi) = (f_1(\xi), \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Il differenziale dh_x è invertibile, perciò h applica diffeomorficamente un intorno V di x su un aperto V'. Sia $g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^p$. L'insieme C' dei punti critici di g è precisamente $h(V \cap C)$ e dunque $g(C') = f(V \cap C)$.

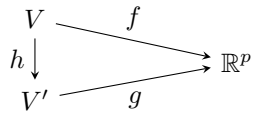


Figura 5. Il cambio di coordinate rende la prima componente di g uguale alla prima coordinata.

Il punto $g(t, x_2, \ldots, x_n)$ appartiene all'iperpiano $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. L'applicazione g manda dunque iperpiani in iperpiani. Sia g' la sua restrizione da $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ a $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Un punto della sezione è critico per g' se e solo se è critico per g. Infatti la matrice delle derivate prime di g ha la forma a blocchi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & Dg' \end{pmatrix}.$$

Per l'ipotesi induttiva i valori critici di g' hanno misura nulla in $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Quindi i valori critici di g intersecano ogni iperpiano di questo tipo in un insieme di misura nulla. L'insieme $g(C')$ è misurabile, perché si può esprimere come unione numerabile di compatti. Per Fubini, $g(C') = f(V \cap C)$ ha misura nulla. Ciò conclude il primo passo.

Secondo passo. Per ogni $x \in C_k \setminus C_{k+1}$ esiste una derivata di ordine $k+1$ che non si annulla in x. Possiamo dunque scegliere una derivata parziale w di ordine k di una componente di f che si annulla in x e per la quale, rinumerando le coordinate, $\partial w/\partial x_1 \neq 0$ in x. Allora $h(\xi) = (w(\xi), \xi_2, \dots, \xi_n)$ manda diffeomorficamente un intorno V di x su un aperto V', e manda $C_k \cap V$ nell'iperpiano $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Consideriamo di nuovo $g = f \circ h^{-1}$ e indichiamo con $\bar{g}$ la sua restrizione a $V' \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$. Per induzione, l'insieme dei valori critici di $\bar{g}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^p$. Ogni punto di $h(C_k \cap V)$ è critico per $\bar{g}$, poiché vi si annullano tutte le derivate fino all'ordine k. Ne segue che $\bar{g}(h(C_k \cap V)) = f(C_k \cap V)$ ha misura nulla. Una famiglia numerabile di intorni V di questo tipo ricopre $C_k \setminus C_{k+1}$, e dunque anche $f(C_k \setminus C_{k+1})$ ha misura nulla.

Terzo passo. Sia $I \subset U$ un cubo chiuso di lato δ. Proveremo che, per $k > n/p - 1$, l'insieme $f(C_k \cap I)$ ha misura nulla. Poiché C_k può essere ricoperto da un'infinità numerabile di tali cubi, ne seguirà che $f(C_k)$ ha misura nulla.

Dal teorema di Taylor, dalla compattezza di I e dalla definizione di C_k segue che, per $x \in C_k \cap I$ e $x + h \in I$,

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h), \qquad \|R(x,h)\| \leq c\|h\|^{k+1},$$

dove c dipende solo da f e da I. Suddividiamo I in r^n cubi di lato δ/r. Se un cubo I_1 della suddivisione contiene un punto x di C_k, ogni suo punto si scrive nella forma $x + h$, con $\|h\| \leq \sqrt{n}\,\delta/r$. Pertanto $f(I_1)$ è contenuto nel cubo di centro $f(x)$ e lato a/r^{k+1}, dove $a = 2c(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$. Ne segue che $f(C_k \cap I)$ è contenuto nell'unione di al più r^n cubi di volume complessivo

$$V \leq r^n (a/r^{k+1})^p = a^p r^{\,n-p(k+1)}.$$

Se $k+1 > n/p$, questo maggiorante tende a zero per $r \to \infty$. Dunque $f(C_k \cap I)$ ha misura nulla. La dimostrazione del teorema di Sard è completa.

4 Il grado modulo 2 di un'applicazione

Consideriamo un'applicazione liscia $f : S^n \to S^n$. Ricordiamo che, se y è un valore regolare, $\#f^{-1}(y)$ indica il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = y$. Dimostreremo che la classe di resto modulo 2 di tale numero è indipendente dalla scelta di y. Essa si chiama *grado modulo* 2 di f. La stessa definizione si applica a una qualsiasi applicazione liscia $f : M \to N$ tra varietà della stessa dimensione, con M compatta senza bordo e N connessa. Possiamo anche supporre che N sia compatta e senza bordo, poiché altrimenti il grado modulo 2 sarebbe necessariamente nullo. Per la dimostrazione introduciamo due nuovi concetti.

Omotopia liscia e isotopia liscia

Per $X \subset \mathbb{R}^k$, indichiamo con $X \times [0,1]$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{k+1}$ costituito dalle coppie (x,t) con $x \in X$ e $0 \le t \le 1$. Se M è una varietà liscia senza bordo, $M \times [0,1]$ è una varietà liscia delimitata da due copie di M. Se M ha bordo, i suoi punti di bordo danno luogo a spigoli del prodotto.

Due applicazioni $f, g : X \to Y$ si dicono *lisciamente omotope*, e si scrive $f \sim g$, se esiste un'applicazione liscia $F : X \times [0,1] \to Y$ con $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ per ogni $x \in X$. Una tale F si chiama *omotopia liscia* tra f e g.

L'omotopia liscia è una relazione di equivalenza. Per verificarne la transitività ci serviamo di una funzione liscia $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ che valga 0 per $0 \le t \le 1/3$ e 1 per $2/3 \le t \le 1$. Possiamo per esempio prendere

$$\varphi(t) = \frac{\lambda(t-1/3)}{\lambda(t-1/3) + \lambda(2/3-t)}, \qquad \lambda(s) = \begin{cases} 0 & s \le 0, \\ e^{-1/s} & s > 0. \end{cases}$$

Data un'omotopia liscia F tra f e g, la formula $G(x,t) = F(x, \varphi(t))$ definisce un'omotopia liscia uguale a $f(x)$ nel primo terzo dell'intervallo e a $g(x)$ nell'ultimo terzo. Se $f \sim g$ e $g \sim h$, grazie a questa costruzione è facile mostrare che $f \sim h$.

Se f e g sono diffeomorfismi di X su Y, possiamo definire anche un'*isotopia liscia* tra loro. Anche in questo caso si ottiene una relazione di equivalenza.

Definizione. Il diffeomorfismo f si dice *lisciamente isotopo* a g se esiste un'omotopia liscia $F : X \times [0,1] \to Y$ da f a g tale che, per ogni $t \in [0,1]$, l'applicazione $x \mapsto F(x,t)$ sia un diffeomorfismo di X su Y.

Vedremo che il grado modulo 2 dipende soltanto dalla classe di omotopia liscia.

Lemma di omotopia. *Siano $f, g : M \to N$ applicazioni lisciamente omotope tra varietà della stessa dimensione, con M compatta e senza bordo. Se $y \in N$ è un valore regolare comune a f e g, allora*

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Dimostrazione. Sia $F : M \times [0,1] \to N$ un'omotopia liscia tra f e g. Supponiamo dapprima che y sia regolare anche per F. Allora $F^{-1}(y)$ è una varietà compatta unidimensionale il cui bordo è

$$(f^{-1}(y) \times \{0\}) \ \cup \ (g^{-1}(y) \times \{1\}).$$

Il numero dei punti di bordo è dunque $\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y)$. Dal §2 sappiamo che una varietà compatta unidimensionale ha sempre un numero pari di punti di bordo. La somma è quindi pari, come si voleva.

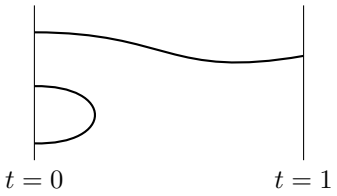


Figura 6. Gli estremi degli archi nelle due fibre hanno la stessa parità.

Supponiamo ora che y non sia un valore regolare di F. Ricordiamo dal §1 che il numero delle controimmagini di un valore regolare è localmente costante. Esistono dunque un intorno V_1 di y costituito da valori regolari di f, sul quale $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$, e un analogo intorno V_2 per g. Scegliamo in $V_1 \cap V_2$ un valore regolare z di F. Ne segue che

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Ci servirà anche il risultato seguente.

Lemma di omogeneità. *Siano y, z due punti interni arbitrari di una varietà liscia connessa N. Esiste un diffeomorfismo $h : N \to N$, lisciamente isotopo all'identità, che manda y in z.*

Nel caso particolare $N = S^n$ basta scegliere la rotazione che manda y in z e lascia fissi i vettori ortogonali al piano della rotazione.

