Assaggi di analisi in più variabili complesse

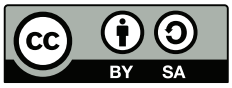
Una rapida escursione nella teoria

Jiří Lebl

Traduzione italiana integrale della versione 4.4
Introduzione, capitoli 1–6 e appendici A–E

Titolo originale: Tasty Bits of Several Complex Variables. A Whirlwind Tour of the Subject. Composto in LaTeX. © 2014–2026 Jiří Lebl.





Licenza. L'autore distribuisce l'originale con due licenze Creative Commons internazionali, Attribuzione–Non commerciale–Condividi allo stesso modo 4.0 e Attribuzione–Condividi allo stesso modo 4.0. I testi delle licenze si possono consultare agli indirizzi CC BY-NC-SA 4.0 e CC BY-SA 4.0, oppure richiedere per posta a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Potete usare, stampare, copiare e condividere liberamente il libro. Potete utilizzarlo come base per i vostri appunti e riutilizzarne parti, mantenendo la licenza. Scegliete fra CC BY-NC-SA e CC BY-SA quella compatibile con l'uso che intendete fare. Le opere derivate devono adottare almeno una delle due licenze e indicare chiaramente la propria natura.

Questa traduzione italiana è un'opera derivata distribuita con licenza CC BY-SA 4.0.

Ringraziamenti dell'autore. Ringrazio Debraj Chakrabarti, Anirban Dawn, Alekzander Malcom, John Treuer, Jianou Zhang, Liz Vivas, Trevor Fancher, Nicholas Lawson McLean, Alan Sola, Achinta Nandi, Sivaguru Ravisankar, Tomas Rodriguez, Mina Farag, Frank Wikström, Isak Ellmer, George Roman e gli studenti dei miei corsi per avermi segnalato refusi ed errori e per i loro suggerimenti. Parte del materiale aggiunto nella versione 4.0 trae ispirazione dalle osservazioni e dagli appunti delle lezioni di Richard Lärkäng ed Elizabeth Wulcan.

Durante parte della stesura del libro, l'autore ha beneficiato del sostegno della National Science Foundation (grant DMS-1362337) e della Simons Foundation (collaboration grant 710294).

Altre informazioni. Per informazioni sul libro e per contattare l'autore si vedano `https://www.jirka.org/scv/` e `https://jirilebl.github.io/scv/`. I sorgenti LaTeX, a disposizione di chi desidera modificare o adattare il testo, si trovano su `https://github.com/jirilebl/scv`.

Indice

Introduzione **4**
0.1 Motivazioni, il caso di una variabile e la formula di Cauchy 4

1 Funzioni olomorfe di più variabili **10**
1.1 Il passaggio a più variabili 10
1.2 Rappresentazione mediante serie di potenze 15
1.3 Derivate 23
1.4 Non equivalenza della palla e del polidisco 27
1.5 Il teorema di unicità di Cartan 31
1.6 Prolungamento di Riemann, insiemi di zeri e applicazioni iniettive 34

2 Convessità e pseudoconvessità **39**
2.1 Domini di olomorfia e prolungamento olomorfo 39
2.2 Vettori tangenti, matrice hessiana e convessità 45
2.3 Vettori olomorfi, forma di Levi e pseudoconvessità 53
2.4 Dalle funzioni armoniche alle funzioni plurisubarmoniche 67
2.5 Pseudoconvessità nel senso di Hartogs 78
2.6 Convessità olomorfa 86

3 Funzioni CR **91**
3.1 Funzioni analitiche reali e complessificazione 91
3.2 Funzioni CR 97
3.3 Approssimazione delle funzioni CR 103
3.4 Prolungamento delle funzioni CR 110

4 Il problema del $\bar{\partial}$ **114**
4.1 La formula integrale di Cauchy generalizzata 114
4.2 Il problema del $\bar{\partial}$ a supporto compatto 116
4.3 Il fenomeno di Hartogs generale 119
4.4 Risolubilità del problema del $\bar{\partial}$ nel polidisco 122
4.5 Prolungamento da un sottospazio affine 129
4.6 I problemi di Cousin 134

5 Nuclei integrali **139**
5.1 Il nucleo di Bochner–Martinelli 139
5.2 Il nucleo di Bergman 142
5.3 Il nucleo di Szegő 146

6 Varietà analitiche complesse **148**
6.1 L'anello dei germi 148
6.2 I teoremi di preparazione e di divisione di Weierstrass 150
6.3 Dipendenza degli zeri dai parametri 157
6.4 Proprietà dell'anello dei germi 161
6.5 Varietà analitiche 163
6.6 Ipervarietà 168
6.7 Irriducibilità, parametrizzazione locale e teorema di Puiseux 173
6.8 Varietà di Segre e geometria CR 177

A Notazione e terminologia di base **182**

B Risultati di analisi complessa in una variabile **183**

C Forme differenziali e teorema di Stokes **194**

D Terminologia e risultati fondamentali di algebra **202**

E Risultati di analisi reale **205**
E.1 Richiami di teoria della misura 205
E.2 Convessità classica 209
E.3 Funzioni di taglio lisce e partizioni dell'unità 210

Letture per approfondire **211**

Indice analitico **212**

Elenco delle notazioni **217**

Introduzione

Questo libro nasce dalla rielaborazione degli appunti del corso Math 6283, *Several Complex Variables*, che ho tenuto all'Oklahoma State University nei semestri primaverili del 2014, 2016 e 2019 e nel semestre autunnale del 2023. Il materiale è più di quanto si possa trattare in un semestre e si presta quindi a percorsi diversi. Io stesso, ogni volta che ho tenuto il corso, ho fatto una scelta diversa. Nel testo si incontrano numerosi esercizi di varia difficoltà. Spero che il lettore provi a risolverne la maggior parte, o che almeno si fermi a rifletterci. Molti serviranno nel seguito. Conviene affrontarli nell'ordine in cui compaiono: un esercizio precedente può offrire la chiave per risolverne uno successivo, e talvolta ne costituisce un passaggio indispensabile.

Si presuppongono una discreta conoscenza del calcolo vettoriale, i fondamenti dell'analisi reale e una certa dimestichezza con l'analisi complessa in una variabile. La teoria della misura, in particolare l'integrale di Lebesgue e i suoi teoremi di convergenza, è utile, ma diviene indispensabile soltanto in un paio di punti, più avanti. I capitoli 1 e 2 e gran parte del terzo sono accessibili fin dall'inizio degli studi magistrali, dopo un semestre di analisi complessa in una variabile di livello corrispondente. In alcuni punti è utile conoscere i rudimenti delle forme differenziali: per esempio nella dimostrazione del teorema di Baouendi–Trèves nel capitolo 3 e in buona parte dei capitoli 4 e 5. Nel capitolo 6 useremo qualche nozione elementare di teoria degli anelli. Ho pensato questo libro come testo per il secondo semestre di un corso di analisi complessa. Per il primo semestre si potrebbe usare il mio volume dedicato al caso di una variabile [8].

Il libro vuole offrire una rapida escursione nell'analisi in più variabili complesse. Chi cerca un'opera di consultazione o desidera approfondire troverà in fondo al volume una scelta di letture. Le appendici B, C, D ed E raccolgono rispettivamente alcuni risultati in una variabile complessa, un'introduzione alle forme differenziali, alcune nozioni di algebra e richiami di analisi, compresa la teoria della misura.

Novità della quarta edizione. L'aggiunta principale riguarda il capitolo 4, dedicato al problema del $\bar{\partial}$, che è stato notevolmente ampliato. Numerose modifiche e integrazioni minori, soprattutto nei capitoli 1, 2 e 6, hanno comportato cambiamenti nella numerazione, anche degli esercizi. Ho aggiunto infine una breve appendice E che raccoglie alcuni risultati utili di analisi, a partire dai primi elementi di teoria della misura. L'elenco dettagliato delle modifiche si trova sul sito del libro, `https://www.jirka.org/scv/` oppure `https://jirilebl.github.io/scv/`.

0.1 Motivazioni, il caso di una variabile e la formula di Cauchy

Cominciamo dalle notazioni. Indichiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, con $\mathbb{R}$ quello dei reali, con $\mathbb{Z}$ quello degli interi e con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ quello dei naturali. Poniamo $i = \sqrt{-1}$. In tutto il libro, come di consueto, per *dominio* intendiamo un aperto connesso. Quando la connessione è superflua cercheremo di parlare semplicemente di aperti, anche se talvolta, per brevità, useremo ugualmente il termine dominio.

Poiché l'analisi complessa si occupa di numeri complessi, tanto vale cominciare da $\sqrt{-1}$. Partiamo dal campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali e aggiungiamogli una radice quadrata di -1. Chiamiamola i. Identifichiamo allora $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ scrivendo

$$z = x + iy,$$

dove $z \in \mathbb{C}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Qui c'è una piccola sottigliezza filosofica: le radici quadrate di -1 sono due. Immaginate due galline che scorrazzano in cortile. Per distinguerle ne acchiappiamo una e le scriviamo addosso «i». Se avessimo preso l'altra, avremmo ottenuto una teoria del tutto equivalente, indistinguibile dalla prima.

Dato z, il suo «opposto», in questo senso, è il *complesso coniugato* di z, definito da

$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy.$$

La grandezza di z si misura mediante il suo *modulo*, ossia la distanza euclidea dall'origine:

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, chiamiamo x la *parte reale* e y la *parte immaginaria*. Scriviamo

$$\Re z = \Re(x + iy) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x, \qquad \Im z = \Im(x + iy) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = y.$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ si dice *continuamente differenziabile*, o di classe C^1, se le sue derivate parziali prime rispetto alle variabili reali esistono e sono continue. Analogamente, f è di classe C^k se esistono e sono continue tutte le derivate parziali fino all'ordine k. Infine f si dice di classe C^∞, o semplicemente *liscia*,[1] se è *infinitamente differenziabile*, ossia di classe C^k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

L'analisi complessa studia le funzioni olomorfe, o analitiche complesse. Queste generalizzano i polinomi, e per arrivarci occorre lasciare il terreno dell'algebra e addentrarsi in quello dell'analisi. Con i polinomi si può fare moltissimo, ma qualche volta non bastano. Nessun polinomio non nullo, per esempio, risolve la più semplice delle equazioni differenziali, $f' = f$. Ci occorre l'esponenziale, che è una funzione olomorfa.

Cominciamo dai polinomi. Un polinomio non nullo in z è un'espressione della forma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{d} c_k\, z^k,$$

dove $c_k \in \mathbb{C}$ e $c_d \neq 0$. L'intero d si chiama *grado* di P. Sostituendo a z un numero complesso e calcolando $P(z)$ otteniamo una funzione $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Proviamo ora a scrivere

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k,$$

Tutto fila liscio finché non ci chiediamo quanto valga $f(z)$ per un dato $z \in \mathbb{C}$. Di solito intendiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k = \lim_{d\to\infty} \sum_{k=0}^{d} c_k\, z^k.$$

Dove il limite esiste, abbiamo una funzione. È una storia che conoscete già dal corso di analisi complessa in una variabile. Di solito si procede in senso inverso: si parte dalle funzioni e si dimostra che ammettono uno sviluppo in serie.

Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ è *olomorfa* (o *analitica complessa*) se è derivabile in senso complesso in ogni punto, ossia se

$$f'(z) = \lim_{\xi\in\mathbb{C}\to 0} \frac{f(z+\xi) - f(z)}{\xi} \qquad \text{esiste per ogni } z \in U.$$

[1] È frequente intendere «liscia» nel senso di C^∞, ma l'uso non è uniforme. Ho visto usare questo termine nel senso di differenziabile, di classe C^1, di classe C^1 a tratti, di classe C^∞, olomorfa, e così via.

È essenziale che nel limite l'incremento ξ possa assumere valori complessi. Da un altro punto di vista, si può partire da una funzione $f = u + iv$ di classe C^1[2] e dire che f è olomorfa se soddisfa le *equazioni di Cauchy–Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Gli *operatori di Wirtinger*,

$$\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

permettono di leggere più facilmente queste equazioni. A determinarli sono le condizioni

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z}\bar{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z} = 1.$$

La funzione f è olomorfa se e solo se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

È una formulazione assai più maneggevole delle equazioni di Cauchy–Riemann: abbiamo un'unica equazione complessa. Essa dice che f è olomorfa se e solo se dipende da z ma non da $\bar{z}$; a prima vista, forse, quest'ultima affermazione lascia perplessi. Verifichiamola:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

L'espressione si annulla se e solo se si annullano sia la parte reale sia la parte immaginaria. In altri termini,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

ossia valgono le equazioni di Cauchy–Riemann.

Se f è olomorfa, la derivata rispetto a z è proprio la consueta derivata complessa:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f(z_0 + \xi) - f(z_0)}{\xi}.$$

Infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial (iy)}.\end{aligned}$$

Una funzione su $\mathbb{C}$ è, per l'identificazione precedente, una funzione definita su $\mathbb{R}^2$, dunque una funzione di x e y. Scrivendo $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/(2i)$, possiamo pensarla come funzione delle due variabili complesse z e $\bar{z}$. Facciamo finta per un momento che $\bar{z}$ non dipenda da z. Gli operatori di Wirtinger agiscono proprio come se queste due variabili fossero indipendenti. Per esempio,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^2\bar{z}^3 + z^{10}\right] = 2z\bar{z}^3 + 10z^9 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[z^2\bar{z}^3 + z^{10}\right] = z^2(3\bar{z}^2) + 0.$$

Una funzione olomorfa è dunque una funzione «che non dipende da $\bar{z}$».

Il teorema più importante in una variabile è la *formula integrale di Cauchy*.

[2] Come vedremo, ogni funzione olomorfa è infinitamente differenziabile, sicché questa ipotesi è poco restrittiva.

Teorema 0.1.1 (Formula integrale di Cauchy). Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato la cui frontiera ∂U sia una curva semplice, chiusa e liscia a tratti (una curva di Jordan). Sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in U. Si orienti positivamente ∂U, percorrendola in senso antiorario. Allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{per ogni } z \in U.$$

La formula di Cauchy è l'ingrediente essenziale che ci occorre dalla teoria in una variabile. Segue dal teorema di Green[3], ossia dal teorema di Stokes in dimensione due. Più avanti si troverà la dimostrazione di una formula più generale, la formula integrale di Cauchy–Pompeiu (teorema 4.1.1).

Come forma differenziale, $dz = dx + i\,dy$. Se le forme differenziali vi sono poco familiari, può darsi che nel corso di analisi complessa in una variabile abbiate definito l'integrale lungo una curva direttamente mediante l'integrale di Riemann–Stieltjes. In un caso particolare, scriviamo la formula servendoci del consueto integrale di Riemann. Prendiamo il *disco unitario*

$$\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

La sua frontiera è la circonferenza unitaria $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, orientata positivamente, ossia in senso antiorario. Parametrizziamola mediante e^{it}, con t che varia da 0 a 2π. Se $\zeta = e^{it}$, allora $d\zeta = ie^{it}\,dt$ e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it} - z}\, dt.$$

Se gli integrali lungo curve vi mettono ancora a disagio, provate a scegliere una parametrizzazione: vi ritroverete con un integrale che qualunque studente di analisi saprebbe riconoscere.

Azzarderei che il novanta per cento di ciò che avete imparato nel corso di analisi complessa in una variabile (dipende un po' da chi lo teneva) discenda più o meno direttamente dalla formula integrale di Cauchy. Una conseguenza importante è il *principio del massimo modulo*, o semplicemente *principio del massimo*. Eccone la versione più semplice.

Teorema 0.1.2 (Principio del massimo modulo). Siano $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e $f\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se esiste $z_0 \in U$ tale che

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

allora f è costante, ossia $f \equiv f(z_0)$.

In altre parole, se l'estremo superiore del modulo è raggiunto all'interno del dominio, la funzione è necessariamente costante. Si può anche formulare il principio così: se f si estende con continuità alla frontiera di un dominio limitato, il massimo di $|f(z)|$ sulla chiusura è raggiunto sulla frontiera. Nel corso in una variabile avete visto che, in realtà, il principio del massimo è una proprietà delle funzioni armoniche.

Teorema 0.1.3 (Principio del massimo). Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $h\colon U \to \mathbb{R}$ armonica, ossia

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

[3]Se volete sentirvi inadeguati, ricordate che questo teorema, su cui poggiano tutta l'analisi complessa (e tutta la fisica), fu dimostrato da George Green, figlio di un mugnaio, che aveva frequentato la scuola per un solo anno.

Se per qualche $z_0 \in U$ si ha

$$\sup_{z\in U} h(z) = h(z_0) \qquad \text{oppure} \qquad \inf_{z\in U} h(z) = h(z_0),$$

allora h è costante, ossia $h \equiv h(z_0)$.

In una variabile, se $f = u + iv$ è olomorfa e u, v sono a valori reali, allora u e v sono armoniche. Analogamente, al di fuori dell'insieme degli zeri di f, è armonica $\log|f|$. Localmente ogni funzione armonica è la parte reale (o immaginaria) di una funzione olomorfa. In una variabile complessa, dunque, studiare le funzioni armoniche equivale quasi a studiare le funzioni olomorfe. In due o più variabili le cose vanno assai diversamente.

In ogni punto a del loro dominio le funzioni olomorfe ammettono uno sviluppo in serie di potenze di z:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Non occorrono termini in $\bar{z}$, poiché $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.

Vediamone la dimostrazione a partire dalla formula integrale di Cauchy: lo stesso calcolo ci servirà in più variabili. Dati $a \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$, definiamo il disco di centro a e raggio ρ ponendo

$$\Delta_\rho(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}.$$

Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa e sia $a \in U$. Supponiamo che $\overline{\Delta_\rho(a)} \subset U$, ossia che la chiusura del disco, e quindi anche la sua frontiera $\partial\Delta_\rho(a)$, sia contenuta in U.

Per $z \in \Delta_\rho(a)$ e $\zeta \in \partial\Delta_\rho(a)$ si ha

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho} < 1.$$

Più precisamente, se $|z-a| \le \rho' < \rho$, allora $|(z-a)/(\zeta-a)| \le \rho'/\rho < 1$. Pertanto la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{\zeta-a}{\zeta-z}$$

converge assolutamente e uniformemente per $(z,\zeta) \in \overline{\Delta_{\rho'}(a)} \times \partial\Delta_\rho(a)$, nel senso che converge uniformemente anche la serie dei moduli $\sum_k |(z-a)/(\zeta-a)|^k$.

Sia γ il cammino che percorre una volta $\partial\Delta_\rho(a)$ nel verso positivo. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{\zeta-a}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k d\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta\right)(z-a)^k.
\end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza si può scambiare il limite delle somme parziali con l'integrale per il teorema di Fubini oppure per convergenza uniforme. Infatti z è fissato e, se M è l'estremo superiore di $|f(\zeta)/(\zeta-a)| = |f(\zeta)|/\rho$ su $\partial\Delta_\rho(a)$, si ha

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k\right| \le M\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^k \qquad \text{e} \qquad \frac{|z-a|}{\rho} < 1.$$

Il punto decisivo è scrivere il *nucleo di Cauchy* $1/(\zeta - z)$ nella forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{\zeta - a}{\zeta - z},$$

e servirsi poi della serie geometrica.

Abbiamo così dimostrato che f ammette uno sviluppo in serie di potenze e abbiamo anche ricavato una stima del raggio di convergenza: esso è almeno R, dove R è l'estremo superiore degli r tali che $\Delta_r(a) \subset U$. Per i coefficienti abbiamo ottenuto la formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Dato un insieme K, indichiamo la *norma uniforme* con

$$\|f\|_K \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z\in K}|f(z)|.$$

Una stima diretta fornisce le utilissime *disuguaglianze di Cauchy*:

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\|f\|_\gamma}{\rho^{k+1}}\,|d\zeta| = \frac{\|f\|_\gamma}{\rho^k}.$$

Derivando k volte la formula di Cauchy mediante l'operatore di Wirtinger $\partial/\partial z$, otteniamo

$$f^{(k)}(z) = \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{k!f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta,$$

e pertanto

$$k!\, c_k = f^{(k)}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a).$$

Possiamo dunque stimare le derivate di f in termini della grandezza della funzione stessa:

$$|f^{(k)}(a)| = \left|\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a)\right| \le \frac{k!\|f\|_\gamma}{\rho^k}.$$

Questa stima esprime una proprietà fondamentale delle funzioni olomorfe e spiega perché, sul loro spazio, sia naturale considerare la stessa topologia che si usa per le funzioni continue. Di conseguenza, gli ostacoli alla soluzione dei problemi di analisi complessa sono spesso di natura topologica.

Per altri richiami di analisi complessa in una variabile si veda l'appendice B.

1 Funzioni olomorfe di più variabili

1.1 Il passaggio a più variabili

Indichiamo con $\mathbb{C}^n = \overbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}^{n \text{ volte}}$ lo *spazio euclideo complesso* di dimensione n e con $z = (z_1, \ldots, z_n)$ le sue coordinate. Siano $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ due sistemi di coordinate in $\mathbb{R}^n$. Identifichiamo $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ ponendo $z = x + iy$, ossia $z_k = x_k + iy_k$ per ogni k. Come nel caso di una variabile, scriviamo $\bar{z} = x - iy$. Chiamiamo z le *coordinate olomorfe* e $\bar{z}$ le *coordinate antiolomorfe*.

Definizione 1.1.1. Dati $a \in \mathbb{C}^n$ e $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ con $\rho_k > 0$, definiamo il *polidisco*

$$\Delta_\rho(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < \rho_k \text{ per } k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Il punto a ne è il *centro* e ρ il *poliraggio*, o semplicemente il *raggio*. Quando $\rho > 0$ è uno scalare, poniamo

$$\Delta_\rho(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < \rho \text{ per } k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

In due variabili si parla anche di *bidisco*. Al disco unitario $\mathbb{D}$ di una variabile corrisponde in più variabili il *polidisco unitario*

$$\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D} = \Delta_1(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1 \text{ per } k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Già in due dimensioni complesse è difficile disegnare figure fedeli: sul foglio ci mancano le dimensioni reali necessarie. Possiamo tuttavia rappresentare il bidisco unitario riportando sugli assi i moduli delle coordinate, come nella figura 1.1.

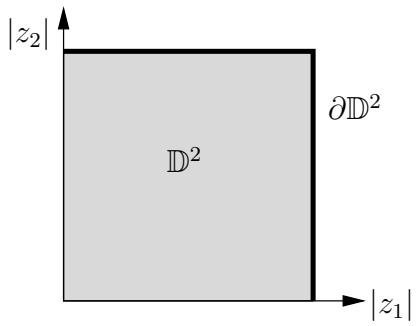


Figura 1.1: Il bidisco unitario.

Ricordiamo il *prodotto scalare hermitiano* di $\mathbb{C}^n$:

$$\langle z, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \cdots + z_n\bar{w}_n.$$

Esso induce la consueta *norma euclidea* di $\mathbb{C}^n$,

$$\|z\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}.$$

che coincide con la norma euclidea usuale di $\mathbb{R}^{2n}$. Come in $\mathbb{R}^{2n}$, definiamo le *palle aperte*

$$B_\rho(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\| < \rho\},$$

e la *palla unitaria*

$$\mathbb{B}_n \stackrel{\text{def}}{=} B_1(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}.$$

Anche una palla con centro nell'origine si può rappresentare sugli assi dei moduli, poiché la disuguaglianza che la definisce dipende solo da questi ultimi. I domini che ammettono una simile rappresentazione si chiamano *domini di Reinhardt*; vi torneremo. La figura 1.2 mostra $\mathbb{B}_2$.

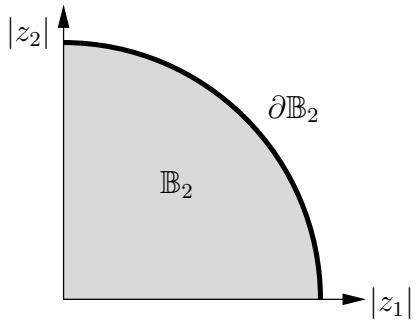


Figura 1.2: La palla $\mathbb{B}_2$ come dominio di Reinhardt.

Definizione 1.1.2. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se è *localmente limitata*[4] e olomorfa separatamente in ciascuna variabile. Ciò equivale a richiedere la locale limitatezza e la derivabilità complessa separatamente in ciascuna variabile:

$$\lim_{\xi \in \mathbb{C} \to 0} \frac{f(z_1, \dots, z_k + \xi, \dots, z_n) - f(z)}{\xi} \qquad \text{esiste per ogni } z \in U \text{ e ogni } k = 1, 2, \dots, n.$$

In questo libro, quando manca la qualificazione «complessa», i termini «differenziabile» e «derivata» si riferiscono all'ordinaria differenziabilità reale.

Come in una variabile, definiamo gli *operatori di Wirtinger*

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Una definizione alternativa consiste nel dire che una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ di classe C^1 è *olomorfa* se soddisfa le *equazioni di Cauchy–Riemann*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \qquad \text{per } k = 1, 2, \dots, n.$$

Per una funzione olomorfa, la definizione naturale di derivata parziale complessa restituisce l'operatore di Wirtinger $\partial/\partial z_k$. Precisamente, se f è olomorfa,

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z) = \lim_{\xi \in \mathbb{C} \to 0} \frac{f(z_1, \dots, z_k + \xi, \dots, z_n) - f(z)}{\xi}.$$

La proposizione seguente assicura che la definizione mediante le equazioni di Cauchy–Riemann equivale a quella data sopra.

[4] Per ogni $p \in U$ esiste un intorno N di p sul quale la restrizione di f è limitata. Equivalentemente, f è limitata sui compatti di U. Un profondo teorema di Hartogs afferma che si potrebbe sopprimere l'ipotesi di locale limitatezza ottenendo la medesima classe di funzioni.

Proposizione 1.1.3. *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f è infinitamente differenziabile. Inoltre $\partial f/\partial z_k$ è olomorfa per ogni k.*

Dimostrazione. Sia $\Delta = \Delta_\rho(a) = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ un polidisco con centro in a, dove ogni Δ_k è un disco. Supponiamo che $\overline{\Delta} \subset U$, ossia che f sia olomorfa in un intorno della chiusura di Δ. Fissiamo $z \in \Delta$. Orientiamo positivamente $\partial\Delta_1$ e applichiamo la formula di Cauchy: dopotutto f è olomorfa in z_1. Otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1.$$

Applichiamola di nuovo, questa volta nella seconda variabile, orientando positivamente anche $\partial\Delta_2$:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial\Delta_1} \int_{\partial\Delta_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_2\, d\zeta_1.$$

Dopo n applicazioni della formula si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial\Delta_1} \int_{\partial\Delta_2} \cdots \int_{\partial\Delta_n} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_n \cdots d\zeta_2\, d\zeta_1. \tag{1.1}$$

Poiché f è limitata sul compatto $\partial\Delta_1 \times \cdots \times \partial\Delta_n$, dalla formula si ricava la continuità di f in Δ e quindi in U. Possiamo ora derivare sotto il segno di integrale mediante l'usuale regola di Leibniz: per z interno al polidisco e a distanza positiva dalla frontiera, l'integrando e le sue derivate parziali rispetto a x_k e y_k, dove $z_k = x_k + iy_k$, sono continui. Possiamo derivare quante volte vogliamo. Anche gli operatori di Wirtinger si possono portare sotto il segno di integrale. Per dimostrare l'ultima affermazione basta derivare rispetto a z_k e poi rispetto a ciascuna $\bar{z}_\ell$, verificando così le equazioni di Cauchy–Riemann. □

Nella (1.1) abbiamo ottenuto la formula integrale di Cauchy in più variabili. Il teorema di Fubini permette di scriverla in forma più compatta, come un unico integrale. Lo faremo nel linguaggio delle forme differenziali. Chi ha poca familiarità con le forme può pensare all'integrale iterato appena scritto e scorrere più rapidamente i prossimi paragrafi. Basta conoscere le forme differenziali reali: qui ci limitiamo ad ammettere coefficienti complessi. Per una panoramica si veda l'appendice C; per una trattazione introduttiva completa, i *Principles of Mathematical Analysis* di Rudin [9].

Date coordinate reali $x = (x_1, \dots, x_n)$, la 1-forma dx_k è il funzionale lineare sui vettori tangenti che vale 1 su $\partial/\partial x_k$ e 0 su $\partial/\partial x_\ell$ per $k \neq \ell$. Scriviamo l'accoppiamento nella forma $\langle \omega, v \rangle$ in luogo di $\omega(v)$, come si usa per mettere in evidenza la multilinearità. Da $z_k = x_k + iy_k$ e $\bar{z}_k = x_k - iy_k$ segue che

$$dz_k = dx_k + i\, dy_k, \qquad d\bar{z}_k = dx_k - i\, dy_k.$$

Indichiamo con δ_k^ℓ il delta di Kronecker, ossia $\delta_k^k = 1$ e $\delta_k^\ell = 0$ per $k \neq \ell$. Come ci si aspetta,

$$\left\langle dz_k, \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right\rangle = \delta_k^\ell, \qquad \left\langle dz_k, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle d\bar{z}_k, \frac{\partial}{\partial z_\ell} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle d\bar{z}_k, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell} \right\rangle = \delta_k^\ell.$$

Le 1-forme sono le espressioni

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, dz_k + \beta_k\, d\bar{z}_k,$$

dove α_k e β_k sono funzioni di z. Le 2-forme sono combinazioni di prodotti esterni $\omega \wedge \eta$ di 1-forme. Il prodotto esterno di una 2-forma e di una 1-forma è una 3-forma, e così via. Una

m-forma si integra su una cosiddetta m-catena, per esempio su una superficie di dimensione m. Il prodotto esterno tiene conto dell'orientazione grazie all'anticommutatività sulle 1-forme: $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$.

Occorre a questo punto precisare l'orientazione di $\mathbb{C}^n$, ossia scegliere l'ordine delle coordinate reali. Vi sono due isomorfismi reali naturali fra $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$. A $z = x + iy$ possiamo associare

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \qquad \text{oppure} \qquad (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n).$$

Partendo dall'orientazione naturale di $\mathbb{R}^{2n}$, i due ordinamenti possono indurre orientazioni opposte su $\mathbb{C}^n$: l'applicazione lineare reale che scambia i due ordinamenti ha determinante $(-1)^{n(n-1)/2}$. In questo libro scegliamo come orientazione naturale di $\mathbb{C}^n$ quella corrispondente al secondo ordinamento, $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Nei calcoli si può usare l'uno o l'altro isomorfismo, purché si mantenga la scelta fatta e si tenga presente l'orientazione sottostante.

Teorema 1.1.4 (Formula integrale di Cauchy). Sia $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco e sia $f\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ continua, olomorfa in Δ. Poniamo $\Gamma = \partial\Delta_1 \times \cdots \times \partial\Delta_n$, con l'orientazione prodotto delle orientazioni positive delle singole circonferenze. Allora, per $z \in \Delta$,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n.$$

Abbiamo enunciato un risultato leggermente più generale: basta che f sia continua sulla chiusura e olomorfa all'interno. I due esercizi che seguono contengono la dimostrazione di questa estensione.

Esercizio 1.1.1. Sia $f\colon \overline{\mathbb{D}^2} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in $\mathbb{D}^2$. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, dimostrare che le funzioni

$$g_1(\xi) = f(\xi, e^{i\theta}) \qquad \text{e} \qquad g_2(\xi) = f(e^{i\theta}, \xi)$$

sono olomorfe in $\mathbb{D}$.

Esercizio 1.1.2. Dimostrare il teorema appena enunciato, ossia la formula integrale di Cauchy sotto la sola ipotesi che f sia continua su $\overline{\Delta}$ e olomorfa in Δ.

La formula integrale di Cauchy mette in luce una proprietà importante e sottile delle funzioni olomorfe in più variabili. I valori di f su Δ sono interamente determinati dai valori che essa assume su Γ, un insieme molto più piccolo della frontiera $\partial\Delta$ del polidisco. Infatti Γ ha dimensione reale n, mentre la frontiera del polidisco ha dimensione reale $2n-1$. L'insieme $\Gamma = \partial\Delta_1 \times \cdots \times \partial\Delta_n$ prende il nome di *frontiera distinta*. La figura 1.3 la illustra per il bidisco.

Nel caso del bidisco, Γ è un toro bidimensionale, come la superficie di una ciambella. L'insieme $\partial\mathbb{D}^2 = (\partial\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}) \cup (\overline{\mathbb{D}} \times \partial\mathbb{D})$ si ottiene unendo due tori solidi. Più precisamente, si può pensare di incollare l'interno e l'esterno della ciambella lungo la superficie torica che hanno in comune. Rispetto all'intera frontiera $\partial\mathbb{D}^2$, l'insieme Γ è davvero piccolo.

Esercizio 1.1.3. Sia Δ un polidisco con frontiera distinta Γ e sia $f\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ continua sulla chiusura e olomorfa in Δ. Dimostrare che $|f(z)|$ raggiunge il massimo su Γ.

Esercizio 1.1.4. La palla si comporta diversamente dal polidisco. Dimostrare che per ogni $p \in \partial\mathbb{B}_n$ esiste una funzione continua $f\colon \overline{\mathbb{B}_n} \to \mathbb{C}$, olomorfa in $\mathbb{B}_n$, il cui modulo raggiunge in p un massimo stretto.

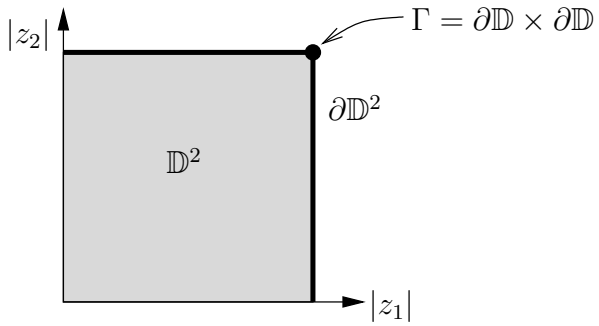


Figura 1.3: La frontiera distinta di $\mathbb{D}^2$.

Esercizio 1.1.5. Mostrare che, in ambito reale, la derivabilità separata rispetto a ciascuna variabile non implica la differenziabilità, neppure per una funzione localmente limitata. Si consideri $f(x, y) = xy/(x^2+y^2)$ fuori dall'origine e si ponga $f(0, 0) = 0$. Dimostrare che f è localmente limitata in $\mathbb{R}^2$ e che in ogni punto esistono tutte le derivate parziali, eppure f non è neanche continua. Le funzioni olomorfe hanno davvero qualcosa di speciale.

Esercizio 1.1.6. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Dimostrare che $f\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è localmente limitata e, per ogni $a, b \in \mathbb{C}^n$, la funzione $\zeta \mapsto f(\zeta a + b)$ è olomorfa nell'aperto $\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta a + b \in U\}$.

Esercizio 1.1.7. Dimostrare una versione in più variabili complesse del teorema di Morera (teorema B.4). Un triangolo $T \subset \mathbb{C}^n$ è l'inviluppo convesso chiuso di tre punti e comprende dunque anche l'interno. Si orienti T in uno dei due modi possibili e si dia a ∂T l'orientazione indotta. Diciamo che T *giace su una retta complessa* quando, detti a, b, c i suoi vertici, esiste $\zeta \in \mathbb{C}$ tale che $\zeta(b - a) = c - a$. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ continua. Dimostrare che f è olomorfa se e solo se

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz_k = 0$$

per ogni triangolo $T \subset U$ che giaccia su una retta complessa e per ogni $k = 1, \dots, n$. *Suggerimento.* Può essere utile l'esercizio precedente.

Esercizio 1.1.8. Sia $f\colon \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$.

1. Dimostrare che f è limitata. *Suggerimento.* Considerare le funzioni $\xi \mapsto f(\xi, a)$ e $\xi \mapsto f(a, \xi)$ per diversi valori di a.

2. Usando il teorema di prolungamento di Riemann in una variabile, dimostrare che esiste una funzione continua $F\colon \overline{\mathbb{D}^2} \to \mathbb{C}$, olomorfa in $\mathbb{D}^2$, tale che $F = f$ su $\overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\}$.

1.2 Rappresentazione mediante serie di potenze

Come avrete notato, scrivere ogni volta tutte le componenti è piuttosto laborioso. Proprio come scriviamo z per il vettore $(z_1, \dots, z_n)$, introduciamo la *notazione multiindice* per rendere più maneggevoli formule come quelle appena incontrate.