Nel caso generale costruiamo anzitutto un'isotopia liscia di $\mathbb{R}^n$ in sé che lasci fissi tutti i punti esterni alla palla unitaria e trasporti l'origine in un punto prescritto della palla aperta. Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liscia, strettamente positiva per $\|x\| < 1$ e nulla per $\|x\| \geq 1$. Per esempio possiamo prendere $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$, con λ definita sopra. Fissato un vettore unitario $c \in S^{n-1}$, consideriamo il sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un'unica soluzione, definita per ogni tempo reale, con dato iniziale $x(0) = x$ (cfr. [22, §2.4]). La indichiamo con $F_t(x)$. Essa dipende in modo liscio da t e x, soddisfa $F_0(x) = x$ e verifica $F_{s+t} = F_s \circ F_t$. Ciascuna F_t è dunque un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ su sé stesso. Facendo variare il tempo otteniamo un'isotopia liscia dall'identità che fissa ogni punto esterno alla palla unitaria. Scegliendo opportunamente c e t, possiamo portare l'origine in un qualunque punto della palla aperta.

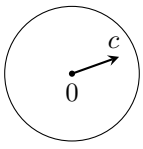


Figura 7. Il flusso sposta l'origine lungo la direzione c e fissa l'esterno della palla.

Torniamo a N. Chiamiamo ńisotopiż due punti se esiste un'isotopia liscia dell'identità che trasporti l'uno nell'altro. È una relazione di equivalenza. Ogni punto interno y ha un intorno diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, e la costruzione precedente mostra che ogni punto abbastanza vicino a y è isotopo a y. L'interno di N è pertanto suddiviso in classi di isotopia disgiunte e aperte. Poiché l'interno è connesso, vi è una sola classe. Il lemma è dimostrato.

Possiamo ora provare il risultato principale del paragrafo. Supponiamo che M sia compatta e senza bordo, N connessa e $f : M \to N$ liscia, sempre con $\dim M = \dim N$.

Teorema. *Se y e z sono valori regolari di f, si ha $\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod 2$. La comune classe di resto, detta grado modulo 2 di f, dipende soltanto dalla classe di omotopia liscia di f.*

Dimostrazione. Dati y e z regolari, scegliamo un diffeomorfismo $h : N \to N$ isotopo all'identità che mandi y in z. Allora z è regolare per $h \circ f$. Poiché $h \circ f$ è omotopa a f, per il lemma di omotopia

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod 2.$$

Ma $(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y)$, il che dimostra la prima affermazione. Indichiamo la comune classe di resto con $\deg_2(f)$. Se f e g sono lisciamente omotope, per il teorema di Sard hanno un valore regolare comune y. La congruenza

$$\deg_2(f) \equiv \#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \equiv \deg_2(g) \pmod 2$$

conclude la dimostrazione.

Esempi. Un'applicazione costante $c : M \to M$ ha grado pari, mentre l'identità di M ha grado dispari. Dunque l'identità di una varietà compatta senza bordo di dimensione positiva non è omotopa a una costante. Per $M = S^n$ ritroviamo l'impossibilità di un'applicazione liscia $f : D^{n+1} \to S^n$ che fissi la sfera punto per punto. In altre parole, la sfera non è un retratto liscio del disco (cfr. §2, lemma 5). Una tale applicazione fornirebbe infatti, tramite $F(x,t) = f(tx)$, un'omotopia liscia tra una costante e l'identità.

5 Varietà orientate

Per definire il grado come intero, anziché come classe di resto modulo due, occorre introdurre le orientazioni.

Definizioni. Un'*orientazione* di uno spazio vettoriale reale di dimensione finita è una classe di equivalenza di basi ordinate. Le basi $(b_1, \dots, b_n)$ e $(b'_1, \dots, b'_n)$, con $b'_i = \sum_j a_{ji} b_j$, determinano la stessa orientazione se $\det(a_{ji}) > 0$ e orientazioni opposte se $\det(a_{ji}) < 0$. Ogni spazio vettoriale di dimensione positiva ammette pertanto esattamente due orientazioni. L'orientazione canonica di $\mathbb{R}^n$ è quella determinata dalla base $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$. Per lo spazio di dimensione zero conviene intendere per orientazione la scelta di uno dei simboli $+1$ o -1.

Una *varietà liscia orientata* è una varietà M in cui si è scelta un'orientazione di ciascuno spazio tangente T_xM. Se $m \geq 1$, tali scelte devono accordarsi nel senso seguente. Ogni punto deve possedere un intorno $U \subset M$ e un diffeomorfismo h di U su un aperto di $\mathbb{R}^m$ o di H^m che conservi l'orientazione. Ciò significa che per ogni $x \in U$ l'isomorfismo dh_x porta l'orientazione scelta di T_xM nell'orientazione canonica di $\mathbb{R}^m$. Una varietà connessa e orientabile ammette esattamente due orientazioni.

Se M ha bordo, in T_xM per $x \in \partial M$ distinguiamo tre tipi di vettori. I vettori tangenti al bordo formano il sottospazio $T_x(\partial M)$ di dimensione $m-1$. I vettori uscenti formano uno dei due semispazi aperti delimitati da tale sottospazio, i vettori entranti l'altro semispazio.

Ogni orientazione di M ne determina una su ∂M. Scegliamo una base positiva $(v_1, \dots, v_m)$ di T_xM con v_1 uscente e, per $m \geq 2$, $v_2, \dots, v_m$ tangenti al bordo. Allora $(v_2, \dots, v_m)$ determina l'orientazione cercata. Se $m = 1$, al punto x assegniamo il segno -1 o $+1$ secondo che un vettore positivo in x sia entrante o uscente.

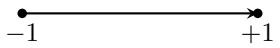


Figura 8. Orientazione indotta sui due estremi di un intervallo orientato.

Per esempio, possiamo orientare la sfera unitaria S^{m-1} come bordo del disco D^m.

Il grado di Brouwer

Siano M, N varietà orientate di dimensione n senza bordo e $f : M \to N$ liscia. Supponiamo M compatta e N connessa. In un punto regolare x, il differenziale $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ è un isomorfismo di spazi vettoriali orientati. Gli assegniamo il segno $+1$ se conserva l'orientazione e -1 se la inverte. Per ogni valore regolare y poniamo

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(df_x).$$

Come nel §1 questo intero è localmente costante in funzione di y ed è definito su un aperto denso di N.

Teorema A. *L'intero* $\deg(f; y)$ *è indipendente dal valore regolare* y. Lo chiameremo *grado* di f e lo indicheremo con $\deg f$.

Teorema B. *Se* f *è lisciamente omotopa a* g*, allora* $\deg f = \deg g$.

La dimostrazione è sostanzialmente quella del §4, purché si tenga conto delle orientazioni. Supponiamo dapprima che M sia il bordo di una varietà orientata compatta X e che porti l'orientazione indotta.

Lemma 1. *Se $f : M \to N$ si estende a un'applicazione liscia $F : X \to N$, allora* $\deg(f; y) = 0$ *per ogni valore regolare y di f.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che y sia regolare sia per F sia per $f = F|_M$. La varietà compatta unidimensionale $F^{-1}(y)$ è unione finita di archi e circonferenze. Soltanto gli estremi degli archi appartengono a $M = \partial X$. Sia A uno di questi archi, di estremi a, b. Proveremo che $\operatorname{sgn} df_a + \operatorname{sgn} df_b = 0$. Sommando su tutti gli archi, si otterrà $\deg(f; y) = 0$.

Le orientazioni di X e di N orientano A come segue. Dato $x \in A$, scegliamo una base positiva $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ di $T_x X$ con v_1 tangente ad A. Il vettore v_1 è positivo su A se e solo se dF_x manda $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ in una base positiva di $T_y N$. Sia $v_1(x)$ il vettore tangente unitario positivo all'arco. Esso varia in modo liscio, punta verso l'esterno a un estremo, diciamo b, e verso l'interno all'altro estremo a. Segue subito che $\operatorname{sgn} df_a = -1$ e $\operatorname{sgn} df_b = +1$, come si voleva.

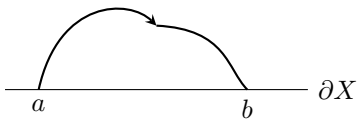


Figura 9. Gli estremi di un arco della fibra orientata contribuiscono con segni opposti.

Se y_0 è regolare soltanto per f, $\deg(f; y)$ è costante in un intorno di y_0 nel quale, come nel §4, possiamo scegliere un valore regolare y di F. Allora $\deg(f; y_0) = \deg(f; y) = 0$.

Sia ora $F : [0, 1] \times M \to N$ un'omotopia liscia tra $f(x) = F(0, x)$ e $g(x) = F(1, x)$.

Lemma 2. *Per ogni valore regolare comune y si ha* $\deg(g; y) = \deg(f; y)$.

Dimostrazione. Orientiamo $[0, 1] \times M$ come prodotto. Il suo bordo comprende $\{1\} \times M$ con l'orientazione data e $\{0\} \times M$ con l'orientazione opposta. Il grado della restrizione di F al bordo, calcolato in y, è quindi $\deg(g; y) - \deg(f; y)$. Per il lemma 1 questa differenza è nulla.

Il resto della dimostrazione dei teoremi A e B segue il §4. Dati due valori regolari y, z di f, scegliamo un diffeomorfismo $h : N \to N$ isotopo all'identità che mandi y in z. Esso conserva l'orientazione, perciò $\deg(f; y) = \deg(h \circ f; h(y))$. Poiché f è omotopa a $h \circ f$, il lemma 2 dà $\deg(h \circ f; z) = \deg(f; z)$, da cui $\deg(f; y) = \deg(f; z)$.

Esempi. La funzione complessa $z \mapsto z^k$, per $z \neq 0$, applica la circonferenza unitaria in sé con grado k, positivo, negativo o nullo. Un'applicazione costante ha grado zero. Un diffeomorfismo ha grado $+1$ o -1 secondo che conservi o inverta l'orientazione. Su una varietà compatta orientata senza bordo, un diffeomorfismo che inverte l'orientazione non può dunque essere lisciamente omotopo all'identità.

La riflessione $r_i : S^n \to S^n$ che cambia segno alla sola coordinata x_i inverte l'orientazione. L'applicazione antipodale $x \mapsto -x$ è il prodotto delle $n+1$ riflessioni coordinate e ha pertanto grado $(-1)^{n+1}$. Se n è pari, l'antipodale non è lisciamente omotopa all'identità. Il grado modulo 2 non rilevava questa distinzione.

Come applicazione mostriamo, seguendo Brouwer, che S^n ammette un campo liscio di vettori tangenti ovunque non nulli se e solo se n è dispari.

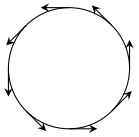


Figura 10. Un campo tangente senza zeri sulla circonferenza.

Definizione. Un campo liscio di vettori tangenti su $M \subset \mathbb{R}^k$ è un'applicazione liscia $v : M \to \mathbb{R}^k$ con $v(x) \in T_x M$ per ogni $x \in M$. Per la sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ questa condizione equivale a $v(x) \cdot x = 0$, dove il punto indica il prodotto scalare euclideo. Se v non si annulla, dividendolo per $\|v(x)\|$ possiamo inoltre supporre che $v(x) \cdot v(x) = 1$. Possiamo così considerare v come un'applicazione liscia della sfera in sé. Definiamo

$$F : S^n \times [0, \pi] \to S^n, \qquad F(x, \theta) = x \cos \theta + v(x) \sin \theta.$$

Un calcolo dà $F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) = 1$, mentre $F(x, 0) = x$ e $F(x, \pi) = -x$. L'antipodale sarebbe dunque omotopa all'identità, il che è impossibile per n pari.

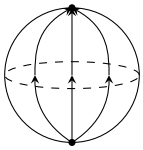


Figura 11. Su una sfera bidimensionale il campo diretto a nord si annulla ai poli.

Viceversa, se $n = 2k - 1$, la formula esplicita

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$$

definisce un campo tangente ovunque non nullo su S^n. Ciò conclude la dimostrazione. Ne segue anche che per n dispari l'antipodale è omotopa all'identità. Un celebre teorema di Heinz Hopf afferma che due applicazioni da una varietà connessa compatta orientata di dimensione n, senza bordo, alla sfera S^n sono lisciamente omotope se e solo se hanno lo stesso grado. Nel §7 dimostreremo un risultato più generale da cui segue il teorema di Hopf.

6 Campi vettoriali e caratteristica di Eulero

Come ulteriore applicazione del grado studiamo i campi vettoriali su altre varietà. Consideriamo dapprima un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ e un campo vettoriale liscio $v : U \to \mathbb{R}^m$ con uno zero isolato z. La funzione $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$ manda una piccola sfera di centro z nella sfera unitaria. Orientiamo ciascuna sfera come bordo del disco corrispondente. Il grado di questa applicazione si chiama *indice* ι di v nello zero z.

Nel piano si incontrano, per esempio, gli indici $-1, 0, 1, 2$. Le curve tangenti al campo si ottengono integrando il sistema $dx_i/dt = v_i(x_1, \ldots, x_m)$ e sono queste le curve con cui si rappresenta il campo. È facile ottenere uno zero di indice assegnato. Nel piano complesso z^k, per $k \geq 1$, definisce un campo con uno zero di indice k nell'origine, mentre $\bar{z}^k$ dà indice $-k$.

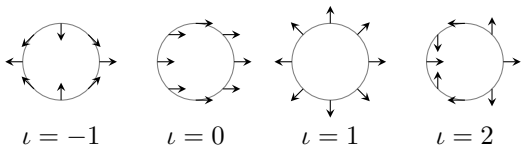


Figura 12. Direzioni del campo su un piccolo cerchio attorno allo zero, per quattro indici distinti.

Dobbiamo provare che l'indice è invariante per diffeomorfismi. Per precisare il significato dell'affermazione, consideriamo un'applicazione $f : M \to N$ e un campo vettoriale su ciascuna varietà.

Definizione. I campi v su M e v' su N si *corrispondono mediante* f se $df_x(v(x)) = v'(f(x))$ per ogni $x \in M$. Se f è un diffeomorfismo, v' è determinato da v. Scriveremo $v' = df \circ v \circ f^{-1}$.

Lemma 1. *Se il campo v su U corrisponde a v' su U' mediante un diffeomorfismo $f : U \to U'$, l'indice di v in uno zero isolato z è uguale all'indice di v' in $f(z)$.*

Assumendo il lemma, possiamo definire l'indice di un campo w su una varietà arbitraria M. Se $g : U \to M$ parametrizza un intorno di z, definiamo l'indice di w in z come l'indice del campo corrispondente $d(g^{-1}) \circ w \circ g$ in $g^{-1}(z)$. Il lemma 1 garantisce che la definizione è ben posta. Per dimostrarlo ci serviremo della dimostrazione di un risultato di natura alquanto diversa.

Lemma 2. *Ogni diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$ che conserva l'orientazione è lisciamente isotopo all'identità.*

Per molti valori di m esiste invece un diffeomorfismo della sfera S^m che conserva l'orientazione e non è lisciamente isotopo all'identità [20, p. 404].

Dimostrazione. Possiamo supporre $f(0) = 0$. Poiché $df_0(x) = \lim_{t\to 0} f(tx)/t$, è naturale porre $F(x,t) = f(tx)/t$ per $0 < t \leq 1$ e $F(x,0) = df_0(x)$. Per vedere che F è liscia fino a $t = 0$, scriviamo $f(x) = \sum_i x_i g_i(x)$ con opportune funzioni lisce a valori vettoriali g_i [22, p. 5]. Allora $F(x,t) = \sum_i x_i g_i(tx)$ per ogni t. Dunque f è isotopa all'applicazione lineare df_0, che a sua volta è isotopa all'identità.

Dimostrazione del lemma 1. Possiamo supporre che $z = f(z) = 0$ e che U sia convesso. Se f conserva l'orientazione, la costruzione precedente dà una famiglia a un parametro di immersioni iniettive $f_t : U \to \mathbb{R}^m$, diffeomorfismi sulle loro immagini, con f_0 identità, $f_1 = f$ e $f_t(0) = 0$. Sia v_t il campo su $f_t(U)$ corrispondente a v. Su una sfera di centro 0 sufficientemente piccola tutti questi campi sono definiti e non nulli. L'indice di $v = v_0$ coincide dunque con quello di $v' = v_1$. Per i diffeomorfismi che invertono l'orientazione basta considerare una riflessione ρ. Allora $v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1}$ e sulle sfere la normalizzazione dà $\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}$. I due cambiamenti di orientazione si compensano, sicché i gradi sono uguali.

Studieremo ora il seguente risultato classico. Sia M una varietà compatta e sia w un campo vettoriale liscio con zeri isolati. Se M ha bordo, richiediamo che w sia uscente in ogni punto del bordo.

Teorema di Poincaré–Hopf. *La somma degli indici negli zeri del campo è uguale alla caratteristica di Eulero*

$$\sum \iota = \chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{rango} H_i(M).$$

In particolare la somma degli indici è un invariante topologico di M, indipendente dal campo scelto.

Qui $H_i(M)$ denota l'i-esimo gruppo di omologia di M. Questo sarà il nostro primo e ultimo richiamo all'omologia. Poincaré dimostrò nel 1885 una versione bidimensionale del teorema. Dopo risultati parziali di Brouwer e Hadamard, Hopf [14] diede nel 1926 la dimostrazione generale. Dimostreremo una parte del teorema e tracceremo la dimostrazione del resto.

Cominciamo da un dominio compatto dello spazio euclideo. Sia $X \subset \mathbb{R}^m$ una varietà compatta di dimensione m con bordo. L'*applicazione di Gauss* $g : \partial X \to S^{m-1}$ associa a ogni x il versore normale uscente.