Sia $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un vettore di interi non negativi, dove $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Scriviamo

$$
\begin{aligned}
z^\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}, & |z|^\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} |z_1|^{\alpha_1} |z_2|^{\alpha_2} \cdots |z_n|^{\alpha_n}, \\
\frac{1}{z} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z_1 z_2 \cdots z_n}, & \frac{z}{w} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z_1}{w_1}, \frac{z_2}{w_2}, \dots, \frac{z_n}{w_n} \right), \\
\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial z_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}, & dz &\stackrel{\text{def}}{=} dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n, \\
|\alpha| &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, & \alpha! &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!.
\end{aligned}
$$

La notazione, in particolare z^α, conserva significato anche per $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, ammettendo quindi esponenti negativi dove l'espressione è definita. Di solito, tuttavia, si sottintende $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Quando usiamo 1 come vettore intendiamo $(1, \dots, 1)$. Così, per $z \in \mathbb{C}^n$,

$$
1 - z = (1 - z_1, 1 - z_2, \dots, 1 - z_n), \qquad \text{oppure} \qquad z^{\alpha+1} = z_1^{\alpha_1+1} z_2^{\alpha_2+1} \cdots z_n^{\alpha_n+1}.
$$

Con questa notazione occorre tener presente a quale spazio appartenga ciascun simbolo e, soprattutto, non lasciarsi prendere la mano. Per esempio, si potrebbe attribuire a $1/z$ un significato diverso a seconda che si interpreti 1 come un vettore o come un numero, e che ci si aspetti un vettore o uno scalare come risultato. Conviene attenersi ai pochi casi appena descritti e usarli solo quando il significato è chiaro. La formula di Cauchy assume così un aspetto quasi ingannevolmente semplice:

$$
f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.
$$

Passiamo alle serie di potenze. Per semplicità cominciamo da quelle centrate nell'origine. In notazione multiindice una tale serie si scrive

$$
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha.
$$

Converrete che la notazione è più comoda di quella che si otterrebbe scrivendo, per esempio in $\mathbb{C}^3$,

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{k\ell m} z_1^k z_2^\ell z_3^m, \tag{1.2}
$$

La somma iterata, peraltro, non è esattamente la definizione della somma della serie, come vedremo tra poco. Quando dal contesto è chiaro che si tratta di una serie di potenze con esponenti non negativi, scriviamo semplicemente

$$
\sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha.
$$

È importante precisarne il significato. L'insieme $\mathbb{N}_0^n$ degli indici non ha un ordinamento naturale e non ha quindi senso parlare qui di convergenza condizionata. Quando diciamo che la serie *converge*, intendiamo che converge assolutamente. La convergenza assoluta

rende l'ordine dei termini irrilevante. Per esprimere il limite mediante somme parziali basta scegliere una qualunque enumerazione $\alpha(1), \alpha(2), \dots$ dei multiindici e porre

$$\sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} c_{\alpha(k)} z^{\alpha(k)}.$$

Per il teorema di Fubini applicato alle somme, il limite coincide con la somma iterata, per esempio con (1.2).

Diciamo che $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ *converge uniformemente in valore assoluto* su X quando la serie $\sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha|$ converge uniformemente per $z \in X$. La *serie geometrica in più variabili* è $\sum_\alpha z^\alpha$. Nel polidisco unitario, per $z \in \mathbb{D}^n$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_n)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} {z_1}^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} {z_2}^k\right)\cdots\left(\sum_{k=0}^{\infty} {z_n}^k\right)\\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\left({z_1}^{k_1}{z_2}^{k_2}\cdots {z_n}^{k_n}\right) = \sum_\alpha z^\alpha.\end{aligned}$$

La convergenza è uniforme in valore assoluto su ogni compatto del polidisco unitario. Infatti ogni tale compatto è contenuto in un polidisco chiuso $\overline{\Delta}$, centrato nell'origine, con tutti i raggi uguali a $1-\epsilon$ per un opportuno $\epsilon > 0$. Su $\overline{\Delta}$ la tesi segue applicando a ciascun fattore il risultato in una variabile.

Le funzioni olomorfe sono precisamente quelle che ammettono uno sviluppo in serie di potenze.

Teorema 1.2.1. Sia $\Delta = \Delta_\rho(a) \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco e sia $f\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in Δ. In Δ la funzione f è la somma di una serie di potenze che converge uniformemente in valore assoluto sui compatti di Δ:

$$f(z) = \sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha. \tag{1.3}$$

Viceversa, se $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$ è definita dalla serie (1.3) e questa converge uniformemente in valore assoluto sui compatti di Δ, allora f è olomorfa in Δ.

L'ipotesi di continuità sulla chiusura è superflua. Mostreremo fra poco che lo sviluppo è unico. Per ottenerlo si potrebbe quindi lavorare in un qualunque polidisco più piccolo con lo stesso centro a.

Dimostrazione. Supponiamo f continua su $\overline{\Delta}$ e olomorfa in Δ. Orientiamo positivamente $\Gamma = \partial\Delta_1 \times \cdots \times \partial\Delta_n$. Per $z \in \Delta$ e $\zeta \in \Gamma$ scriviamo il nucleo di Cauchy come nel caso di una variabile:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left(\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}\right) = \frac{1}{\zeta-a}\sum_\alpha \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^\alpha.$$

Qui $1/(\zeta - z)$ indica il reciproco del prodotto $(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)$, e analogamente per $1/(\zeta - a)$. Invece $(z-a)/(\zeta-a)$ è il vettore di componenti $(z_j - a_j)/(\zeta_j - a_j)$. La serie geometrica in più variabili è un prodotto di serie geometriche in una variabile, ciascuna delle quali converge uniformemente in valore assoluto sui compatti del disco unitario. Ne segue che la serie precedente converge uniformemente in valore assoluto per $(z,\zeta) \in K \times \Gamma$, qualunque sia il compatto $K \subset \Delta$.

Per $z \in \Delta$ si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_\alpha \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^\alpha d\zeta \\ &= \sum_\alpha \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\alpha+1}} \, d\zeta \right) (z-a)^\alpha. \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza si applica il teorema di Fubini, oppure si usa la convergenza uniforme, proprio come in una variabile. Al variare di z su un compatto, la convergenza uniforme in valore assoluto della serie finale segue da quella della serie geometrica. Si può anche dedurre direttamente dalle stime di Cauchy che dimostreremo tra poco. Abbiamo dunque ottenuto

$$f(z) = \sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha, \quad \text{dove} \quad c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\alpha+1}} \, d\zeta.$$

Il calcolo somiglia in modo sorprendente a quello in una variabile.

Dimostriamo il viceversa. La somma è continua, essendo limite uniforme sui compatti di funzioni continue, e dunque è localmente limitata in Δ. Fissiamo ora tutte le variabili tranne una e consideriamo

$$z_k \mapsto \sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha.$$

Questa funzione di una variabile è olomorfa, in quanto limite uniforme sui compatti di funzioni olomorfe. Per definizione, dunque, f è olomorfa. □

Il viceversa si può anche ottenere applicando termine a termine le equazioni di Cauchy–Riemann. Lasciamo la verifica per esercizio. Occorre anzitutto provare che anche la serie delle derivate converge uniformemente in valore assoluto sui compatti. Si applica poi il teorema di analisi reale sulla derivazione dei limiti: se una successione di funzioni e le successioni delle loro derivate convergono uniformemente, le derivate convergono alle derivate della funzione limite.

Esercizio 1.2.1. Provare che, se una serie di potenze converge uniformemente in valore assoluto sui compatti di un polidisco Δ, anche la serie ottenuta derivando termine a termine converge nello stesso senso. Dare una dimostrazione indipendente dal risultato analogo in una variabile.

Un terzo modo di dimostrare il viceversa consiste nell'osservare che le somme parziali sono olomorfe e nello scrivere per esse la formula di Cauchy. Grazie alla convergenza uniforme, anche il limite soddisfa la formula di Cauchy. Basta allora derivare sotto il segno di integrale.

Esercizio 1.2.2. Seguire questo ragionamento per dimostrare il viceversa senza ricorrere al risultato analogo per le serie in una variabile. *Suggerimento.* Siano $\Delta'' \subset \Delta' \subset \Delta$ tre polidischi di centro a, con $\overline{\Delta''} \subset \Delta'$ e $\overline{\Delta'} \subset \Delta$. Applicare la formula di Cauchy su Δ' per $z \in \overline{\Delta''}$.

Esercizio 1.2.3. Sia $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco di centro a, eventualmente illimitato. Alcuni fattori possono cioè coincidere con $\mathbb{C}$, ossia alcune componenti del poliraggio possono valere ∞. Dimostrare che ogni funzione olomorfa $f \colon \Delta \to \mathbb{C}$ ammette uno sviluppo $\sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha$ che converge a f uniformemente sui compatti di Δ.

Esercizio 1.2.4. Si può ottenere anche uno sviluppo in *serie di Laurent*. Siano $a \in \mathbb{C}^n$ e $U = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_k \times \Delta_{k+1}^* \times \cdots \times \Delta_n^*$. Ogni Δ_ℓ è un disco di centro a_ℓ oppure tutto $\mathbb{C}$, e $\Delta_\ell^* = \Delta_\ell \setminus \{a_\ell\}$. Dimostrare che ogni funzione olomorfa $f\colon U \to \mathbb{C}$ ammette uno sviluppo $\sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha$, con $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ variabili in tutto $\mathbb{Z}$, che converge a f uniformemente sui compatti di U.

Proposizione 1.2.2. Sia $\Delta = \Delta_\rho(a) \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco con frontiera distinta Γ. Sia $f\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in Δ. Per $z \in \Delta$ vale

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\alpha! f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}}\, d\zeta.$$

In particolare, se f è data da (1.3), allora

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(a),$$

e valgono le *stime di Cauchy*

$$|c_\alpha| \leq \frac{\|f\|_\Gamma}{\rho^\alpha}.$$

I coefficienti dipendono quindi soltanto dalle derivate di f in a, e dunque dai valori di f in un intorno arbitrariamente piccolo di a. La scelta del polidisco impiegato nel teorema è irrilevante.

Dimostrazione. Per la regola di Leibniz, quando z è interno a Δ si può derivare sotto il segno di integrale nella formula di Cauchy. Si tratta delle consuete derivate parziali reali, che combiniamo nell'operatore di Wirtinger. Il punto è che

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell}\left[\frac{1}{(\zeta_\ell - z_\ell)^k}\right] = \frac{k}{(\zeta_\ell - z_\ell)^{k+1}}.$$

Vediamo il calcolo per una derivata:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z_1}(z) &= \frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^2(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n.\end{aligned}$$

Derivando una seconda volta si trova

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{2 f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^3(\zeta_2 - z_2)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n.$$

Notate il 2 davanti a f. Alla derivata successiva compare un fattore 3. Dopo m derivazioni rispetto a z_1 il fattore è $m!$, esattamente come in una variabile. Basta un momento di riflessione per verificare che, per $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{\alpha!\, f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}}\, d\zeta.$$

Ne segue

$$\alpha!\, c_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(a).$$

Come prima, otteniamo le stime di Cauchy:

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(a)\right| = \left|\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{\alpha!\, f(\zeta)}{(\zeta-a)^{\alpha+1}}\, d\zeta\right| \le \frac{1}{(2\pi)^n}\int_\Gamma \frac{\alpha!\,|f(\zeta)|}{\rho^{\alpha+1}}\,|d\zeta| \le \frac{\alpha!}{\rho^\alpha}\|f\|_\Gamma. \qquad \square$$

Come nella teoria di una variabile, dalle stime di Cauchy segue la proposizione seguente.

Proposizione 1.2.3. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Se una successione di funzioni olomorfe $f_\ell \colon U \to \mathbb{C}$ converge a f uniformemente sui compatti, allora f è olomorfa e, per ogni α, le derivate $\partial^{|\alpha|} f_\ell / \partial z^\alpha$ convergono a $\partial^{|\alpha|} f / \partial z^\alpha$ uniformemente sui compatti.

Esercizio 1.2.5. Dimostrare la proposizione precedente.

Data una serie di potenze, sia $W \subset \mathbb{C}^n$ l'insieme dei punti in cui la serie converge assolutamente. L'interno di W si chiama *dominio di convergenza*. In una variabile ciascun dominio di convergenza è un disco ed è quindi descritto da un solo numero, il raggio. In più variabili la descrizione è meno semplice. Per la serie geometrica il dominio di convergenza è il polidisco unitario, ma in generale può avere una forma più complicata.

Esempio 1.2.4. In $\mathbb{C}^2$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_1 z_2^k$$

converge assolutamente esattamente sull'insieme

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_2| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0\}.$$

Questo insieme non è un polidisco. Non è né aperto né chiuso, e la sua chiusura differisce da quella del dominio di convergenza, che è $\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_2| < 1\}$.

Esempio 1.2.5. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_1^k z_2^k$$

converge assolutamente esattamente sull'insieme

$$\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1 z_2| < 1\}.$$

La figura 1.4 mostra una forma ben diversa da quella di un polidisco.

Esercizio 1.2.6. Trovare il dominio di convergenza di $\sum_{k,\ell} z_1^k z_2^\ell/\ell!$ e disegnarlo nel piano dei moduli.

Esercizio 1.2.7. Trovare e disegnare il dominio di convergenza di $\sum_{k,\ell} c_{k\ell} z_1^k z_2^\ell$, dove $c_{\ell\ell} = 2^\ell$, $c_{0\ell} = c_{k0} = 1$ e gli altri coefficienti sono nulli.

Esercizio 1.2.8. Supponiamo che una serie in due variabili sia la somma di una serie di potenze in z_1 e di una in z_2. Dimostrare che il dominio di convergenza è un polidisco.

Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ si dice *dominio di Reinhardt* se da $z \in U$ e $|w_k| = |z_k|$ per ogni k segue $w \in U$. I domini che abbiamo disegnato sono di Reinhardt. Sono precisamente quelli che si possono raffigurare considerando soltanto i moduli delle coordinate. Il dominio si dice *di Reinhardt completo* se, per ogni $z \in U$, contiene tutto il polidisco chiuso $\overline{\Delta_r(0)}$ di raggi $r_k = |z_k|$. Un dominio di Reinhardt completo è quindi unione, eventualmente infinita, di polidischi centrati nell'origine.

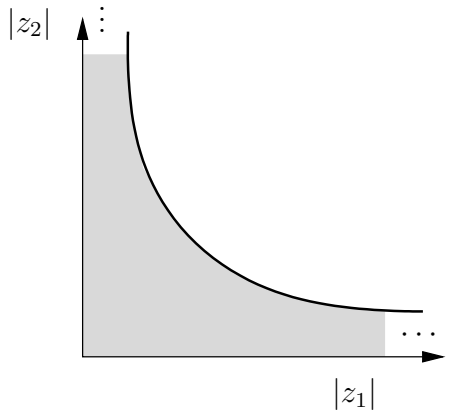


Figura 1.4: Dominio di convergenza di $\sum_k z_1^k z_2^k$, rappresentato nel piano dei moduli.

Proposizione 1.2.6. Il dominio di convergenza di una serie di potenze convergente $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ è un dominio di Reinhardt completo.

Esercizio 1.2.9. Dimostrare la proposizione 1.2.6.

Teorema 1.2.7 (teorema di identità). Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, ossia un aperto connesso, e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se f si annulla identicamente in un aperto non vuoto $N \subset U$, allora $f \equiv 0$ in U.

Dimostrazione. Sia Z l'insieme dei punti in cui si annullano f e tutte le sue derivate di ogni ordine. Poiché $N \subset Z$, l'insieme Z non è vuoto. È chiuso in U per la continuità delle derivate. Sia ora $a \in Z$ e sviluppiamo f in serie di potenze in un polidisco $\Delta_\rho(a) \subset U$. I coefficienti sono dati dalle derivate in a, quindi sono tutti nulli. La funzione è identicamente nulla in $\Delta_\rho(a)$, che è pertanto contenuto in Z. Così Z è anche aperto e, per la connessione di U, si ha $Z = U$. □

Spesso si applica il teorema a $f - g$: due funzioni olomorfe che coincidono su un piccolo aperto coincidono ovunque nel dominio. In una variabile (teorema B.7) basta che N abbia un punto di accumulazione interno a U. In più variabili le cose cambiano: $f(z_1, z_2) = z_1$ si annulla su $\{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0\}$, i cui punti sono tutti di accumulazione per l'insieme stesso. Per $n \geq 2$ gli zeri non sono mai isolati, come vedremo nell'esercizio 1.2.21.

Teorema 1.2.8 (principio del massimo). Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se $|f|$ ha un massimo locale in $a \in U$, allora $f \equiv f(a)$.

Dimostrazione. Prendiamo un polidisco $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ di centro a contenuto in un intorno su cui $|f| \leq |f(a)|$. La funzione

$$z_1 \mapsto f(z_1, a_2, \ldots, a_n)$$

è olomorfa in Δ_1 e il suo modulo raggiunge il massimo al centro. Per il principio del massimo in una variabile essa è costante. Dunque $f(z_1, a_2, \ldots, a_n) = f(a)$ per ogni $z_1 \in \Delta_1$. Fissato un tale z_1, consideriamo

$$z_2 \mapsto f(z_1, z_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Anche questa funzione è olomorfa e raggiunge il massimo del modulo al centro di Δ_2, quindi è costante in Δ_2. Ripetendo il ragionamento si ottiene $f(z) = f(a)$ per ogni $z \in \Delta$. Per il teorema di identità l'uguaglianza vale in tutto U. □

Esercizio 1.2.10. Sia V la misura di volume in $\mathbb{R}^{2n}$, e quindi in $\mathbb{C}^n$. Siano Δ un polidisco di centro a e f olomorfa in un intorno della sua chiusura. Dimostrare che

$$f(a) = \frac{1}{V(\Delta)} \int_\Delta f(\zeta)\, dV(\zeta),$$

dove $V(\Delta)$ è il volume di Δ e dV è la misura di volume. Il valore al centro è dunque la media dei valori della funzione sul polidisco.

Esercizio 1.2.11. Dimostrare il principio del massimo mediante la formula di Cauchy. *Suggerimento.* Usare l'esercizio precedente.

Esercizio 1.2.12. Dimostrare un analogo del *lemma di Schwarz* in più variabili. Sia f olomorfa in un intorno di $\overline{\mathbb{B}_n}$, con $f(0) = 0$. Supponiamo che per un $k \in \mathbb{N}$ tutte le derivate $\partial^{|\alpha|} f / \partial z^\alpha$ in 0 siano nulle per $|\alpha| < k$ e che $|f(z)| \leq M$ per $z \in \mathbb{B}_n$. Dimostrare che

$$|f(z)| \leq M\|z\|^k \qquad \text{per ogni } z \in \overline{\mathbb{B}_n}.$$

Esercizio 1.2.13. Dedurre dal teorema di Liouville in una variabile la sua versione in più variabili: ogni funzione olomorfa e limitata $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ è costante.

Esercizio 1.2.14. Affinare il teorema di Liouville in $\mathbb{C}^2$. Una retta complessa passante per l'origine è l'immagine di un'applicazione lineare non nulla $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$.

1. Per $n \geq 2$, dimostrare che, data una qualunque famiglia finita di tali rette, esiste una funzione intera non costante che è limitata, e dunque costante, su ciascuna di esse.

2. Dimostrare che una funzione intera in $\mathbb{C}^2$, limitata su infinite rette complesse distinte passanti per l'origine, è costante.

3. Trovare una funzione intera non costante in $\mathbb{C}^3$ limitata su infinite rette complesse distinte passanti per l'origine.

Esercizio 1.2.15. Dimostrare il *teorema di Montel* in più variabili. Se $\{f_k\}$ è una successione uniformemente limitata di funzioni olomorfe su un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$, esiste una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti a una funzione olomorfa f. *Suggerimento.* Imitare la dimostrazione in una variabile.

Esercizio 1.2.16. Dimostrare il *teorema di Hurwitz* in più variabili. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni olomorfe prive di zeri su un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, convergente uniformemente sui compatti a f. Dimostrare che f è identicamente nulla oppure non si annulla mai. *Suggerimento.* Si può usare il risultato in una variabile.

Esercizio 1.2.17. Sia $D \subset \mathbb{C}^n$ una palla di centro p. Una funzione olomorfa $f\colon D \to \mathbb{C}$ si può *prolungare analiticamente* lungo un cammino $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$, con $\gamma(0) = p$, se per ogni t esistono una palla D_t di centro $\gamma(t)$ e una funzione olomorfa f_t su D_t, con $D_0 = D$ e $f_0 = f$, tali che, per ogni t_0, esista $\epsilon > 0$ per cui $f_t = f_{t_0}$ in $D_t \cap D_{t_0}$ quando $|t - t_0| < \epsilon$. Dimostrare il *teorema di monodromia* in più variabili: se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio semplicemente connesso, $D \subset U$ è una palla e f si prolunga analiticamente lungo ogni cammino in U che parte dal centro p di D, allora esiste un'unica funzione olomorfa F su U tale che $F|_D = f$.

Definizione 1.2.9. Per un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathcal{O}(U)$ l'*anello delle funzioni olomorfe* $f\colon U \to \mathbb{C}$. La lettera $\mathcal{O}$ ricorda il contributo fondamentale di Kiyoshi Oka alla teoria delle funzioni di più variabili complesse.[5]

Con la somma e il prodotto puntuali $\mathcal{O}(U)$ è effettivamente un anello commutativo, come si verifica nell'esercizio seguente. Qui $\mathcal{O}(U)$ indica sempre funzioni a valori in $\mathbb{C}$. In letteratura talvolta si usa la stessa notazione per esprimere l'olomorfia indipendentemente dal codominio.

Esercizio 1.2.18. Dimostrare che $\mathcal{O}(U)$ è un anello commutativo rispetto alle operazioni

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \qquad (fg)(z) = f(z)g(z).$$

Esercizio 1.2.19. Dimostrare che $\mathcal{O}(U)$ è un dominio d'integrità, ossia non ha divisori dello zero, se e solo se U è connesso. In altri termini, la connessione di U equivale alla proprietà seguente: se $f, g \in \mathcal{O}(U)$ e fg è identicamente nulla, allora f oppure g è identicamente nulla.

Una funzione F definita su un aperto denso di U si dice *meromorfa* se in un intorno di ogni $p \in U$ si scrive $F = f/g$, con f e g olomorfe in tale intorno. Un profondo risultato di Oka afferma che, per un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, ogni funzione meromorfa ammette una tale rappresentazione globale. In altre parole, l'anello delle funzioni meromorfe è il campo delle frazioni di $\mathcal{O}(U)$. È il cosiddetto *problema di Poincaré*. Se si passa dai domini alle varietà complesse, la risposta in generale non è più affermativa. I punti di U attraverso i quali F non si prolunga olomorficamente si chiamano *poli* di F: sono i punti in cui g si annulla per ogni rappresentazione locale f/g. In più variabili i poli non sono mai isolati. Si incontra inoltre un nuovo tipo di singolarità.

Esercizio 1.2.20. In due variabili non si può più attribuire a una funzione meromorfa il solo valore ∞ ovunque si annulli il denominatore. Dimostrare che $F(z,w) = z/w$ assume tutti i valori complessi in ogni intorno dell'origine. L'origine si chiama *punto di indeterminazione.*

Esercizio 1.2.21. Dimostrare che in $\mathbb{C}^n$, per $n \geq 2$, gli zeri di una funzione olomorfa non sono mai isolati. *Suggerimento.* Considerare $z_1 \mapsto f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ facendo variare $z_2, \ldots, z_n$ e usare, se occorre, il teorema di Hurwitz.

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Kiyoshi_Oka`

1.3 Derivate

Data $f = u + iv$, la funzione coniugata è $\bar{f} = u - iv$, ossia $z \mapsto \overline{f(z)}$. Se f è olomorfa, $\bar{f}$ si dice *antiolomorfa*. Una funzione antiolomorfa dipende da $\bar{z}$ e non da z. Quando vogliamo esplicitare la variabile scriviamo dunque $\bar{f}(\bar{z})$. Per capire questa convenzione basta tornare alla definizione degli operatori di Wirtinger:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_\ell} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\ell}} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_\ell} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_\ell}\right)}, \qquad \text{per ogni } \ell = 1, \dots, n.$$

Quando una funzione non è né olomorfa né antiolomorfa, immaginiamo che dipenda sia da z sia da $\bar{z}$. Poiché vogliamo esprimerla in queste variabili, cerchiamo la regola di derivazione delle funzioni composte direttamente per le derivate di Wirtinger, senza tornare ogni volta a x e y.

Proposizione 1.3.1 (regola della catena complessa). Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ aperti e siano $f\colon U \to V$ e $g\colon V \to \mathbb{C}$ differenziabili in senso reale. Indichiamo con $z = (z_1, \dots, z_n)$ le coordinate in U e con $w = (w_1, \dots, w_m)$ quelle in V. Per $\ell = 1, \dots, n$ valgono le formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_\ell}[g \circ f] &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial w_k}\frac{\partial f_k}{\partial z_\ell} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k}\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_\ell} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell}[g \circ f] &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial w_k}\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_\ell} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k}\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{z}_\ell} \right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Scriviamo $f = u + iv$, $z = x + iy$ e $w = s + it$. Pensiamo a f come funzione di z e a g come funzione di w. Nella composizione sostituiamo f a w, e quindi u a s e v a t. La consueta regola della catena dà

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_\ell}[g \circ f] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} - i\frac{\partial}{\partial y_\ell}\right)[g \circ f] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial s_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial g}{\partial t_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} - i\left(\frac{\partial g}{\partial s_k}\frac{\partial u_k}{\partial y_\ell} + \frac{\partial g}{\partial t_k}\frac{\partial v_k}{\partial y_\ell}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial s_k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} - i\frac{\partial u_k}{\partial y_\ell}\right) + \frac{\partial g}{\partial t_k}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} - i\frac{\partial v_k}{\partial y_\ell}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial s_k}\frac{\partial u_k}{\partial z_\ell} + \frac{\partial g}{\partial t_k}\frac{\partial v_k}{\partial z_\ell}\right). \end{aligned}$$

Per $k = 1, \dots, m$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_k} = \frac{\partial}{\partial w_k} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k}, \qquad \frac{\partial}{\partial t_k} = i\left(\frac{\partial}{\partial w_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k}\right).$$

Proseguendo il calcolo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_\ell}[g \circ f] &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial s_k}\frac{\partial u_k}{\partial z_\ell} + \frac{\partial g}{\partial t_k}\frac{\partial v_k}{\partial z_\ell}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial w_k}\frac{\partial u_k}{\partial z_\ell} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k}\frac{\partial u_k}{\partial z_\ell}\right) + i\left(\frac{\partial g}{\partial w_k}\frac{\partial v_k}{\partial z_\ell} - \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k}\frac{\partial v_k}{\partial z_\ell}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial w_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial z_\ell} + i\frac{\partial v_k}{\partial z_\ell}\right) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial z_\ell} - i\frac{\partial v_k}{\partial z_\ell}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial w_k} \frac{\partial f_k}{\partial z_\ell} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_k} \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_\ell} \right).$$

Per la derivata rispetto a $\bar{z}_\ell$ si procede allo stesso modo. □

La proposizione spiega perché, trattando una funzione f non necessariamente olomorfa, scriviamo spesso $f(z, \bar{z})$, come se fosse funzione di z e di $\bar{z}$.

Osservazione 1.3.2. Questa convenzione nasconde una sottigliezza. Nelle derivazioni formali z e $\bar{z}$ si comportano come variabili indipendenti. Quando però si vuole calcolare il valore della funzione, la seconda è il coniugato della prima. In ultima analisi una funzione liscia, non necessariamente olomorfa, è una funzione delle variabili reali x e y, dove $z = x + iy$.

Osservazione 1.3.3. Avremmo potuto scambiare ovunque z con $\bar{z}$. Sono, in un certo senso, gemelle: basta sapere quale sia l'una e quale l'altra. Tutto comincia dalla scelta di quale fra le due radici quadrate di -1 chiamare i. Ricordate le galline? Nessuna scelta è più naturale dell'altra, ma una volta fatta occorre essere coerenti. Scegliendo i decidiamo anche quali funzioni chiamare olomorfe e quali antiolomorfe. È una sottigliezza filosofica oltre che matematica.

Definizione 1.3.4. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Un'applicazione $f = (f_1, \dots, f_m) \colon U \to \mathbb{C}^m$ si dice *olomorfa* se tutte le sue componenti f_k sono funzioni olomorfe.

Come in una variabile, la composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa.

Teorema 1.3.5. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ aperti. Se $f \colon U \to V$ e $g \colon V \to \mathbb{C}^q$ sono olomorfe, anche $g \circ f$ è olomorfa.

Dimostrazione. Con la regola della catena la dimostrazione è quasi immediata. Usiamo ancora le variabili $w \in V$ per g e $z \in U$ per f. Per $\ell = 1, \dots, n$ e $\nu = 1, \dots, q$ calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell} [g_\nu \circ f] = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial g_\nu}{\partial w_k} \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_\ell}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial g_\nu}{\partial \bar{w}_k}}_{0} \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{z}_\ell} \right) = 0. \qquad \square$$

Per le applicazioni olomorfe la regola della catena si riduce alla forma familiare del calcolo vettoriale. Siano ancora $f \colon U \to V$ e $g \colon V \to \mathbb{C}$ olomorfe, con le coordinate di prima. Nella formula (1.4), relativa alla derivata rispetto a z_ℓ, si annullano sia la derivata di g rispetto a $\bar{w}_k$ sia la derivata di $\bar{f}_k$ rispetto a z_ℓ. Pertanto, per $\ell = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial z_\ell} [g \circ f] = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial w_k} \frac{\partial f_k}{\partial z_\ell}.$$

Esercizio 1.3.1. Usando soltanto le derivate di Wirtinger, dimostrare che una funzione olomorfa a valori reali su un dominio è costante.

Esercizio 1.3.2. Sia f olomorfa su $\mathbb{C}^n$. Con $\bar{f}$ intendiamo $z \mapsto \overline{f(z)}$ e di solito scriviamo $\bar{f}(\bar{z})$ per ricordarne l'antiolomorfia. Quando invece scriviamo $\bar{f}(z)$ intendiamo $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$: coniughiamo sia l'argomento sia il valore. Dimostrare che quest'ultima funzione è olomorfa e che f assume valori reali su $\mathbb{R}^n$ (cioè per $y = 0$) se e solo se $f(z) = \bar{f}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$.

Per un'applicazione olomorfa $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ e un punto $p \in U \subset \mathbb{C}^n$ definiamo la *derivata olomorfa*, detta anche *matrice jacobiana olomorfa*, ponendo

$$Df(p) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial f_k}{\partial z_\ell}(p)\right]_{k\ell}.$$

Si usa anche la notazione $f'(p) = Df(p)$. Salvo indicazione contraria, parlando di un'applicazione olomorfa, per matrice jacobiana intenderemo quella olomorfa.

Esercizio 1.3.3. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, con $\mathbb{R}^n$ immerso in $\mathbb{C}^n$ nel modo consueto. Sia $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ olomorfa e supponiamo che assuma valori in $\mathbb{R}^m$ su $U \cap \mathbb{R}^n$. Dimostrare che per $p \in U \cap \mathbb{R}^n$ la matrice jacobiana reale della restrizione $f|_{U\cap\mathbb{R}^n}\colon U \cap \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in p coincide con la matrice jacobiana olomorfa di f in p. In particolare, $Df(p)$ ha elementi reali.

Per la regola della catena olomorfa, proprio come nel caso reale, la derivata della composizione è la composizione delle derivate, rappresentata dal prodotto delle matrici corrispondenti.

Proposizione 1.3.6 (regola della catena per applicazioni olomorfe). Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ aperti, $f\colon U \to V$ e $g\colon V \to \mathbb{C}^q$ olomorfe e $p \in U$. Allora

$$D(g \circ f)(p) = Dg\big(f(p)\big)\, Df(p).$$

In forma abbreviata scriveremo spesso $D(g \circ f) = Dg\, Df$.

Esercizio 1.3.4. Dimostrare la proposizione.

Supponiamo che $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ sia differenziabile in $p \in U \subset \mathbb{C}^n$. Identificando $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ vediamo f come un'applicazione a valori in $\mathbb{R}^{2m}$. La consueta matrice jacobiana del calcolo vettoriale, di dimensioni $2m \times 2n$ e a elementi reali, si chiama *matrice jacobiana reale* e si indica con $D_{\mathbb{R}} f(p)$.

Proposizione 1.3.7. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto, $p \in U$ e $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ olomorfa. Allora

$$|\det Df(p)|^2 = \det D_{\mathbb{R}} f(p).$$

Chiamiamo $\det Df(p)$ *determinante jacobiano olomorfo*. Occorre naturalmente distinguerlo dal determinante reale $\det D_{\mathbb{R}} f(p)$. Ricordiamo dal calcolo vettoriale che dove il determinante jacobiano reale di un'applicazione liscia è positivo, l'applicazione conserva l'orientazione. La proposizione mostra in particolare che le applicazioni olomorfe conservano l'orientazione nei loro punti regolari.

Dimostrazione. Mediante l'identificazione di $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ scriviamo f nella forma

$$(\Re f_1, \Im f_1, \dots, \Re f_n, \Im f_n),$$

in funzione di $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. L'enunciato riguarda soltanto le derivate in p. Possiamo dunque assumere $p = 0$ e sostituire f con la sua parte lineare complessa, $f(z) = Az$, con

A matrice $n \times n$. Si tratta ormai di una questione di matrici. La matrice A è la jacobiana olomorfa. Sia B la jacobiana reale.

Sia nel dominio sia nel codominio passiamo alle coordinate $(z, \bar{z})$ mediante $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$. Il cambiamento di base è dato da una matrice complessa invertibile M. La matrice $M^{-1}BM$ raccoglie le derivate di $(f_1, \dots, f_n, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ rispetto a $(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$. In altre parole,

$$M^{-1}BM = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$\det(B) = \det(M^{-1}BM) = \det(A)\det(\overline{A}) = \det(A)\,\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2. \qquad \square$$

Dal teorema reale delle funzioni implicite e dalla regola della catena si ottiene il teorema delle funzioni implicite in ambito olomorfo. Il passaggio essenziale consiste nel verificare, con la regola della catena, che la soluzione data dal teorema reale è olomorfa.

Teorema 1.3.8 (teorema delle funzioni implicite). Sia $U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ aperto, con coordinate (z, w), e sia $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ olomorfa. Supponiamo che in $(z^0, w^0) \in U$ valga $f(z^0, w^0) = 0$ e che la matrice $m \times m$

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial w_\ell}(z^0, w^0)\right]_{k\ell}$$

sia invertibile. Esistono allora intorni aperti $V \subset \mathbb{C}^n$ di z^0 e $W \subset \mathbb{C}^m$ di w^0, con $V \times W \subset U$, e un'applicazione olomorfa $g\colon V \to W$, con $g(z^0) = w^0$, tali che per ogni $z \in V$ il punto $g(z)$ è l'unico $w \in W$ per cui $f(z, w) = 0$. Vale dunque

$$f\big(z, g(z)\big) = 0.$$

Esercizio 1.3.5. Dimostrare il teorema delle funzioni implicite olomorfe appena enunciato. *Suggerimento.* Verificare che si può applicare il consueto teorema per funzioni di classe C^1 e mostrare poi che la funzione g ottenuta è olomorfa.

Esercizio 1.3.6. Enunciare e dimostrare la versione olomorfa del teorema della funzione inversa.

Esercizio 1.3.7. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ olomorfa.

1. Dimostrare il principio del massimo per applicazioni a valori vettoriali: se $\|f(z)\|$ ha un massimo locale in $p \in U$, allora f è costante.

2. Trovare un controesempio al principio del minimo vettoriale, ossia un'applicazione f non costante per cui $\|f(z)\|$ raggiunga un minimo diverso da zero.

1.4 Non equivalenza della palla e del polidisco

Definizione 1.4.1. Due domini $U, V \subset \mathbb{C}^n$ si dicono *biolomorfi*, o *biolomorficamente equivalenti*, se esiste un'applicazione olomorfa biiettiva $f\colon U \to V$ la cui inversa $f^{-1}\colon V \to U$ sia anch'essa olomorfa. Una tale f si chiama *applicazione biolomorfa* o *biolomorfismo*.

Su domini biolomorfi la teoria delle funzioni è la stessa. Uno dei problemi centrali dell'analisi complessa è perciò classificare i domini a meno di biolomorfismi. In una variabile si ha un risultato sorprendente, dovuto a Riemann.

Teorema 1.4.2 (teorema della rappresentazione conforme di Riemann). Ogni dominio semplicemente connesso non vuoto $U \subset \mathbb{C}$, diverso da tutto $\mathbb{C}$, è biolomorfo al disco unitario $\mathbb{D}$.

In una variabile basta dunque una proprietà topologica per classificare un'intera famiglia di domini. Ecco perché il disco occupa un posto tanto importante e perché molti teoremi vengono enunciati soltanto per il disco. In più variabili il teorema non ha un analogo. Mostreremo tra poco che la palla unitaria e il polidisco unitario,

$$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1 \text{ per } k = 1, \dots, n\},$$

non sono biolomorfi per $n \geq 2$. Entrambi sono semplicemente connessi (non hanno buchi) ed entrambi generalizzano in modo naturale il disco. Sono addirittura omeomorfi: dal punto di vista topologico non si vede alcuna differenza.

Esercizio 1.4.1. Dimostrare che esiste un omeomorfismo $f\colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{D}^n$, ossia una biiezione continua con inversa continua.

Limitiamoci a $n = 2$. Invece di dimostrare soltanto che $\mathbb{B}_2$ e $\mathbb{D}^2$ non sono biolomorfi, proveremo qualcosa di più forte. Occorre una definizione.