Lemma 3 (Hopf). *Se $v : X \to \mathbb{R}^m$ ha zeri isolati ed è uscente lungo il bordo, la somma degli indici coincide con il grado dell'applicazione di Gauss. In particolare non dipende da v.*

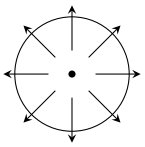


Figura 13. Il campo radiale sul disco ha un solo zero, di indice positivo.

Per esempio, sul disco D^m ogni campo uscente lungo il bordo ha somma degli indici $+1$.

Dimostrazione. Togliamo una piccola palla aperta attorno a ogni zero. La varietà con bordo così ottenuta ammette l'applicazione $\bar{v} = v/\|v\|$ nella sfera unitaria. La somma dei gradi delle restrizioni alle componenti del bordo è dunque nulla. Sul bordo esterno $\bar{v}$ è omotopa a g. Le altre componenti contribuiscono complessivamente $-\sum \iota$, poiché ciascuna piccola sfera riceve l'orientazione opposta. Dunque $\deg g - \sum \iota = 0$.

Il grado di g è anche noto come *curvatura integra* di ∂X, perché è uguale, a meno di un fattore costante, all'integrale della curvatura gaussiana sul bordo. Questo intero è la

caratteristica di Eulero di X. Se m è dispari è uguale alla metà della caratteristica di Eulero di ∂X.

Prima di estendere il risultato ad altre varietà occorrono alcuni preliminari. È naturale cercare di calcolare l'indice di v in uno zero z mediante le derivate in z. Per un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ consideriamo v come applicazione $U \to \mathbb{R}^m$, così che dv_z sia un endomorfismo di $\mathbb{R}^m$.

Definizione. Lo zero z si dice *non degenere* se dv_z è invertibile. In tal caso z è isolato.

Lemma 4. *L'indice in uno zero non degenere è il segno del determinante di dv_z.*

Dimostrazione. Consideriamo v come diffeomorfismo di un intorno convesso U_0 di z sulla sua immagine. Possiamo supporre $z = 0$. Se v conserva l'orientazione, come nei lemmi 1 e 2 possiamo deformarla nell'identità senza introdurre altri zeri. L'indice è quindi $+1$. Se inverte l'orientazione, si deforma analogamente in una riflessione e l'indice è -1.

Consideriamo ora uno zero z di un campo w su $M \subset \mathbb{R}^k$. Pensando w come applicazione da M a $\mathbb{R}^k$, possiamo formarne il differenziale $dw_z : T_zM \to \mathbb{R}^k$.

Lemma 5. *L'immagine di dw_z è contenuta in T_zM, cosicché dw_z si può considerare come un endomorfismo di T_zM. Se il suo determinante D è diverso da zero, z è uno zero isolato di indice* $\operatorname{sgn} D$.

Dimostrazione. Sia $h : U \to M$ una parametrizzazione attorno a z. Per i vettori canonici e_i di $\mathbb{R}^m$ poniamo $t_i(u) = dh_u(e_i) = \partial_i h(u)$, ottenendo una base di $T_{h(u)}M$. Per calcolare $dw_{h(u)}(t_i)$ osserviamo che è uguale a $\partial_i(w \circ h)$. Se $v = \sum_j v_j e_j$ è il campo su U corrispondente a w, allora $w(h(u)) = \sum_j v_j(u) t_j(u)$. Differenziando e valutando in $u_0 = h^{-1}(z)$, dove i v_j si annullano, troviamo

$$dw_z(t_i) = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial u_i}(u_0) t_j.$$

Perciò dw_z manda lo spazio tangente in sé e il suo determinante coincide con quello di dv_{u_0}. Basta applicare il lemma 4.

Sia ora $M \subset \mathbb{R}^k$ compatta senza bordo. Indichiamo con N_ϵ l'intorno chiuso dei punti a distanza al più ϵ da M. Per ϵ abbastanza piccolo è una varietà liscia con bordo (cfr. §8, problema 11).

Teorema 1. *Per ogni campo su M i cui zeri siano tutti non degeneri, la somma degli indici coincide con il grado dell'applicazione di Gauss $g : \partial N_\epsilon \to S^{k-1}$. In particolare è indipendente dal campo.*

Allendoerfer e Fenchel hanno dato un'altra interpretazione di questo grado come integrale su M di un opportuno scalare di curvatura, ottenendo una versione m-dimensionale del classico teorema di Gauss–Bonnet [1, 9]. Si veda anche Chern [6].

Dimostrazione. Per $x \in N_\epsilon$ indichiamo con $r(x)$ il punto di M più vicino (cfr. §8, problema 12). Il vettore $x - r(x)$ è ortogonale a $T_{r(x)}M$, poiché altrimenti $r(x)$ non potrebbe minimizzare la distanza. Per ϵ abbastanza piccolo r è ben definita e liscia. La distanza al quadrato $\varphi(x) = \|x - r(x)\|^2$ ha gradiente $2(x - r(x))$. Sulla superficie di livello $\partial N_\epsilon = \varphi^{-1}(\epsilon^2)$ la normale unitaria uscente è pertanto $g(x) = (x - r(x))/\epsilon$.

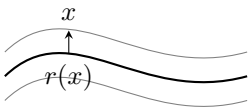


Figura 14. Un intorno tubolare, la proiezione r e il vettore normale.

Estendiamo v a N_ϵ ponendo $w(x) = x - r(x) + v(r(x))$. Lungo il bordo w è uscente, poiché $w(x) \cdot g(x) = \epsilon > 0$. I due addendi sono ortogonali, perciò w si annulla soltanto negli zeri di v in M. In uno zero z si ha

$$dw_z(h) = dv_z(h) \quad (h \in T_z M), \qquad dw_z(h) = h \quad (h \in (T_z M)^\perp).$$

I due determinanti coincidono e gli indici di v e di w in z sono uguali. Il lemma 3 identifica la loro somma con il grado di g.

Esempi. Su S^m consideriamo il campo che punta sempre verso nord, per esempio $v(x) = p - (p \cdot x)x$, con p polo nord. Al polo sud i vettori si irradiano verso l'esterno e l'indice è $+1$. Al polo nord convergono verso l'interno e l'indice è $(-1)^m$. La somma degli indici è quindi 0 per m dispari e 2 per m pari. Ritroviamo così che ogni campo tangente su una sfera di dimensione pari deve annullarsi.

Per ogni varietà compatta senza bordo di dimensione dispari la somma degli indici è zero. Infatti sostituendo $-v$ a v ciascun indice viene moltiplicato per $(-1)^m$. L'uguaglianza $\sum \iota = (-1)^m \sum \iota$ implica dunque $\sum \iota = 0$. Viceversa, un teorema di Hopf afferma che su una varietà connessa con somma degli indici nulla esiste un campo privo di zeri.

Per ottenere il teorema di Poincaré–Hopf in tutta la sua generalità occorrono ancora tre passi.

Primo passo. Identificazione con $\chi(M)$. Basta costruire un solo campo non degenere con somma degli indici uguale a $\chi(M)$. Il modo più piacevole è il seguente. Per un risultato di Marston Morse esiste sempre una funzione reale su M il cui gradiente è un campo non degenere. Morse ha inoltre dimostrato che per un tale gradiente la somma degli indici è la caratteristica di Eulero di M. Per i dettagli si veda Milnor [22, pp. 29, 36].

Secondo passo. Zeri degeneri. Sia anzitutto z uno zero isolato di un campo v su un aperto U. Scegliamo una funzione liscia $\lambda : U \to [0, 1]$ uguale a 1 in un piccolo intorno N_1 di z e nulla fuori da un intorno leggermente più grande N. Per un valore regolare y di v abbastanza vicino a zero, $v'(x) = v(x) - \lambda(x)y$ è non degenere in N. Infatti è non degenere in N_1 e, per y sufficientemente piccolo, non ha zeri in $N \setminus N_1$. La somma degli indici degli zeri interni a N si calcola come grado di $\bar{v}$ sul bordo ∂N, quindi rimane invariata. Applicando l'argomento localmente, su una varietà compatta ogni campo con zeri isolati si può sostituire con un campo non degenere senza alterare la somma degli indici.

Terzo passo. Varietà con bordo. Se $M \subset \mathbb{R}^k$ ha bordo, ogni campo v uscente lungo ∂M si può ancora estendere a N_ϵ in modo da risultare uscente lungo ∂N_ϵ. Vi è però una difficoltà di regolarità in prossimità del bordo di M. In generale N_ϵ è soltanto di classe C^1, mentre l'estensione $w(x) = v(r(x)) + x - r(x)$ è soltanto continua presso ∂M. È comunque possibile condurre a termine la dimostrazione attenuando le ipotesi di differenziabilità, oppure ricorrendo ad altri metodi.

7 Cobordismo con riferimento normale. La costruzione di Pontrjagin

Il grado di un'applicazione $M \to M'$ è definito per varietà orientate della stessa dimensione. Studieremo una generalizzazione dovuta a Pontrjagin, che si applica a ogni applicazione liscia $f : M \to S^p$ da una varietà compatta senza bordo a una sfera.

Siano N, N' sottovarietà compatte di dimensione n di M, con $\partial N = \partial N' = \partial M = \varnothing$. La differenza $m - n$ si chiama *codimensione*. Diciamo che N e N' sono *cobordanti in* M se, per un certo $\epsilon > 0$, il sottoinsieme

$$N \times [0, \epsilon) \ \cup \ N' \times (1 - \epsilon, 1]$$

si prolunga a una varietà compatta $X \subset M \times [0, 1]$, coincidente con questi prodotti presso le estremità, tale che $\partial X = N \times \{0\} \cup N' \times \{1\}$ e che incontri le due basi del cilindro soltanto in ∂X. Il cobordismo è evidentemente una relazione di equivalenza.

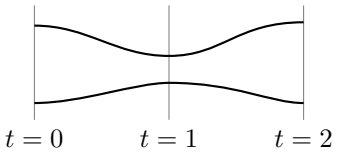


Figura 15. Due cobordismi si incollano lungo il collare comune.

Un *riferimento normale* (in inglese *framing*) per $N \subset M$ è una scelta liscia, in ogni punto $x \in N$, di una base ordinata $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), \ldots, v_{m-n}(x))$ dello spazio dei vettori normali a N in M. La coppia $(N, \mathbf{v})$ si dice *sottovarietà munita di riferimento normale*. Due coppie $(N, \mathbf{v})$ e $(N', \mathbf{w})$ sono cobordanti con i loro riferimenti se esiste un cobordismo X munito di un riferimento normale $\mathbf{u}$ che sui due collari coincida rispettivamente con $u_i(x, t) = (v_i(x), 0)$ e $u_i(x, t) = (w_i(x), 0)$. Anche questa è una relazione di equivalenza.



Figura 16. Un riferimento normale si prolunga lungo il cobordismo.

Sia ora y un valore regolare di $f : M \to S^p$. L'applicazione f induce un riferimento normale su $f^{-1}(y)$. Scegliamo una base positiva $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ di $T_y S^p$. Per ogni $x \in f^{-1}(y)$ il differenziale si annulla sul tangente alla fibra e manda il complemento ortogonale isomorficamente su $T_y S^p$, come abbiamo visto nel §2. Esiste dunque un unico vettore normale $w_i(x)$ con $df_x(w_i(x)) = v_i$. Indichiamo con $f^*\mathbf{v}$ il riferimento così ottenuto.

Definizione. La coppia $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ si chiama *varietà di Pontrjagin* associata a f. A una stessa f corrispondono molte varietà di Pontrjagin, al variare di y e della base, ma tutte appartengono alla stessa classe di cobordismo con riferimento normale.

Teorema A. *Se y' è un altro valore regolare e $\mathbf{v}'$ una base positiva di $T_{y'} S^p$, allora $(f^{-1}(y'), f^*\mathbf{v}')$ è cobordante a $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ con i rispettivi riferimenti.*

Teorema B. *Due applicazioni da M a S^p sono lisciamente omotope se e solo se le rispettive varietà di Pontrjagin sono cobordanti con i loro riferimenti.*

Teorema C. *Ogni sottovarietà compatta di codimensione p in M, munita di un riferimento normale, è la varietà di Pontrjagin di un'opportuna applicazione liscia $f : M \to S^p$.*

Le classi di omotopia delle applicazioni corrispondono dunque biunivocamente alle classi di cobordismo delle sottovarietà con riferimento normale. La dimostrazione del teorema A, simile agli argomenti dei §§4 e 5, si fonda su tre lemmi.

Lemma 1. *Due basi positive $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ nello stesso punto y danno varietà di Pontrjagin cobordanti con i rispettivi riferimenti.* Infatti lo spazio delle basi positive di $T_y S^p$ si identifica con $\mathrm{GL}^+(p, \mathbb{R})$, lo spazio connesso delle matrici di determinante positivo. Un cammino liscio tra le due basi, costante presso gli estremi, fornisce il riferimento cercato su $f^{-1}(y) \times [0, 1]$. Per brevità parleremo spesso semplicemente della fibra $f^{-1}(y)$ munita di riferimento, sottintendendo $f^*\mathbf{v}$.

Lemma 2. *Se y è regolare e z è sufficientemente vicino a y, le fibre di y e di z sono cobordanti con i rispettivi riferimenti.* Poiché l'insieme $f(C)$ dei valori critici è compatto, un intero ϵ-intorno di y è costituito da valori regolari. Per z in tale intorno scegliamo una famiglia liscia di rotazioni $r_t : S^p \to S^p$ con $r_1(y) = z$, uguale all'identità presso $t = 0$ e costante presso $t = 1$, in modo che ciascun $r_t^{-1}(z)$ appartenga all'arco breve di cerchio massimo tra y e z. Tutti questi punti sono regolari per f. Poniamo $F(x, t) = r_t(f(x))$. Poiché z è regolare per ogni $r_t \circ f$, a maggior ragione è regolare per F. La varietà $F^{-1}(z)$ fornisce il cobordismo con riferimento tra $f^{-1}(z)$ e $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$.

Lemma 3. *Se f e g sono lisciamente omotope e y è regolare per entrambe, le fibre $f^{-1}(y)$ e $g^{-1}(y)$ sono cobordanti con i loro riferimenti.* Scegliamo un'omotopia F uguale a f nel collare iniziale e a g in quello finale. Sia z un suo valore regolare abbastanza vicino a y da applicare il lemma 2 sia a f sia a g. La varietà $F^{-1}(z)$ fornisce il cobordismo intermedio tra le fibre di z. Per transitività otteniamo il lemma.

Dimostrazione del teorema A. Dati valori regolari y, z di f, scegliamo rotazioni dall'identità a r_1, con $r_1(y) = z$. Allora f è omotopa a $r_1 \circ f$, e per il lemma 3 la fibra $f^{-1}(z)$ è cobordante con riferimento a $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$.

Per dimostrare il teorema C ci occorre il risultato seguente. Sia $N \subset M$ compatta, di codimensione p, con riferimento $\mathbf{v}$, e siano vuoti i bordi.

Teorema dell'intorno prodotto. *Un intorno di N in M è diffeomorfo a $N \times \mathbb{R}^p$. Il diffeomorfismo può essere scelto in modo che $x \in N$ corrisponda a $(x, 0)$ e il riferimento normale in x corrisponda alla base canonica di $\mathbb{R}^p$.*

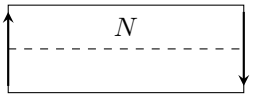


Figura 17. Lungo il nucleo di un nastro di Möbius un vettore normale torna con verso opposto. I lati verticali sono identificati con versi opposti.

Per una sottovarietà arbitraria un tale intorno può non esistere.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $M = \mathbb{R}^{n+p}$. Consideriamo $g : N \times \mathbb{R}^p \to M$ definita da $g(x,t) = x + \sum_i t_i v_i(x)$. Poiché $dg_{(x,0)}$ è invertibile, g applica diffeomorficamente un intorno di $(x,0)$ su un aperto. Proviamo che g è iniettiva su tutto $N \times U_\epsilon$, dove U_ϵ è la palla di centro zero e raggio ϵ abbastanza piccolo. In caso contrario troveremmo coppie distinte (x,u) e (x',u') con la stessa immagine e con u, u' arbitrariamente piccoli. Per compattezza possiamo estrarre una successione con $x \to x_0$, $x' \to x'_0$ e $u, u' \to 0$. Allora $x_0 = x'_0$, contraddicendo l'iniettività in un intorno di $(x_0, 0)$. Riducendo ϵ se necessario, g è dunque un diffeomorfismo di $N \times U_\epsilon$ su un aperto. L'applicazione $u \mapsto u/(1 - \|u\|^2/\epsilon^2)$ identifica U_ϵ con $\mathbb{R}^p$ e ha differenziale identico nell'origine. Poiché $g(x,0) = x$ e il differenziale porta i vettori canonici nei vettori del riferimento, la tesi è dimostrata in questo caso.

Per M generale sostituiamo le geodetiche alle rette dello spazio euclideo. Posto $v = \sum_i t_i v_i(x)$, sia $g(x,t)$ l'estremo del segmento geodetico che parte da x nella direzione $v/\|v\|$ e ha lunghezza $\|v\|$, con $g(x,0) = x$. Il lettore che conosce le geodetiche verificherà facilmente che per ϵ piccolo $g : N \times U_\epsilon \to M$ è ben definita e liscia. Il resto della dimostrazione procede come prima.