Definizione 1.4.3. Un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ fra spazi topologici si dice *propria* se per ogni compatto $K \subset Y$ la controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta.

La notazione $K \Subset Y$ indica di solito un sottoinsieme relativamente compatto: la sua chiusura in Y, con la topologia relativa, è compatta. Spesso la distinzione fra compatto e relativamente compatto è inessenziale. Nella definizione precedente possiamo, per esempio, richiedere che $f^{-1}(K)$ sia relativamente compatto in X per ogni K relativamente compatto in Y (negli spazi di Hausdorff qui considerati). Talvolta, se il contesto è chiaro, si scrive $K \Subset Y$ sottintendendo che K sia compatto.

Intuitivamente, per un'applicazione propria «la frontiera va nella frontiera». Un'applicazione continua manda compatti in compatti. Per una propria, anche le controimmagini dei compatti sono compatte. Se esiste un'inversa continua, f è certamente propria, ma una mappa propria può non essere invertibile. Per esempio, $f(z) = z^2$ da $\mathbb{D}$ in $\mathbb{D}$ è propria e non è invertibile. Il codominio conta: la medesima formula $g(z) = z^2$, vista come applicazione da $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$, non definisce più una mappa propria.

Teorema 1.4.4 (Rothstein, 1935). Non esiste alcuna applicazione olomorfa propria dal bidisco unitario $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ nella palla unitaria $\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{C}^2$.

Poiché ogni biolomorfismo è proprio, il bidisco unitario e la palla unitaria in $\mathbb{C}^2$ non sono biolomorficamente equivalenti. Poincaré fu il primo a mostrare la non equivalenza calcolando i gruppi di automorfismi di $\mathbb{D}^2$ e di $\mathbb{B}_2$, ma nella dimostrazione suppose che le applicazioni si prolungassero oltre la frontiera. Henri Cartan diede la prima dimostrazione completa nel 1931. Il teorema viene comunque spesso attribuito a Poincaré. Sembra quasi

di prammatica, in una conferenza divulgativa sulle funzioni di più variabili complesse, citare Poincaré, e non di rado lo si cita proprio per questo teorema.

Ci serviranno alcuni lemmi. Cominciamo da un oggetto unidimensionale che ha un ruolo importante nella geometria in più variabili complesse. Permette di applicare risultati in una variabile, soprattutto nello studio del comportamento delle funzioni olomorfe alla frontiera, e ricorre spesso in geometria complessa.

Definizione 1.4.5. Un'applicazione olomorfa non costante $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ si chiama *disco analitico*. Se si prolunga con continuità al disco chiuso, l'applicazione $\varphi\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^n$ si chiama *disco analitico chiuso*. Spesso chiamiamo disco analitico l'immagine $\Delta = \varphi(\mathbb{D})$. Per un disco analitico chiuso scriviamo $\partial\Delta = \varphi(\partial\mathbb{D})$ e chiamiamo questo insieme la sua frontiera.

In un certo senso i dischi analitici svolgono in $\mathbb{C}^n$ il ruolo dei segmenti. Anche quando interessa soprattutto l'insieme, è importante ricordare la parametrizzazione che lo definisce. L'immagine, naturalmente, non determina univocamente φ.

Confrontiamo le frontiere del bidisco e della palla in $\mathbb{C}^2$. Per $p \in \partial\mathbb{D}$ la frontiera del bidisco contiene i dischi analitici $\{p\} \times \mathbb{D}$ e $\mathbb{D} \times \{p\}$. Per ogni suo punto, eccettuati quelli della frontiera distinta $\partial\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$, passa quindi un disco analitico interamente contenuto nella frontiera. Per la palla accade tutt'altro.

Proposizione 1.4.6. La sfera unitaria $S^{2n-1} = \partial\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ non contiene dischi analitici.

Dimostrazione. Sia $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ olomorfa con immagine nella sfera. Per ogni $z \in \mathbb{D}$ vale

$$\|g(z)\|^2 = |g_1(z)|^2 + |g_2(z)|^2 + \cdots + |g_n(z)|^2 = 1.$$

Componendo con una trasformazione unitaria possiamo supporre che $g(0) = (1, 0, \ldots, 0)$. In particolare $g_1(0) = 1$. Poiché ogni addendo non negativo della somma precedente è al più 1, si ha $|g_1(z)| \leq 1$. Per il principio del massimo $g_1 \equiv 1$. Ne segue che tutte le altre componenti sono identicamente nulle. La funzione g è costante e quindi non definisce un disco analitico. □

L'assenza di dischi analitici nella sfera è la differenza geometrica più importante fra la sfera e la frontiera del polidisco.

Esercizio 1.4.2. Modificare la dimostrazione per ottenere i risultati seguenti.

1. Se un disco analitico Δ incontra $\partial\mathbb{B}_n$, allora contiene punti esterni a $\overline{\mathbb{B}_n}$.
2. Per ogni disco analitico Δ, l'insieme $\Delta \cap \partial\mathbb{B}_n$ è mai denso in Δ (la sua chiusura ha interno vuoto in Δ).
3. Trovare in $\mathbb{C}^2$ un disco analitico Δ che contenga $(1, 0)$, sia disgiunto da $\mathbb{B}_2$ e, in un intorno di $(1, 0)$, incontri $\partial\mathbb{B}_2$ lungo la curva $\Im z_1 = \Im z_2 = 0$, $(\Re z_1)^2 + (\Re z_2)^2 = 1$.

Prima di dimostrare il teorema, precisiamo in quale senso una mappa propria manda la frontiera nella frontiera.

Lemma 1.4.7. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ domini limitati e sia $f\colon U \to V$ continua. La mappa f è propria se e solo se, per ogni successione $\{p_k\}$ in U convergente a $p \in \partial U$, tutti i limiti delle sottosuccessioni convergenti di $\{f(p_k)\}$ appartengono a ∂V.

Dimostrazione. Sia f propria e sia $p_k \to p \in \partial U$. Prendiamo una sottosuccessione $f(p_{k_\ell})$ convergente a $q \in \overline{V}$. Indichiamo con E l'insieme dei suoi valori e con $\overline{E}$ la chiusura relativa in V. La controimmagine $f^{-1}(\overline{E})$ contiene una successione che tende alla frontiera di U, quindi non è compatta. Essendo f propria, neppure $\overline{E} = (E \cup \{q\}) \cap V$ è compatto. Dunque $q \notin V$, ossia $q \in \partial V$. La sottosuccessione convergente era arbitraria.

Viceversa, supponiamo soddisfatta la condizione sulle successioni. Sia E relativamente chiuso in V e supponiamo che $f^{-1}(E)$ non sia compatto. Poiché è chiuso in U e limitato, contiene una successione p_k convergente a $p \in \partial U$. I punti limite di $\{f(p_k)\}$ appartengono per ipotesi a ∂V, e ne esiste almeno uno perché V è limitato. Quindi E non è compatto. Per contrapposizione, la controimmagine di ogni compatto è compatta. □

Esercizio 1.4.3. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ domini limitati e sia $f\colon \overline{U} \to \overline{V}$ continua con $f(U) \subset V$. Dimostrare che la restrizione $g = f|_U\colon U \to V$ è propria se e solo se $f(\partial U) \subset \partial V$.

Esercizio 1.4.4. Sia $f\colon X \to Y$ continua fra spazi di Hausdorff localmente compatti. Indichiamo con X_∞ e Y_∞ le rispettive compattificazioni con un punto. Dimostrare che f è propria se e solo se ponendo $f_\infty|_X = f$ e $f_\infty(\infty) = \infty$ si ottiene un'applicazione continua $f_\infty\colon X_\infty \to Y_\infty$.

Disponiamo ora di tutti i lemmi necessari per dimostrare il teorema 1.4.4.

Dimostrazione del teorema di Rothstein. Supponiamo che esista un'applicazione olomorfa propria $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{B}_2$. Fissiamo $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ e prendiamo una successione $w_k \in \mathbb{D}$ che vi converge. Le applicazioni $g_k(\zeta) = f(\zeta, w_k)$ mandano il disco unitario nella palla. Per il teorema di Montel, passando a una sottosuccessione, possiamo supporre che convergano uniformemente sui compatti a $g\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{B}_2}$. Poiché $(\zeta, w_k) \to (\zeta, e^{i\theta}) \in \partial\mathbb{D}^2$, il lemma 1.4.7 dà $g(\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{B}_2$. Per la proposizione 1.4.6 sulla sfera, g è costante.

Derivando componente per componente otteniamo $g_k' \to g' = 0$. Per ogni $\zeta \in \mathbb{D}$ fissato, dunque, $\partial f/\partial z_1(\zeta, w_k) \to 0$ lungo la sottosuccessione. Questo vale per ogni punto di frontiera e per una sottosuccessione di ogni successione che vi tende. Il limite è pertanto zero lungo l'intera successione: altrimenti esisterebbe una sottosuccessione che resta a distanza positiva da zero. La funzione olomorfa $w \mapsto \partial f/\partial z_1(\zeta, w)$ si prolunga di conseguenza con continuità al disco chiuso ponendola uguale a zero sulla circonferenza. Il principio del massimo, o la formula di Cauchy, e l'arbitrarietà di ζ danno $\partial f/\partial z_1 \equiv 0$. Per simmetria anche $\partial f/\partial z_2 \equiv 0$. Dunque f è costante, in contraddizione con l'ipotesi che sia propria.

Nella figura 1.5, a sinistra, restringiamo f alle linee grigie orizzontali del bidisco, dove la seconda coordinata vale w_k. Passando al limite otteniamo una mappa del disco nella frontiera della palla, che deve essere costante. Mostriamo poi che $\partial f/\partial z_1 = 0$ sulla linea grigia verticale, dove la prima coordinata vale ζ. Il disco a destra, con $z_1 = \zeta$ fissato, corrisponde a questa linea verticale. □

La dimostrazione spiega perché non esiste nemmeno una mappa olomorfa propria: la frontiera del polidisco contiene dischi analitici, mentre la sfera non ne contiene. L'argomento si estende alle dimensioni superiori. Lasciamo per esercizio la dimostrazione della generalizzazione.

Teorema 1.4.8. Siano $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, con $n, k \geq 1$, e $V \subset \mathbb{C}^m$, con $m \geq 1$, domini limitati. Se ∂V non contiene dischi analitici, non esiste alcuna applicazione olomorfa propria $f\colon U \to V$.

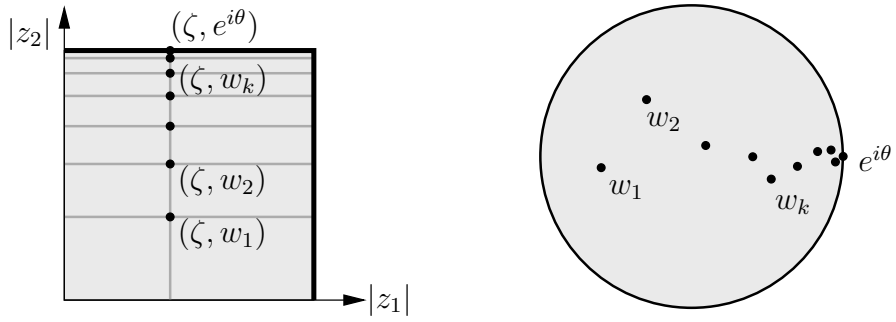


Figura 1.5: La dimostrazione del teorema di Rothstein.

Esercizio 1.4.5. Dimostrare il teorema 1.4.8.

In più variabili, per stabilire se due domini sono equivalenti, oltre alla topologia dei domini conta la geometria delle loro frontiere. Concludiamo con un bell'esercizio in una variabile sulle applicazioni proprie del disco.

Esercizio 1.4.6. Sia $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ olomorfa e propria. Dimostrare che

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{m} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ e $a_k \in \mathbb{D}$: in altri termini, f è un prodotto di Blaschke finito. *Suggerimento.* Considerare $f^{-1}(0)$.

In più variabili, sostituendo il disco con una palla, la classificazione delle applicazioni olomorfe proprie è molto più delicata. Per palle di dimensioni diverse il problema non è risolto in generale.

Esercizio 1.4.7. Sia $f\colon U \to \mathbb{D}$ olomorfa e propria, dove $U \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio non vuoto. Dimostrare che $n = 1$. *Suggerimento.* Riprendere l'idea dell'esercizio 1.2.21 sugli zeri non isolati.

Esercizio 1.4.8. Sia $f\colon \overline{\mathbb{B}_n} \to \mathbb{C}^m$ continua, non costante e olomorfa su $\mathbb{B}_n$. Supponiamo che $\|f(z)\| = 1$ per $\|z\| = 1$. Dimostrare che la restrizione a $\mathbb{B}_n$ prende valori in $\mathbb{B}_m$ e che l'applicazione così ottenuta è propria.

1.5 Il teorema di unicità di Cartan

Il teorema seguente è un altro analogo del lemma di Schwarz in più variabili. Afferma che su un dominio limitato un'applicazione olomorfa del dominio in sé che in un punto coincida con l'identità fino al primo ordine è necessariamente l'identità. Poiché molti teoremi portano il nome di Cartan, questo è noto come *teorema di unicità di Cartan*. Serve, fra l'altro, a determinare i gruppi di automorfismi di alcuni domini. Un *automorfismo* di U è un biolomorfismo di U su sé stesso. Rispetto alla composizione gli automorfismi formano un gruppo, detto *gruppo degli automorfismi*. Negli esercizi userete il teorema per calcolare questi gruppi per $\mathbb{B}_n$ e $\mathbb{D}^n$.

Teorema 1.5.1 (Cartan). Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato, $a \in U$ e $f\colon U \to U$ olomorfa. Se $f(a) = a$ e $Df(a)$ è l'identità, allora $f(z) = z$ per ogni $z \in U$.

Esercizio 1.5.1. Trovare un controesempio nel caso di U illimitato. *Suggerimento.* Prendere $a = 0$ e $U = \mathbb{C}^n$.

Per la dimostrazione conviene raggruppare i termini della serie di Taylor secondo il grado. Un polinomio $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ è *omogeneo di grado d* se

$$P(sz) = s^d P(z)$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}^n$. Ciò equivale a dire che tutti i suoi monomi hanno grado totale d. Per esempio $z^2w - iz^3 + 9zw^2$ è omogeneo di grado 3 nelle variabili $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. Un'applicazione polinomiale a valori vettoriali è omogenea di grado d se lo sono tutte le sue componenti. Lo sviluppo di una funzione olomorfa f in serie di potenze in a si scrive allora

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z-a),$$

dove f_m è un polinomio omogeneo di grado m, chiamato *parte omogenea di grado m* di f in a. Se f è a valori vettoriali, come nel teorema, anche le f_m lo sono. Nella dimostrazione useremo le stime di Cauchy vettoriali dell'esercizio seguente.[6]

Esercizio 1.5.2. Dimostrare la versione vettoriale delle stime di Cauchy. Sia $f\colon \overline{\Delta_r(a)} \to \mathbb{C}^m$ continua e olomorfa nel polidisco $\Delta_r(a) \subset \mathbb{C}^n$, e sia Γ la sua frontiera distinta. Per ogni multiindice α dimostrare che

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(a) \right\| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} \sup_{z \in \Gamma} \|f(z)\|.$$

Dimostrazione del teorema di unicità di Cartan. Possiamo supporre $a = 0$. Scriviamo lo sviluppo di f nell'origine in termini delle parti omogenee:

$$f(z) = z + f_k(z) + \sum_{m=k+1}^{\infty} f_m(z) = z + f_k(z) + \text{termini di ordine superiore},$$

Qui $k \geq 2$ e $f_2 = \cdots = f_{k-1} = 0$. La parte di grado uno è il vettore z, perché la derivata nell'origine è l'identità. Componiamo f con sé stessa ℓ volte:

$$f^\ell(z) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ volte}}(z).$$

[6] Si potrebbero anche applicare le consuete stime di Cauchy componente per componente.

Poiché $f(U) \subset U$, anche f^ℓ è un'applicazione olomorfa di U in sé. Il dominio è limitato: esiste M tale che $\|z\| \leq M$ su U. Quindi $\|f(z)\| \leq M$ e, per ogni ℓ, $\|f^\ell(z)\| \leq M$ in tutto U.

Osserviamo che

$$f_k(f(z)) = f_k(z + \text{termini di ordine superiore}) = f_k(z) + \text{termini di ordine superiore.}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f^2(z) = f(f(z)) &= f(z) + f_k(f(z)) + \text{termini di ordine superiore} \\ &= z + 2f_k(z) + \text{termini di ordine superiore.} \end{aligned}$$

Iterando si ottiene

$$f^\ell(z) = z + \ell f_k(z) + \text{termini di ordine superiore.}$$

Sia $\Delta_r(0)$ un polidisco con chiusura contenuta in U. Le stime di Cauchy danno, per ogni α con $|\alpha| = k$,

$$\frac{\alpha!}{r^\alpha} M \geq \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f^\ell}{\partial z^\alpha}(0) \right\| = \ell \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0) \right\|.$$

Poiché la diseguaglianza vale per ogni intero positivo ℓ, la derivata di ordine α di f nell'origine è nulla. Dunque $f_k \equiv 0$. Se nello sviluppo di f vi fosse una parte non nulla di grado almeno due, potremmo prendere per k il minimo di questi gradi e otterremmo una contraddizione. Quindi $f(z) = z$ nel dominio di convergenza dello sviluppo. Per connessione e per il teorema di identità l'uguaglianza vale in tutto U. □

Applichiamo il teorema alla classificazione dei biolomorfismi fra domini circolari limitati che fissano l'origine. Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è *circolare* se $z \in U$ implica $e^{i\theta} z \in U$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Corollario 1.5.2. Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ domini circolari limitati contenenti l'origine. Ogni biolomorfismo $f\colon U \to V$ tale che $f(0) = 0$ è lineare.

La palla unitaria è circolare e limitata: un suo automorfismo che fissa l'origine è dunque lineare. Lo stesso accade per un polidisco limitato centrato nell'origine. Più in generale, ogni dominio di Reinhardt è circolare.

Dimostrazione. Per ogni θ l'applicazione $g(z) = f^{-1}(e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z))$ è un automorfismo di U che fissa l'origine. Per la regola della catena $g'(0) = I$. Il teorema di Cartan dà $g(z) = z$, ossia

$$f(e^{i\theta} z) = e^{i\theta} f(z).$$

Scriviamo vicino a zero $f(z) = \sum_{m=1}^\infty f_m(z)$, con f_m omogeneo di grado m (si noti che $f_0 = 0$). Si ha allora

$$\sum_{m=1}^\infty e^{i\theta} f_m(z) = e^{i\theta} \sum_{m=1}^\infty f_m(z) = \sum_{m=1}^\infty f_m(e^{i\theta} z) = \sum_{m=1}^\infty e^{im\theta} f_m(z).$$

Per unicità dello sviluppo di Taylor, $e^{i\theta} f_m(z) = e^{im\theta} f_m(z)$ per ogni m, z, θ, ossia $f_m(z) = e^{i(m-1)\theta} f_m(z)$. Per $m \neq 1$ scegliamo θ in modo che il fattore esponenziale sia diverso da uno e otteniamo $f_m \equiv 0$. Segue la tesi. □

Esercizio 1.5.3. Dimostrare che ogni automorfismo f di $\mathbb{D}^n$ è della forma

$$f(z) = P\left(e^{i\theta_1}\frac{z_1 - a_1}{1 - \bar{a}_1 z_1}, e^{i\theta_2}\frac{z_2 - a_2}{1 - \bar{a}_2 z_2}, \dots, e^{i\theta_n}\frac{z_n - a_n}{1 - \bar{a}_n z_n}\right)$$

per un vettore $\theta \in \mathbb{R}^n$, un punto $a \in \mathbb{D}^n$ e una matrice di permutazione P.

Esercizio 1.5.4. Per $a \in \mathbb{B}_n$, definiamo $P_a z = (\langle z, a\rangle/\langle a, a\rangle)a$ se $a \neq 0$ e $P_0 z = 0$. Poniamo $s_a = \sqrt{1 - \|a\|^2}$. Dimostrare che ogni automorfismo f di $\mathbb{B}_n$ si può scrivere

$$f(z) = U\frac{a - P_a z - s_a(I - P_a)z}{1 - \langle z, a\rangle}$$

con U matrice unitaria e $a \in \mathbb{B}_n$.

Esercizio 1.5.5. Usando i due esercizi precedenti, dimostrare che $\mathbb{D}^n$ e $\mathbb{B}_n$ non sono biolomorfi per $n \geq 2$ con un metodo più vicino a quello di Poincaré: mostrare che i gruppi degli automorfismi dei due domini sono diversi.

Esercizio 1.5.6. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e limitato, sia $a \in U$ e sia $f\colon U \to U$ olomorfa, con $f(a) = a$. Dimostrare che ogni autovalore λ di $Df(a)$ soddisfa $|\lambda| \leq 1$.

Esercizio 1.5.7. *Più delicato.* Per ogni n, trovare un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ il cui unico automorfismo sia l'identità. *Suggerimento.* Togliere dal polidisco, o dalla palla, un certo numero di punti, scegliendoli con cura. Mostrare che un automorfismo si prolunga a un automorfismo del dominio originario e poi esaminare che cosa deve accadere ai punti rimossi.

Esercizio 1.5.8.

1. Mostrare che in ambito reale il teorema di Cartan fallisce anche per le funzioni razionali. Trovare $R(t)$ razionale che mandi $(-1, 1)$ in sé, con $R(0) = 0$ e $R'(0) = 1$, senza essere l'identità. Si può ottenere persino una R biiettiva.

2. Mostrare che nel caso reale fallisce anche l'esercizio 1.5.6 sugli autovalori. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ trovare $R(t)$ razionale che mandi $(-1, 1)$ in sé e soddisfi $R(0) = 0$, $R'(0) = \alpha$.

Esercizio 1.5.9. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, $a \in U$ e $f\colon U \to U$ olomorfa, con $f(a) = a$. Se tutti gli autovalori λ di $Df(a)$ soddisfano $|\lambda| < 1$, dimostrare che esiste un intorno W di a tale che $f^\ell(z) \to a$ per ogni $z \in W$.

Esercizio 1.5.10. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto limitato e sia $a \in U$. Mostrare che $\varphi \mapsto (\varphi(a), D\varphi(a))$, dal gruppo $\mathrm{Aut}(U)$ a $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n^2}$, è iniettiva. *Nota alla traduzione.* Occorre assumere U connesso: su componenti diverse da quella contenente a, un automorfismo può agire indipendentemente.

1.6 Prolungamento di Riemann, insiemi di zeri e applicazioni iniettive

In una variabile, una funzione olomorfa su $U \setminus \{p\}$ e localmente limitata in U, in particolare limitata in prossimità di p, si prolunga olomorficamente a U (proposizione B.22, punto B.22(i)).[7] In più variabili vale lo stesso teorema. Al posto del singolo punto compare l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa.

Teorema 1.6.1 (teorema di prolungamento di Riemann). Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e sia $g \in \mathcal{O}(U)$ non identicamente nulla. Posto $N = g^{-1}(0)$, se $f \in \mathcal{O}(U \setminus N)$ è localmente limitata in U, esiste un'unica $F \in \mathcal{O}(U)$ tale che $F|_{U\setminus N} = f$.

La dimostrazione si basa sul teorema di prolungamento di Riemann in una variabile. Come in quel caso, la limitatezza è essenziale. Per esempio $1/g(z)$ è illimitata vicino agli zeri e non si prolunga attraverso N.

Dimostrazione. Prendiamo $p \in N$ e consideriamo una retta complessa L per p, immagine dell'applicazione affine $\varphi(\xi) = a\xi + p$, con $a \in \mathbb{C}^n$ non nullo. La composizione $g \circ \varphi$, dove è definita vicino a 0, è olomorfa in una variabile. O si annulla identicamente o ha in 0 uno zero isolato. Per il teorema di identità g non è identicamente nulla in alcun intorno di p. Esiste quindi una retta L sulla quale la restrizione non è identicamente nulla, ossia per la quale p è un punto isolato di $L \cap N$.

Scriviamo $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ e $z = (z', z_n)$. Cambiando coordinate possiamo assumere $p = 0$ e $L = \{z' = 0\}$. La restrizione è ora $\xi \mapsto g(0, \xi)$. Scegliamo $r > 0$ abbastanza piccolo perché g non si annulli lungo $z' = 0$, $|z_n| = r$. Per continuità e compattezza della circonferenza, esiste $\epsilon > 0$ tale che g non si annulli per $\|z'\| < \epsilon$ e $|z_n| = r$. In particolare, per ogni $s \in \mathbb{C}^{n-1}$ con $\|s\| < \epsilon$, gli zeri di $\xi \mapsto g(s, \xi)$ sono isolati (figura 1.6).

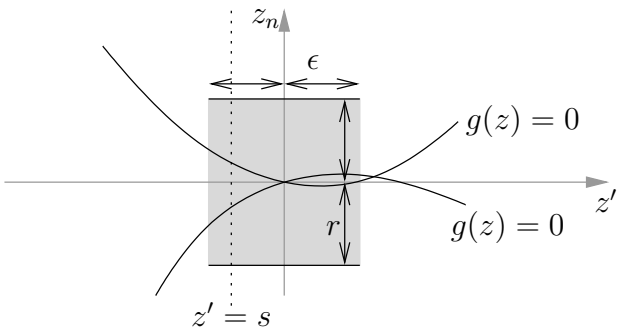


Figura 1.6: Un intorno dell'origine adatto allo studio degli zeri di g.

Per $\|z'\| < \epsilon$ e $|z_n| < r$ poniamo

$$F(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{f(z', \xi)}{\xi - z_n}\, d\xi.$$

La funzione $\xi \mapsto f(z', \xi)$ è limitata vicino a ciascuno degli zeri isolati di $g(z', \cdot)$ e si prolunga quindi olomorficamente a tutto il disco di raggio r per il teorema in una variabile. La formula integrale di Cauchy mostra che F coincide con f dove entrambe sono definite. Derivando sotto il segno di integrale si vede che F è olomorfa in tutte le variabili.

[7] Ricordiamo che $f\colon U \setminus X \to \mathbb{C}$ si dice localmente limitata in U se ogni $q \in U$ ammette un intorno W tale che f sia limitata su $W \cap (U \setminus X)$.

Abbiamo costruito vicino a ogni punto di N un prolungamento continuo, anzi olomorfo. Un prolungamento continuo è necessariamente unico sulla chiusura relativa di $U \setminus N$. Per il teorema di identità N ha interno vuoto, quindi tale chiusura è tutto U. I prolungamenti locali coincidono sulle intersezioni e definiscono l'unico prolungamento continuo di f a U. □

Esercizio 1.6.1. Sia F meromorfa in un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$. Se p è un polo, ossia vicino a p vale $F = f/g$ e F non si prolunga attraverso p, dimostrare che esiste una successione $p_k \to p$ con $F(p_k) \to \infty$. In particolare F è illimitata in prossimità di p.

Esercizio 1.6.2. Sia N un chiuso relativo dell'aperto $U \subset \mathbb{C}^n$. Supponiamo che per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^{n-1}$ la sezione di N data da $z_1 = \zeta_1, \dots, z_{n-1} = \zeta_{n-1}$ sia al più numerabile. Se $f\colon U \setminus N \to \mathbb{C}$ è olomorfa e localmente limitata in U, dimostrare che si prolunga in modo unico a una funzione olomorfa in U. *Suggerimento.* Ogni sottoinsieme chiuso e numerabile non vuoto di $\mathbb{C}$ ha punti isolati.

Esercizio 1.6.3. Per $U = \{z \in \mathbb{D}^2 : z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0\}$ determinare il gruppo $\mathrm{Aut}(U)$. *Suggerimento.* Ricordare la descrizione degli automorfismi del polidisco nell'esercizio 1.5.3.

L'insieme degli zeri di una funzione olomorfa ha una struttura semplice in gran parte dei suoi punti.

Teorema 1.6.2. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathcal{O}(U)$ non identicamente nulla e $N = f^{-1}(0)$. Esiste un sottoinsieme N_{reg} aperto e denso in N per la topologia relativa, tale che vicino a ogni suo punto p, eventualmente riordinando le variabili, N è il grafico

$$z_n = g(z_1, \dots, z_{n-1})$$

di una funzione olomorfa g.

Dimostrazione. Se N è localmente un grafico in p, lo è anche in ogni punto di N abbastanza vicino a p. Quindi N_{reg} è aperto. Per la densità basta trovare un punto regolare in $N \cap W$ per ogni $p_0 \in N$ e ogni suo intorno W. Restringendoci a tale intorno, basta dunque provare l'esistenza di un punto regolare.

Poiché f non è identicamente nulla, le sue derivate di ogni ordine non possono annullarsi tutte identicamente su N. Se una derivata prima non si annulla identicamente su N, poniamo $h = f$. Altrimenti prendiamo il minimo ordine k per cui una derivata non si annulla identicamente su N, e scegliamo come h una derivata di ordine $k-1$ da cui si ottenga tale derivata. La funzione h è olomorfa, si annulla su N e, riordinando le coordinate, possiamo supporre che $\partial h/\partial z_n$ non si annulli identicamente su N. Esiste quindi $p \in N$ in cui tale derivata è diversa da zero. Il teorema delle funzioni implicite fornisce una funzione olomorfa g per cui

$$h\big(z_1, \dots, z_{n-1}, g(z_1, \dots, z_{n-1})\big) = 0,$$

e $z_n = g(z')$ è l'unica soluzione di $h(z', z_n) = 0$ vicino a p.

L'insieme degli zeri di h contiene N. Per provare che i due insiemi coincidono vicino a p, scriviamo $p = (p', p_n)$. La funzione

$$\xi \mapsto f(p', \xi)$$

ha uno zero isolato in un piccolo disco Δ di centro p_n ed è diversa da zero su $\partial\Delta$: altrimenti la sua retta di zeri sarebbe contenuta nel grafico di g. Per il teorema di Rouché, $\xi \mapsto f(z', \xi)$ ha uno zero in Δ per z' abbastanza vicino a p', tanto vicino che $|f(p', \xi) - f(z', \xi)| < |f(p', \xi)|$ su $\partial\Delta$. Poiché ogni zero di f è uno zero di h e $g(z')$ è l'unica soluzione vicina, lo zero trovato è $g(z')$. Questo prova l'uguaglianza cercata. □

L'insieme degli zeri di una funzione olomorfa è un esempio di *sottovarietà analitica*, o *insieme analitico*. La definizione generale è più articolata e sarà data nel capitolo 6. I punti in cui N è localmente il grafico di un'applicazione olomorfa si chiamano *punti regolari* e formano l'insieme N_{reg}. Qui il grafico è quello di una sola funzione olomorfa: i punti regolari hanno dimensione complessa $n-1$ o, equivalentemente, codimensione complessa uno. Il loro insieme è una sottovarietà complessa liscia di dimensione $n-1$, e anche una sottovarietà reale di dimensione $2n-2$. I punti non regolari di un insieme analitico si dicono *singolari*. Una conseguenza importante è che per $n \geq 2$ l'insieme degli zeri, quando non è vuoto, è necessariamente piuttosto grande.

Esempio 1.6.3. In $\mathbb{C}^2$ consideriamo $f(z) = z_1^2 - z_2^2$ e $X = f^{-1}(0)$. Fuori dall'origine $\nabla f = (2z_1, -2z_2) \neq 0$. Possiamo risolvere rispetto a z_1 o a z_2, quindi tutti i punti di $X \setminus \{0\}$ sono regolari. I due rami sono $z_1 = z_2$ e $z_1 = -z_2$. In nessun intorno dell'origine si può risolvere univocamente rispetto a una delle coordinate: se esistesse $z_1 = g(z_2)$, dovrebbero valere insieme $g(z_2) = z_2$ e $g(z_2) = -z_2$, impossibile per $z_2 \neq 0$. Lo stesso vale scambiando le coordinate. L'origine è dunque singolare.

L'esempio mostra anche perché nella dimostrazione possa occorrere passare alle derivate. La funzione $\varphi(z) = (z_1^2 - z_2^2)^2$ ha lo stesso insieme di zeri X, ma entrambe le derivate prime si annullano su X. Nella dimostrazione funziona la scelta $h = \partial\varphi/\partial z_1$ oppure $h = \partial\varphi/\partial z_2$. Anche $\psi(z) = (z_1 - z_2)^2(z_1 + z_2)$ ha lo stesso insieme di zeri. Sul ramo regolare $z_1 = -z_2$ basta $h = \psi$, mentre sul ramo $z_1 = z_2$ occorre usare una delle due derivate prime.

Esempio 1.6.4. Senza olomorfia il teorema fallisce. In $\mathbb{R}^2$ l'equazione $x_1^2 + x_2^2 = 0$ individua soltanto l'origine, che non è localmente il grafico di una funzione su un aperto di una variabile. La prima parte del ragionamento funziona, ma produce $h = 2x_1$ oppure $h = 2x_2$, il cui insieme di zeri è troppo grande.

Esercizio 1.6.4. Trovare tutti i punti regolari di $X = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 = z_2^3\}$. *Suggerimento.* La difficoltà è dimostrare di averli trovati tutti.

Esercizio 1.6.5. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(U)$. Dimostrare che il complementare degli zeri $U \setminus f^{-1}(0)$ è connesso.

Esercizio 1.6.6. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $n \geq 2$ e $f \in \mathcal{O}(U)$. Se non è vuoto, $f^{-1}(0)$ non è compatto. Dimostrarlo. *Suggerimento.* Un compatto possiede un punto di massima distanza dall'origine.

Osservazione 1.6.5. Per un celebre teorema di Whitney, in netto contrasto con quanto appena visto, qualunque chiuso di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme degli zeri di una funzione di classe C^∞.

Dimostriamo ora che un'applicazione olomorfa iniettiva fra aperti della stessa dimensione è biolomorfa sulla sua immagine. Nell'ambito delle funzioni lisce il risultato fallisce: $x \mapsto x^3$ è una biiezione liscia di $\mathbb{R}$ in sé, ma l'inversa non è differenziabile nell'origine.

Teorema 1.6.6. Se $U \subset \mathbb{C}^n$ è aperto e $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ è olomorfa e iniettiva, il suo determinante jacobiano non si annulla mai in U. In particolare un'applicazione olomorfa biiettiva $f\colon U \to V$ fra due aperti di $\mathbb{C}^n$ è biolomorfa.

Per il teorema della funzione inversa, caso particolare del teorema delle funzioni implicite, f è localmente biolomorfa ovunque il determinante

$$J_f(z) = \det Df(z) = \det \left[\frac{\partial f_k}{\partial z_\ell}(z)\right]_{k\ell}$$

sia diverso da zero. In tali punti, in particolare, l'inversa è olomorfa. Il problema è provare che J_f non si annulla mai.

In una variabile complessa, scegliendo opportune coordinate olomorfe locali e a meno di una costante additiva, ogni funzione olomorfa non costante ha la forma z^d per un intero $d \geq 1$. Più precisamente, vicino a z_0 si ha $f(z) = c + (g(z))^d$, con g localmente biolomorfa e $g(z_0) = 0$. L'iniettività locale equivale quindi a $d = 1$. In più variabili una forma normale altrettanto semplice non vale in generale, ma il teorema afferma che un'applicazione localmente iniettiva si può scrivere localmente come l'identità in opportune coordinate.

Dimostrazione. Procediamo per induzione. Il caso $n = 1$ è noto. Supponiamo $n > 1$ e il teorema vero in dimensione $n-1$. Per assurdo, supponiamo che J_f si annulli in qualche punto. Lavoriamo nella componente connessa di tale punto. Se J_f non è identicamente nullo, prendiamo un punto regolare q del suo insieme di zeri, che vicino a q si scrive

$$z_n = g(z_1, \dots, z_{n-1})$$

con g olomorfa. Basta ottenere una contraddizione vicino a q. Possiamo prendere $q = 0$. Il cambiamento di coordinate, biolomorfo vicino all'origine,

$$\Psi(z_1, \dots, z_n) = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n - g(z_1, \dots, z_{n-1}))$$

porta l'insieme degli zeri nell'iperpiano $z_n = 0$. Sostituendo f con $f \circ \Psi^{-1}$ possiamo quindi supporre $J_f = 0$ su $z_n = 0$ e, traslando nel codominio, $f(0) = 0$. Se J_f è identicamente nullo, bastano le traslazioni. In entrambi i casi abbiamo $0 \in U$, $f(0) = 0$ e $J_f = 0$ su $z_n = 0$. Ci occorreva soltanto che l'insieme degli zeri fosse abbastanza grande.