Dimostrazione del teorema C. Scegliamo per N un intorno prodotto $g : N \times \mathbb{R}^p \to V \subset M$ e definiamo $\pi : V \to \mathbb{R}^p$ mediante $\pi(g(x,u)) = u$. Lo zero è un valore regolare e $\pi^{-1}(0)$ è precisamente N con il riferimento dato. Scegliamo un'applicazione liscia $\varphi : \mathbb{R}^p \to S^p$ che mandi tutti gli u con $\|u\| \geq 1$ in un punto base s_0 e applichi la palla aperta diffeomorficamente su $S^p \setminus \{s_0\}$. Per esempio, con h proiezione stereografica da s_0, poniamo nella palla $\varphi(u) = h^{-1}(u/\lambda(\|u\|^2))$, dove λ è liscia, decrescente, positiva per $t < 1$ e nulla per $t \geq 1$. Definiamo f uguale a $\varphi \circ \pi$ in V e a s_0 fuori da V. Essa è liscia, $\varphi(0)$ è regolare e la corrispondente varietà di Pontrjagin è precisamente $\pi^{-1}(0) = N$ con il riferimento assegnato.

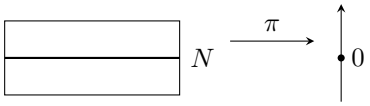


Figura 18. Nell'intorno prodotto la proiezione normale ha fibra N sopra lo zero.

Per il teorema B dobbiamo dapprima mostrare che la varietà di Pontrjagin determina la classe di omotopia. Siano $f, g : M \to S^p$ lisce e y un valore regolare comune.

Lemma 4. *Se $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v}) = (g^{-1}(y), g^*\mathbf{v})$, allora f è lisciamente omotopa a g.*

Dimostrazione. Poniamo $N = f^{-1}(y)$. L'uguaglianza dei riferimenti significa che $df_x = dg_x$ per ogni $x \in N$. Se $f = g$ su un intorno V di N, indichiamo con $h : S^p \setminus \{y\} \to \mathbb{R}^p$ la proiezione stereografica. Su V poniamo $F(x,t) = f(x)$ e su $M \setminus N$ poniamo

$$F(x,t) = h^{-1}\big(th(f(x)) + (1-t)h(g(x))\big).$$

Le due formule concordano nell'intersezione e definiscono l'omotopia voluta.

Basta dunque deformare f in modo che coincida con g in un piccolo intorno di N, senza mandare nuovi punti in y. Scegliamo un intorno prodotto $N \times \mathbb{R}^p \simeq V$ abbastanza piccolo perché $f(V)$ e $g(V)$ evitino l'antipodo di y. Identificando il complementare dell'antipodo con $\mathbb{R}^p$ e y con 0, otteniamo applicazioni $F, G : N \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ con $F(x,0) = G(x,0) = 0$ e $dF_{(x,0)} = dG_{(x,0)}$ uguale alla proiezione sul secondo fattore.

Troviamo $c > 0$ tale che $F(x,u) \cdot u > 0$ e $G(x,u) \cdot u > 0$ per $0 < \|u\| < c$. Infatti, per Taylor e per compattezza, $\|F(x,u) - u\| \leq c_1 \|u\|^2$ se $\|u\| \leq 1$. Pertanto $|(F(x,u) - u) \cdot u| \leq c_1 \|u\|^3$, da cui $F(x,u) \cdot u \geq \|u\|^2 - c_1 \|u\|^3 > 0$ per $0 < \|u\| < \min(1, 1/c_1)$. Lo stesso vale per G. Le due immagini stanno dunque nel medesimo semispazio aperto e il segmento che le unisce evita lo zero.

Per lasciare fermi i punti lontani scegliamo $\lambda : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ liscia, uguale a 1 per $\|u\| \leq c/2$ e a 0 per $\|u\| \geq c$. L'omotopia

$$F_t(x,u) = (1 - t\lambda(u))F(x,u) + t\lambda(u)G(x,u)$$

deforma F in un'applicazione che coincide con G per $\|u\| < c/2$, coincide con F per $\|u\| \geq c$ e non ha nuovi zeri. Riportata nelle coordinate originarie, la deformazione conclude la prova.

Dimostrazione del teorema B. Una implicazione è il lemma 3. Viceversa, sia $(X, \mathbf{w})$ un cobordismo con riferimento tra le fibre di f e g. Una costruzione del tutto analoga a quella del teorema C produce $F : M \times [0,1] \to S^p$ la cui varietà di Pontrjagin sia precisamente $(X, \mathbf{w})$. Posto $F_t(x) = F(x,t)$, le applicazioni F_0 e f hanno la medesima varietà di Pontrjagin, sicché per il lemma 4 sono omotope. Analogamente $F_1 \sim g$. Dunque $f \sim g$.

Osservazioni. I teoremi A, B e C si estendono facilmente al caso di una varietà con bordo, purché si considerino applicazioni che mandano il bordo in un punto base s_0. Le classi di omotopia di applicazioni di coppie $(M, \partial M) \to (S^p, s_0)$ corrispondono biunivocamente alle classi di cobordismo delle sottovarietà con riferimento normale di codimensione p nell'interno di M. Per $p \geq m/2 + 1$ queste classi formano un gruppo abeliano, il *p-esimo gruppo di coomotopia* $\pi^p(M, \partial M)$. Alla legge di composizione corrisponde l'unione di sottovarietà disgiunte con riferimento (cfr. §8, problema 17).

Il teorema di Hopf

Supponiamo che M sia connessa e orientata e che $m = p$. Una sottovarietà con riferimento di codimensione p è allora un insieme finito di punti con una base scelta in ciascuno. Attribuiamo a x il segno $+1$ o -1 secondo che tale base determini l'orientazione data o quella opposta. La somma dei segni è precisamente il grado dell'applicazione associata $M \to S^m$. D'altra parte non è difficile vedere che la classe di cobordismo con riferimento di questa varietà di dimensione zero è interamente determinata dalla somma. Abbiamo così dimostrato il risultato seguente.

Teorema di Hopf. *Se M è compatta, connessa, orientata e senza bordo, due applicazioni $M \to S^m$ sono lisciamente omotope se e solo se hanno lo stesso grado.*

Supponiamo invece M non orientabile. Data una base di $T_x M$, possiamo trasportare x lungo un cammino chiuso in modo che, tornando al punto di partenza, la base abbia orientazione opposta. Un facile argomento dà il seguente risultato.

Teorema. *Nelle stesse ipotesi di compattezza e di assenza di bordo, se M è connessa e non orientabile, due applicazioni $M \to S^m$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado modulo 2.*

Pontrjagin introdusse il cobordismo con riferimento per studiare le classi di omotopia $S^m \to S^p$ per $m > p$. Se $m = p + 1 \geq 4$ vi sono precisamente due classi. Pontrjagin lo

dimostrò classificando le sottovarietà unidimensionali con riferimento in S^m. Con difficoltà assai maggiori, servendosi di sottovarietà bidimensionali con riferimento, dimostrò che anche per $m = p + 2 \geq 4$ vi sono precisamente due classi. Per $m - p > 2$ questo metodo incontra molteplici difficoltà.

In seguito si è rivelato più facile enumerare le classi di omotopia con metodi diversi e più algebrici, come quelli esposti da S.-T. Hu in *Homotopy Theory*. La costruzione di Pontrjagin, però, opera nei due sensi. Permette di tradurre informazioni sulle varietà in termini di omotopia e, viceversa, di riportare nella teoria delle varietà ogni informazione sull'omotopia. Dall'interazione delle due teorie sono nati alcuni dei risultati più profondi della topologia moderna. Un esempio importante è il lavoro di René Thom sul cobordismo [36, 21].

8 Esercizi

Concludiamo con alcuni problemi per il lettore.

1. Dimostrare che il grado di una composta $g \circ f$ è il prodotto del grado di g per il grado di f.

2. Dimostrare che ogni polinomio complesso di grado n induce un'applicazione liscia della sfera di Gauss S^2 in sé di grado n.

3. Se $f, g : X \to S^p$ soddisfano $\|f(x) - g(x)\| < 2$ per ogni x, provare che sono omotope e che l'omotopia può essere scelta liscia se f e g sono lisce.

4. Se X è compatto, mostrare che ogni applicazione continua $X \to S^p$ si può approssimare uniformemente mediante applicazioni lisce. Mostrare che due applicazioni lisce $X \to S^p$ omotope per via continua sono anche lisciamente omotope.

5. Se $m < p$, mostrare che ogni applicazione $M^m \to S^p$ è omotopa a una costante.

6. (Brouwer.) Mostrare che ogni applicazione $S^n \to S^n$ di grado diverso da $(-1)^{n+1}$ ha un punto fisso.

7. Mostrare che ogni applicazione $S^n \to S^n$ di grado dispari manda almeno una coppia di punti antipodali in una coppia di punti antipodali.

8. Date varietà lisce $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^\ell$, mostrare che $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \times T_yN$.