Mostreremo che tutte le derivate di f rispetto a $z_1, \dots, z_{n-1}$ si annullano su $z_n = 0$. Ne seguirebbe che $f(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ è localmente costante, contro l'iniettività. Prendiamo un punto dell'iperpiano, una componente di f e una sua derivata tangenziale. Possiamo portare il punto nell'origine e, riordinando le coordinate, supporre per assurdo che $\partial f_1/\partial z_1(0) \neq 0$. L'applicazione

$$G(z_1, \dots, z_n) = (f_1(z), z_2, \dots, z_n)$$

è biolomorfa in un piccolo intorno dell'origine. In un tale intorno $f \circ G^{-1}$ è olomorfa e iniettiva e, per definizione di G,

$$f \circ G^{-1}(w_1, \dots, w_n) = (w_1, h(w)),$$

dove h è olomorfa a valori in $\mathbb{C}^{n-1}$. L'applicazione

$$\varphi(w_2, \dots, w_n) = h(0, w_2, \dots, w_n)$$

è olomorfa e iniettiva da un intorno dell'origine in $\mathbb{C}^{n-1}$ a $\mathbb{C}^{n-1}$. Per ipotesi induttiva il suo determinante jacobiano non si annulla mai. D'altra parte, applicando la regola della catena a $f \circ G^{-1}$, nell'origine troviamo

$$\det D(f \circ G^{-1}) = \big(\det Df\big)\big(\det D(G^{-1})\big) = 0.$$

Ciò è impossibile: sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si ottiene nell'origine

$$\det D(f \circ G^{-1}) = \det D\varphi \neq 0. \qquad \square$$

Il teorema non è più vero se dominio e codominio hanno dimensioni diverse.

Esercizio 1.6.7. Per $X = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 = z_2^3\}$ trovare un'applicazione olomorfa iniettiva $f\colon \mathbb{C} \to X$. Si osservi che in un punto la derivata di f si annulla. Il teorema 1.6.6 non ha dunque un analogo per dimensioni diverse.

Esercizio 1.6.8. Trovare $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua e iniettiva la cui inversa $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non sia continua.

È questo il luogo adatto per enunciare la celebre *congettura jacobiana*, un'inversa del teorema precedente in un caso particolare: *se $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è un'applicazione polinomiale (ogni componente è un polinomio) e il suo determinante jacobiano J_F non si annulla mai, allora F è invertibile e l'inversa è polinomiale.* Che F sia localmente iniettiva è chiaro. Il problema è provare, o confutare, l'esistenza di un'inversa polinomiale globale. La congettura è vera per $n = 1$, come vedremo in un esercizio. Un controesempio per $n \geq 3$ è stato trovato di recente da Levent Alpöge.[8] Il caso $n = 2$ rimane aperto.

Esercizio 1.6.9. Dimostrare la congettura jacobiana per $n = 1$: se un polinomio $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ha derivata mai nulla, possiede un'inversa polinomiale.

Esercizio 1.6.10. Sia $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomiale e iniettiva. Dimostrare che J_F è una costante diversa da zero.

Esercizio 1.6.11. Mostrare che, sostituendo «polinomiale» con «olomorfa intera», la congettura jacobiana è falsa già per $n = 1$.

Esercizio 1.6.12. Dimostrare che ogni funzione olomorfa iniettiva $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è suriettiva e quindi ha la forma $f(z) = az + b$, con $a \neq 0$.

Sebbene ogni applicazione olomorfa iniettiva di $\mathbb{C}$ in sé sia suriettiva, lo stesso non accade in dimensione superiore. Per $n \geq 2$ esistono in $\mathbb{C}^n$ i cosiddetti *domini di Fatou–Bieberbach*, sottoinsiemi propri di $\mathbb{C}^n$ biolomorfi a tutto $\mathbb{C}^n$.

[8] Ponendo $x = z_1$, $y = z_2$, $z = z_3$ e $t = 1 + xy$, l'applicazione dell'originale ha componenti $t^3 z + y^2 t(4 + 3xy)$, $y + 3xt^2 z + 3xy^2(4 + 3xy)$ e $2x - 3x^2 y - x^3 z$. Ha determinante jacobiano -2, ma manda $(0, 0, -1/4)$, $(1, -3/2, 13/2)$ e $(-1, 3/2, 13/2)$ nello stesso punto $(-1/4, 0, 0)$, quindi non è nemmeno iniettiva. È stato trovato con l'ausilio di Claude AI.

2 Convessità e pseudoconvessità

2.1 Domini di olomorfia e prolungamento olomorfo

Non tutti i domini di $\mathbb{C}^n$ sono domini naturali per le funzioni olomorfe.

Definizione 2.1.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, ossia un aperto connesso.[9] Diciamo che U è un *dominio di olomorfia* se non esistono due aperti non vuoti V, W, con $V \subset U \cap W$, $W \not\subset U$ e W connesso, tali che per ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ esista $F \in \mathcal{O}(W)$ con $F = f$ su V (figura 2.1).

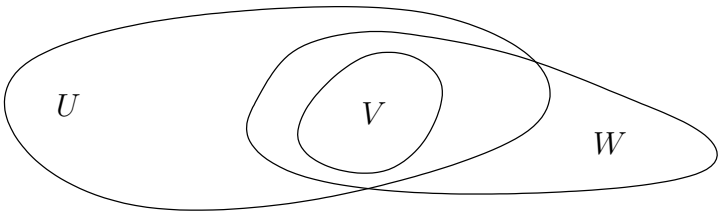


Figura 2.1: Gli aperti che intervengono nella definizione di dominio di olomorfia.

L'idea è che, se U non è un dominio di olomorfia e V, W sono come nella definizione, ogni f può essere prolungata, almeno da qualche parte, attraverso la frontiera di U.

Esempio 2.1.2. La palla unitaria $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia. Poniamo $U = \mathbb{B}_n$ e supponiamo che esistano V, W come nella definizione. Essendo aperto e connesso, W è connesso per archi. Contiene punti esterni alla palla, quindi in W esiste un cammino γ da un punto $q \in V$ a un punto $p \in \partial\mathbb{B}_n \cap W$, che fino al primo incontro con la frontiera rimane nella palla. Mediante una rotazione unitaria possiamo assumere $p = (1, 0, \dots, 0)$. Prendiamo $f(z) = 1/(1-z_1)$. Per il teorema di identità il prolungamento F coincide con f sulla componente di $\mathbb{B}_n \cap W$ contenente q. Lungo il cammino, avvicinandosi a p, il modulo di f tende all'infinito. Ciò è impossibile per F, che è olomorfa in p. Gli aperti V, W non possono dunque esistere.

In dimensione uno la nozione non introduce alcuna restrizione: ogni dominio del piano complesso è un dominio di olomorfia.

Esercizio 2.1.1. *Facile.* Dimostrare che ogni dominio di $\mathbb{C}$ è un dominio di olomorfia.

Esercizio 2.1.2. Sia $\{U_k\}$ una famiglia, anche infinita, di domini di olomorfia in $\mathbb{C}^n$. Dimostrare che l'interno dell'intersezione $\bigcap_k U_k$ è vuoto oppure ciascuna delle sue componenti connesse è un dominio di olomorfia.

Esercizio 2.1.3. *Facile.* Dimostrare che un polidisco in $\mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia.

Esercizio 2.1.4. Se $U_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$, per $j = 1, \dots, \ell$, sono domini di olomorfia, dimostrare che lo è anche $U_1 \times \cdots \times U_\ell$. In particolare ogni prodotto cartesiano finito di domini del piano complesso è un dominio di olomorfia.

[9] La nozione di dominio di olomorfia ha senso anche per aperti non connessi, e alcuni autori la definiscono in questa generalità.

Esercizio 2.1.5. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio di olomorfia e sia $f \in \mathcal{O}(U)$. Mostrare che $U \setminus f^{-1}(0)$, se non vuoto, è un dominio di olomorfia.

Esercizio 2.1.6.

1. Dato $p \in \partial\mathbb{B}_n$, trovare f olomorfa in $\mathbb{B}_n$ e liscia di classe C^∞ sulla chiusura, che non ammetta prolungamento olomorfo attraverso p. Si richiede cioè che tutte le derivate parziali reali di ogni ordine si prolunghino con continuità alla chiusura. *Suggerimento.* Per il ramo principale della radice quadrata, $\xi \mapsto e^{-1/\sqrt{\xi}}$ è olomorfa nel semipiano $\Re\xi > 0$ e si prolunga con continuità, anzi in modo liscio, a $\Re\xi \geq 0$.

2. Trovare f olomorfa in $\mathbb{B}_n$ che non si prolunghi attraverso alcun punto di $\partial\mathbb{B}_n$.

Nel seguito avranno un ruolo importante diverse nozioni di convessità. Un insieme S è *geometricamente convesso* se $tx + (1-t)y \in S$ per ogni $x, y \in S$ e $t \in [0,1]$. L'esercizio seguente mostra che ogni dominio geometricamente convesso è un dominio di olomorfia. Il viceversa spesso non vale, come mostra già il caso di un dominio piano qualsiasi. La convessità classica suggerisce dunque la direzione in cui cercare, senza essere la nozione definitiva.

Esercizio 2.1.7. Dimostrare che ogni dominio geometricamente convesso di $\mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia.

Nel seguito, quando diciamo che $f \in \mathcal{O}(U)$ si prolunga olomorficamente a V, con $U \subset V$, intendiamo che esiste $F \in \mathcal{O}(V)$ con $F = f$ su tutto U.

Osservazione 2.1.3. La definizione di dominio di olomorfia è più sottile di un enunciato sul prolungamento a un soprainsieme, perché occorre tener conto dell'univocità. Consideriamo il ramo principale del logaritmo nel piano tagliato $U = \mathbb{C} \setminus \{z : \Im z = 0,\ \Re z \leq 0\}$. Da uno dei due lati possiamo prolungarlo localmente attraverso il taglio, ma non possiamo definirne un prolungamento su un aperto strettamente più grande che contenga U. Questo esempio spiega perché V possa essere contenuto propriamente in $U \cap W$ e perché non si richieda che W contenga tutto U. Nell'esercizio 2.1.15 questa intuizione condurrà a un esempio in più variabili.

In dimensione almeno due non tutti i domini sono domini di olomorfia. Il dominio H del prossimo teorema si chiama *figura di Hartogs*.

Teorema 2.1.4. Usiamo le coordinate $(z, w) = (z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_k)$ di $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^k$. Per $0 < a, b < 1$ definiamo

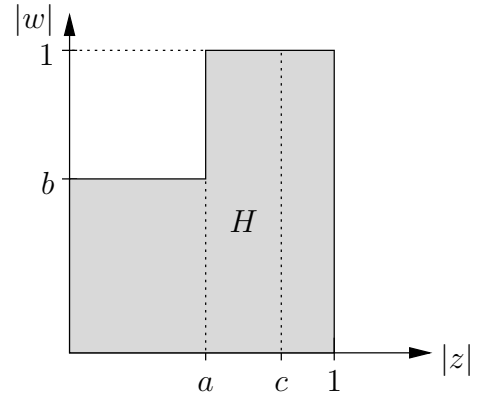
$$\begin{aligned} H = &\{(z,w) \in \mathbb{D}^{m+k} : |z_\ell| > a \text{ per } \ell = 1, \ldots, m\} \\ &\cup \{(z,w) \in \mathbb{D}^{m+k} : |w_\ell| < b \text{ per } \ell = 1, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

Ogni $f \in \mathcal{O}(H)$ si prolunga olomorficamente a $\mathbb{D}^{m+k}$.

La figura 2.2 illustra il caso $m = k = 1$ in $\mathbb{C}^2$. Il parametro c entrerà nella dimostrazione.

Dimostrazione. Scegliamo $a < c < 1$ e poniamo

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{D}^m : |z_\ell| = c \text{ per } \ell = 1, \ldots, m \right\}.$$



Nei diagrammi si rappresenta spesso la figura di Hartogs in questo modo:

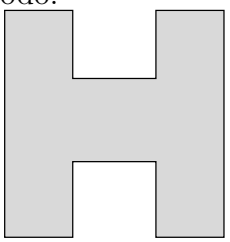


Figura 2.2: La figura di Hartogs.

L'insieme Γ è la frontiera distinta del polidisco $c\mathbb{D}^m$, centrato nell'origine e di raggi tutti uguali a c. Definiamo

$$F(z,w) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_\Gamma \frac{f(\xi,w)}{\xi - z}\, d\xi.$$

La funzione è ben definita su

$$c\mathbb{D}^m \times \mathbb{D}^k$$

perché ξ varia in Γ e quindi $(\xi, w) \in H$ per ogni $w \in \mathbb{D}^k$. Poiché f è olomorfa rispetto a w in H, derivando sotto il segno di integrale si vede che F è olomorfa in w. Lo è anche in z, perché il nucleo $1/(\xi - z)$ è olomorfo in z per $z \in c\mathbb{D}^m$.

Se fissiamo w con $|w_\ell| < b$ per ogni ℓ, la formula di Cauchy dà $F(z,w) = f(z,w)$ per ogni $z \in c\mathbb{D}^m$. Le due funzioni coincidono dunque sull'aperto $c\mathbb{D}^m \times b\mathbb{D}^k$, e per identità su $(c\mathbb{D}^m \times \mathbb{D}^k) \cap H$. Incollando i prolungamenti così ottenuti al variare di c fino a 1, e incollandoli con f, otteniamo il prolungamento a tutto $\mathbb{D}^{m+k}$. □

Il teorema si usa in molte situazioni. Per collocare la figura di Hartogs dove occorre, di solito la si trasla, la si dilata, la si ruota con una matrice unitaria o le si applica un biolomorfismo più generale. Il polidisco corrispondente, o la sua immagine sotto il biolomorfismo impiegato, si indica con $\widehat{H}$ e si chiama *inviluppo* di H. Ad esso si prolungano tutte le funzioni olomorfe su H.

Enunciamo un caso semplice ma utile del cosiddetto *fenomeno di Hartogs*. Una sua versione è già comparsa nell'esercizio 1.1.8. Dimostriamola ora mediante la figura di Hartogs.

Corollario 2.1.5. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, con $n \geq 2$, e sia $p \in U$. Ogni $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$ si prolunga olomorficamente a U.

Dimostrazione. Traslazioni e cambiamenti di scala sono olomorfi. Possiamo quindi assumere $p = (0, \ldots, 0, 3/4)$ e $\mathbb{D}^n \subset U$. Scriviamo $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ e prendiamo la figura di Hartogs con $m = n-1$, $k = 1$ e $a = b = 1/2$. Si ha $H \subset U \setminus \{p\}$ mentre $p \in \mathbb{D}^n \setminus H$. Il teorema 2.1.4 prolunga f attraverso p. □

Abbiamo così un'altra spiegazione del fatto che in più variabili gli zeri e i poli non sono isolati: se f avesse uno zero isolato, basterebbe applicare il corollario a $1/f$ per ottenere una contraddizione. Il fenomeno è ancora più sorprendente, perché si possono eliminare insiemi molto più grandi, per esempio un qualsiasi compatto convesso.

Esercizio 2.1.8. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, $n \geq 2$, e sia $K \Subset U$ un compatto geometricamente convesso. Dimostrare che ogni $f \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ si prolunga olomorficamente a U. *Suggerimento.* Scegliere un punto adatto su ∂K e provare a prolungare un poco la funzione. Verificare poi che il prolungamento sia univoco.

La convessità di K è superflua. Basta che $U \setminus K$ sia connesso. La dimostrazione è però più difficile e la vedremo nella sezione 4.3. Proprio l'univocità del prolungamento è il punto delicato della dimostrazione generale.

L'esercizio ha una conseguenza sorprendente. Ogni funzione olomorfa sul guscio

$$\mathbb{B}_n \setminus \overline{B_{1-\epsilon}(0)} = \{z \in \mathbb{C}^n : 1 - \epsilon < \|z\| < 1\}$$

si prolunga automaticamente a una funzione olomorfa sulla palla $\mathbb{B}_n$, per quanto piccolo sia $\epsilon > 0$. Più avanti passeremo addirittura al limite: una funzione definita soltanto sulla sfera e che vi soddisfi le equazioni tangenziali di Cauchy–Riemann si prolunga olomorficamente all'interno. È essenziale che $n > 1$; basta pensare a $1/z$ in dimensione uno. Abbiamo già visto nell'esercizio 1.6.6 che per $n \geq 2$ l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa, se non vuoto, non è mai compatto. Ora ne vediamo un'altra ragione: se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ ha zeri, essi devono avvicinarsi arbitrariamente alla frontiera. Se formassero un compatto interno alla palla, potremmo prolungare $1/f$.

Esercizio 2.1.9. *Triangolo di Hartogs.* Sia

$$T = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2 : |z_2| < |z_1|\}.$$

Dimostrare che T è un dominio di olomorfia. Dimostrare poi che, posto

$$\widetilde{T} = T \cup B_\epsilon(0)$$

per $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo (con la palla contenuta nel bidisco), $\widetilde{T}$ non è un dominio di olomorfia. Anzi, ogni funzione olomorfa su $\widetilde{T}$ si prolunga a $\mathbb{D}^2$.

Esercizio 2.1.10. Considerare l'immersione naturale $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2)$, dimostrare che f si prolunga olomorficamente a tutto $\mathbb{C}^2$. *Suggerimento.* Cambiare coordinate prima di applicare il risultato di Hartogs.

Esercizio 2.1.11. Sia

$$U = \{(z, w) \in \mathbb{D}^2 : \tfrac{1}{2} < |z|\}.$$

Disegnare U. Orientare positivamente la circonferenza $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3/4\}$. Per $f \in \mathcal{O}(U)$ dimostrare che

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi, w)}{\xi - z}\, d\xi$$

è ben definita e olomorfa su $(\frac{3}{4}\mathbb{D}) \times \mathbb{D}$, ma non è detto che $F = f$ nell'intersezione dei rispettivi domini.

Esercizio 2.1.12. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto tale che per ogni $z \neq 0$ esista $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda z \in U$. Sia $f \colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che $f(\lambda z) = f(z)$ ogni volta che $z, \lambda z \in U$.

1. *Facile.* Provare che f è costante.
2. *Difficile.* Ammettere che f sia meromorfa, ossia $f = g/h$ con g, h olomorfe. Trovare un esempio non costante e dimostrare che una tale f è necessariamente razionale, cioè che si può rappresentare come quoziente di polinomi.

Esercizio 2.1.13. Sia

$$U = \{z \in \mathbb{D}^3 : \tfrac{1}{2} < |z_1| \quad \text{oppure} \quad \tfrac{1}{2} < |z_2|\}.$$

Dimostrare che ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ si prolunga a $\mathbb{D}^3$. Confrontare con l'esercizio 2.1.11.

Esercizio 2.1.14. Sia $U = \mathbb{C}^n \setminus \{z : z_1 = z_2 = 0\}$, con $n \geq 2$. Mostrare che ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ si prolunga olomorficamente a $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 2.1.15. Costruire un dominio $U \subset \mathbb{C}^2$ che non sia un dominio di olomorfia e per cui, tuttavia, non esista alcun dominio strettamente più grande $W \supset U$ al quale si prolunghino tutte le $f \in \mathcal{O}(U)$. *Suggerimento.* Adattando l'esempio del logaritmo nel piano tagliato dell'osservazione 2.1.3 si ottiene quasi il dominio cercato; esso è ancora un dominio di olomorfia e va modificato leggermente, per esempio aggiungendo una protuberanza.

Esempio 2.1.6. Per l'esercizio 2.1.10, $U_1 = \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ non è un dominio di olomorfia. Invece $U_2 = \mathbb{C}^2 \setminus \{z : z_2 = 0\}$ lo è: la funzione $1/z_2$ non si prolunga attraverso l'iperpiano eliminato. Dal punto di vista complesso i due insiemi sono assai diversi; dimenticando la struttura complessa diventano lo stesso oggetto, uno spazio vettoriale reale di dimensione quattro privato di un sottospazio reale di dimensione due. Nel primo caso si richiede $\Im z_1 \neq 0$ oppure $\Im z_2 \neq 0$, nel secondo $\Re z_2 \neq 0$ oppure $\Im z_2 \neq 0$.

La proprietà di essere un dominio di olomorfia richiede dunque qualcosa di più di una condizione geometrica reale. L'immagine di un dominio di olomorfia mediante una trasformazione reale ortogonale può non essere un dominio di olomorfia, anche se distanze, angoli e rette vengono preservati. Per questo, quando in analisi complessa si parla di «rotazioni», si usano trasformazioni lineari complesse unitarie.

Per prolungare una funzione olomorfa non occorre un'intera figura di Hartogs: basta una successione di dischi. Più avanti incontreremo un'altra versione del teorema (teorema 2.5.2).

Teorema 2.1.7 (Kontinuitätssatz, prima versione del principio di continuità). [10] Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Supponiamo che una successione di dischi analitici chiusi $\varphi_k \colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^n$ converga uniformemente a un disco analitico chiuso φ, che $\varphi_k(\overline{\mathbb{D}}) \subset U$ e che $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset U$. Esiste $s > 0$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ e ogni $p \in \varphi(\mathbb{D})$, esista $F \in \mathcal{O}(\Delta_s(p))$ che coincide con f su un aperto non vuoto di $U \cap \Delta_s(p)$.

In particolare, se esistono dischi del genere e $\varphi(\mathbb{D})$ non è interamente contenuto in U, allora U non è un dominio di olomorfia. Nella figura 2.3 i dischi analitici sono rappresentati da linee e i punti delle loro frontiere da punti neri. La funzione può essere prolungata analiticamente attraverso ciascun punto di $\varphi(\mathbb{D})$. Senza ulteriori ipotesi può tuttavia mancare un prolungamento univoco a un intero intorno di $\varphi(\mathbb{D})$; si vedano gli esercizi seguenti.[11]

Dimostrazione. Per compattezza di $\varphi(\partial\mathbb{D})$ esiste $r > 0$ tale che $\Delta_r(z) \subset U$ per ogni $z \in \varphi(\partial\mathbb{D})$. La serie di potenze di f centrata in z converge in tale polidisco. Fissiamo

[10] Questo teorema, o un enunciato affine, è talvolta attribuito a Behnke e Sommer. La prima versione, nella quale i dischi giacciono su rette complesse, fu dimostrata da Hartogs.

[11] Per un controesempio si veda S. Ivashkovich, *Discrete and Continuous Versions of the Continuity Principle*, The Journal of Geometric Analysis, **32** (2022), articolo 226.

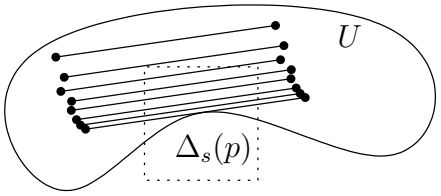


Figura 2.3: Il principio di continuità per il prolungamento delle funzioni.

$0 < s < r$. Per la convergenza uniforme, per k sufficientemente grande l'insieme

$$\bigcup_{q \in \varphi_k(\partial\mathbb{D})} \overline{\Delta_s(q)}$$

è un compatto di U, sul quale $|f|$ ammette un maggiorante M. Le stime di Cauchy danno

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(q) \right| \leq \frac{M\alpha!}{s^{|\alpha|}} \tag{2.1}$$

per ogni $q \in \varphi_k(\partial\mathbb{D})$. Applicando il principio del massimo sul disco alla derivata composta con φ_k, la stima (2.1) vale in ogni $q \in \varphi_k(\overline{\mathbb{D}})$. La serie di Taylor di f centrata in un tale q converge dunque su $\Delta_s(q)$. La sua somma F coincide con f in un intorno di q. Prendendo k abbastanza grande e diminuendo un poco il raggio, per ogni $p \in \varphi(\overline{\mathbb{D}})$ si può scegliere $q \in \varphi_k(\overline{\mathbb{D}})$ con $\Delta_{s'}(p) \subset \Delta_s(q)$ e $q \in \Delta_{s'}(p)$. Il punto p appartiene alla chiusura di U, e il polidisco centrato in p contiene q. Quindi $F = f$ su un aperto non vuoto di $\Delta_{s'}(p) \cap U$.

I raggi s e s' dipendono soltanto dalla distanza fra $\varphi(\partial\mathbb{D})$ e la frontiera di U. In particolare sono indipendenti da f, e ciò giustifica anche la scelta iniziale di polidischi più piccoli. □

Esercizio 2.1.16. Dato un disco analitico $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ e $p \in \varphi(\mathbb{D})$, dimostrare che per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo $\Delta_\epsilon(p) \cap \varphi(\mathbb{D})$ è connesso. *Suggerimento.* Riportare sul disco $\mathbb{D}$ le funzioni coordinate di $\mathbb{C}^n$ mediante φ.

Esercizio 2.1.17. Dimostrare che, se nell'enunciato φ è anche iniettiva, esiste un intorno W di $\varphi(\overline{\mathbb{D}})$ tale che per ogni $f \in \mathcal{O}(U)$ si possa trovare $F \in \mathcal{O}(W)$ coincidente con f su un intorno aperto di $\varphi(\partial\mathbb{D})$.

Esercizio 2.1.18. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e sia data una famiglia di dischi analitici chiusi $\Delta_\alpha \subset U$ con $\bigcup_\alpha \partial\Delta_\alpha \Subset U$. Dimostrare che per ogni punto p della chiusura di $\bigcup_\alpha \Delta_\alpha$ in $\mathbb{C}^n$ esistono un disco analitico passante per p e una successione di dischi convergente a esso che soddisfano le ipotesi del teorema.

2.2 Vettori tangenti, matrice hessiana e convessità

Un esercizio della sezione precedente mostra che ogni dominio convesso è un dominio di olomorfia. Tuttavia la convessità classica è una condizione troppo forte. Per l'esercizio 2.1.4, quali che siano i domini piani $U, V \subset \mathbb{C}$, il prodotto $U \times V$ è un dominio di olomorfia in $\mathbb{C}^2$. Eppure U e V, e dunque il loro prodotto, possono discostarsi vistosamente dalla convessità. Non abbandoniamo del tutto questa idea: esiste una nozione di *pseudoconvessità*, che a grandi linee significa «convessità nelle direzioni complesse», adatta a caratterizzare i domini di olomorfia. Cerchiamo anzitutto di capire che cosa significhi, localmente, la convessità classica per una frontiera liscia.

Definizione 2.2.1. Un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ è una *ipersuperficie di classe* C^k se per ogni $p \in M$ esistono un intorno aperto V di p e una funzione $r\colon V \to \mathbb{R}$ di classe C^k, con differenziale mai nullo, tali che $M \cap V = \{x \in V : r(x) = 0\}$. Chiamiamo r una *funzione definente* per M in p.

Un aperto (o un dominio) $U \subset \mathbb{R}^n$ ha *frontiera di classe* C^k se ∂U è un'ipersuperficie di classe C^k e ogni punto $p \in \partial U$ ammette una funzione definente r che, nel suo intorno di definizione, è negativa nei punti di U e positiva nei punti esterni a $\overline{U}$ (figura 2.4). Con il solo aggettivo *liscia* intendiamo di classe C^∞: la funzione r è infinitamente differenziabile.

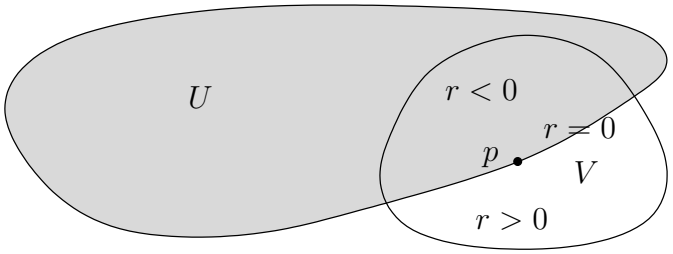


Figura 2.4: Una funzione definente locale per un dominio.

Più precisamente, abbiamo definito una *sottovarietà regolare di codimensione uno*: su M considereremo sempre la topologia indotta dallo spazio ambiente. In questo libro lavoreremo per lo più con funzioni e ipersuperfici lisce. Per k finito, trattare il caso C^k introdurrebbe dettagli tecnici che renderebbero inutilmente difficili alcuni enunciati e le loro dimostrazioni.

Poiché il differenziale di r non si annulla, il teorema delle funzioni implicite permette di esprimere localmente una coordinata in funzione delle altre. In altri termini, M è un'ipersuperficie liscia se localmente si può scrivere $x_k = \varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, per un opportuno indice k e una funzione liscia φ.

Perché U abbia frontiera liscia occorre qualcosa di più del fatto che ∂U sia un'ipersuperficie liscia: da una parte dell'ipersuperficie si deve essere in U, dall'altra fuori di U. Poiché il differenziale di r non si annulla, r assume segni opposti ai due lati di $\{x \in V : r(x) = 0\}$. Lasciamo la verifica al lettore (si osservi in quale direzione punta il gradiente). Per ogni aperto con frontiera liscia si può addirittura trovare un'unica funzione definente globale, nel senso che una sola funzione basta per tutta la frontiera. Qui non ci servirà.

La definizione vale anche in $\mathbb{C}^n$, identificato con $\mathbb{R}^{2n}$. Per esempio, la palla $\mathbb{B}_n$ ha frontiera liscia e funzione definente $r(z, \bar{z}) = \|z\|^2 - 1$. In $\mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie come quella appena definita si chiama *ipersuperficie reale*, per distinguerla da un'ipersuperficie complessa, descritta dagli zeri di una funzione olomorfa. Quando è chiaro dal contesto,

ometteremo l'aggettivo «reale».

Definizione 2.2.2. Per $p \in \mathbb{R}^n$, lo spazio dei *vettori tangenti* $T_p\mathbb{R}^n$ è

$$T_p\mathbb{R}^n = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}.$$

Un vettore $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ ha dunque la forma

$$X_p = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p,$$

con a_k reali. Nei calcoli lo possiamo rappresentare con la n-upla $a = (a_1, \dots, a_n)$. Se però $p \neq q$, gli spazi $T_p\mathbb{R}^n$ e $T_q\mathbb{R}^n$ sono distinti. L'oggetto $\partial/\partial x_k|_p$ è un funzionale lineare reale[12] sullo spazio delle funzioni lisce: applicato a g dà $\partial g/\partial x_k|_p$. Anche X_p è dunque un tale funzionale. È la derivata direzionale del calcolo differenziale, data da $X_p f = \nabla f|_p \cdot (a_1, \dots, a_n)$.

Esercizio 2.2.1. Sia X un funzionale lineare reale sui polinomi reali in n variabili,[13] tale che $X(fg) = (Xf)g(0) + f(0)(Xg)$. Dimostrare che X si identifica con un elemento di $T_0\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.2.3. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie liscia, $p \in M$ e r una funzione definente in p. Un vettore $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$ è *tangente* a M in p se

$$X_p r = 0, \qquad \text{ossia} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial r}{\partial x_k}\Big|_p = 0.$$

L'insieme dei vettori così ottenuti si indica con T_pM e si chiama *spazio tangente* a M in p.

Lo spazio T_pM è uno spazio vettoriale reale di dimensione $n-1$: è il sottospazio di $T_p\mathbb{R}^n$ definito da una sola equazione lineare non banale. Ricordiamo dal calcolo differenziale che il gradiente $\nabla r|_p$ è normale a M in p. I coefficienti a dei vettori tangenti sono precisamente i vettori ortogonali alla normale, ossia $\nabla r|_p \cdot a = 0$.

Nell'adottare questa terminologia abbiamo dato per scontato che T_pM dipenda soltanto da M. I prossimi due esercizi giustificano l'indipendenza dalla scelta di r.

Esercizio 2.2.2. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie liscia e r una funzione definente liscia in p.

1. Se φ è un'altra funzione definente liscia vicino a p, dimostrare che esiste una funzione liscia g, mai nulla vicino a p, tale che $\varphi = gr$ in un intorno di p.

2. Se φ è una qualunque funzione liscia che si annulla su M, dimostrare ancora che $\varphi = gr$, dove ora g può annullarsi.

Suggerimento. Considerare dapprima $r = x_n$ e cercare g con $\varphi = x_n g$. Trovare poi un cambiamento locale di coordinate che trasformi M in $x_n = 0$. È utile ricordare che se $f(0) = 0$ e f è liscia, allora $f(s) = s \int_0^1 f'(ts)\,dt$, e l'integrale è una funzione liscia di s.

[12] Un'applicazione lineare a valori reali.

[13] Il risultato vale anche per funzioni lisce, applicando il teorema di Taylor.

Esercizio 2.2.3. Verificare che T_pM è indipendente dalla funzione definente: se $r, \tilde{r}$ definiscono M in p, provare che $\sum_k a_k\, \partial r/\partial x_k|_p = 0$ se e solo se $\sum_k a_k\, \partial \tilde{r}/\partial x_k|_p = 0$.

Gli elementi di T_pM sono le derivazioni *lungo* M in p. Se r definisce M e f, h sono due funzioni lisce coincidenti su M, l'esercizio 2.2.2 dà localmente

$$f - h = gr, \qquad \text{ossia} \qquad f = h + gr,$$

per una funzione liscia g. Applicando $X_p \in T_pM$ si trova

$$X_p f = X_p h + X_p(gr) = X_p h + (X_p g) r(p) + g(p)(X_p r) = X_p h,$$

poiché $X_p r = 0$ per tangenza e $r(p) = 0$ perché $p \in M$. Dunque $X_p f$ dipende soltanto dai valori di f su M.

Che cosa significa allora che una funzione su M sia liscia? Per definizione una funzione su M, o su un qualsiasi sottoinsieme non aperto di $\mathbb{R}^n$, è *liscia* se localmente è la restrizione di una funzione liscia definita in un intorno aperto. Un tale prolungamento non è unico. Il calcolo precedente mostra che derivare mediante T_pM dà lo stesso risultato per qualunque scelta del prolungamento.

Esempio 2.2.4. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ è definita da $x_n = 0$, gli elementi di T_pM sono della forma

$$X_p = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p.$$

Compaiono soltanto le derivazioni nelle prime $n-1$ variabili.

Definizione 2.2.5. L'unione disgiunta

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n$$

si chiama *fibrato tangente*. Si ha l'identificazione naturale $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong T\mathbb{R}^n$ data da

$$(p, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \mapsto \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p \in T\mathbb{R}^n.$$

Da questa identificazione provengono la topologia e la struttura differenziabile di $T\mathbb{R}^n$. La parola «fibrato» si riferisce alla proiezione naturale $\pi\colon T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, le cui fibre sono $\pi^{-1}(p) = T_p\mathbb{R}^n$.

Un *campo vettoriale* liscio in $T\mathbb{R}^n$ è un oggetto della forma

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

dove i coefficienti a_k sono funzioni lisce. In altre parole X è un'applicazione liscia $X\colon V \subset \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ tale che $X(p) \in T_p\mathbb{R}^n$. Scriviamo abitualmente X_p al posto di $X(p)$. Nel linguaggio dei fibrati, X è una *sezione* di $T\mathbb{R}^n$. Analogamente il fibrato tangente di M è

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Un campo vettoriale X in TM soddisfa $X_p \in T_pM$ per ogni $p \in M$.

Prima di proseguire vediamo come le applicazioni lisce trasformano gli spazi tangenti. Per $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liscia, il differenziale in p è un'applicazione lineare $Df(p)\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Se $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$, il vettore $Df(p)X_p$ è determinato dall'azione sulle funzioni lisce φ definite in un intorno di $f(p)$ in $\mathbb{R}^m$:

$$\big(Df(p)X_p\big)\varphi = X_p(\varphi \circ f).$$

È l'unico modo naturale di combinare i tre oggetti. Quando gli spazi sono $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ scriviamo $D_{\mathbb{R}}f$ per distinguere questo differenziale dalla derivata olomorfa. Nei calcoli $Df(p)$ è rappresentato dalla matrice jacobiana rispetto alle basi standard degli spazi tangenti descritte sopra. Per questo usiamo la stessa notazione per la matrice e per l'applicazione lineare. Per verificarlo basta determinare l'immagine di ciascun elemento della base $\partial/\partial x_k|_p$ e applicare la regola della catena. Per esempio, il differenziale di $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 + x_1^2, 3x_1 + 4x_2 + x_1x_2)$ nell'origine ha matrice $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Pertanto

$$X_0 = a\,\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0 + b\,\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_0 \quad \longmapsto \quad (a+2b)\,\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_0 + (3a+4b)\,\frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_0,$$

dove (y_1, y_2) sono le coordinate nello spazio d'arrivo. Verificate la definizione su una funzione di prova, per esempio $\varphi(y_1, y_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$.

Se f è liscia, M, M' sono ipersuperfici lisce e $f(M) \subset M'$, si ottiene l'inclusione corrispondente per gli spazi tangenti. Siano r, r' funzioni definenti rispettivamente per M vicino a p e per M' vicino a $f(p)$. Se $X_p \in T_pM$, la funzione $r' \circ f$ è nulla su M, quindi

$$\big(Df(p)X_p\big)r' = X_p(r' \circ f) = X_p(0) = 0.$$

Se f è un diffeomorfismo, $f(M)$ è un'ipersuperficie liscia con funzione definente $r \circ f^{-1}$. Il differenziale è invertibile e si restringe a un isomorfismo fra T_pM e $T_{f(p)}f(M)$. Abbiamo dimostrato la proposizione seguente.

Proposizione 2.2.6. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $M \subset U$ e $M' \subset \mathbb{R}^m$ ipersuperfici lisce, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ liscia, $f(M) \subset M'$ e $p \in M$. Allora

$$Df(p)(T_pM) \subset T_{f(p)}M'.$$

Se inoltre $m = n$ e f è un diffeomorfismo, ossia una biiezione su un aperto U' con inversa liscia, $f(M)$ è un'ipersuperficie liscia e $Df(p)(T_pM) = T_{f(p)}f(M)$.

Ora che sappiamo che cosa sono i vettori tangenti e come si trasformano, possiamo definire la convessità per domini con frontiera liscia.

Definizione 2.2.7. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con frontiera liscia e r una funzione definente per ∂U vicino a $p \in \partial U$, con $r < 0$ su U. Se

$$\sum_{k=1,\ell=1}^{n} a_k a_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_\ell}\Big|_p \geq 0, \qquad \text{per ogni} \qquad X_p = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p \quad \in \quad T_p\partial U,$$

diciamo che U è *convesso* in p. Se la disuguaglianza è stretta per ogni $X_p \in T_p\partial U$ diverso da zero, U è *fortemente convesso* in p. Un dominio è convesso se è convesso in ogni punto della frontiera. Per un dominio limitato[14] si parla di forte convessità se è fortemente convesso in ogni punto della frontiera.

[14]Per i domini illimitati l'uso dell'aggettivo «fortemente» è un po' più delicato; talvolta si usa invece «strettamente convesso».

La matrice

$$\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_\ell}\Big|_p\right]_{k\ell}$$

è la *matrice hessiana* di r in p. Dunque U è convesso in $p \in \partial U$ se la forma bilineare hessiana, ristretta a $T_p\partial U$, è semidefinita positiva. In concreto, indichiamo con H l'hessiana di r in p e scriviamo a come vettore colonna. La condizione è

$$a^t H a \geq 0, \qquad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \quad \nabla r|_p \cdot a = 0.$$

Questa forma bilineare è, sotto una veste appena diversa, la seconda forma fondamentale della geometria riemanniana (o forse è quest'ultima a essere una diversa veste della prima).

Abbiamo dato per scontato che la nozione sia ben definita, benché vi siano molte possibili funzioni definenti.

Esercizio 2.2.4. Dimostrare che la definizione di convessità è indipendente dalla funzione definente. *Suggerimento.* Se anche $\tilde{r}$ è definente vicino a p con la stessa convenzione di segno, esiste g liscia e positiva tale che $\tilde{r} = gr$.

Esempio 2.2.8. Il disco unitario in $\mathbb{R}^2$ è fortemente convesso. Nelle coordinate (x, y) scegliamo $r = x^2 + y^2 - 1$. Lo spazio tangente alla circonferenza è unidimensionale, dunque basta trovarne un vettore non nullo in ciascun punto. Dal gradiente $\nabla r = (2x, 2y)$ si verifica che

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

è tangente: $Xr = (2x, 2y) \cdot (y, -x) = 0$ sulla circonferenza (in questo caso, anzi, in tutto il piano). Il campo X non si annulla sulla circonferenza e in ogni suo punto dà una base dello spazio tangente (figura 2.5).

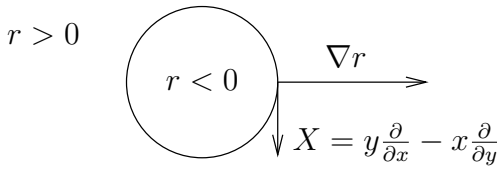


Figura 2.5: Un vettore tangente a una circonferenza.

La matrice hessiana di r è

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Valutando la forma quadratica sul vettore $(y, -x)$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = 2y^2 + 2x^2 = 2 > 0.$$

Il dominio $r < 0$ è quindi fortemente convesso in ogni punto della frontiera.

In generale, per costruire un campo tangente a una curva di $\mathbb{R}^2$ si può prendere $r_y\,\partial/\partial x - r_x\,\partial/\partial y$. In dimensione superiore, scegliendo un numero sufficiente di coppie di variabili, si ottiene localmente una base dei vettori tangenti.

Esercizio 2.2.5. Dimostrare che, se un aperto con frontiera liscia è fortemente convesso in p, allora è fortemente convesso in tutti i punti della frontiera sufficientemente vicini a p. Trovare poi un aperto con frontiera liscia convesso in un punto p ma non convesso in punti arbitrariamente vicini a p.

Esercizio 2.2.6. Dimostrare che il dominio di $\mathbb{R}^2$ definito da $x^4 + y^4 < 1$ è convesso ma non fortemente convesso. Determinare tutti i punti della frontiera in cui manca la forte convessità.

Esercizio 2.2.7. Dimostrare che il dominio di $\mathbb{R}^3$ definito da $(x_1^2+x_2^2)^2 < x_3$ è fortemente convesso in tutti i punti della frontiera tranne l'origine, dove è soltanto convesso.

I cambiamenti di coordinate che ci interessano per la convessità sono le trasformazioni affini reali invertibili. Per la convessità geometrica la ragione è evidente: queste trasformazioni mandano rette in rette. Per la convessità in un punto di una frontiera liscia occorre invece un piccolo calcolo (esercizio seguente). È utile pensare, senza spingere troppo oltre l'analogia, che le funzioni olomorfe svolgano un ruolo simile a quello delle funzioni affini. Fra poco la pseudoconvessità prenderà il posto della convessità e le applicazioni olomorfe quello delle applicazioni affini.

Esercizio 2.2.8. Provare che le traslazioni e le applicazioni lineari invertibili preservano la convessità e la forte convessità in un punto per un dominio con frontiera liscia.

Nei calcoli è spesso comodo scegliere la funzione definente in modo da scrivere M come grafico. Adottiamo una notazione abbreviata, un po' meno consueta, per il simbolo O grande.[15] Una funzione liscia è $O(\ell)$ in p (di solito l'origine) se in p si annullano tutte le sue derivate di ordine $0, 1, \dots, \ell - 1$. Per esempio, essere $O(3)$ nell'origine significa che vi si annullano la funzione e tutte le sue derivate prime e seconde.

Proposizione 2.2.9. Se $M \subset \mathbb{R}^n$ è un'ipersuperficie liscia e $p \in M$, dopo una rotazione (matrice ortogonale) e una traslazione il punto p diventa l'origine e, in un suo intorno, M si scrive

$$y = \varphi(x),$$

nelle coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, con φ liscia e $O(2)$ nell'origine, ossia $\varphi(0) = 0$ e $d\varphi(0) = 0$. Di conseguenza

$$T_0 M = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big|_0 \right\}.$$

Se M è la frontiera di un aperto U con frontiera liscia e $r < 0$ in U, si può scegliere la rotazione in modo che nei punti di U vicini all'origine valga $y > \varphi(x)$ (figura 2.6).

Dimostrazione. Sia r definente in p e poniamo $v = \nabla r|_p$. Traslando p nell'origine e applicando una rotazione, possiamo assumere $v = (0, \dots, 0, v_n)$ con $v_n < 0$. Nelle coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ si ha $\partial r/\partial y(0) \neq 0$. Il teorema delle funzioni implicite dà una funzione liscia φ con $r(x, \varphi(x)) = 0$ per ogni x vicino all'origine. Il grafico $y = \varphi(x)$ contiene precisamente tutte le soluzioni vicine di $r = 0$.

[15] Nelle coordinate centrate in p la notazione usuale è $O(\|x\|^\ell)$: il rapporto $|f(x)|/\|x\|^\ell$ resta limitato per $x \to 0$.

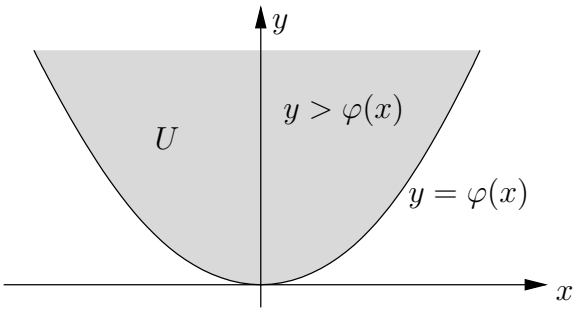


Figura 2.6: Un dominio descritto mediante il grafico della funzione che ne definisce la frontiera.

Resta da vedere che il differenziale di φ in 0 è nullo. Deriviamo l'identità $r(x, \varphi(x)) = 0$ rispetto a x_k per $k = 1, \dots, n-1$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[r(x, \varphi(x))\Big] = \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Nell'origine $\partial r/\partial x_k(0,0) = 0$ e $\partial r/\partial y(0,0) = v_n \neq 0$. Ne segue $\partial\varphi/\partial x_k(0) = 0$. Che T_0M sia generato dalle derivazioni nelle direzioni x_k segue subito da $\nabla r|_0 = (0, \dots, 0, v_n)$. Infine, poiché $r < 0$ in U, basta controllare che $r(0, y) < 0$ per $y > 0$ abbastanza piccolo. Ciò segue da $\partial r/\partial y(0,0) = v_n < 0$. □

Il vantaggio di questa rappresentazione è che, nei calcoli, le coordinate x identificano lo spazio tangente in p. Considerando x come vettore colonna, lo sviluppo di Taylor di φ nell'origine è

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \nabla\varphi|_0 \cdot x + \frac{1}{2}\, x^t H x + E(x),$$

dove $H = [\partial^2\varphi/\partial x_k \partial x_\ell|_0]_{k\ell}$ è l'hessiana nell'origine ed E è $O(3)$: si annullano in 0 sia E sia tutte le sue derivate del primo e del secondo ordine. Nella proposizione φ è $O(2)$, sicché $\varphi(0) = 0$ e $\nabla\varphi|_0 = 0$. Possiamo pertanto scrivere M come

$$y = \frac{1}{2}\, x^t H x + E(x).$$

Se $M = \partial U$, scegliamo la rotazione in modo che in U valga $y > \frac{1}{2}x^t H x + E(x)$. Si verifica per esercizio che U è convesso in p se H è semidefinita positiva, e fortemente convesso se H è definita positiva.

Esercizio 2.2.9. Dimostrare l'affermazione appena fatta su H e la convessità in p.

Esercizio 2.2.10. Sia r una funzione definente in p per l'ipersuperficie liscia $M \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che M è convessa da entrambi i lati in p se entrambi gli aperti $r > 0$ e $r < 0$ sono convessi in p. Dimostrare che un'ipersuperficie convessa da entrambi i lati in tutti i suoi punti è localmente un iperpiano, ossia l'insieme degli zeri di una funzione affine reale con parte lineare non nulla.

Esercizio 2.2.11. Sia U un dominio con frontiera liscia, fortemente convesso in $p \in \partial U$. Mostrare che si può effettuare un cambiamento affine reale di coordinate (una traslazione e un'applicazione lineare invertibile) che porti p nell'origine e per cui vicino a 0 la frontiera sia data da $y = x^t x + E(x)$, con E di ordine $O(3)$, e in U valga $y > x^t x + E(x)$.

Ricordiamo che U è *geometricamente convesso* se per ogni $p, q \in U$ contiene l'intero segmento che li unisce, cioè $tp + (1-t)q \in U$ per ogni $t \in [0,1]$. È una condizione *globale*, perché riguarda tutto U. La condizione di convessità per la frontiera liscia è invece *locale*: basta conoscere ∂U in un piccolo intorno del punto. Per domini con frontiera liscia le due nozioni si equivalgono. Una delle implicazioni è facile.

Esercizio 2.2.12. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontiera liscia e geometricamente convesso. Mostrare che U è convesso nel senso della condizione sull'hessiana.

L'altra implicazione è decisamente più impegnativa e qui non la tratteremo. Dedurre una proprietà globale da un'ipotesi locale è spesso più difficile, ma anche più interessante. Difficoltà analoghe si presenteranno quando torneremo alle variabili complesse per collegare la pseudoconvessità ai domini di olomorfia.

2.3 Vettori olomorfi, forma di Levi e pseudoconvessità

Identifichiamo $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ mediante $z = x+iy$. Si ha quindi $T_p\mathbb{C}^n = T_p\mathbb{R}^{2n}$. Prendendo lo spazio generato sul campo complesso anziché sul campo reale, otteniamo lo *spazio tangente complessificato*.[16]

$$\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_p \right\}.$$

Basta dunque ammettere coefficienti complessi al posto di quelli reali. Lo spazio $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ ha dimensione complessa $2n$. Sia $\frac{\partial}{\partial z_k}\big|_p$ sia $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\big|_p$ appartengono a $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ e vale

$$\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\Big|_p \right\}.$$

Poniamo

$$T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^n \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big|_p \right\} \quad \text{e} \quad T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\Big|_p \right\}.$$

Gli elementi di $T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^n$ si chiamano *vettori olomorfi*, quelli di $T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n$ *vettori antiolomorfi*. Lo spazio tangente complessificato si decompone nella somma diretta

$$\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n = T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^n \oplus T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n.$$

Una funzione è olomorfa precisamente quando viene annullata dai vettori di $T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n$ in ogni punto p.

Vediamo come agisce su questi spazi un'applicazione olomorfa, considerata anzitutto come applicazione liscia. Data un'applicazione liscia f da un aperto di $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}^m$, la sua derivata in $p \in \mathbb{C}^n$ è un'applicazione lineare reale $D_{\mathbb{R}}f(p)\colon T_p\mathbb{C}^n \to T_{f(p)}\mathbb{C}^m$. Nelle basi sopra indicate essa è rappresentata dalla consueta matrice jacobiana reale di dimensioni $2m \times 2n$, già indicata con $D_{\mathbb{R}}f(p)$. Poiché una base reale di $T_p\mathbb{C}^n$ è una base complessa di $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$, l'applicazione $D_{\mathbb{R}}f(p)\colon T_p\mathbb{C}^n \to T_{f(p)}\mathbb{C}^m$ ammette un unico prolungamento lineare complesso

$$D_{\mathbb{C}}f(p)\colon \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}T_{f(p)}\mathbb{C}^m.$$

Proposizione 2.3.1. Siano $f\colon U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ un'applicazione olomorfa e $p \in U$. Allora

$$D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^n\Big) \subset T_{f(p)}^{(1,0)}\mathbb{C}^m \qquad \text{e} \qquad D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n\Big) \subset T_{f(p)}^{(0,1)}\mathbb{C}^m.$$

Se f è un biolomorfismo, la restrizione di $D_{\mathbb{C}}f(p)$ a $T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^n$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Lo stesso vale per $T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n$.

Esercizio 2.3.1. Dimostrare la proposizione. *Suggerimento.* Partire da $D_{\mathbb{R}}f(p)$ come matrice reale $2m \times 2n$ e mostrare che l'applicazione si prolunga (rispetto agli stessi vettori di base la matrice resta la stessa). Descrivere $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ mediante le coordinate z e $\bar{z}$ e considerare f come l'applicazione

$$(z, \bar{z}) \mapsto (f(z), \bar{f}(\bar{z})).$$

Scrivere la matrice della derivata in termini di z, $\bar{z}$, f e $\bar{f}$. Il risultato seguirà da questo semplice cambiamento di base.

[16] In termini astratti, il complessificato di uno spazio vettoriale reale X è $X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Esercizio 2.3.2. Dimostrare il viceversa. Se $f\colon U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ è liscia e soddisfa

$$D_{\mathbb{C}} f(p)\Big(T^{(1,0)}_p \mathbb{C}^n\Big) \subset T^{(1,0)}_{f(p)} \mathbb{C}^m$$

in ogni $p \in U$, allora f è olomorfa.

Quando si tratta di applicazioni e vettori olomorfi, per «derivata di f» intendiamo la parte olomorfa della derivata, che indichiamo con

$$Df(p)\colon T^{(1,0)}_p \mathbb{C}^n \to T^{(1,0)}_{f(p)} \mathbb{C}^m, \qquad Df(p) = D_{\mathbb{C}} f(p)\big|_{T^{(1,0)}_p \mathbb{C}^n}.$$

Restringiamo cioè $D_{\mathbb{C}} f(p)$ a $T^{(1,0)}_p \mathbb{C}^n$. Siano z le coordinate in $\mathbb{C}^n$ e w quelle in $\mathbb{C}^m$. Nelle basi $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\big|_p \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial w_1}\big|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_m}\big|_{f(p)} \right\}$, la derivata olomorfa $Df(p)$ è rappresentata dalla matrice jacobiana $m \times n$

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial z_\ell}\Big|_p \right]_{k\ell},$$

già incontrata nella sezione 1.3 sulle derivate e indicata anch'essa con $Df(p)$.

Come prima, mediante unioni disgiunte definiamo i fibrati tangenti

$$\mathbb{C}T\mathbb{C}^n, \quad T^{(1,0)}\mathbb{C}^n, \quad \text{e} \quad T^{(0,1)}\mathbb{C}^n$$

Anche in questi fibrati si possono definire campi di vettori.

Descriviamo $\mathbb{C}T_pM$ per un'ipersuperficie reale liscia $M \subset \mathbb{C}^n$. Sia r una funzione definente reale per M in p. Un vettore $X_p \in \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^n$ appartiene a $\mathbb{C}T_pM$ precisamente quando $X_p r = 0$. In altri termini,

$$X_p = \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p + b_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p \right) \in \mathbb{C}T_pM \quad \text{se} \quad \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_p + b_k \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p \right) = 0.$$

Dunque $\mathbb{C}T_pM$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione $(2n-1)$. Scriviamo $\mathbb{C}T_pM$ come

$$\mathbb{C}T_pM = T^{(1,0)}_p M \oplus T^{(0,1)}_p M \oplus B_p,$$

dove

$$T^{(1,0)}_p M \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{C}T_pM) \cap (T^{(1,0)}_p \mathbb{C}^n) \quad \text{e} \quad T^{(0,1)}_p M \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{C}T_pM) \cap (T^{(0,1)}_p \mathbb{C}^n).$$

Il sottospazio B_p è il complemento che occorre aggiungere perché le dimensioni tornino.[17]

Esercizio 2.3.3. Ritrovare questi spazi nel modo seguente. Siano M un'ipersuperficie liscia e $p \in M$. Sia J l'endomorfismo di $T_p\mathbb{C}^n$ corrispondente alla moltiplicazione per i (la derivata della moltiplicazione per i). Poniamo $T^c_p M = J(T_pM) \cap T_pM$. Questo sottospazio invariante per J viene talvolta chiamato *spazio tangente complesso*, pur essendo uno spazio vettoriale reale. La restrizione di J è un endomorfismo di $T^c_p M$ e induce quindi un endomorfismo di $\mathbb{C}T^c_pM$. Dimostrare che $T^{(1,0)}_p M$ e $T^{(0,1)}_p M$ sono gli autospazi di J per gli autovalori $\pm i$.

Si tenga presente il campo degli scalari. Lo spazio T_pM è reale, mentre $\mathbb{C}T_pM$, $T^{(1,0)}_p M$, $T^{(0,1)}_p M$ e B_p sono complessi. Per ottenere fibrati vettoriali occorre anzitutto verificare che le loro dimensioni siano costanti. Il modo più semplice consiste nello scegliere opportune coordinate locali. Osserviamo dapprima che un biolomorfismo conserva i vettori tangenti olomorfi e antiolomorfi. Otteniamo così l'analogo della proposizione 2.2.6. Ricordiamo che ogni biolomorfismo è un diffeomorfismo.

[17] Talvolta, informalmente, B_p viene chiamato la «direzione cattiva».

Proposizione 2.3.2. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia, $p \in M$, $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con $M \subset U$ e $M' \subset \mathbb{C}^m$ un'altra ipersuperficie reale liscia. Sia $f\colon U \to \mathbb{C}^m$ olomorfa e tale che $f(M) \subset M'$. Indicata con $D_{\mathbb{C}}f(p)$ la derivata reale complessificata, si ha

$$D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(1,0)}M\Big) \subset T_{f(p)}^{(1,0)}M', \qquad D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(0,1)}M\Big) \subset T_{f(p)}^{(0,1)}M'.$$

Inoltre, se $m = n$ e f è un biolomorfismo, $f(M)$ è un'ipersuperficie reale liscia, $D_{\mathbb{C}}f(p)$ è invertibile e valgono $D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(1,0)}M\Big) = T_{f(p)}^{(1,0)}f(M)$ e $D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(0,1)}M\Big) = T_{f(p)}^{(0,1)}f(M)$. Gli spazi corrispondenti sono dunque isomorfi come spazi vettoriali complessi.

La proposizione è locale. Se U è soltanto un intorno di p, basta sostituire M con $M \cap U$.

Dimostrazione. Applichiamo le proposizioni 2.3.1 e 2.2.6. Si ha

$$D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^n\Big) \subset T_{f(p)}^{(1,0)}\mathbb{C}^m, \quad D_{\mathbb{C}}f(p)\Big(T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n\Big) \subset T_{f(p)}^{(0,1)}\mathbb{C}^m, \quad \text{e}$$
$$D_{\mathbb{C}}f(p)(\mathbb{C}T_pM) \subset \mathbb{C}T_{f(p)}M'.$$

Pertanto $D_{\mathbb{C}}f(p)$ manda $T_p^{(1,0)}M$ in $T_{f(p)}^{(1,0)}M'$ e $T_p^{(0,1)}M$ in $T_{f(p)}^{(0,1)}M'$. L'ultima parte discende dall'ultima affermazione della proposizione 2.2.6. □

Vogliamo di nuovo rappresentare un'ipersuperficie come grafico. In questo contesto i cambiamenti di coordinate appropriati sono i biolomorfismi. Le traslazioni sono biolomorfe e per ruotare $\mathbb{C}^n$ useremo una matrice unitaria.

Proposizione 2.3.3. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia e $p \in M$. Dopo una traslazione e una rotazione mediante una matrice unitaria, p è l'origine e, vicino all'origine, M è descritta nelle variabili $(z, w) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ da

$$\Im w = \varphi(z, \bar{z}, \Re w),$$

con $\varphi(0) = 0$ e $d\varphi(0) = 0$. Di conseguenza

$$T_0^{(1,0)}M = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\Big|_0\right\}, \qquad T_0^{(0,1)}M = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}\Big|_0\right\},$$
$$B_0 = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial(\Re w)}\Big|_0\right\}.$$

In particolare, $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{(1,0)}M = \dim_{\mathbb{C}} T_p^{(0,1)}M = n - 1$ e $\dim_{\mathbb{C}} B_p = 1$.

Se M è la frontiera di un aperto U con frontiera liscia, si può scegliere la rotazione in modo che $\Im w > \varphi(z, \bar{z}, \Re w)$ in U.

Nella notazione $\varphi(z, \bar{z}, \Re w)$ usiamo $z, \bar{z}$ per le direzioni z. Poiché φ è indipendente da $\Im w$, per w dobbiamo esplicitare la parte reale.

Dimostrazione. Con una traslazione poniamo $p = 0$. Come nella proposizione 2.2.9, applichiamo una matrice unitaria affinché ∇r punti nella direzione $-\frac{\partial}{\partial(\Im w)}\big|_0$. Come allora, ne seguono $\varphi(0) = 0$ e $d\varphi(0) = 0$. La traslazione e la matrice unitaria sono biolomorfe, perciò gli spazi tangenti si trasformano come indicato nella proposizione 2.3.2. Le restanti affermazioni seguono dal fatto che $\frac{\partial}{\partial(\Im w)}\big|_0$ è il vettore normale a M nell'origine. □

Osservazione 2.3.4. Quando M ha dimensione inferiore a $2n - 1$ e quindi non è più un'ipersuperficie, la conclusione sulle dimensioni viene meno. Si ha ancora $\dim_{\mathbb{C}} T_p^{(1,0)}M = \dim_{\mathbb{C}} T_p^{(0,1)}M$, ma tale dimensione può variare da punto a punto. Per i domini con frontiera liscia questa complicazione non si presenta, perché per definizione le loro frontiere sono ipersuperfici.

Definizione 2.3.5. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia e r una funzione definente per ∂U in $p \in \partial U$, scelta in modo che $r < 0$ in U. Se

$$\sum_{k=1,\ell=1}^{n} \bar{a}_k a_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_p \geq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad X_p = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p \quad \in \quad T_p^{(1,0)}\partial U,$$

diciamo che U è *pseudoconvesso* in p (o *pseudoconvesso nel senso di Levi*). Se la disuguaglianza è stretta per ogni vettore non nullo $X_p \in T_p^{(1,0)}\partial U$, diciamo che U è *fortemente pseudoconvesso* in p. Se U è pseudoconvesso in p senza esserlo fortemente, diciamo che U è *debolmente pseudoconvesso* in quel punto.

Un dominio U è *pseudoconvesso* se lo è in ogni $p \in \partial U$. Per U limitato,[18] diciamo che U è *fortemente pseudoconvesso* quando lo è in ogni punto $p \in \partial U$.

Per $X_p \in T_p^{(1,0)}\partial U$, la forma quadratica hermitiana

$$\mathcal{L}(X_p, X_p) = \sum_{k=1,\ell=1}^{n} \bar{a}_k a_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_p$$

si chiama *forma di Levi* in p. Dunque U è pseudoconvesso (rispettivamente, fortemente pseudoconvesso) in $p \in \partial U$ quando la forma di Levi in p è semidefinita positiva (rispettivamente, definita positiva). Si può definire la forma di Levi per qualunque ipersuperficie reale M, una volta stabilito quale lato di M considerare interno.

La matrice

$$\left[\frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_p\right]_{k\ell}$$

si chiama *hessiana complessa* di r in p.[19] Pertanto U è pseudoconvesso in $p \in \partial U$ quando la restrizione dell'hessiana complessa di r in p, come forma hermitiana, ai vettori tangenti di $T_p^{(1,0)}\partial U$ è semidefinita positiva. Per esempio, la palla unitaria $\mathbb{B}_n$ è fortemente pseudoconvessa. Basta calcolare direttamente la forma di Levi a partire da $r(z, \bar{z}) = \|z\|^2 - 1$. L'hessiana complessa di r è la matrice identità.

Distinguiamo l'hessiana complessa dall'hessiana reale completa. Nella base dei $\frac{\partial}{\partial z}$ e dei $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, l'hessiana completa si scrive come matrice hermitiana

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_1 \partial z_n} & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_n \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_n \partial z_n} & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_n \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_n \partial \bar{z}_n} \\
\frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial z_n} & \frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial z_1 \partial \bar{z}_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial^2 r}{\partial z_n \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial z_n \partial z_n} & \frac{\partial^2 r}{\partial z_n \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial z_n \partial \bar{z}_n}
\end{bmatrix}.$$

Infatti, quando moltiplichiamo a sinistra per X_p, coniughiamo anche i coefficienti e perciò scambiamo le righe relative alle z e alle $\bar{z}$.[20] La matrice è hermitiana per r a valori reali (si veda l'esercizio sotto). L'hessiana complessa è il blocco superiore sinistro, ossia il trasposto del blocco inferiore destro. Se la matrice completa si scrive $\left[\begin{smallmatrix} L & \overline{Z} \\ Z & L^t \end{smallmatrix}\right]$, l'hessiana complessa

[18] Per i domini illimitati la terminologia varia da autore ad autore. Si usa talvolta «strettamente pseudoconvesso».

[19] Talvolta l'hessiana complessa viene impropriamente chiamata «forma di Levi di r». La forma di Levi è definita per una frontiera o un'ipersuperficie e agisce soltanto sui suoi vettori tangenti olomorfi.

[20] È comune anche la convenzione senza scambio di righe, che dà una matrice simmetrica.

è L. La matrice L ha dimensioni minori e la applichiamo soltanto a un sottospazio dello spazio tangente complessificato.

Illustriamo il cambiamento di base in dimensione uno, lasciando al lettore il caso generale. Sia $z = x + iy$ in $\mathbb{C}$ e indichiamo con T la matrice del cambiamento di base.

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{bmatrix}, \qquad T^* \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z} \partial z} & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial z} & \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial \bar{z}} \end{bmatrix},$$

Qui $T^* = \overline{T}^t$ è la trasposta coniugata. Per la legge d'inerzia di Sylvester, la $*$-congruenza conserva l'inerzia, ossia il numero di autovalori positivi, negativi e nulli. L'hessiana completa nelle x e y ha quindi la stessa inerzia dell'hessiana completa nelle z e $\bar{z}$. Esiste anche una relazione tra gli autovalori dell'hessiana completa e quelli dell'hessiana complessa, sebbene sia meno immediata di quanto possa sembrare.

Esercizio 2.3.4 (facile). Se r è a valori reali, dimostrare che tanto l'hessiana complessa di r quanto l'hessiana completa nelle variabili z e $\bar{z}$ sono hermitiane.

Esercizio 2.3.5. In dimensione uno, $z = x+iy$, si consideri l'hessiana reale nelle variabili x e y,

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}.$$

Mostrare che l'hessiana complessa L (qui un numero) è pari a $1/4$ della traccia di H. Dunque, se H è definita positiva, $L > 0$ e, se H è definita negativa, $L < 0$. Mostrare poi con esempi che, quando H ha autovalori di segno opposto, L può essere positivo, negativo o nullo.

Esercizio 2.3.6. In dimensione arbitraria trovare il cambiamento di variabili T^*HT che porta dall'hessiana reale in x e y all'hessiana in z e $\bar{z}$. *Suggerimento.* Una volta risolto il caso $n = 2$, la generalizzazione sarà facile.

Esercizio 2.3.7. Dimostrare in ogni dimensione che, se l'hessiana reale (in x e y) è definita o semidefinita positiva, lo è anche l'hessiana complessa. *Suggerimento.* Una matrice hermitiana L è definita positiva se $v^*Lv > 0$ per ogni vettore non nullo v ed è semidefinita positiva se $v^*Lv \geq 0$ per ogni v.

Vediamo come un cambiamento lineare complesso di variabili agisce sull'hessiana. Un'applicazione lineare complessa A, data da una matrice complessa $n \times n$, trasforma lo spazio tangente nella base dei $\frac{\partial}{\partial z}$ e dei $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante la derivata $D_{\mathbb{C}}A$, scritta come matrice $2n \times 2n$. Un calcolo diretto dà $D_{\mathbb{C}}A = A \oplus \overline{A} = \left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{smallmatrix}\right]$. Scriviamo l'hessiana completa come $\left[\begin{smallmatrix} L & \overline{Z} \\ Z & L^t \end{smallmatrix}\right]$, dove L è l'hessiana complessa. Il cambiamento di variabili A trasforma l'hessiana completa secondo la formula

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} L & \overline{Z} \\ Z & L^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*LA & \overline{A^tZA} \\ A^tZA & (A^*LA)^t \end{bmatrix}.$$

Ancora per la legge d'inerzia di Sylvester, L e A^*LA hanno la stessa inerzia, cioè gli stessi numeri di autovalori positivi, negativi e nulli.

La forma di Levi dipende dalla funzione definente, ma i segni dei suoi autovalori ne sono indipendenti. Di solito si parla della «forma di Levi» senza precisare la funzione definente,

anche se a rigore occorrerebbe specificarla. Lasciamo per esercizio la dimostrazione della proposizione seguente.

Proposizione 2.3.6. Se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto con frontiera liscia e $p \in \partial U$, l'inerzia della forma di Levi in p è indipendente dalla funzione definente. Lo stesso vale dunque per le nozioni di pseudoconvessità e di pseudoconvessità forte.

Esercizio 2.3.8. Dimostrare la proposizione 2.3.6.

Esercizio 2.3.9. Dimostrare che un dominio convesso con frontiera liscia è pseudoconvesso e che un dominio limitato fortemente convesso con frontiera liscia è fortemente pseudoconvesso.

Esercizio 2.3.10. Mostrare che, se un aperto con frontiera liscia è fortemente pseudoconvesso in un punto, lo è anche in tutti i punti della frontiera sufficientemente vicini.

Ci interessa soprattutto l'effetto di un cambiamento olomorfo di coordinate, ossia di un biolomorfismo. Per la pseudoconvessità bastano cambiamenti locali, poiché la proprietà stessa è locale. Prima di dimostrarne l'invarianza biolomorfa, riconosciamo la forma di Levi nelle coordinate della proposizione 2.3.3. Supponiamo cioè che la frontiera sia descritta vicino all'origine dal grafico

$$\Im w = \varphi(z, \bar{z}, \Re w),$$

dove φ è $O(2)$. Scegliamo come funzione definente $r(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = \varphi(z, \bar{z}, \Re w) - \Im w$. L'hessiana complessa di r è una matrice $n \times n$ della forma

$$\begin{bmatrix} L & * \\ * & * \end{bmatrix} \qquad \text{dove} \quad L = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_0 \right]_{k\ell}.$$

Il blocco L è una matrice $(n-1) \times (n-1)$. Lo spazio $T_0^{(1,0)}\partial U$ è generato da $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}\big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\big|_0 \right\}$. Come vettore a n componenti, un elemento di $T_0^{(1,0)}\partial U$ si scrive quindi $(a, 0) \in \mathbb{C}^n$ per qualche $a \in \mathbb{C}^{n-1}$. La forma di Levi nell'origine è allora $a^* L a$, ossia è rappresentata dalla matrice $(n-1) \times (n-1)$ indicata con L. Se L è semidefinita positiva, ∂U è pseudoconvessa in 0.

Esempio 2.3.7. Scegliamo coordinate olomorfe locali per la palla $\mathbb{B}_n$ nelle quali la forma di Levi risulti particolarmente semplice. La sfera $\partial\mathbb{B}_n$ è definita nelle variabili $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$ dall'equazione $\|Z\| = 1$. Passiamo alle coordinate $(z_1, \dots, z_{n-1}, w)$ ponendo

$$z_k = \frac{Z_k}{1 - Z_n} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n-1, \qquad w = i\frac{1 + Z_n}{1 - Z_n}.$$

Il cambiamento di variabili è un biolomorfismo dall'insieme in cui $Z_n \neq 1$ all'insieme in cui $w \neq -i$ (esercizio). Qui ci basta l'invertibilità in un intorno di $(0, \dots, 0, -1)$, che si verifica calcolando la derivata. L'ultima componente è l'inversa della trasformazione di Cayley e porta il disco nel semipiano superiore.

Affermiamo che questa applicazione manda la sfera unitaria $\|Z\| = 1$, privata del punto $(0, \dots, 0, 1)$, nell'insieme definito da

$$\Im w = |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2,$$

e manda $(0,\dots,0,-1)$ nell'origine (quest'ultima affermazione è immediata). Infatti,

$$\begin{aligned}|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2-\Im w &= \left|\frac{Z_1}{1-Z_n}\right|^2+\cdots+\left|\frac{Z_{n-1}}{1-Z_n}\right|^2-\frac{i\frac{1+Z_n}{1-Z_n}-\overline{i\frac{1+Z_n}{1-Z_n}}}{2i}\\ &= \frac{|Z_1|^2}{|1-Z_n|^2}+\cdots+\frac{|Z_{n-1}|^2}{|1-Z_n|^2}-\frac{1+Z_n}{2(1-Z_n)}-\frac{1+\bar{Z}_n}{2(1-\bar{Z}_n)}\\ &= \frac{|Z_1|^2+\cdots+|Z_{n-1}|^2+|Z_n|^2-1}{|1-Z_n|^2}.\end{aligned}$$

Si ha dunque $|Z_1|^2+\cdots+|Z_n|^2=1$ se e solo se $\Im w=|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2$. Poiché il punto $(0,\dots,0,-1)$ va nell'origine, l'insieme di equazione

$$\Im w=|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2$$

rappresenta la sfera in coordinate olomorfe locali presso $(0,\dots,0,-1)$. Per simmetria, mediante una rotazione avremmo potuto scegliere qualunque punto della sfera. Nelle coordinate (z,w), la palla, ossia l'interno della sfera, è data da

$$\Im w>|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2.$$

La forma di Levi nell'origine è rappresentata dalla matrice identità, perciò il dominio è fortemente pseudoconvesso nell'origine. Dimostreremo che la pseudoconvessità, anche forte, è invariante per biolomorfismi. Ne segue che la palla è fortemente pseudoconvessa.

La trasformazione lascia fuori una parte della sfera. I punti in cui $Z_n=1$ vengono «mandati all'infinito». L'ipersuperficie $\Im w=|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2$ è detta talvolta *ipersuperficie di Lewy*. Alcuni autori scrivono addirittura che essa *è* la sfera.[21] La figura 2.7 la rappresenta trattando z come un'unica direzione reale. L'ipersuperficie $\Im w=|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2$ si chiama anche *gruppo di Heisenberg*. Il gruppo è definito sui parametri $(z,\Re w)$ dell'ipersuperficie mediante la legge $(z,\Re w)(z',\Re w')=(z+z',\Re w+\Re w'+2\Im\langle z,z'\rangle)$.

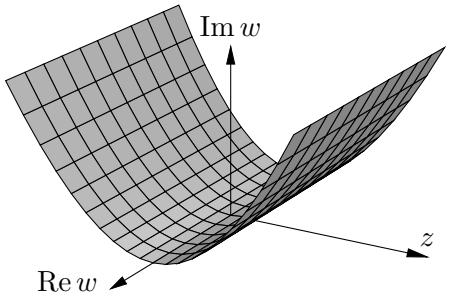


Figura 2.7: L'ipersuperficie di Lewy.

Esercizio 2.3.11. Dimostrare che la trasformazione dell'esempio è biolomorfa fra gli insiemi indicati.