9. Il grafico Γ di un'applicazione liscia $f : M \to N$ è l'insieme delle coppie $(x, y) \in M \times N$ con $y = f(x)$. Mostrare che Γ è una varietà liscia e che $T_{(x,y)}\Gamma \subset T_xM \times T_yN$ è il grafico di df_x.

10. Data $M \subset \mathbb{R}^k$, mostrare che lo spazio totale del fibrato tangente $TM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^k : v \in T_xM\}$ è una varietà liscia. Mostrare che ogni $f : M \to N$ liscia induce un'applicazione liscia $df : TM \to TN$, con $d(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ e $d(g \circ f) = dg \circ df$.

11. Analogamente, provare che lo spazio totale del fibrato normale $E = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^k : v \perp T_xM\}$ è una varietà liscia. Se M è compatta senza bordo, mostrare che $(x, v) \mapsto x + v$ applica diffeomorficamente, per ϵ abbastanza piccolo, l'ϵ-intorno di $M \times \{0\}$ in E sull'ϵ-intorno N_ϵ di M in $\mathbb{R}^k$ (cfr. il teorema dell'intorno prodotto nel §7).

12. Definire $r : N_\epsilon \to M$ mediante $r(x + v) = x$. Mostrare che $r(x + v)$ è più vicino a $x + v$ di ogni altro punto di M. Usando questa retrazione, dimostrare l'analogo del problema 4 con una varietà M al posto della sfera.

13. Date due varietà disgiunte $M, N \subset \mathbb{R}^{k+1}$, definiamo l'applicazione di allacciamento $\lambda : M \times N \to S^k$ mediante $\lambda(x, y) = (x - y)/\|x - y\|$. Se M, N sono compatte, orientate, senza bordo e $m + n = k$, il grado di λ si chiama *numero di allacciamento* $\ell(M, N)$. Provare che

$$\ell(N, M) = (-1)^{(m+1)(n+1)}\ell(M, N).$$

Se M è il bordo orientato di una varietà X disgiunta da N, provare che $\ell(M, N) = 0$. Definire il numero di allacciamento per varietà disgiunte nella sfera S^{m+n+1}.

14. *L'invariante di Hopf.* Se $y \neq z$ sono valori regolari di $f : S^{2p-1} \to S^p$, le fibre si possono orientare come nel §5 e il loro numero di allacciamento è definito.

    (a) Provare che tale numero è localmente costante in funzione di y.

    (b) Se y e z sono regolari anche per g, con $\|f(x) - g(x)\| < \|y - z\|$ per ogni x, provare che

    $$\ell(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) = \ell(g^{-1}(y), f^{-1}(z)) = \ell(g^{-1}(y), g^{-1}(z)).$$

    (c) Provare che il numero dipende soltanto dalla classe di omotopia di f ed è indipendente da y, z.

    L'intero $H(f) = \ell(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ è l'*invariante di Hopf* di f [15].

15. Se p è dispari, provare che $H(f) = 0$. Per la composta $S^{2p-1} \xrightarrow{f} S^p \xrightarrow{g} S^p$ provare che $H(g \circ f) = H(f)(\deg g)^2$. La *fibrazione di Hopf* $\pi : S^3 \to S^2$ è definita da

    $$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^{-1}\left(\frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4}\right),$$

    dove h è la proiezione stereografica sul piano complesso, con la consueta estensione al punto all'infinito. Provare che $H(\pi) = 1$.

16. Due sottovarietà N, N' di M si intersecano *trasversalmente* se, per ogni $x \in N \cap N'$, i loro spazi tangenti generano insieme T_xM. Se $n + n' < m$, ciò significa che $N \cap N' = \varnothing$. Se N è munita di riferimento normale, provare che la si può deformare leggermente in modo che intersechi trasversalmente una N' assegnata. Provare che l'intersezione così ottenuta è una varietà liscia.

17. Sia $\Pi^p(M)$ l'insieme delle classi di cobordismo con riferimento normale di codimensione p in M. Usare l'intersezione trasversale per definire una corrispondenza

    $$\Pi^p(M) \times \Pi^q(M) \longrightarrow \Pi^{p+q}(M).$$

    Per $p \geq m/2 + 1$, usare l'unione disgiunta per dotare $\Pi^p(M)$ di una struttura di gruppo abeliano (cfr. §7).

Appendice. Classificazione delle varietà unidimensionali

Dimostriamo un risultato che nel testo abbiamo ammesso. Accenneremo anche al problema della classificazione in dimensione superiore.

Teorema. *Ogni varietà liscia, connessa e unidimensionale è diffeomorfa alla circonferenza S^1 oppure a un intervallo di numeri reali.*

Per intervallo si intende un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ che non si riduca a un punto. Può essere limitato o illimitato, chiuso, aperto o semiaperto. Poiché ogni intervallo è diffeomorfo a $[0,1]$, $(0,1]$ o $(0,1)$, vi sono a meno di diffeomorfismi soltanto quattro varietà unidimensionali connesse. Per i cambi di parametro si può impiegare, ad esempio, una funzione della forma $t \mapsto a\tanh(t) + b$.

La dimostrazione usa la lunghezza d'arco. Sia I un intervallo.

Definizione. Un'applicazione $f : I \to M$ è una *parametrizzazione per lunghezza d'arco* se applica I diffeomorficamente su un aperto di M e se il vettore velocità $df_s(1) \in T_{f(s)}M$ ha lunghezza uno per ogni $s \in I$. L'intervallo può dunque contenere punti di bordo soltanto se anche M ne possiede. Ogni parametrizzazione locale si trasforma in una parametrizzazione per lunghezza d'arco mediante un semplice cambio di variabile.

Lemma. *Siano $f : I \to M$ e $g : J \to M$ parametrizzazioni per lunghezza d'arco. L'intersezione $f(I) \cap g(J)$ ha al più due componenti. Se ne ha una sola, f si può estendere a una parametrizzazione per lunghezza d'arco di $f(I) \cup g(J)$. Se ne ha due, M è diffeomorfa a S^1.*

Dimostrazione. Il cambiamento di parametro $g^{-1} \circ f$ applica diffeomorficamente un aperto relativo di I su un aperto relativo di J e ha derivata ovunque uguale a $+1$ o -1. Il suo grafico $\Gamma = \{(s,t) \in I \times J : f(s) = g(t)\}$ è un sottoinsieme chiuso del rettangolo, costituito da segmenti di pendenza ± 1. Essendo il grafico chiuso e il cambiamento di parametro un diffeomorfismo locale, nessun segmento può terminare all'interno del rettangolo. Poiché l'applicazione è univoca e iniettiva, su ciascuno dei quattro lati può terminare al più un segmento. Vi sono dunque al più due componenti. Quando ve ne sono due, i segmenti devono avere la stessa pendenza.

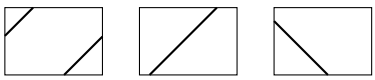


Figura 19. Tre possibili grafici del cambiamento di parametro in un rettangolo $I \times J$.

Se Γ è connesso, $g^{-1} \circ f$ si estende a una funzione affine $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le funzioni f e $g \circ L$ si incollano nella parametrizzazione cercata $I \cup L^{-1}(J) \to f(I) \cup g(J)$.

Se le componenti sono due, possiamo supporre che la pendenza comune sia $+1$, invertendo un parametro se necessario. Trasliamo il parametro di g in modo che le due parametrizzazioni coincidano sul secondo intervallo di sovrapposizione. Scriviamo i due intervalli come (a,d) e (c,β), con $a < b \leq c < d \leq \alpha < \beta$, in modo che (a,b) corrisponda per traslazione ad (α,β). Posto $\theta = 2\pi t/(\alpha - a)$, il diffeomorfismo cercato è dato da

$$h(\cos\theta, \sin\theta) = \begin{cases} f(t) & a < t < d, \\ g(t) & c < t < \beta. \end{cases}$$

L'immagine $h(S^1)$ è compatta e aperta in M. Per connessione deve coincidere con tutta M. Il lemma è dimostrato.

Dimostrazione del teorema di classificazione. Ogni parametrizzazione per lunghezza d'arco si può prolungare fino a una parametrizzazione massimale $f : I \to M$. Basta estenderla quanto più possibile a sinistra e poi a destra. Se M non è diffeomorfa a S^1, proviamo che f è suriettiva e quindi è un diffeomorfismo. Se l'aperto $f(I)$ fosse proprio, avrebbe un punto di accumulazione $x \in M \setminus f(I)$. Parametrizzando per lunghezza d'arco un intorno di x e applicando il lemma potremmo estendere f a un intervallo più grande, contro la massimalità. Ciò conclude la dimostrazione.

Osservazioni. In dimensione superiore il problema della classificazione diventa assai arduo. Per le varietà bidimensionali si trova un'esposizione completa in Kerékjártó [17]. Lo studio delle varietà tridimensionali è un tema di ricerca molto attivo (si veda Papakyriakopoulos [26]). Per le varietà compatte di dimensione almeno quattro il problema della classificazione è addirittura insolubile in senso algoritmico (cfr. Markov [19] e un lavoro di Boone, Haken e Poénaru allora in corso di pubblicazione su *Fundamenta Mathematicae*). Per le varietà semplicemente connesse di dimensione elevata si sono tuttavia compiuti notevoli progressi negli anni precedenti a queste lezioni, come mostrano i lavori di Smale [31] e Wall [37].