Vediamo come cambia l'hessiana di r per un cambiamento biolomorfo di coordinate. Siano $f\colon V\to V'$ un biolomorfismo fra due domini di $\mathbb{C}^n$ e $r\colon V'\to\mathbb{R}$ una funzione liscia con differenziale mai nullo. Calcoliamo l'hessiana di $r\circ f\colon V\to\mathbb{R}$, cominciando dalle derivate non miste. Poiché dobbiamo applicare due volte la regola della catena,

[21] L'affermazione ha un senso preciso. Se consideriamo la sfera nello spazio proiettivo complesso, la stiamo semplicemente guardando in un'altra carta.

indicheremo esplicitamente il punto di valutazione delle derivate, che a loro volta sono funzioni. Siano z le coordinate in V e ζ quelle in V'. Dunque r dipende da ζ e $\bar{\zeta}$, f dipende da z e $\bar{f}$ da $\bar{z}$. Pertanto $r \circ f$ dipende da z e $\bar{z}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial z_k \partial z_\ell} &= \frac{\partial}{\partial z_k} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell}\Big|_z + \frac{\partial r}{\partial \bar{\zeta}_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \cancelto{0}{\frac{\partial \bar{f}_m}{\partial z_\ell}\Big|_{\bar{z}}} \right) \\
&= \sum_{m,\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_\nu \partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \frac{\partial f_\nu}{\partial z_k}\Big|_z \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell}\Big|_z + \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{\zeta}_\nu \partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \cancelto{0}{\frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial z_k}\Big|_{\bar{z}}} \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell}\Big|_z \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \frac{\partial^2 f_m}{\partial z_k \partial z_\ell}\Big|_z \\
&= \sum_{m,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_\nu \partial \zeta_m} \frac{\partial f_\nu}{\partial z_k} \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \zeta_m} \frac{\partial^2 f_m}{\partial z_k \partial z_\ell}.
\end{aligned}$$

La matrice $\left[\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial z_k \partial z_\ell}\right]$ può avere autovalori diversi da quelli della matrice $\left[\frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_k \partial \zeta_\ell}\right]$. Se r ha gradiente non nullo, il secondo termine permette di scegliere localmente f in modo che $\left[\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial z_k \partial z_\ell}\right]$ sia nulla in un punto assegnato, o vi assuma qualunque altro valore compatibile con la simmetria. Infatti possiamo scegliere arbitrariamente in quel punto le derivate seconde di f. Si veda l'esercizio seguente. Nessuna proprietà della matrice $\left[\frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_k \partial \zeta_\ell}\right]$ viene dunque preservata da un biolomorfismo, ed è proprio per questo che essa non compare nella definizione di pseudoconvessità. Lo stesso ragionamento vale per $\left[\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_\ell}\right]$ e $\left[\frac{\partial^2 r}{\partial \bar{\zeta}_k \partial \bar{\zeta}_\ell}\right]$.

Esercizio 2.3.12. Data una funzione reale r con gradiente non nullo in $p \in \mathbb{C}^n$, trovare un cambiamento locale di coordinate f in p (dunque f dev'essere olomorfa con derivata invertibile in p) tale che $\left[\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial z_k \partial z_\ell}\Big|_p\right]$ e $\left[\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_\ell}\Big|_p\right]$ siano entrambe nulle.

Consideriamo le derivate miste.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (r\circ f)}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell}\Big|_z \right) \\
&= \sum_{m,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{\zeta}_\nu \partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial \bar{z}_k}\Big|_{\bar{z}} \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell}\Big|_z + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \zeta_m}\Big|_{(f(z),\bar{f}(\bar{z}))} \cancelto{0}{\frac{\partial^2 f_m}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_z} \\
&= \sum_{m,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{\zeta}_\nu \partial \zeta_m} \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial f_m}{\partial z_\ell}.
\end{aligned}$$

L'hessiana complessa di $r \circ f$ si ottiene dall'hessiana complessa L di r mediante la trasformazione $D^* L D$, dove D è la matrice della derivata olomorfa di f in z e D^* è la sua trasposta coniugata. Per la legge d'inerzia di Sylvester, $D^* L D$ e L hanno gli stessi numeri di autovalori positivi, negativi e nulli. Gli autovalori possono variare, mentre i loro segni sono preservati. A noi interessano le restrizioni di L e $D^* L D$ a opportuni sottospazi. In termini di algebra lineare, dati D invertibile, un sottospazio T e la sua immagine DT, l'inerzia della restrizione di L a DT è uguale all'inerzia della restrizione di $D^* L D$ a T.

Sia M un'ipersuperficie reale liscia di equazione $r = 0$. Allora $f^{-1}(M)$ è un'ipersuperficie reale liscia di equazione $r \circ f = 0$. La derivata olomorfa $D = Df(p)$ manda isomorficamente $T^{(1,0)}_p f^{-1}(M)$ su $T^{(1,0)}_{f(p)} M$. Pertanto L è definita (o semidefinita) positiva su $T^{(1,0)}_{f(p)} M$ se e solo se $D^* L D$ lo è su $T^{(1,0)}_p f^{-1}(M)$. Abbiamo quasi dimostrato il seguente teorema, secondo cui la pseudoconvessità è un invariante biolomorfo.

Teorema 2.3.8. Siano $U, U' \subset \mathbb{C}^n$ aperti con frontiera liscia, $p \in \partial U$, $V \subset \mathbb{C}^n$ un intorno di p, $q \in \partial U'$ e $V' \subset \mathbb{C}^n$ un intorno di q. Sia $f\colon V \to V'$ un biolomorfismo con $f(p) = q$ tale che $f(U \cap V) = U' \cap V'$. Si veda la figura 2.8.

L'inerzia della forma di Levi di U in p coincide con quella della forma di Levi di U' in q. In particolare, U è pseudoconvesso in p se e solo se U' è pseudoconvesso in q. Analogamente, U è fortemente pseudoconvesso in p se e solo se U' è fortemente pseudoconvesso in q.

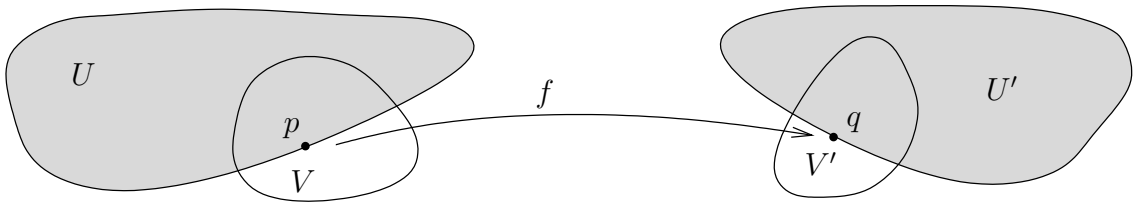


Figura 2.8: Biolomorfismo locale in prossimità della frontiera.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che, se $f(U \cap V) = U' \cap V'$, allora $f(\partial U \cap V) = \partial U' \cap V'$ e che, se r è una funzione definente per U' in q, allora $r \circ f$ è una funzione definente per U in p.

Esercizio 2.3.13. Trovare in $\mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, un dominio limitato con frontiera liscia che sia pseudoconvesso senza essere convesso.

La forma di Levi può cambiare per un cambiamento olomorfo di coordinate, mentre la sua inerzia resta invariata. Combinando questo fatto con le osservazioni precedenti, ricaviamo una forma normale per la parte quadratica dell'equazione definente di un'ipersuperficie reale liscia rispetto alle trasformazioni biolomorfe. Si può ottenere qualcosa di più del lemma che segue, ma in generale non si riesce a eliminare la dipendenza da $\Re w$ nei termini di ordine superiore.

Lemma 2.3.9. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia e $p \in M$. Esiste un cambiamento locale biolomorfo di coordinate che manda p in 0 e M nell'ipersuperficie di equazione

$$\Im w = \sum_{k=1}^{\alpha} |z_k|^2 - \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} |z_k|^2 + E(z, \bar{z}, \Re w),$$

dove E è $O(3)$ nell'origine. Se M è una frontiera, si scelgono le coordinate in modo che il dominio si ottenga sostituendo come al solito $=$ con $>$. In tal caso α è il numero di autovalori positivi della forma di Levi in p, β è il numero di autovalori negativi e $\alpha + \beta \leq n - 1$.

Ricordiamo che con $O(\ell)$ nell'origine indichiamo una funzione che vi si annulla insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $\ell - 1$ incluso.

Dimostrazione. Scegliamo coordinate in cui M è data da $\Im w = \varphi(z, \bar{z}, \Re w)$, con φ di ordine $O(2)$. Applichiamo a φ la formula di Taylor fino al secondo ordine:

$$\varphi(z, \bar{z}, \Re w) = q(z, \bar{z}) + (\Re w)(Lz + \overline{Lz}) + a(\Re w)^2 + O(3),$$

dove q è quadratica, $L\colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ è lineare e $a \in \mathbb{R}$. Se $L \neq 0$, basta un cambiamento lineare nelle sole variabili z per ottenere $Lz = z_1$. Possiamo quindi supporre $Lz = \epsilon z_1$ con $\epsilon = 0$ oppure $\epsilon = 1$.

Cambiamo coordinate lasciando fisse le z e ponendo $w = w' + bw'^2 + cw'z_1$. Trascuriamo per il momento $q(z, \bar{z})$, che il cambiamento di coordinate lascia invariato, e lavoriamo fino al secondo ordine incluso.

$$\begin{aligned}
&-\Im w + \epsilon(\Re w)(z_1 + \bar{z}_1) + a(\Re w)^2 \\
&\quad = -\frac{w - \bar{w}}{2i} + \epsilon\frac{w + \bar{w}}{2}(z_1 + \bar{z}_1) + a\left(\frac{w + \bar{w}}{2}\right)^2 \\
&\quad = -\frac{w' + bw'^2 + cw'z_1 - \bar{w}' - \bar{b}\bar{w}'^2 - \bar{c}\bar{w}'\bar{z}_1}{2i} \\
&\qquad + \epsilon\frac{w' + bw'^2 + cw'z_1 + \bar{w}' + \bar{b}\bar{w}'^2 + \bar{c}\bar{w}'\bar{z}_1}{2}(z_1 + \bar{z}_1) \\
&\qquad + a\frac{(w' + bw'^2 + cw'z_1 + \bar{w}' + \bar{b}\bar{w}'^2 + \bar{c}\bar{w}'\bar{z}_1)^2}{4} \\
&\quad = -\frac{w' - \bar{w}'}{2i} + \frac{\big((\epsilon i - c)w' + \epsilon i\bar{w}'\big)z_1 + \big((\epsilon i + \bar{c})\bar{w}' + \epsilon i w'\big)\bar{z}_1}{2i} \\
&\qquad + \frac{(ia - 2b)w'^2 + (ia + 2\bar{b})\bar{w}'^2 + 2iaw'\bar{w}'}{4i} + O(3).
\end{aligned}$$

Non possiamo eliminare tutti i termini quadratici di φ, ma possiamo scegliere b e c in modo che i termini del secondo ordine siano indipendenti da $\Re w'$. Poniamo $b = ia$ e $c = 2i\epsilon$ e reinseriamo $q(z, \bar{z}) + O(3)$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
-\Im w + \varphi(z, \bar{z}, \Re w) &= -\Im w + q(z, \bar{z}) + \epsilon(\Re w)(z_1 + \bar{z}_1) + a(\Re w)^2 + O(3) \\
&= -\frac{w' - \bar{w}'}{2i} + q(z, \bar{z}) - \epsilon i\frac{w' - \bar{w}'}{2i}(z_1 - \bar{z}_1) + a\left(\frac{w' - \bar{w}'}{2i}\right)^2 + O(3) \\
&= -\Im w' + q(z, \bar{z}) - \epsilon i(\Im w')(z_1 - \bar{z}_1) + a(\Im w')^2 + O(3).
\end{aligned}$$

Il secondo membro è la funzione definente nelle coordinate (z, w'). Poiché M non è più espressa come grafico di $\Im w'$ sulle variabili rimanenti, applichiamo il teorema delle funzioni implicite e risolviamo rispetto a $\Im w'$ per tornare alla rappresentazione come grafico. L'espressione di $\Im w'$ è $O(2)$, sicché $-i\epsilon(\Im w')(z_1 - \bar{z}_1) + a(\Im w')^2$ è $O(3)$. Scrivendo M come grafico,

$$\Im w' = q(z, \bar{z}) + E(z, \bar{z}, \Re w'),$$

si vede dunque che E è $O(3)$.

Scriviamo il polinomio quadratico q nella forma

$$q(z, \bar{z}) = \sum_{k,\ell=1}^{n-1} a_{k\ell} z_k z_\ell + b_{k\ell}\bar{z}_k\bar{z}_\ell + c_{k\ell}\bar{z}_k z_\ell. \tag{2.2}$$

I coefficienti $a_{k\ell}$ e $b_{k\ell}$ non sono univocamente determinati, ma lo diventano se scegliamo simmetriche le matrici $[a_{k\ell}]$ e $[b_{k\ell}]$. Poiché q è a valori reali, si ha $a_{k\ell} = \overline{b_{k\ell}}$ e $c_{k\ell} = \overline{c_{\ell k}}$, come si lascia verificare per esercizio. Dunque la matrice $[b_{k\ell}]$ è la coniugata di $[a_{k\ell}]$ e $[c_{k\ell}]$ è hermitiana.

Cambiamo ancora coordinate. Teniamo fisse le z e poniamo

$$w' = w'' + 2i\sum_{k,\ell=1}^{n-1} a_{k\ell} z_k z_\ell. \tag{2.3}$$

In particolare,

$$\Im w' = \Im w'' + \Im\left(2i \sum_{k,\ell=1}^{n-1} a_{k\ell} z_k z_\ell\right) = \Im w'' + \sum_{k,\ell=1}^{n-1} (a_{k\ell} z_k z_\ell + b_{k\ell} \bar{z}_k \bar{z}_\ell),$$

poiché $\overline{a_{k\ell}} = b_{k\ell}$. Sostituendo (2.3) in $\Im w' = q(z, \bar{z}) + E(z, \bar{z}, \Re w')$ e risolvendo rispetto a $\Im w''$, si eliminano i termini olomorfi e antiolomorfi di q, mentre E resta $O(3)$. Dopo questo cambiamento possiamo dunque supporre che q sia una forma hermitiana,

$$q(z, \bar{z}) = \sum_{k,\ell=1}^{n-1} c_{k\ell} z_k \bar{z}_\ell.$$

Poiché q è a valori reali, la matrice $C = [c_{k\ell}]$ è hermitiana. Nella notazione dell'algebra lineare si ha $q(z, \bar{z}) = z^* C z$, dove z è un vettore colonna. Se T è una trasformazione lineare nelle variabili z, diciamo $z' = Tz$, otteniamo $z'^* C z' = (Tz)^* C T z = z^*(T^* C T) z$. Possiamo quindi ridurre C a forma normale per $*$-congruenza. Ancora per la legge d'inerzia di Sylvester, ogni matrice hermitiana è $*$-congruente a una matrice diagonale sulla cui diagonale compaiono soltanto 1, -1 e 0. Scrivendo esplicitamente la forma così ottenuta si ha la tesi. Se M è una frontiera, per far sì che l'interno sia dato da $\Im w > \varphi(z, \bar{z}, \Re w)$, possiamo eventualmente sostituire w con $-w$, invertendo i segni degli autovalori. □

Esercizio 2.3.14. Dimostrare le affermazioni usate nella dimostrazione. Anzitutto, se q è un polinomio quadratico della forma (2.2), si possono scegliere simmetriche le matrici $[a_{k\ell}]$ e $[b_{k\ell}]$ e allora tutti i coefficienti sono determinati univocamente. In secondo luogo, se q è a valori reali, si hanno $a_{k\ell} = \overline{b_{k\ell}}$ e $c_{k\ell} = \overline{c_{\ell k}}$ per ogni k e ℓ.

Lemma 2.3.10 (lemma di Narasimhan). [22] Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia, fortemente pseudoconvesso in $p \in \partial U$. Esiste un cambiamento locale biolomorfo di coordinate che fissa p e nelle cui coordinate U è fortemente convesso in p, e dunque in tutti i punti della frontiera sufficientemente vicini a p.

Esercizio 2.3.15. Dimostrare il lemma di Narasimhan. *Suggerimento.* Si veda la dimostrazione del lemma 2.3.9.

Esercizio 2.3.16. Dimostrare che un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ con frontiera liscia è pseudoconvesso in p se e solo se esistono coordinate olomorfe locali in p nelle quali U è convesso in p.

Per servirsi della convessità occorre che il dominio sia convesso in tutti i punti di un intorno di p. Per questo il lemma di Narasimhan vale nei punti di pseudoconvessità forte. Nei punti debolmente pseudoconvessi la situazione è assai più complessa. La pseudoconvessità debole in p permette di rendere il dominio convesso in p, ma lo stesso cambiamento di variabili può non renderlo convesso nei punti vicini. Anche per un dominio debolmente pseudoconvesso in ogni punto può essere impossibile ottenere la convessità in un intero intorno. Nel lemma è decisivo il fatto che, se U è fortemente (pseudo)convesso in p, lo è anche nei punti vicini.

[22] Una formulazione sostanzialmente equivalente del lemma era già stata usata da Hellmuth Kneser nel 1936.

Dimostriamo l'implicazione più semplice del celebre *problema di Levi*. Per lungo tempo questo problema,[23] che consiste nel caratterizzare i domini di olomorfia in $\mathbb{C}^n$, rimase aperto. La risposta è che un dominio è di olomorfia se e solo se è pseudoconvesso. Come nell'equivalenza fra la convessità geometrica classica e la convessità da noi definita, delle due implicazioni una è più facile dell'altra. È più facile provare che ogni dominio di olomorfia è pseudoconvesso. Per la dimostrazione del viceversa, ossia che ogni dominio pseudoconvesso è un dominio di olomorfia, rinviamo a L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, terza edizione, North-Holland, 1990 [6].

Teorema 2.3.11 (principio del barattolo di pomodori). Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia. Se la forma di Levi ha un autovalore negativo in $p \in \partial U$, ogni funzione olomorfa su U si prolunga a un intorno di p. In particolare, U non è un dominio di olomorfia.

La pseudoconvessità in p significa che tutti gli autovalori della forma di Levi sono non negativi. Il teorema afferma quindi che un dominio di olomorfia con frontiera liscia dev'essere pseudoconvesso. Il suo nome deriva dalla dimostrazione. Talvolta si dà lo stesso nome ad altri teoremi nelle cui dimostrazioni una famiglia di dischi analitici forma un «barattolo di pomodori». L'idea generale è che una funzione olomorfa in un intorno delle pareti laterali e del fondo di un barattolo si prolunga all'interno. Il nostro teorema dice che, se la forma di Levi in p ha un autovalore negativo, possiamo sistemare uno di questi barattoli a cavallo di p, partendo dall'interno del dominio.

Dimostrazione. Cambiamo variabili in modo che $p = 0$ e che, vicino a p, U sia dato da

$$\Im w > -|z_1|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon_k |z_k|^2 + E(z_1, z', \bar{z}_1, \bar{z}', \Re w),$$

dove $z' = (z_2, \dots, z_{n-1})$, $\epsilon_k = -1, 0, 1$ e E è $O(3)$. Immergiamo un disco analitico mediante l'applicazione $\xi \in \overline{\mathbb{D}} \overset{\varphi}{\mapsto} (\lambda\xi, 0, 0, \dots, 0)$, con $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo. Evidentemente $\varphi(0) = 0 \in \partial U$. Per $\xi \neq 0$ vicino all'origine vale

$$-\lambda^2|\xi|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon_k |0|^2 + E(\lambda\xi, 0, \lambda\bar{\xi}, 0, 0) = -\lambda^2|\xi|^2 + E(\lambda\xi, 0, \lambda\bar{\xi}, 0, 0) < 0,$$

perché, per il criterio della derivata seconda, la funzione a primo membro ha un massimo stretto in $\xi = 0$. Per $\xi \neq 0$ vicino all'origine, dunque, $\varphi(\xi) \in U$. Scegliendo λ abbastanza piccolo si ottiene $\varphi(\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}) \subset U$.

Spostando leggermente il disco ne troviamo altri interamente contenuti in U. Più precisamente, per ogni $s > 0$ sufficientemente piccolo, il disco chiuso dato da

$$\xi \in \overline{\mathbb{D}} \overset{\varphi_s}{\mapsto} (\lambda\xi, 0, 0, \dots, 0, is)$$

(ossia con $\Im w$ leggermente positiva) è interamente contenuto in U. Per s abbastanza piccolo, è contenuto in U anche l'insieme definito da $|z_1| = \lambda$, $z' = 0$ e $|w - is| \leq s$. Infatti possiamo scegliere s in modo che E sia arbitrariamente piccolo e su questo insieme vale $\Im w \geq 0$. Anche un ϵ-intorno di tale insieme è contenuto in U. Fissiamo uno di questi $s > 0$. Tutto il disco $\varphi_s(\overline{D})$, definito da $|z_1| \leq \lambda$, $z' = 0$ e $w = is$, è contenuto in U. Anche

[23] E. E. Levi formulò il problema nel 1911. La soluzione completa arrivò soltanto negli anni Cinquanta, grazie a Oka e ad altri matematici.

un ϵ-intorno di $\varphi_s(\overline{D})$ è contenuto in U. Per $\epsilon > 0$ piccolo, con $\epsilon < s$, definiamo la figura di Hartogs

$$\begin{aligned} H =& \{(z,w) : \lambda - \epsilon < |z_1| < \lambda + \epsilon, |z_k| < \epsilon \text{ per } k = 2, \dots, n-1, \text{ e } |w - is| < s + \epsilon\} \\ & \cup \{(z,w) : |z_1| < \lambda + \epsilon, |z_k| < \epsilon \text{ per } k = 2, \dots, n-1, \text{ e } |w - is| < \epsilon\}. \end{aligned}$$

Come abbiamo osservato, per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha $H \subset U$. Prendiamo, in sostanza, una figura di Hartogs nelle variabili z_1, w e le diamo spessore nelle direzioni z'. La figura 2.9 la rappresenta nelle variabili $|z_1|$ e $|w - is|$. La frontiera ∂U e l'aperto U sono indicati soltanto in modo schematico. Sono rappresentati anche i dischi analitici φ_s che formano il «barattolo». Si osservi che in questo disegno U si trova al di sotto della propria frontiera ∂U, contrariamente alla convenzione adottata di solito.

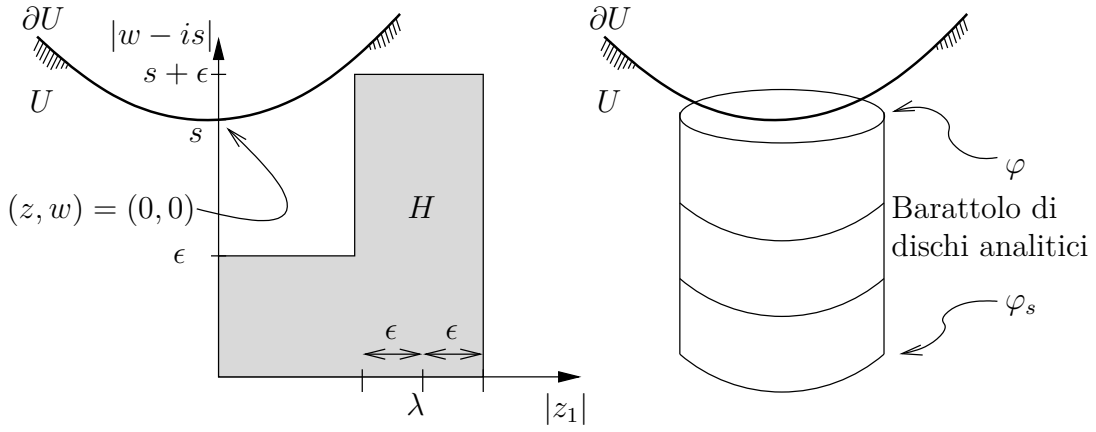


Figura 2.9: Il principio del barattolo di pomodori.

L'origine appartiene all'inviluppo di H. Pertanto ogni funzione olomorfa in U, essendo olomorfa anche in H, si prolunga attraverso l'origine. Ne segue che U non è un dominio di olomorfia. □

Un'altra conclusione della dimostrazione, forse meno concreta ma indipendente dalla figura di Hartogs, consiste nell'applicare la prima versione del principio di continuità (teorema 2.1.7) alla successione di dischi $\{\varphi_{1/k}\}$.

Esercizio 2.3.17. Per ciascuno dei seguenti domini $U \subset \mathbb{C}^2$ determinare tutti i punti di ∂U in cui U è debolmente pseudoconvesso, quelli in cui è fortemente pseudoconvesso e quelli in cui non è pseudoconvesso. Stabilire se U è pseudoconvesso.

a) $\Im w > |z|^4$

b) $\Im w > |z|^2(\Re w)$

c) $\Im w > (\Re z)(\Re w)$

Esercizio 2.3.18. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia, fortemente pseudoconvesso in $p \in \partial U$. Mostrare che p è un *punto di picco*, ossia che esistono un intorno W di p e una funzione olomorfa $f\colon W \to \mathbb{C}$ tali che $f(p) = 1$ e $|f(z)| < 1$ per ogni $z \in W \cap \overline{U} \setminus \{p\}$.

Esercizio 2.3.19. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia. Supponiamo che per $p \in \partial U$ esistano un intorno W di p e una funzione olomorfa $f\colon W \to \mathbb{C}$ tale che $df(p) \neq 0$, $f(p) = 0$ e f non si annulli mai in $W \cap U$. Mostrare che U è pseudoconvesso in p. *Suggerimento.* Può servire il teorema olomorfo delle funzioni implicite (teorema 1.3.8). *Nota.* Il risultato vale anche senza l'ipotesi che df sia non nullo, ma in tal caso la dimostrazione è più difficile.

Un iperpiano rappresenta il caso degenere della convessità ordinaria, poiché è convesso da entrambi i lati. Anche la pseudoconvessità ammette un caso piatto. Un'ipersuperficie reale liscia $M \subset \mathbb{C}^n$ si dice *piatta nel senso di Levi* se la forma di Levi si annulla in ogni punto di M. La matrice nulla è insieme semidefinita positiva e semidefinita negativa, quindi entrambi i lati di M sono pseudoconvessi. Viceversa, le sole ipersuperfici pseudoconvesse da entrambi i lati sono quelle piatte nel senso di Levi.

Esercizio 2.3.20. Sia $U = V \times \mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, dove $V \subset \mathbb{C}$ è un aperto con frontiera liscia. Mostrare che U ha frontiera liscia e piatta nel senso di Levi.

Esercizio 2.3.21. Dimostrare che ogni iperpiano reale è piatto nel senso di Levi.

Esercizio 2.3.22. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, $f \in \mathcal{O}(U)$ e $M = \{z \in U : \Im f(z) = 0\}$. Mostrare che, se $df(p) \neq 0$ per qualche $p \in M$, in un intorno di p l'insieme M è un'ipersuperficie piatta nel senso di Levi.

Esercizio 2.3.23. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie liscia e piatta nel senso di Levi e $p \in M$. Supponiamo che una retta complessa L sia tangente a M in p. Dimostrare che p non è un punto isolato di $L \cap M$.

Esercizio 2.3.24. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia e sia ∂U piatta nel senso di Levi. Dimostrare che U è illimitato. *Suggerimento.* Se U fosse limitato, si consideri un punto di ∂U avente distanza massima dall'origine.

2.4 Dalle funzioni armoniche alle funzioni plurisubarmoniche

Richiamiamo brevemente le funzioni armoniche e subarmoniche in $\mathbb{C}$. Per una trattazione più ampia si può consultare un testo di analisi complessa in una variabile, per esempio J. Lebl, *Guide to Cultivating Complex Analysis, Working the Complex Field* [8].

Definizione 2.4.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^2 si dice *armonica* se[24]

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{in } U.$$

Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ si dice *subarmonica* se è semicontinua superiormente[25] e se, per ogni palla $B_r(a)$ con $\overline{B_r(a)} \subset U$ e ogni funzione g continua su $\overline{B_r(a)}$, armonica in $B_r(a)$ e tale che $f(x) \le g(x)$ per $x \in \partial B_r(a)$, vale

$$f(x) \le g(x), \qquad \text{per ogni } x \in B_r(a).$$

In altri termini, su ogni palla una funzione subarmonica è maggiorata da qualunque funzione armonica che la maggiori sulla frontiera. Quando $n = 1$ ritroviamo la consueta definizione di funzione convessa di una variabile reale, in cui le funzioni affini svolgono il ruolo delle funzioni armoniche. Una funzione di una variabile reale è *convessa* se su ogni intervallo il suo grafico sta sotto il segmento che ne congiunge gli estremi. In una variabile reale una funzione armonica ha derivata seconda nulla ed è dunque affine. In dimensione reale uno il confronto è anche più facile da rappresentare. La funzione f è convessa se su ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ vale $f \le g$ per ogni funzione affine g che maggiori f nei due estremi α e β. In particolare si può prendere la funzione affine g che coincide con f agli estremi. Si veda la figura 2.10. L'immagine è analoga per le funzioni subarmoniche quando $n > 1$, ma è più difficile disegnarla.

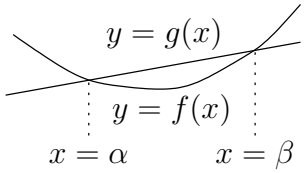


Figura 2.10: Una funzione convessa.

Ci occuperemo delle funzioni armoniche e subarmoniche in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Riprendiamo alcuni risultati fondamentali in $\mathbb{C}$ che probabilmente il lettore ha già visto in dettaglio nel corso di una variabile. Ne lasciamo quindi alcuni per esercizio. In questa sezione, e anche altrove, scriviamo spesso $f(z)$ anche quando la funzione non è olomorfa.

Esercizio 2.4.1. Dimostrare che una funzione semicontinua superiormente assume massimo su ogni compatto non vuoto. Si possono ammettere valori nella retta reale estesa.

Esercizio 2.4.2. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto. Mostrare che per una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^2 vale

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} f = \frac{1}{4} \nabla^2 f.$$

[24] L'operatore ∇^2, indicato anche con Δ, si chiama *laplaciano*. È la traccia della matrice hessiana.
[25] Una funzione f è *semicontinua superiormente* se $\limsup_{t \to x} f(t) \le f(x)$ per ogni $x \in U$.

Dedurne che f è armonica se e solo se è localmente la parte reale o la parte immaginaria di una funzione olomorfa. *Suggerimento.* Si cerchi una primitiva di un'opportuna funzione olomorfa.

Esercizio 2.4.3. Dimostrare il teorema di identità. Se $U \subset \mathbb{C}$ è un dominio, $f\colon U \to \mathbb{R}$ è armonica e $f = 0$ su un aperto non vuoto contenuto in U, allora $f \equiv 0$.

Per l'esercizio 2.4.2 le funzioni armoniche sono localmente parti reali di funzioni olomorfe e dunque sono infinitamente differenziabili. Su un dominio semplicemente connesso in $\mathbb{C}$, ogni funzione armonica è addirittura la parte reale di un'unica funzione olomorfa a meno di una costante immaginaria.

È utile saper determinare una funzione armonica assegnandone i valori sulla frontiera. Questo è il *problema di Dirichlet*, risolubile per molti domini, benché non per tutti. La dimostrazione del seguente caso particolare è contenuta negli esercizi che seguono il teorema. Il *nucleo di Poisson* per il disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ è

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right), \qquad \text{per } 0 \le r < 1.$$

Teorema 2.4.2. Sia $u\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continua. Definiamo $Pu\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$Pu(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})P_r(\theta - t)\,dt \quad \text{se } r < 1 \qquad \text{e} \qquad Pu(e^{i\theta}) = u(e^{i\theta}).$$

Allora Pu è armonica in $\mathbb{D}$ e continua su $\overline{\mathbb{D}}$.

Per la dimostrazione conviene osservare il grafico di P_r come funzione di θ per r fissato. Il nucleo P_r si comporta come un'approssimazione dell'identità. Integrando contro $P_r(\theta - t)$ si ottiene una media pesata di u, nella quale i valori vicini a $e^{i\theta}$ acquistano sempre più peso quando $r \to 1$. Si veda la figura 2.11.

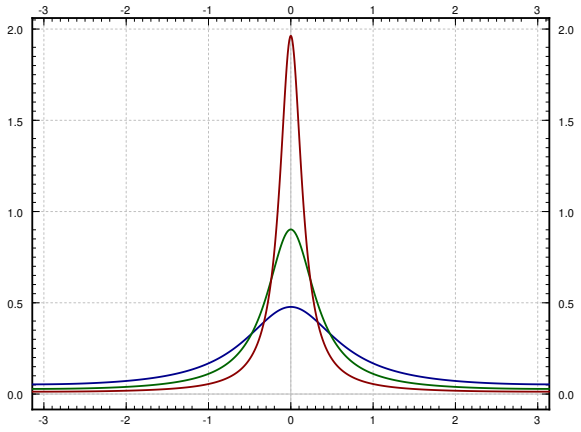


Figura 2.11: Grafico di P_r per $r = 0.5$, $r = 0.7$ e $r = 0.85$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 2.4.4.

a) Dimostrare che $P_r(\theta) > 0$ per ogni $0 \le r < 1$ e ogni θ.

b) Dimostrare che $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta = 1$.

c) Fissato $\delta > 0$, dimostrare che $\sup\{P_r(\theta) : \delta \le |\theta| \le \pi\} \to 0$ quando $r \to 1$.

Esercizio 2.4.5. Dimostrare il teorema 2.4.2 seguendo queste indicazioni.

a) Il nucleo di Poisson è armonico come funzione di $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ e quindi Pu è armonica.

b) Il nucleo P approssima l'identità. Mostrare che $Pu(re^{i\theta}) \to u(e^{i\theta})$ uniformemente quando $r \to 1$. *Suggerimento.* Spezzare l'integrale in quello su $[-\delta, \delta]$ e in quello sulla parte restante e usare l'esercizio precedente.

c) Dimostrare che $Pu(z)$ tende a $u(z_0)$ quando $z \in \mathbb{D} \to z_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Esercizio 2.4.6. Enunciare e dimostrare una versione del teorema 2.4.2 per un disco arbitrario $\Delta_r(a)$.

Esercizio 2.4.7. Dimostrare che il problema di Dirichlet non è sempre risolubile sul disco puntato $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. *Suggerimento.* Porre $u = 0$ su $\partial\mathbb{D}$ e $u(0) = 1$. La soluzione sarebbe maggiorata da $-\epsilon \log|z|$ per ogni $\epsilon > 0$.

Il nucleo di Poisson è un nucleo riproducente per le funzioni olomorfe e antiolomorfe, perché le parti reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche. Il nucleo di Poisson esiste anche in dimensione superiore. Dalla soluzione del problema di Dirichlet mediante questo nucleo si ricava il risultato seguente.

Proposizione 2.4.3. (Proprietà della media e disuguaglianza della media.) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto.

(i) Una funzione continua $f\colon U \to \mathbb{R}$ è armonica se e solo se

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta \qquad \text{se} \quad \overline{\Delta_r(a)} \subset U.$$

(ii) Una funzione semicontinua superiormente $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è subarmonica se e solo se

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta \qquad \text{se} \quad \overline{\Delta_r(a)} \subset U.$$

Nella disuguaglianza della media, per integrare una funzione semicontinua superiormente può servire l'integrale di Lebesgue. Per usare l'integrale di Poisson nella forma data sopra occorre approssimare opportunamente il dato sulla frontiera con funzioni continue. In prima lettura si può pensare a funzioni subarmoniche continue, senza perdere molto.

Esercizio 2.4.8. Completare la dimostrazione della proposizione 2.4.3. *Primo suggerimento.* Se si sa risolvere il problema di Dirichlet in un disco, la parte (i) segue dalla (ii). *Secondo suggerimento.* Dimostrare per contrapposizione l'implicazione inversa della parte (ii).

Esercizio 2.4.9. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione subarmonica. Dimostrare che

$$\limsup_{w \to z} f(w) = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in U.$$

Esercizio 2.4.10. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $g\colon U \to \mathbb{R}$ armonica. Dimostrare che $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è subarmonica se e solo se $f - g$ è subarmonica.

Proposizione 2.4.4. (Principio del massimo.) Siano $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subarmonica. Se f assume massimo in U, allora f è costante.

Dimostrazione. Supponiamo che f assuma massimo in $a \in U$. Se $\overline{\Delta_r(a)} \subset U$, si ha

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta \leq f(a).$$

Dunque $f = f(a)$ quasi ovunque su $\partial\Delta_r(a)$. Per semicontinuità superiore, $f = f(a)$ ovunque su $\partial\Delta_r(a)$. Ciò vale per ogni r tale che $\overline{\Delta_r(a)} \subset U$, pertanto $f = f(a)$ in $\Delta_r(a)$. L'insieme in cui $f = f(a)$ è quindi aperto. L'insieme in cui una funzione semicontinua superiormente assume il suo massimo è chiuso. Per connessione di U si ha allora $f = f(a)$ in tutto U. □

Useremo spesso, anche tacitamente, il fatto che la subarmonicità, come l'armonicità, è una proprietà locale, benché ciò non sia evidente dalla definizione. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Proposizione 2.4.5. Dato un aperto $U \subset \mathbb{C}$, una funzione semicontinua superiormente $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è subarmonica se per ogni $p \in U$ esiste $R_p > 0$ tale che $\Delta_{R_p}(p) \subset U$ e che la disuguaglianza della proposizione 2.4.3(ii) valga per tutti i raggi r con $0 < r < R_p$.

In particolare $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è subarmonica se e solo se per ogni $p \in U$ esiste un intorno W di p, con $W \subset U$, tale che $f|_W$ sia subarmonica.

Esercizio 2.4.11. Dimostrare la proposizione 2.4.5. *Suggerimento.* Riesaminare la dimostrazione della proposizione 2.4.3.

Esercizio 2.4.12. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato, $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semicontinua superiormente con $f|_U$ subarmonica, e $g\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ continua con $g|_U$ armonica. Se $f(z) \leq g(z)$ per ogni $z \in \partial U$, dimostrare che $f(z) \leq g(z)$ per ogni $z \in U$.

Esercizio 2.4.13. Sia g una funzione armonica in un disco $\Delta \subset \mathbb{C}$ e continua su $\overline{\Delta}$. Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione g_ϵ armonica in un intorno di $\overline{\Delta}$ e tale che $g(z) \leq g_\epsilon(z) \leq g(z) + \epsilon$ per ogni $z \in \overline{\Delta}$. Per verificare la subarmonicità basta quindi usare funzioni g armoniche anche un poco oltre la frontiera del disco.

Proposizione 2.4.6. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. La funzione f è subarmonica se e solo se $\nabla^2 f \geq 0$.

Analogamente, una funzione f di classe C^2 di una variabile reale è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni x.

Dimostrazione. Sia f una funzione di classe C^2 su un aperto di $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, con $\nabla^2 f \geq 0$. Vogliamo dimostrare che f è subarmonica. Prendiamo un disco Δ tale che $\overline{\Delta} \subset U$ e una funzione g continua su $\overline{\Delta}$, armonica in Δ e tale che $f \leq g$ sulla frontiera $\partial\Delta$. Poiché $\nabla^2(f - g) = \nabla^2 f \geq 0$, sottraendo la funzione armonica possiamo supporre $g = 0$ e $f \leq 0$ sulla frontiera $\partial\Delta$. Dobbiamo dimostrare che $f \leq 0$ in Δ.

Supponiamo dapprima $\nabla^2 f > 0$ in ogni punto di Δ. Il laplaciano $\nabla^2 f$ è la traccia dell'hessiana, ossia la somma dei suoi autovalori. Quindi f non può avere massimo in Δ, perché in un massimo entrambi gli autovalori sarebbero non positivi. Ne segue $f \leq 0$ su tutto $\overline{\Delta}$.

Supponiamo ora soltanto $\nabla^2 f \geq 0$. Sia M il massimo di $x^2 + y^2$ su $\overline{\Delta}$. Poniamo $f_n(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n}(x^2 + y^2) - \frac{1}{n}M$. Si ha $\nabla^2 f_n > 0$ in Δ e $f_n \leq 0$ sulla frontiera, per

cui $f_n \leq 0$ su tutto $\overline{\Delta}$. Poiché $f_n \to f$, otteniamo $f \leq 0$ su tutto $\overline{\Delta}$. L'altra implicazione è lasciata per esercizio. □

Esercizio 2.4.14. Completare la dimostrazione della proposizione precedente.

Proposizione 2.4.7. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f_\alpha \colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una famiglia di funzioni subarmoniche. Poniamo

$$\varphi(z) = \sup_\alpha f_\alpha(z).$$

Se la famiglia è finita, φ è subarmonica. Se la famiglia è infinita, $\varphi(z) \neq \infty$ per ogni z e φ è semicontinua superiormente, allora φ è subarmonica.

Dimostrazione. Sia $\overline{\Delta_r(a)} \subset U$. Per ogni α si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta})\, d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\alpha(a + re^{i\theta})\, d\theta \geq f_\alpha(a).$$

Basta prendere l'estremo superiore rispetto ad α nel membro che contiene la funzione della famiglia per ottenere la tesi. □

Esercizio 2.4.15. Dimostrare che, se $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa e monotona crescente, $U \subset \mathbb{C}$ è un aperto e $f \colon U \to \mathbb{R}$ è subarmonica, allora $\varphi \circ f$ è subarmonica.

Esercizio 2.4.16. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, $\{f_n\}$ una successione di funzioni subarmoniche uniformemente limitate superiormente sui compatti e $\{c_n\}$ una successione di numeri reali positivi con $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$. Dimostrare che $f = \sum_{n=1}^\infty c_n f_n$ è subarmonica. Verificare in particolare la semicontinuità superiore.

Esercizio 2.4.17. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato e $\{p_n\}$ una successione di punti di U. Per $z \in U$ poniamo $f(z) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \log|z - p_n|$, ammettendo il valore $-\infty$.

a) Mostrare che f è subarmonica in U.

b) Se $U = \mathbb{D}$ e $p_n = 1/n$, mostrare che f è discontinua in zero rispetto alla topologia naturale di $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

c) Se $\{p_n\}$ è densa in U, mostrare che f è discontinua su un insieme denso. *Suggerimento.* Dimostrare che $f^{-1}(-\infty)$ è un insieme piccolo, benché denso. *Altro suggerimento.* Integrare le somme parziali e usare le coordinate polari.

In $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ le funzioni armoniche sono troppe per i nostri scopi. Quando $n > 1$, le parti reali e immaginarie delle funzioni olomorfe in $\mathbb{C}^n$ formano una classe più ristretta. La restrizione di una funzione olomorfa a una retta complessa è olomorfa in una variabile. Le parti reale e immaginaria devono quindi essere armoniche su ogni retta complessa. È proprio questa la classe che cerchiamo.

Definizione 2.4.8. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $f \colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^2 è *pluriarmonica* se per ogni $a, b \in \mathbb{C}^n$ la funzione di una variabile

$$\xi \mapsto f(a + b\xi)$$

è armonica dove è definita, ossia su $\{\xi \in \mathbb{C} : a + b\xi \in U\}$. In altre parole, f è armonica su ogni retta complessa.

Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è *plurisubarmonica*, abbreviato talvolta in *psh* o, in inglese, *plush*, se è semicontinua superiormente e per ogni $a, b \in \mathbb{C}^n$ la funzione di una variabile

$$\xi \mapsto f(a + b\xi)$$

è subarmonica dove è definita.

Una funzione armonica di una variabile complessa generalizza in un certo senso una funzione affine di una variabile reale. In più variabili complesse è la funzione pluriarmonica a generalizzare a $\mathbb{C}^n$ le funzioni affini su $\mathbb{R}^n$. Analogamente, le funzioni plurisubarmoniche sono il corrispondente complesso delle funzioni convesse. In una variabile reale la funzione convessa corrisponde a quella subarmonica. In più variabili reali, una funzione è convessa su un dominio convesso quando è convessa la sua restrizione a ogni retta reale.

Molte proprietà delle funzioni armoniche e subarmoniche in $\mathbb{C}$ si estendono immediatamente alle funzioni pluriarmoniche e plurisubarmoniche in $\mathbb{C}^n$. Ne segnaliamo tre, lasciandole per esercizio. Valgono il principio del massimo e il carattere locale della plurisubarmonicità. Inoltre le funzioni pluriarmoniche sono precisamente quelle che, localmente, si possono ottenere come parti reali o immaginarie di funzioni olomorfe.

Esercizio 2.4.18. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Dimostrare che una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^2 è pluriarmonica se e solo se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell} = 0 \quad \text{in } U \text{ per ogni } k, \ell = 1, \dots, n.$$

Esercizio 2.4.19. Mostrare che ogni funzione pluriarmonica è armonica. Trovare invece una funzione armonica che non sia pluriarmonica.

Esercizio 2.4.20. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Dimostrare che $f\colon U \to \mathbb{R}$ è pluriarmonica se e solo se è localmente la parte reale o immaginaria di una funzione olomorfa. *Suggerimento.* Per un esercizio precedente, $\frac{\partial f}{\partial z_\ell}$ è olomorfa per ogni ℓ. Supporre U semplicemente connesso, $p \in U$ e $f(p) = 0$. Considerare l'integrale curvilineo da p a un punto vicino $q \in U$,

$$F(q) = \int_p^q \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_\ell}(\zeta)\, d\zeta_\ell.$$

Mostrare che l'integrale è indipendente dal cammino, calcolare le derivate di F e determinare $F + \bar{F} - f$.

Esercizio 2.4.21. Dimostrare il principio del massimo. Se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio e $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è plurisubarmonica e assume massimo in $p \in U$, allora f è costante.

Esercizio 2.4.22. Dimostrare che la plurisubarmonicità è una proprietà locale. In altri termini, f è plurisubarmonica se e solo se f è plurisubarmonica in un intorno di ogni punto.

Proposizione 2.4.9. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^2 è plurisubarmonica se e solo se la matrice hessiana complessa

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\right]_{k\ell}$$

è semidefinita positiva in ogni punto.

Dimostrazione. Supponiamo che l'hessiana complessa abbia un autovalore negativo in un punto $p \in U$. Con una traslazione possiamo porre $p = 0$. Poiché f è reale, l'hessiana complessa $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_0\right]_{k\ell}$ è hermitiana. Un cambiamento lineare complesso di coordinate agisce sull'hessiana per $*$-congruenza, perciò possiamo diagonalizzarla, ancora in virtù della legge d'inerzia di Sylvester. Supponiamo quindi diagonale $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_0\right]_{k\ell}$. Se l'hessiana complessa ha un autovalore negativo, uno dei termini diagonali è negativo. Senza perdita di generalità supponiamo $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}\Big|_0 < 0$. La funzione $z_1 \mapsto f(z_1, 0, \dots, 0)$ ha laplaciano negativo nell'origine e dunque non è subarmonica. Ne segue che f non è plurisubarmonica.

Viceversa, supponiamo che l'hessiana complessa sia semidefinita positiva in ogni punto. Con un cambiamento affine di coordinate possiamo fare in modo che una retta complessa arbitraria $\xi \mapsto a + b\xi$ si ottenga annullando tutte le variabili tranne la prima, ossia che $a = 0$ e $b = (1, 0, \dots, 0)$. Per la semidefinitezza positiva si ha $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} \geq 0$ in tutti i punti $(z_1, 0, \dots, 0)$. Abbiamo dimostrato che $\nabla^2 g \geq 0$ implica che g è subarmonica. Questo conclude la dimostrazione. □

Esercizio 2.4.23. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa.

a) Mostrare che $\log|f(z)|$ è pluriarmonica in $U \setminus f^{-1}(0)$ e plurisubarmonica in U.

b) Mostrare che $|f(z)|^\eta$ è plurisubarmonica per ogni $\eta > 0$.

Esercizio 2.4.24. Mostrare che le funzioni plurisubarmoniche su un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ formano un cono nel senso seguente. Se $a, b > 0$ sono costanti e $f, g\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sono plurisubarmoniche, allora $af + bg$ è plurisubarmonica.

Teorema 2.4.10. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ plurisubarmonica. Indichiamo con $U_\epsilon \subset U$ l'insieme dei punti che distano più di $\epsilon > 0$ da ∂U. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione plurisubarmonica liscia $f_\epsilon\colon U_\epsilon \to \mathbb{R}$ tale che $f_\epsilon(z) \geq f(z)$ e

$$f(z) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(z) \qquad \text{per ogni } z \in U.$$

La funzione f è dunque limite puntuale di funzioni plurisubarmoniche lisce. L'idea della dimostrazione è importante e trova applicazione in molti altri contesti.

Dimostrazione. Regolarizziamo f mediante convoluzione con i cosiddetti *mollificatori*, o *approssimazioni della delta*. Molti mollificatori si prestano allo scopo. Per concretezza ne fissiamo uno. Per $\epsilon > 0$ definiamo

$$g(z) = \begin{cases} Ce^{-1/(1-\|z\|^2)} & \text{se } \|z\| < 1, \\ 0 & \text{se } \|z\| \geq 1, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^{2n}} g(z/\epsilon).$$

Lasciamo per esercizio la verifica che g e quindi g_ϵ sono lisce. La funzione g ha supporto compatto, essendo diversa da zero soltanto all'interno della palla unitaria. Il supporto di

g_ϵ è la palla chiusa di raggio ϵ. Entrambe le funzioni sono non negative. Scegliamo C in modo che

$$\int_{\mathbb{C}^n} g\, dV = 1, \qquad \text{e quindi} \qquad \int_{\mathbb{C}^n} g_\epsilon\, dV = 1.$$

Qui dV è la misura di volume. La funzione g dipende solo da $\|z\|$. Per vedere come si comportano queste funzioni si osservi la figura 2.12.

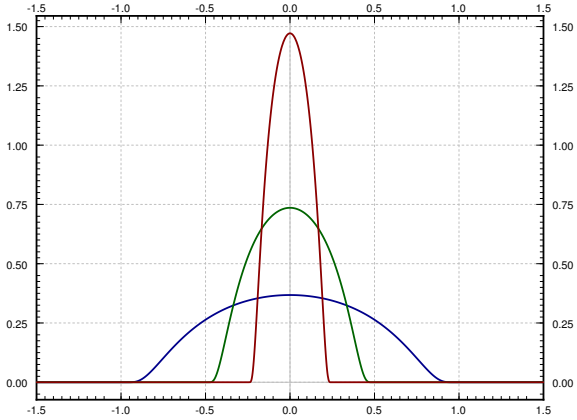


Figura 2.12: Grafici di $e^{-1/(1-x^2)}$, $\frac{1}{0.5}e^{-1/(1-(x/0.5)^2)}$ e $\frac{1}{0.25}e^{-1/(1-(x/0.25)^2)}$.

Si confrontino questi grafici con quelli del nucleo di Poisson in funzione di θ, che è anch'esso un tipo di mollificatore. Integrare contro un'approssimazione della delta con le proprietà desiderate è un'idea simile a quella usata per risolvere il problema di Dirichlet con il nucleo di Poisson.

Essendo semicontinua superiormente, f è limitata superiormente sui compatti. Se f è illimitata inferiormente, sostituiamo f con $\max\{f, \frac{-1}{\epsilon}\}$, che è ancora plurisubarmonica. Possiamo dunque supporre f localmente limitata. Per $z \in U_\epsilon$ definiamo f_ϵ come convoluzione con g_ϵ,

$$f_\epsilon(z) = (f * g_\epsilon)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w) g_\epsilon(z-w)\, dV(w) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z-w) g_\epsilon(w)\, dV(w).$$

Le due espressioni dell'integrale si ottengono l'una dall'altra con un cambiamento di variabili. C'è un piccolo abuso di notazione poiché f è definita solo in U, ma per $z \in U_\epsilon$ non sorgono problemi, perché g_ϵ si annulla dove f non è definita. Derivando sotto il segno di integrale nella prima espressione si vede che f_ϵ è liscia.

Mostriamo che f_ϵ è plurisubarmonica. Restringiamoci a una retta $\xi \mapsto a + b\xi$ e verifichiamo la disuguaglianza della media su una circonferenza di raggio r e centro $\xi = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\epsilon(a + bre^{i\theta})\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{C}^n} f(a + bre^{i\theta} - w) g_\epsilon(w)\, dV(w)\, d\theta \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a - w + bre^{i\theta})\, d\theta\right) g_\epsilon(w)\, dV(w) \\
&\geq \int_{\mathbb{C}^n} f(a-w) g_\epsilon(w)\, dV(w) = f_\epsilon(a).
\end{aligned}$$

Per la disuguaglianza abbiamo usato $g_\epsilon \geq 0$. Dunque f_ϵ è plurisubarmonica.

Dimostriamo che $f_\epsilon(z) \geq f(z)$ per ogni $z \in U_\epsilon$. La funzione $g_\epsilon(w)$ dipende soltanto da $|w_1|, \ldots, |w_n|$ e precisamente $g_\epsilon(w_1, \ldots, w_n) = g_\epsilon(|w_1|, \ldots, |w_n|)$. Senza perdita di

generalità consideriamo $z = 0$ e passiamo alle coordinate polari nell'integrale, ponendo $w_j = r_j e^{i\theta_j}$.

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(0) &= \int_{\mathbb{C}^n} f(-w) g_\epsilon(|w_1|, \dots, |w_n|)\, dV(w) \\
&= \int_{\|r\|<\epsilon} \left(\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(-r_1 e^{i\theta_1}, \dots, -r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_1 \cdots d\theta_n \right) \\
&\qquad\qquad g_\epsilon(r_1, \dots, r_n)\, r_1 \cdots r_n\, dr_1 \cdots dr_n \\
&\geq \int_{\|r\|<\epsilon} \left(\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} (2\pi) f(0, -r_2 e^{i\theta_2}, \dots, -r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \cdots d\theta_n \right) \\
&\qquad\qquad g_\epsilon(r_1, \dots, r_n)\, r_1 \cdots r_n\, dr_1 \cdots dr_n \\
&\geq f(0) \int_{\|r\|<\epsilon} (2\pi)^n g_\epsilon(r_1, \dots, r_n)\, r_1 \cdots r_n\, dr_1 \cdots dr_n \\
&= f(0) \int_{\mathbb{C}^n} g_\epsilon(w)\, dV(w) = f(0).
\end{aligned}$$

La seconda uguaglianza segue dal fatto che g_ϵ è nulla fuori dalla palla di raggio ϵ. Per le disuguaglianze abbiamo usato di nuovo $g_\epsilon \geq 0$. La penultima uguaglianza segue da $2\pi = \int_0^{2\pi} d\theta$.

Infine, fissato z, mostriamo che $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(z) = f(z)$. Per le funzioni subarmoniche, e quindi per quelle plurisubarmoniche, vale $\limsup_{\zeta\to z} f(\zeta) = f(z)$ (esercizio 2.4.9). Dato $\delta > 0$, troviamo dunque $\epsilon > 0$ tale che $f(\zeta) - f(z) \leq \delta$ per ogni $\zeta \in B_\epsilon(z)$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(z) - f(z) &= \int_{B_\epsilon(0)} f(z-w) g_\epsilon(w)\, dV(w) - f(z) \int_{B_\epsilon(0)} g_\epsilon(w)\, dV(w) \\
&= \int_{B_\epsilon(0)} \big(f(z-w) - f(z)\big)\, g_\epsilon(w)\, dV(w) \\
&\leq \delta \int_{B_\epsilon(0)} g_\epsilon(w)\, dV(w) = \delta.
\end{aligned}$$

Ancora una volta abbiamo usato $g_\epsilon \geq 0$. Otteniamo $0 \leq f_\epsilon(z) - f(z) \leq \delta$ e quindi $f_\epsilon(z) \to f(z)$. □

Esercizio 2.4.25. Mostrare che la funzione g della dimostrazione precedente è liscia in tutto $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 2.4.26.

a) Mostrare che per una funzione subarmonica f l'integrale $\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$ è una funzione crescente di r. *Suggerimento.* Cominciare da una funzione di classe C^2 e usare la formula di Green.

b) Dedurne che la funzione $f_\epsilon(z)$ del teorema 2.4.10 è crescente rispetto a ϵ (dunque $f_\epsilon(z)$ decresce a $f(z)$ quando ϵ decresce a zero).

Poiché per le funzioni plurisubarmoniche lisce esiste una caratterizzazione locale mediante le derivate, otteniamo il corollario seguente. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Corollario 2.4.11. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ aperti. Se $g\colon U \to V$ è olomorfa e $f\colon V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è plurisubarmonica, allora $f \circ g$ è plurisubarmonica.

Esercizio 2.4.27. Dimostrare il corollario 2.4.11. *Suggerimento.* Dimostrarlo dapprima per funzioni di classe C^2, poi usare l'approssimazione. Può servire il teorema della convergenza monotona.

Esercizio 2.4.28. Con il calcolo del teorema 2.4.10, mostrare che, se f è pluriarmonica, allora $f_\epsilon = f$ dove entrambi i membri sono definiti. Si ottiene così un'altra dimostrazione del fatto che una funzione pluriarmonica f è di classe C^∞.

Esercizio 2.4.29. Supporre che la funzione f del teorema 2.4.10 sia continua e sia $K \subset\subset U$. Per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha $K \subset U_\epsilon$. Mostrare che f_ϵ converge uniformemente a f su K.

Esercizio 2.4.30. Supporre che la funzione f del teorema 2.4.10 sia di classe C^k per un certo $k \geq 0$. Mostrare che tutte le derivate di f_ϵ fino all'ordine k convergono uniformemente sui compatti alle corrispondenti derivate di f. Si veda anche l'esercizio precedente.

Passiamo al teorema di Radó, complementare al teorema di prolungamento di Riemann. Qui la funzione da prolungare è continua e si annulla sull'insieme attraverso il quale vogliamo prolungarla, ma di questo insieme non sappiamo nulla. Dimostriamo il risultato in una variabile e lasciamo per esercizio il passaggio, immediato, a più variabili.

Teorema 2.4.12. (Radó.) Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione continua, olomorfa sull'insieme

$$U' = \{z \in U : f(z) \neq 0\}.$$

Allora $f \in \mathcal{O}(U)$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $n = 1$. La conclusione è locale. Basta quindi dimostrarla in un piccolo disco Δ tale che f sia continua sulla chiusura $\overline{\Delta}$. Sia $\Delta' \subset \Delta$ l'insieme in cui f non si annulla. Se Δ' è vuoto, f è identicamente nulla e dunque olomorfa.

Sia u la parte reale di f. In Δ' la funzione u è armonica. Sia Pu l'integrale di Poisson di u su Δ. Quindi Pu coincide con u su $\partial\Delta$ e Pu è armonica in tutto Δ. Consideriamo la funzione $Pu(z) - u(z)$ su $\overline{\Delta}$. Essa è nulla su $\partial\Delta$ e armonica in Δ'. Moltiplicando f per una costante opportuna, possiamo supporre $|f(z)| < 1$ per ogni $z \in \overline{\Delta}$. La funzione $z \mapsto \log|f(z)|$ è armonica in Δ', vale $-\infty$ quando $f(z) = 0$ ed è semicontinua superiormente su $\overline{\Delta}$. Nei punti in cui f si annulla vale la disuguaglianza della media. Per il carattere locale della subarmonicità ne segue che $\log|f(z)|$ è subarmonica in Δ. Poiché $|f(z)| < 1$, la funzione $\log|f(z)|$ è negativa su $\overline{\Delta}$. Dunque, per ogni $t > 0$, la funzione $z \mapsto t \log|f(z)|$ è subarmonica e negativa e la funzione $z \mapsto -t \log|f(z)|$ è superarmonica (cioè l'opposta di una funzione subarmonica) e positiva. Si veda la figura 2.13. Per ogni $t > 0$ e ogni $z \in \partial\Delta$ è immediato che

$$t \log|f(z)| \leq Pu(z) - u(z) \leq -t \log|f(z)|\,. \tag{2.4}$$

Le funzioni $z \mapsto t \log|f(z)| - \big(Pu(z) - u(z)\big)$ e $z \mapsto t \log|f(z)| - \big(u(z) - Pu(z)\big)$ sono armoniche in Δ' e valgono $-\infty$ quando $f(z) = 0$. Sono quindi entrambe semicontinue superiormente su $\overline{\Delta}$ e subarmoniche in Δ. Per il principio del massimo la disuguaglianza (2.4) vale per ogni $z \in \overline{\Delta}$ e ogni $t > 0$.

Passando al limite per $t \to 0$ si ottiene $Pu = u$ su Δ'. Sia $W = \Delta \setminus \overline{\Delta'}$. In W si ha $u = 0$, quindi $Pu - u$ è armonica in W e continua su $\overline{W}$. Su $\overline{\Delta'} \cup \partial\Delta$ vale $Pu - u = 0$, perciò $Pu - u = 0$ su ∂W. Per il principio del massimo $Pu = u$ su W e dunque su tutto $\overline{\Delta}$. Analogamente, detta v la parte immaginaria di f, si ha $Pv = v$ su $\overline{\Delta}$. In altre parole

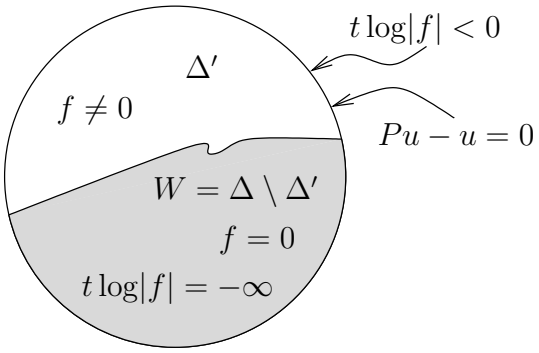


Figura 2.13: Dimostrazione del teorema di Radó.

u e v sono armoniche in Δ. Poiché Δ è semplicemente connesso, prendiamo l'armonica coniugata $\tilde{v}$ di u che coincide con v in un punto di Δ'. Poiché f è olomorfa in Δ', le funzioni armoniche $\tilde{v}$ e v coincidono su una componente dell'aperto non vuoto Δ' di Δ e quindi su tutto Δ. Ne segue che $f = u + iv = u + i\tilde{v}$ è olomorfa in Δ.

Il passaggio della dimostrazione a più variabili è lasciato per esercizio. □

Esercizio 2.4.31. Usando il risultato in una variabile, estendere il teorema a più variabili.

2.5 Pseudoconvessità nel senso di Hartogs

Per il corollario 2.4.11, la composizione con un'applicazione olomorfa conserva la plurisubarmonicità. In particolare, se $\varphi\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^n$ è un disco analitico e f è plurisubarmonica in un intorno di $\varphi(\overline{\mathbb{D}})$, allora $f \circ \varphi$ è subarmonica in $\mathbb{D}$. Per il principio del massimo si ha quindi $f(z) \le \sup_{w\in\varphi(\partial\mathbb{D})} f(w)$ per ogni $z \in \varphi(\mathbb{D})$. Diamo una definizione generale che comprenda questa situazione.

Definizione 2.5.1. Sia $\mathcal{F}$ una classe di funzioni a valori reali estesi[26] definite in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. Per $K \subset U$ definiamo $\widehat{K}$, l'*inviluppo* di K rispetto a $\mathcal{F}$, come l'insieme

$$\widehat{K} \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ x \in U : f(x) \le \sup_{y\in K} f(y) \text{ per ogni } f \in \mathcal{F} \Big\}.$$

Un aperto U è *convesso rispetto a* $\mathcal{F}$ se per ogni $K \subset\subset U$ vale $\widehat{K} \subset\subset U$.[27]

Chiaramente $K \subset \widehat{K}$. La questione è stabilire che $\widehat{K}$ non diventi «troppo grande» per U. Si ricordi che le funzioni della classe $\mathcal{F}$ sono definite su U, quindi $\widehat{K}$ dipende sia da U sia da K. Considerando per errore soltanto funzioni definite su un aperto più grande, si restringe la classe $\mathcal{F}$ e si ingrandisce $\widehat{K}$. A volte è utile scrivere $\widehat{K}_{\mathcal{F}}$ per esplicitare la dipendenza da $\mathcal{F}$, soprattutto quando si confrontano più inviluppi.

Per esempio, se $U = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ è la classe delle funzioni reali lisce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f''(x) \ge 0$, allora $\widehat{\{a, b\}} = [a, b]$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, ordinando gli estremi. Più in generale, se $\mathcal{F}$ è la classe delle funzioni convesse, un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ è geometricamente convesso se e solo se è convesso rispetto alle funzioni convesse.[28] Negli esercizi seguenti preciseremo il significato di questa affermazione per le funzioni lisce.

Esercizio 2.5.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio.

a) Mostrare che U è geometricamente convesso se e solo se è convesso rispetto alle funzioni affini.

b) Supporre che U abbia frontiera liscia. Mostrare che U è convesso se e solo se è convesso rispetto alle funzioni convesse lisce su U, cioè rispetto alle funzioni lisce con hessiana semidefinita positiva.

Esercizio 2.5.2. Mostrare che ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ è convesso rispetto ai polinomi reali.

Teorema 2.5.2. (Kontinuitätssatz, seconda versione del principio di continuità.) Se un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche, per ogni famiglia di dischi analitici chiusi $\Delta_\alpha \subset U$ tale che $\bigcup_\alpha \partial\Delta_\alpha \subset\subset U$ vale $\bigcup_\alpha \Delta_\alpha \subset\subset U$.

Vari teoremi di aspetto simile portano il nome di *principio di continuità*. Ne abbiamo incontrati due. Vi compare una famiglia di dischi analitici le cui frontiere rimangono all'interno di un dominio, e la conclusione riguarda il prolungamento di funzioni olomorfe, i domini di olomorfia o qualche forma di convessità come quella appena vista.

Dimostrazione. Sia f plurisubarmonica su U. Se $\varphi_\alpha\colon \overline{\mathbb{D}} \to U$ è l'applicazione olomorfa in $\mathbb{D}$ che parametrizza il disco analitico chiuso, allora $f \circ \varphi_\alpha$ è subarmonica. Per il principio

[26] Con retta reale estesa intendiamo $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

[27] La notazione $\subset\subset$ indica l'inclusione relativamente compatta. La chiusura nella topologia relativa è compatta.

[28] La difficoltà tecnica sta nel definire la convessità di una funzione su un insieme che può non essere convesso.

del massimo i valori di f su Δ_α sono maggiorati dall'estremo superiore di f su $\partial\Delta_\alpha$. Pertanto $\overline{\Delta_\alpha}$ è contenuto nell'inviluppo di $\partial\Delta_\alpha$. Dunque $\bigcup_\alpha \Delta_\alpha$ è contenuta nell'inviluppo di $\bigcup_\alpha \partial\Delta_\alpha$ e per convessità $\bigcup_\alpha \Delta_\alpha \subset\subset U$. □

La figura 2.14 illustra come può venire meno il principio di continuità. I dischi, rappresentati da segmenti, si avvicinano alla frontiera mentre i loro bordi, rappresentati dai punti scuri agli estremi dei segmenti, restano all'interno. Un dominio di questo tipo non è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche. Per la convessità geometrica ordinaria vale un principio di continuità in cui ai dischi si sostituiscono davvero i segmenti, come vedremo negli esercizi.

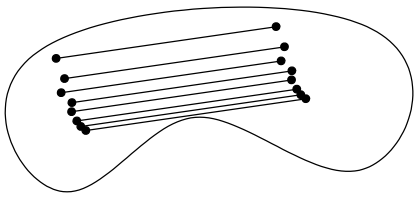


Figura 2.14: Un caso in cui il principio di continuità viene meno.

Esercizio 2.5.3. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $K \subset\subset U$ un compatto non vuoto. Dimostrare che $U \setminus K$ non è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche.[29]

Esercizio 2.5.4. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontiera liscia, $p \in \partial U$ e Δ un disco analitico affine con $p \in \Delta$ e $\Delta \setminus \{p\} \subset U$. Dimostrare che U non è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche.

Esercizio 2.5.5. Dimostrare il principio di continuità per la convessità geometrica e il suo viceversa. Un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ è geometricamente convesso se e solo se per ogni famiglia di segmenti $[x_\alpha, y_\alpha] \subset U$ l'inclusione $\bigcup_\alpha \{x_\alpha, y_\alpha\} \subset\subset U$ implica $\bigcup_\alpha [x_\alpha, y_\alpha] \subset\subset U$.

Definiamo un'altra forma di pseudoconvessità usando soltanto l'interno del dominio.

Definizione 2.5.3. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{R}$ è una *funzione di esaustione* per U se

$$\{z \in U : f(z) < r\} \subset\subset U \qquad \text{per ogni } r \in \mathbb{R}.$$

Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è *pseudoconvesso nel senso di Hartogs* se ammette una funzione di esaustione continua e plurisubarmonica. L'insieme $\{z \in U : f(z) < r\}$ si chiama *sottolivello* di f, o sottolivello di altezza r.

Esempio 2.5.4. La palla unitaria $\mathbb{B}_n$ è pseudoconvessa nel senso di Hartogs. La funzione continua

$$z \mapsto -\log(1 - \|z\|^2)$$

è di esaustione ed è facile verificare direttamente che è plurisubarmonica.

Esempio 2.5.5. Tutto $\mathbb{C}^n$ è pseudoconvesso nel senso di Hartogs, perché $\|z\|^2$ è una funzione di esaustione continua e plurisubarmonica. Inoltre, essendo $\|z\|^2$ plurisubarmonica, per ogni $K \subset\subset \mathbb{C}^n$ l'inviluppo $\widehat{K}$ rispetto alle funzioni plurisubarmoniche è limitato. In altre parole, $\mathbb{C}^n$ è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche.

[29] Qui occorre la condizione $n \geq 2$, come mostra il confronto con l'esercizio 2.5.8. [N.d.T.]

Teorema 2.5.6. Sia $U \subsetneq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sono equivalenti le seguenti proprietà.

(i) $-\log \rho(z)$ è plurisubarmonica, dove $\rho(z)$ è la distanza di z da ∂U.

(ii) U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

(iii) U è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche definite in U.

(iv) Vale la conclusione della seconda versione del principio di continuità: per ogni famiglia di dischi analitici chiusi $\Delta_\alpha \subset U$ tale che $\bigcup_\alpha \partial\Delta_\alpha \subset\subset U$ si ha $\bigcup_\alpha \Delta_\alpha \subset\subset U$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Se U è limitato, $-\log \rho(z)$ è una funzione di esaustione continua. Se U è illimitato, si prenda $z \mapsto \max\{-\log \rho(z), \|z\|^2\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia f una funzione di esaustione continua e plurisubarmonica. Se $K \subset\subset U$, per qualche r si ha $K \subset \{z \in U : f(z) < r\} \subset\subset U$. Dalla definizione di inviluppo $\widehat{K}$ segue allora $\widehat{K} \subset \{z \in U : f(z) < r\} \subset\subset U$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). È proprio la seconda versione del principio di continuità.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Poiché $U \neq \mathbb{C}^n$, la funzione $-\log \rho(z)$ è reale e continua. Per $c \in \mathbb{C}^n$ con $\|c\| = 1$ indichiamo con $\rho_c(z)$ l'estremo superiore dei raggi dei dischi affini di centro z e direzione c contenuti in U. In formule,

$$\rho_c(z) = \sup\{\lambda > 0 : z + \zeta c \in U \text{ per ogni } \zeta \in \lambda\mathbb{D}\}.$$

Poiché $\rho(z) = \inf_c \rho_c(z)$, si ha

$$-\log \rho(z) = \sup_{\|c\|=1} \big(-\log \rho_c(z)\big).$$

Basta provare che, per ogni $a, b \in \mathbb{C}^n$ e ogni $c \in \mathbb{C}^n$ con $\|c\| = 1$, la funzione $\xi \mapsto -\log \rho_c(a + b\xi)$ è subarmonica. Sarà infatti subarmonica anche $\xi \mapsto -\log \rho(a + b\xi)$, come richiesto. La figura 2.15 illustra la costruzione.

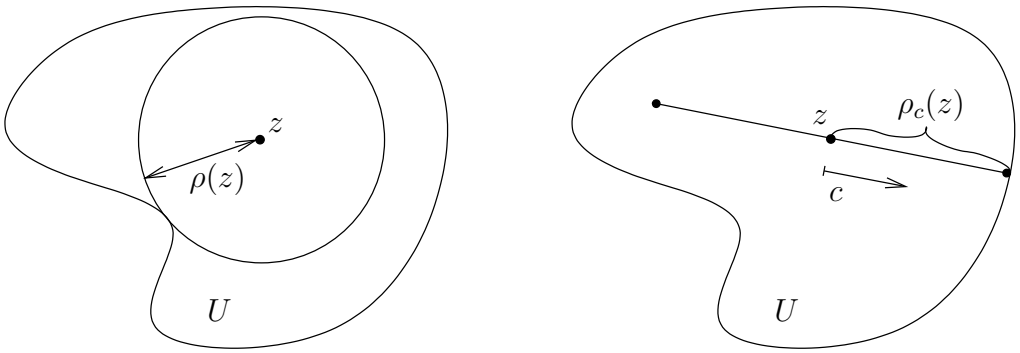


Figura 2.15: Il più grande disco nella direzione c. Il disco è rappresentato da un segmento.

Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disco tale che $a + b\xi \in U$ per ogni $\xi \in \overline{\Delta}$. Sia u armonica in Δ, continua su $\overline{\Delta}$ e tale che $-\log \rho_c(a + b\xi) \leq u(\xi)$ su $\partial\Delta$. Dobbiamo dimostrare che la disuguaglianza vale in Δ. Per l'esercizio 2.4.13 possiamo supporre che u sia armonica in un intorno di $\overline{\Delta}$ e scrivere $u = \Re f$ per una funzione olomorfa f. Fissiamo per il momento $\xi \in \partial\Delta$. Abbiamo $-\log \rho_c(a + b\xi) \leq \Re f(\xi)$, ossia

$$\rho_c(a + b\xi) \geq e^{-\Re f(\xi)} = \big|e^{-f(\xi)}\big|.$$

Ponendo $\zeta = te^{-f(\xi)}$ nella definizione di $\rho_c(a + b\xi)$, vediamo che ciò equivale a

$$(a + b\xi) + te^{-f(\xi)}c \in U \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{D}.$$

Questo vale per $\xi \in \partial\Delta$. Dobbiamo dimostrare che vale anche per ogni $\xi \in \Delta$.