Bibliografia

L'elenco comprende fonti originali e manuali consigliati. A chi desidera proseguire lo studio della topologia differenziale suggerisco Milnor [22], Munkres [25] e Pontryagin [28]. Saranno utili anche le rassegne [23] e [32]. Per gli argomenti affini consiglio Hilton e Wylie [11], Hu [16], Lang [18], de Rham [29], Steenrod [34] e Sternberg [35].

1. C. B. Allendoerfer, ńThe Euler number of a Riemann manifoldż, *Amer. Jour. Math.* 62 (1940), 243–248.

2. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, 1957.

3. L. Auslander e R. MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill, New York, 1963.

4. L. E. J. Brouwer, ńÜber Abbildung von Mannigfaltigkeitenż, *Math. Annalen* 71 (1912), 97–115.

5. A. B. Brown, ńFunctional dependenceż, *Trans. Amer. Math. Soc.* 38 (1935), 379–394, in particolare il teorema 3-III.

6. S. S. Chern, ńA simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifoldsż, *Annals of Math.* 45 (1944), 747–752.

7. J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

8. A. Ya. Dubovickii, ńOn differentiable mappings of an n-dimensional cube into a k-dimensional cubeż, *Mat. Sbornik*, n.s., 32 (74) (1953), 443–464, in russo.

9. W. Fenchel, ńOn total curvatures of Riemannian manifoldsż, *Jour. London Math. Soc.* 15 (1940), 15–22.

10. C. Goffman, *Calculus of Several Variables*, Harper & Row, New York, 1965.

11. P. Hilton e S. Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, 1960.

12. M. Hirsch, ńA proof of the nonretractibility of a cell onto its boundaryż, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), 364–365.

13. H. Hopf, ńAbbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeitenż, *Math. Annalen* 96 (1926), 209–224.

14. H. Hopf, ńVektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeitenż, *Math. Annalen* 96 (1926), 225–250.

15. H. Hopf, ńÜber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimensionż, *Fundamenta Mathematicae* 25 (1935), 427–440.

16. S.-T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1959.

17. B. von Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, Springer, Berlino, 1923.

18. S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Interscience, New York, 1962.

19. A. A. Markov, ńInsolubility of the problem of homeomorphyż, *Proceedings Intern. Congress of Math. 1958*, Cambridge University Press, 1960, 300–306, in russo.

20. J. Milnor, ńOn manifolds homeomorphic to the 7-sphereż, *Annals of Math.* 64 (1956), 399–405.

21. J. Milnor, ńA survey of cobordism theoryż, *L'Enseignement math.* 8 (1962), 16–23.

22. J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, 1963.

23. J. Milnor, ńDifferential topologyż, in T. L. Saaty (a cura di), *Lectures on Modern Mathematics*, II, Wiley, New York, 1964, 165–183.

24. A. P. Morse, ńThe behavior of a function on its critical setż, *Annals of Math.* 40 (1939), 62–70.

25. J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Annals of Mathematics Studies 54, Princeton University Press, 1963.

26. C. D. Papakyriakopoulos, ńThe theory of three-dimensional manifolds since 1950ż, *Proceedings Intern. Congress of Math. 1958*, Cambridge University Press, 1960, 433–440.

27. L. S. Pontryagin, ńA classification of continuous transformations of a complex into a sphereż, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.* 19 (1938), 147–149.

28. L. S. Pontryagin, ńSmooth manifolds and their applications in homotopy theoryż, *Amer. Math. Soc. Translations*, serie 2, 11 (1959), 1–114. Traduzione da *Trudy Inst. Steklov* 45 (1955).

29. G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Parigi, 1955.

30. A. Sard, ńThe measure of the critical points of differentiable mapsż, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48 (1942), 883–890.

31. S. Smale, ńGeneralized Poincaré's conjecture in dimensions greater than fourż, *Annals of Math.* 74 (1961), 391–406.

32. S. Smale, ńA survey of some recent developments in differential topologyż, *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), 131–145.

33. M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965.

34. N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.

35. S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1964.

36. R. Thom, ńQuelques propriétés globales des variétés différentiablesż, *Commentarii Math. Helvet.* 28 (1954), 17–86.

37. C. T. C. Wall, ńClassification of $(n-1)$-connected $2n$-manifoldsż, *Annals of Math.* 75 (1962), 163–189.

38. H. Whitney, ńA function not constant on a connected set of critical pointsż, *Duke Math. Jour.* 1 (1935), 514–517.

Le Page–Barbour Lectures. La Page-Barbour Lecture Foundation fu istituita nel 1907 grazie a una donazione di Thomas Nelson Page e della moglie, nata Barbour, per invitare ogni anno all'Università della Virginia una personalità eminente a tenere un ciclo di lezioni nel proprio campo. Le lezioni raccolte in questo volume furono tenute da John W. Milnor nel dicembre 1963 e costituirono il quarantasettesimo ciclo promosso dalla fondazione.

Indice analitico

I rinvii indicano i paragrafi numerati di questa edizione. La sigla App. indica l'appendice.

Allacciamento applicazione e numero, §8, problemi 13–15.

Applicazione liscia, diffeomorfismo e differenziale, §1. Antipodale, §5 e §8. Di Gauss, §6.

Bordo di una varietà, §2. Orientazione indotta, §5. Vettori entranti e uscenti, §5.

Brouwer teorema del punto fisso, §2. Grado, §§4–5. Campi tangenti sulle sfere, §5. Problema 6, §8.

Brown, A. B. densità dei valori regolari, §2.

Campo vettoriale tangente, §5. Corrispondenza mediante un diffeomorfismo, indice, somma degli indici e zeri non degeneri, §6.

Cobordismo codimensione, riferimento normale, varietà di Pontrjagin e coomotopia, §7. Intersezione trasversale, §8.

Coordinate sistema locale e parametrizzazione, §1. Lunghezza d'arco, App.

Disco come varietà con bordo e punto fisso, §2.

Eulero caratteristica, §6.

Fibrato tangente e normale, §8, problemi 10–12.

Fubini teorema, §3.

Gauss–Bonnet relazione con il grado dell'applicazione di Gauss, §6.

Grado modulo due, §4. Intero, §5. Di una composta, §8.

Hirsch, M. argomento di non retrazione, §2.

Hopf, H. teorema di Poincaré–Hopf, §6. Classificazione mediante il grado, §7. Invariante e fibrazione, §8.

Inversione locale teorema della funzione inversa, §1.

Isotopia e omotopia definizioni e lemmi, §4. Isotopia di diffeomorfismi euclidei, §6.

Morse A. P., insiemi critici, §2. Marston, campi gradiente, §6.

Orientazione di una varietà, del bordo e di una fibra regolare, §5.

Poincaré, H. campi vettoriali, §6.

Pontrjagin, L. S. dimostrazione del teorema di Sard, §3. Costruzione, varietà associata e teorema dell'intorno prodotto, §7.

Proiezione stereografica §§1, 7 e 8.

Punti e valori regolari e critici, §§1–3. Valore regolare comune, §§4–5 e 7.

Regola della catena §1.

Sard, A. enunciato e dimostrazione, §§2–3.

Semispazio modello locale presso il bordo, §2.

Sfera parametrizzazioni, §1. Campi tangenti, §§5–6.

Spazio tangente definizione, dimensione, vettori tangenti, §1. Spazio normale e tangente sul bordo, §2.

Teorema fondamentale dell'algebra §1.

Topologia differenziale oggetto, §1. Letture successive, bibliografia.

Varietà lisce, dimensione e dimensione zero, §1. Con bordo, §2. Orientate, §5. Unidimensionali, §2 e App. Problema di classificazione, App.

Weierstrass teorema di approssimazione, §2.

Indice dei simboli

$\mathbb{R}^k$	spazio euclideo, §1	S^{n-1}	sfera unitaria, §1
$g \circ f$	composta, §1	T_xM	spazio tangente, §1
df_x	differenziale, §1	$\#f^{-1}(y)$	cardinalità della fibra, §1
H^m	semispazio chiuso, §2	∂X	bordo, §2
D^m	disco unitario, §2	$\|x\|$	norma euclidea, §2
$\deg(f; y)$	grado in y, §5	$f^*\mathbf{v}$	riferimento indotto, §7

Colophon dell'originale. Il volume fu composto e stampato dalla William Byrd Press di Richmond, Virginia, e rilegato dalla Russell Rutter Co. di New York. I caratteri erano Modern Number 8 e Century Schoolbook, la carta Oxford's Bookbuilders Plate. Il progetto grafico era di Edward Foss.