L'applicazione $\varphi_t(\xi) = (a+b\xi)+te^{-f(\xi)}c$ definisce un disco analitico chiuso con il bordo contenuto in U. Al variare del parametro t otteniamo una famiglia di dischi analitici i cui bordi sono contenuti in U per ogni t con $|t| < 1$. Per $t = 0$ l'intero disco è contenuto in U. Poiché $\varphi_t(\xi)$ è continua congiuntamente in t e ξ e $\overline{\Delta}$ è compatto, si ha $\varphi_t(\Delta) \subset U$ per t in un intorno di 0. Sia $0 < t_0 < 1$ tale che $\varphi_t(\Delta) \subset U$ per ogni t con $|t| < t_0$. Allora

$$\bigcup_{|t|<t_0} \varphi_t(\partial\Delta) \subset \bigcup_{|t|\leq t_0} \varphi_t(\partial\Delta) \subset\subset U,$$

perché l'immagine continua di un compatto è compatta. Per l'ipotesi (iv),

$$\bigcup_{|t|<t_0} \varphi_t(\Delta) \subset\subset U.$$

Di nuovo per continuità, $\bigcup_{|t|\leq t_0} \varphi_t(\Delta) \subset\subset U$ e dunque $\bigcup_{|t|<t_0+\epsilon} \varphi_t(\Delta) \subset\subset U$ per qualche $\epsilon > 0$. Ne segue, prolungando l'intervallo dei raggi, che $\varphi_t(\Delta) \subset U$ per ogni t con $|t| < 1$. Quindi $(a+b\xi)+te^{-f(\xi)}c \in U$ per ogni $\xi \in \Delta$ e ogni $|t| < 1$. Ne segue $\rho_c(a+b\xi) \geq e^{-\Re f(\xi)}$ per ogni $\xi \in \Delta$, da cui $-\log \rho_c(a + b\xi) \leq \Re f(\xi) = u(\xi)$ per ogni $\xi \in \Delta$. La funzione $-\log \rho_c(a + b\xi)$ è dunque subarmonica. □

Esercizio 2.5.6. Mostrare che, se $U_1 \subset \mathbb{C}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{C}^n$ sono domini pseudoconvessi nel senso di Hartogs, lo è ogni componente connessa di $U_1 \cap U_2$.

Esercizio 2.5.7. Mostrare che, se $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^m$ sono domini pseudoconvessi nel senso di Hartogs, lo è anche $U \times V$.

Esercizio 2.5.8. Mostrare che ogni dominio $U \subset \mathbb{C}$ è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

Esercizio 2.5.9. Sia $U = \bigcup_k U_k$ l'unione di una successione crescente di domini pseudoconvessi nel senso di Hartogs, $U_{k-1} \subset U_k \subset \mathbb{C}^n$. Mostrare che U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

Esercizio 2.5.10. Si consideri l'immersione naturale $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, vale a dire l'insieme dei punti per cui z_1 e z_2 sono reali. Mostrare che $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ non è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

Esercizio 2.5.11. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(U)$. Dimostrare che $U' = \{z \in U : f(z) \neq 0\}$ è un dominio pseudoconvesso nel senso di Hartogs. *Suggerimento.* Si veda anche l'esercizio 1.6.5.[30]

Esercizio 2.5.12. Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ domini biolomorfi. Dimostrare che U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs se e solo se lo è V.

[30] Nell'enunciato originale manca l'ipotesi che U sia pseudoconvesso nel senso di Hartogs, necessaria già per $f = 1$. Si intende inoltre $f \not\equiv 0$ affinché U' sia non vuoto. [N.d.T.]

Esercizio 2.5.13. Sia $U = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| > |z_2|\}$.

a) Dimostrare che U è un dominio pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

b) Trovare in $\mathbb{C}^2$ un disco analitico chiuso Δ tale che $0 \in \Delta$ (eppure $0 \notin U$) e $\Delta \setminus \{0\} \subset U$ (in particolare $\partial\Delta \subset U$).

c) Che cosa accadrebbe spostando di poco Δ per cercare di evitare l'intersezione con il complementare? Si rifletta sulla seconda versione del principio di continuità e si confronti con l'esercizio 2.5.4.

Esercizio 2.5.14. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ continua, plurisubarmonica e negativa in U, con $f = 0$ su ∂U. Dimostrare che U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

L'analogo dell'esercizio 2.5.9 sulle unioni crescenti per i domini di olomorfia è il *teorema di Behnke–Stein*, conseguenza di tale esercizio e della soluzione del problema di Levi. È più facile dimostrarlo direttamente (si veda l'esercizio 2.6.13) e di solito lo si usa proprio per risolvere il problema di Levi.

L'esercizio 2.5.12 mostra che la pseudoconvessità nel senso di Hartogs è invariante per biolomorfismi. Questo suggerisce che abbiamo individuato la nozione giusta e, quando dobbiamo dimostrare che un particolare dominio è pseudoconvesso, ci permette di scegliere coordinate più comode.

Dalla definizione non è immediato, ma anche la pseudoconvessità nel senso di Hartogs è una proprietà locale della frontiera.

Lemma 2.5.7. Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è pseudoconvesso nel senso di Hartogs se e solo se per ogni $p \in \partial U$ esiste un intorno W di p tale che $W \cap U$ sia pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

Dimostrazione. Una delle implicazioni è immediata. Per l'altra, fissiamo $p \in \partial U$ e scegliamo W in modo che $U \cap W$ sia pseudoconvesso nel senso di Hartogs. Per l'esercizio 2.5.6, l'intersezione di domini pseudoconvessi nel senso di Hartogs è pseudoconvessa nel medesimo senso, componente per componente. Possiamo quindi supporre $W = B_r(p)$. Sia $B = B_{r/2}(p)$. Per $q \in B \cap U$, la distanza di q dalla frontiera di $W \cap U$ coincide con la distanza da ∂U. La figura 2.16 illustra la situazione.

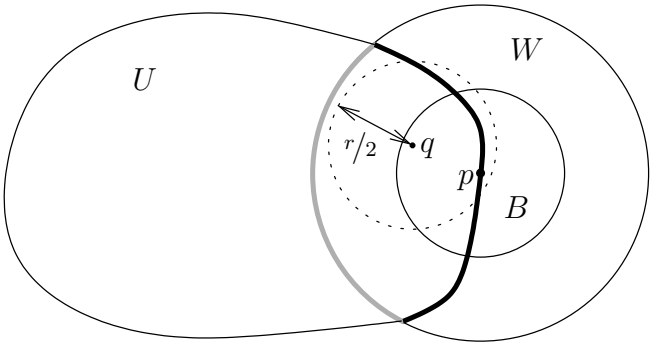


Figura 2.16: Carattere locale della pseudoconvessità nel senso di Hartogs.

La parte della frontiera ∂U che si trova in W è tracciata in nero con una linea spessa. I punti della frontiera $\partial(W \cap U)$ che appartengono a quella di W sono segnati con una linea grigia spessa. È indicato un punto $q \in B$ e il tratteggio delimita la palla di raggio $r/2$ centrata in q. Nessun punto a distanza $r/2$ da q appartiene a ∂W. La distanza di q da

∂U è al più $r/2$, perché $p \in \partial U$ e p è il centro di B. Indichiamo con $\operatorname{dist}(x, y)$ la distanza euclidea.[31] Per $z \in B \cap U$ si ha allora

$$-\log \operatorname{dist}(z, \partial U) = -\log \operatorname{dist}\big(z, \partial(U \cap W)\big).$$

Il secondo membro è plurisubarmonico perché $U \cap W$ è pseudoconvesso nel senso di Hartogs. Attorno a ogni $p \in \partial U$ esiste una palla B con questa proprietà. Dunque $-\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$ è plurisubarmonica vicino alla frontiera.

Se U è limitato, ∂U è compatta. Esiste quindi $\epsilon > 0$ tale che $-\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$ sia plurisubarmonica quando $\operatorname{dist}(z, \partial U) < 2\epsilon$. La funzione

$$\varphi(z) = \max\{-\log \operatorname{dist}(z, \partial U), -\log \epsilon\}$$

è una funzione di esaustione continua e plurisubarmonica. Lasciamo per esercizio il caso di U illimitato. □

Esercizio 2.5.15. Completare la dimostrazione del lemma per domini illimitati. Si veda l'esercizio 2.5.9.

Benché le definizioni siano assai diverse, le pseudoconvessità di Levi e di Hartogs coincidono sui domini per cui sono definite entrambe. Grazie al teorema seguente potremo dire semplicemente «pseudoconvesso» senza ambiguità.

Teorema 2.5.8. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontiera liscia. Allora U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs se e solo se U è pseudoconvesso nel senso di Levi.

Dimostrazione. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontiera liscia che non sia pseudoconvesso nel senso di Levi in $p \in \partial U$. Come nel teorema 2.3.11, cambiamo coordinate in modo che $p = 0$ e che U sia definito da

$$\Im z_n > -|z_1|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon_k |z_k|^2 + O(3).$$

Per $\lambda > 0$ piccolo e fissato, i dischi analitici chiusi definiti da $\xi \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto (\lambda\xi, 0, \cdots, 0, is)$ sono contenuti in U per ogni $s > 0$ sufficientemente piccolo. L'origine è un punto di accumulazione dell'unione degli interni dei dischi, ma non di quella dei loro bordi. Viene quindi meno la seconda versione del principio di continuità e U non è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche. Dunque U non è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

Supponiamo ora che U sia pseudoconvesso nel senso di Levi. Fissiamo un punto qualunque $p \in \partial U$. Con una traslazione e una rotazione unitaria possiamo supporre $p = 0$ e scrivere una funzione definente r nella forma

$$r(z) = \varphi(z', \bar{z}', \Re z_n) - \Im z_n,$$

dove $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ e $\varphi \in O(2)$. Per la pseudoconvessità di Levi si ha

$$\sum_{k=1,\ell=1}^{n} \bar{a}_k a_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q \geq 0 \quad \text{quando} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q = 0, \tag{2.5}$$

per ogni $q \in \partial U$ vicino a 0. Per s reale e piccolo poniamo $\widetilde{q} = (q_1, \dots, q_{n-1}, q_n + is)$. Poiché nessuna derivata di r dipende da $\Im z_n$, valgono

$$\frac{\partial r}{\partial z_\ell}\Big|_{\widetilde{q}} = \frac{\partial r}{\partial z_\ell}\Big|_q, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_{\widetilde{q}} = \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q$$

[31] Se x o y sono insiemi, si prende l'estremo inferiore delle distanze euclidee fra i rispettivi punti.

per ogni k e ℓ. La condizione (2.5) vale dunque per ogni $q \in U$ vicino a 0. Useremo r per costruire una funzione di esaustione plurisubarmonica. Ci serve un'hessiana complessa semidefinita positiva e r ha già questa proprietà in tutte le direzioni salvo una.

Indichiamo con $\nabla_z r|_q = (\frac{\partial r}{\partial z_1}\big|_q, \dots, \frac{\partial r}{\partial z_n}\big|_q)$ il gradiente di r nelle sole direzioni olomorfe. Dato $q \in U$ vicino a 0, decomponiamo un vettore arbitrario $c \in \mathbb{C}^n$ come $c = a + b$, con a e b ortogonali e b multiplo scalare di $\overline{\nabla_z r|_q}$. In altri termini, $a = (a_1, \dots, a_n)$ soddisfa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q = \langle a, \overline{\nabla_z r|_q} \rangle = 0.$$

Dal caso di uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy–Schwarz segue

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q \right| = \left| \langle b, \overline{\nabla_z r|_q} \rangle \right| = \|b\| \, \|\nabla_z r|_q\| \, .$$

Poiché $\nabla_z r|_0 = (0, \dots, 0, -1/2i)$, per q abbastanza vicino a 0 si ha $\|\nabla_z r|_q\| \geq 1/3$ e

$$\|b\| = \frac{1}{\|\nabla_z r|_q\|} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q \right| \leq 3 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q \right|. \tag{2.6}$$

La decomposizione $c = a+b$ è ortogonale, quindi $\|c\| \geq \|b\|$. La matrice hessiana complessa di r è continua. Sia $M \geq 0$ un maggiorante della sua norma di operatore per q vicino all'origine. Si osservi che $\bar{c}_k c_\ell = (\bar{a}_k + \bar{b}_k)(a_\ell + b_\ell) = \bar{a}_k a_\ell + \bar{b}_k(a_\ell + b_\ell) + (\bar{a}_k + \bar{b}_k) b_\ell - \bar{b}_k b_\ell = \bar{a}_k a_\ell + \bar{b}_k c_\ell + \bar{c}_k b_\ell - \bar{b}_k b_\ell$. Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{c}_k c_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q &= \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{a}_k a_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q + \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{b}_k c_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q \\
&\quad + \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{c}_k b_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q - \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{b}_k b_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q \\
&\geq \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{a}_k a_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q - M\|b\|\|c\| - M\|c\|\|b\| - M\|b\|^2 \\
&\geq -3M\|c\|\|b\|.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Combinando (2.7) con (2.6), per $q \in U$ vicino all'origine si ottiene

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{c}_k c_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q \geq -3M\|c\|\|b\| \geq -3^2 M\|c\| \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q \right|.$$

Per $z \in U$ abbastanza vicino a 0 poniamo

$$f(z) = -\log(-r(z)) + A\|z\|^2,$$

dove $A > 0$ è una costante da scegliere. Il logaritmo serve a far tendere f all'infinito quando ci avviciniamo alla frontiera. Il termine $A\|z\|^2$ aggiunge all'hessiana complessa di f una matrice diagonale costante. Vogliamo che questa aggiunta basti a renderla semidefinita positiva per tutti gli z vicini a 0. Calcoliamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial r}{\partial z_\ell} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell} + A\delta_k^\ell,$$

dove δ_k^ℓ è il delta di Kronecker.[32] Applichiamo l'hessiana complessa di f al vettore c in un punto $q \in U$ vicino all'origine. Ricordiamo che r è negativa in U, quindi per $q \in U$ vale $-r = |r|$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=1,\ell=1}^{n} \bar{c}_k c_\ell \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q &= \frac{1}{r^2}\left|\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \frac{\partial r}{\partial z_\ell}\Big|_q\right|^2 + \frac{1}{|r|}\sum_{k=1,\ell=1}^{n} \bar{c}_k c_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q + A\|c\|^2 \\ &\geq \frac{1}{r^2}\left|\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \frac{\partial r}{\partial z_\ell}\Big|_q\right|^2 - \frac{3^2 M}{|r|}\|c\|\left|\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q\right| + A\|c\|^2.\end{aligned}$$

Ecco l'accorgimento decisivo. Il secondo membro della disuguaglianza è un trinomio di secondo grado in $\|c\|$, che è sempre non negativo se $A > 0$ e se il discriminante è negativo o nullo. Proviamo ad annullare il discriminante:

$$0 = \left(\frac{3^2 M}{|r|}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial r}{\partial z_k}\Big|_q\right|\right)^2 - 4A\frac{1}{r^2}\left|\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \frac{\partial r}{\partial z_\ell}\Big|_q\right|^2.$$

Tutti i fattori non costanti si raccolgono e per $A = \frac{3^4 M^2}{4}$ il discriminante si annulla. Andrebbe bene anche ogni A maggiore, che lo renderebbe non positivo. Dunque per questa scelta di A vale

$$\sum_{k=1,\ell=1}^{n} \bar{c}_k c_\ell \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_k \partial z_\ell}\Big|_q \geq 0.$$

L'hessiana complessa di f è pertanto semidefinita positiva in tutti i punti $q \in U$ vicini a 0. La funzione $f(z)$ tende all'infinito quando z si avvicina a ∂U. Quindi, per ogni $t \in \mathbb{R}$, il sottolivello di altezza t, ossia l'insieme in cui $f(z) < t$, rimane a distanza positiva da ∂U nelle vicinanze di 0.

Abbiamo costruito localmente una funzione di esaustione continua e plurisubarmonica per U vicino a p. Intersecando con una piccola palla B di centro p si ottiene che $U \cap B$ è pseudoconvesso nel senso di Hartogs. Questo vale per ogni $p \in \partial U$, dunque U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs. □

Esercizio 2.5.16. Mostrare che nella costruzione precedente si può usare qualunque funzione definente. Supponiamo che U sia pseudoconvesso nel senso di Levi, $p \in \partial U$, che r sia la funzione definente della dimostrazione e che $\tilde{r} = \varphi r$ per una funzione liscia φ definita vicino a p con $\varphi(p) \neq 0$. Mostrare che, per $z \in U$ vicino a p, la funzione $f(z) = -\log(-\tilde{r}(z)) + A\|z\|^2$ è plurisubarmonica per A sufficientemente grande (si adotti la convenzione che la funzione definente sia negativa all'interno).

[32] Si ricordi che $\delta_k^\ell = 0$ per $k \neq \ell$ e $\delta_k^\ell = 1$ per $k = \ell$.

2.6 Convessità olomorfa

Definizione 2.6.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Per $K \subset U$ definiamo l'*inviluppo olomorfo*

$$\widehat{K}_U \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ z \in U : |f(z)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)| \text{ per ogni } f \in \mathcal{O}(U) \Big\}.$$

Un dominio U si dice *olomorficamente convesso* se per ogni $K \subset\subset U$ vale $\widehat{K}_U \subset\subset U$. In altre parole, U è olomorficamente convesso se è convesso rispetto ai moduli delle funzioni olomorfe su U.[33]

È un facile esercizio, proposto fra poco, dimostrare che un dominio olomorficamente convesso è pseudoconvesso nel senso di Hartogs. Dimostreremo che la convessità olomorfa equivale a essere un dominio di olomorfia. Il problema di Levi per i domini pseudoconvessi nel senso di Hartogs consiste nel provare che un tale dominio è olomorficamente convesso. Quest'implicazione è assai più difficile. Le funzioni plurisubarmoniche sono numerose e facili da costruire. Possiamo perfino costruirle localmente e poi incollarle prendendo dei massimi. Le funzioni olomorfe sono molto meno numerose e, se le costruiamo localmente, non possiamo aspettarci che i pezzi si raccordino da soli. Il risultato è così importante da meritare un enunciato a sé.

Teorema 2.6.2. (Soluzione del problema di Levi.) Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è olomorficamente convesso se e solo se è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

Dimostrazione. L'implicazione diretta segue dall'esercizio qui sotto, talvolta chiamato lemma di Oka. Per risparmiare un centinaio di pagine, omettiamo la dimostrazione dell'implicazione inversa. La si trova nel libro di L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables* [6]. □

Esercizio 2.6.1. (Lemma di Oka.) Dimostrare che, se un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è olomorficamente convesso, allora è pseudoconvesso nel senso di Hartogs. Si veda l'esercizio 2.4.23.

Esercizio 2.6.2. Dimostrare che ogni dominio $U \subset \mathbb{C}$ è olomorficamente convesso dando una descrizione topologica di $\widehat{K}_U$ per ogni compatto $K \subset\subset U$. *Suggerimento.* Può servire il teorema di Runge.

Esercizio 2.6.3. Sia $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ olomorfa e sia U una componente connessa di $\{z \in \mathbb{C}^n : |f(z)| < 1\}$. Dimostrare che U è un dominio olomorficamente convesso.

Esercizio 2.6.4. Calcolare l'inviluppo $\widehat{K}_{\mathbb{D}^n}$ dell'insieme $K = \{z \in \mathbb{D}^n : |z_\ell| = \lambda_\ell \text{ per } \ell = 1, \ldots, n\}$, dove $0 \leq \lambda_\ell < 1$. Dimostrare che il polidisco unitario è olomorficamente convesso.

Esercizio 2.6.5. Dimostrare che un dominio geometricamente convesso $U \subset \mathbb{C}^n$ è olomorficamente convesso.

Esercizio 2.6.6. Dimostrare che la figura di Hartogs (si veda il teorema di prolungamento 2.1.4) non è olomorficamente convessa.

[33] Talvolta si scrive semplicemente $\widehat{K}$. Qui preferiamo $\widehat{K}_U$ per sottolineare la dipendenza da U.

Esercizio 2.6.7. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathcal{O}(U)$ e f non identicamente nulla. Mostrare che, se U è olomorficamente convesso, anche $\widetilde{U} = \{z \in U : f(z) \neq 0\}$ è olomorficamente convesso. *Suggerimento.* Si veda prima l'esercizio 1.6.5.

Esercizio 2.6.8. Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ domini biolomorfi. Dimostrare che U è olomorficamente convesso se e solo se lo è V.

Esercizio 2.6.9. Nella definizione di inviluppo olomorfo di K, sostituire U con $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{O}(U)$ con i polinomi olomorfi su $\mathbb{C}^n$. Si ottiene il cosiddetto *inviluppo polinomiale* di K. Dimostrare che l'inviluppo polinomiale di $K \subset\subset \mathbb{C}^n$ coincide con l'inviluppo olomorfo $\widehat{K}_{\mathbb{C}^n}$.

Esercizio 2.6.10.

a) Dimostrare che il triangolo di Hartogs T (esercizio 2.1.9) è olomorficamente convesso.

b) Dimostrare che $T \cup B_\epsilon(0)$, per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, non è olomorficamente convesso.

Esercizio 2.6.11. Dimostrare che, se i domini $U_1 \subset \mathbb{C}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{C}^n$ sono olomorficamente convessi, lo è anche ogni componente connessa di $U_1 \cap U_2$.

Esercizio 2.6.12. Siano $n \geq 2$ e $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio.

a) Sia $K \subset\subset U$ un compatto non vuoto. Dimostrare che $U \setminus K$ non è olomorficamente convesso.

b) Dimostrare che, se U è limitato e olomorficamente convesso, allora $\mathbb{C}^n \setminus U$ è connesso.

c) Trovare un dominio olomorficamente convesso illimitato U per cui $\mathbb{C}^n \setminus U$ sia sconnesso.

Lo spazio $\mathbb{C}^n$ è sia olomorficamente convesso sia un dominio di olomorfia. Le due nozioni sono equivalenti anche per tutti gli altri domini di $\mathbb{C}^n$.

Teorema 2.6.3. (Cartan–Thullen.) Sia $U \subsetneq \mathbb{C}^n$ un dominio. Sono equivalenti le seguenti proprietà.

(i) U è un dominio di olomorfia.

(ii) Per ogni $K \subset\subset U$ si ha $\operatorname{dist}(K, \partial U) = \operatorname{dist}(\widehat{K}_U, \partial U)$.

(iii) U è olomorficamente convesso.

Dimostrazione. Cominciamo da (i) $\Rightarrow$ (ii). Consideriamo $K \subset\subset U$ con $\operatorname{dist}(K, \partial U) > \operatorname{dist}(\widehat{K}_U, \partial U)$. Dopo un'eventuale rotazione unitaria esistono un punto $p \in \widehat{K}_U$ e un polidisco $\Delta = \Delta_r(0)$ di poliraggio $r = (r_1, \ldots, r_n)$ tali che $p + \Delta = \Delta_r(p)$ contenga un punto di ∂U, mentre

$$K + \Delta = \bigcup_{q \in K} \Delta_r(q) \subset\subset U.$$

Si veda la figura 2.17.

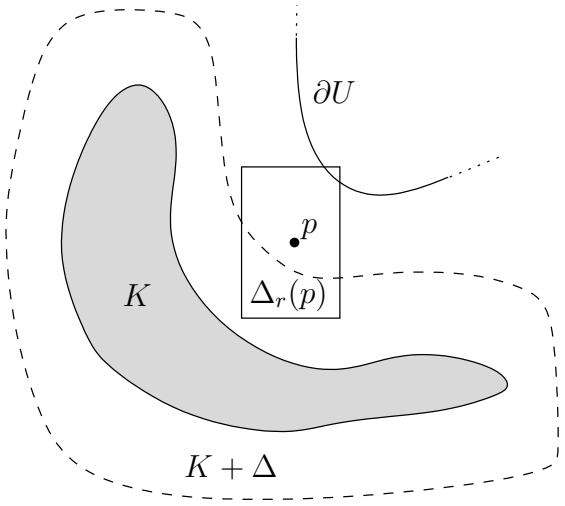


Figura 2.17: Un punto dell'inviluppo più vicino alla frontiera di tutti i punti di K.

Se $f \in \mathcal{O}(U)$, esiste $M > 0$ tale che $|f| \leq M$ su $K + \Delta$, perché questo insieme è relativamente compatto. Per le stime di Cauchy, in ciascun $q \in K$ si ha

$$\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(q)\right| \leq \frac{M\alpha!}{r^\alpha}.$$

La disuguaglianza vale dunque su $\widehat{K}_U$ e in particolare in p. La serie

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(p)(z-p)^\alpha$$

converge in $\Delta_r(p)$. Abbiamo una funzione olomorfa in tutto $\Delta_r(p)$, che coincide con f vicino a p, e $\Delta_r(p)$ contiene punti esterni a U. In altre parole, U non è un dominio di olomorfia.

L'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (iii) è immediata.

Dimostriamo infine (iii) $\Rightarrow$ (i). Supponiamo che U sia olomorficamente convesso e fissiamo $p \in \partial U$. Per convessità olomorfa possiamo scegliere una successione crescente di compatti $K_{\ell-1} \subsetneq K_\ell \subset\subset U$ tali che $\bigcup_\ell K_\ell = U$ e $(\widehat{K_\ell})_U = K_\ell$. Poiché questi compatti esauriscono U, passando se necessario a una sottosuccessione possiamo trovare punti $p_\ell \in K_\ell \setminus K_{\ell-1}$ tali che $\lim_{\ell\to\infty} p_\ell = p$.

Scegliamo $f_1 \in \mathcal{O}(U)$ in modo che $|f_1(p_1)| \geq 1$ e procediamo per induzione. Poiché p_ℓ non appartiene all'inviluppo di $K_{\ell-1}$, esiste una funzione $f_\ell \in \mathcal{O}(U)$ tale che $|f_\ell| \leq 2^{-\ell}$ su $K_{\ell-1}$, mentre

$$|f_\ell(p_\ell)| \geq \ell + \left|\sum_{k=1}^{\ell-1} f_k(p_\ell)\right|.$$

La costruzione di questa funzione è lasciata per esercizio. Per ogni ℓ la serie $\sum_{k=1}^\infty f_k(z)$ converge uniformemente su K_ℓ, poiché per ogni $k > \ell$ vale $|f_k| \leq 2^{-k}$ su K_ℓ. Siccome i K_ℓ esauriscono U, la convergenza è uniforme sui sottoinsiemi compatti di U. Pertanto

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty f_k(z)$$

è una funzione olomorfa su U. La stima

$$|f(p_\ell)| \geq |f_\ell(p_\ell)| - \left|\sum_{k=1}^{\ell-1} f_k(p_\ell)\right| - \left|\sum_{k=\ell+1}^{\infty} f_k(p_\ell)\right| \geq \ell - \sum_{k=\ell+1}^{\infty} 2^{-k} \geq \ell - 1.$$

dà $\lim_{\ell\to\infty} f(p_\ell) = \infty$. Non può quindi esistere un aperto $W \subset \mathbb{C}^n$ contenente p al quale si prolunghi f (si veda la definizione di dominio di olomorfia). Poiché ogni aperto connesso W tale che $W \setminus U \neq \emptyset$ e $W \setminus U^c \neq \emptyset$ deve contenere un punto di ∂U, la dimostrazione è conclusa. □

Per l'esercizio 2.6.8 la convessità olomorfa è invariante per biolomorfismi. Lo stesso vale dunque per la proprietà di essere un dominio di olomorfia. Non è facile dimostrarlo a partire dalla definizione di dominio di olomorfia, perché il biolomorfismo è definito soltanto all'interno dei domini considerati.

La convessità olomorfa è una nozione intrinseca. Per definirla non serve conoscere alcun punto esterno a U. È quindi un modo più conveniente di guardare ai domini di olomorfia. La convessità olomorfa si estende facilmente a varietà complesse più generali,[34] mentre la nozione di dominio di olomorfia qui introdotta ha senso per i domini di $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 2.6.13. (Ancora Behnke–Stein.) Mostrare che l'unione $\bigcup_\ell U_\ell$ di una successione crescente di domini olomorficamente convessi $U_{\ell-1} \subset U_\ell \subset \mathbb{C}^n$ è olomorficamente convessa.

Esercizio 2.6.14. Dimostrare l'esistenza della funzione $f_\ell \in \mathcal{O}(U)$ usata nella dimostrazione del teorema di Cartan–Thullen.

Esercizio 2.6.15. Mostrare che, se $U \subset \mathbb{C}^n$ è olomorficamente convesso, esiste una singola funzione $f \in \mathcal{O}(U)$ che non si prolunga attraverso alcun punto $p \in \partial U$.

Esercizio 2.6.16. Sappiamo che $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0\}$ è un dominio di olomorfia. Usare la parte (ii) del teorema per mostrare che, se $W \subset \mathbb{C}^2$ è un dominio di olomorfia e $U \subset W$, allora $W = U$ oppure $W = \mathbb{C}^2$. *Suggerimento.* Siano $L \subset W$ una retta complessa e K una circonferenza contenuta in L. Che cos'è $\widehat{K}_W$?

Con i prossimi esercizi, da svolgere nell'ordine indicato, risolverete il problema di Levi per i domini di Reinhardt completi, ottenendo anche qualcosa di più. Ricordiamo che un dominio U si dice *dominio di Reinhardt completo* se, quando $(z_1, \dots, z_n)$ appartiene a U e $r_k = |z_k|$, vale l'inclusione dell'intero polidisco chiuso $\overline{\Delta_r(0)} \subset U$. Un dominio di Reinhardt completo U si dice *logaritmicamente convesso* se esiste un insieme geometricamente convesso $C \subset \mathbb{R}^n$ tale che $z \in U^*$ se e solo se $(\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \in C$, dove $U^* = \{z \in U : z_1 \neq 0, \dots, z_n \neq 0\}$.

Esercizio 2.6.17. Dimostrare che un dominio di Reinhardt completo logaritmicamente convesso è intersezione di insiemi della forma

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \alpha_1 \log|z_1| + \cdots + \alpha_n \log|z_n| < \beta\} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^{\alpha_1} \cdots |z_n|^{\alpha_n} < e^\beta\}$$

per opportuni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Si adottino le convenzioni $\log 0 = -\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$ e $0^0 = 1$.

Esercizio 2.6.18. Dimostrare che un dominio di Reinhardt completo pseudoconvesso nel senso di Hartogs è logaritmicamente convesso.

[34] Varietà dotate di una struttura complessa, cioè, per dirla informalmente, «varietà nei cui spazi tangenti si può moltiplicare per i».

Esercizio 2.6.19. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$ sia $\ell_m^k \in \mathbb{N}_0$ il minimo intero non negativo tale che $\ell_m^k \geq k\alpha_m$. Dimostrare che il dominio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\beta} z_1^{\ell_1^k} \cdots z_n^{\ell_n^k}$$

è precisamente

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^{\alpha_1} \cdots |z_n|^{\alpha_n} < e^{\beta} \right\}$$

Suggerimento. È facile mostrare che la serie diverge all'esterno. La difficoltà è dimostrare che converge all'interno. Si osservi che $\frac{\ell_m^k}{k} - \alpha_m \leq \frac{1}{k}$ e che, per z nell'insieme, quando il prodotto dei moduli è positivo esiste $\epsilon > 0$ tale che $(1+\epsilon)|z_1|^{\alpha_1} \cdots |z_n|^{\alpha_n} = e^{\beta}$.

Esercizio 2.6.20. Dimostrare che un dominio di Reinhardt completo logaritmicamente convesso è olomorficamente convesso e quindi è un dominio di olomorfia.

Esercizio 2.6.21. Dimostrare che un dominio di Reinhardt completo è un dominio di olomorfia se e solo se è il dominio di convergenza di una serie di potenze centrata nell'origine. *Suggerimento.* Esiste una funzione che non si prolunga oltre alcun punto della frontiera di un dominio olomorficamente convesso.

Abbiamo così dimostrato (o meglio, avete dimostrato) la seguente proposizione.

Proposizione 2.6.4. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio di Reinhardt completo. Sono equivalenti le seguenti proprietà.

(i) U è logaritmicamente convesso.

(ii) U è un dominio di olomorfia.

(iii) U è il dominio di convergenza di una serie di potenze centrata nell'origine.

(iv) U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs.

3 Funzioni CR

3.1 Funzioni analitiche reali e complessificazione

Definizione 3.1.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ si dice *analitica reale* (o semplicemente *analitica*, quando il contesto è chiaro) se, in ogni punto $p \in U$, f ammette uno sviluppo in serie di potenze che converge assolutamente a f in un intorno di p. La classe delle funzioni analitiche reali si indica spesso con C^ω.

Prima di esaminare il legame fra funzioni analitiche reali e funzioni olomorfe, dimostriamo un semplice lemma.

Lemma 3.1.2. Consideriamo l'inclusione naturale $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ e un dominio $V \subset \mathbb{C}^n$ tale che $V \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$. Siano $f, g\colon V \to \mathbb{C}$ funzioni olomorfe tali che $f = g$ su $V \cap \mathbb{R}^n$. Allora $f = g$ su tutto V.

Dimostrazione. Considerando $f - g$, possiamo supporre $g = 0$. Scriviamo come al solito $z = x + iy$, cosicché $\mathbb{R}^n$ è descritto da $y = 0$. Per ipotesi $f = 0$ quando $y = 0$, perciò su questo insieme la derivata di f rispetto a x_k è nulla. Per $y = 0$ le equazioni di Cauchy–Riemann danno

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_k} = -i\frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Quindi, per $y = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = 0.$$

La derivata $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ è olomorfa e $\frac{\partial f}{\partial z_k} = 0$ su $y = 0$. Per induzione tutte le derivate olomorfe di f in $p \in \mathbb{R}^n \cap V$ si annullano e la serie di potenze di f ha tutti i coefficienti nulli. Dunque f è identicamente nulla in un intorno di p in $\mathbb{C}^n$. Per il teorema di identità f si annulla in tutto V. □

Torniamo per un momento a $\mathbb{R}^n$. Scriviamo una serie di potenze in $\mathbb{R}^n$ con la consueta notazione a multiindici. Supponiamo che, per un certo $a \in \mathbb{R}^n$ e un poliraggio $r = (r_1, \dots, r_n)$, la serie

$$\sum_\alpha c_\alpha (x - a)^\alpha$$

converga per $|x_k - a_k| < r_k$ per ogni k. Intendiamo la convergenza assoluta, ossia la convergenza della serie

$$\sum_\alpha |c_\alpha|\, |x - a|^\alpha$$

Se sostituiamo $x_k \in \mathbb{R}$ con $z_k \in \mathbb{C}$ tale che $|z_k - a_k| \leq |x_k - a_k|$, la serie continua a convergere. Pertanto la serie

$$\sum_\alpha c_\alpha (z - a)^\alpha$$

converge assolutamente in $\Delta_r(a) \subset \mathbb{C}^n$.

Proposizione 3.1.3. (Complessificazione, prima parte.) Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio e $f\colon U \to \mathbb{C}$ analitica reale. Consideriamo l'inclusione naturale $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Esistono un dominio $V \subset \mathbb{C}^n$ tale che $U \subset V$ e, su tale dominio, un'unica funzione olomorfa $F\colon V \to \mathbb{C}$ con $F|_U = f$.

Fra le numerose conseguenze vi è il fatto che ogni funzione analitica reale è di classe C^∞. Si osservi che U è un dominio in $\mathbb{R}^n$, ma, considerato come sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$, non è aperto. Inoltre V può essere un intorno molto «sottile» di U. Non si può determinare V dalla sola

conoscenza di U: occorre conoscere anche f. Per esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{\epsilon^2+x^2}$ con $\epsilon > 0$ è analitica reale su $\mathbb{R}$, ma la sua complessificazione non è olomorfa nei punti $\pm\epsilon i$.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato la versione locale. Dobbiamo verificare che i prolungamenti di f costruiti vicino ai diversi punti coincidano dove si sovrappongono. Questo segue dal lemma 3.1.2: due tali funzioni coincidono sulla parte reale in $\mathbb{R}^n$, e quindi coincidono. Precisiamo il dettaglio topologico. Definiamo V come unione di polidischi di convergenza, centrati nei punti del dominio reale e scelti con traccia reale contenuta nel dominio stesso. Se un punto p appartiene a due di questi polidischi, occorre verificare che le due definizioni di F diano lo stesso valore in p. L'intersezione dei polidischi è connessa e, in questo caso, contiene anche un aperto relativo di $\mathbb{R}^n$. Possiamo quindi applicare il lemma. □

Esercizio 3.1.1. Dimostrare il teorema di identità per le funzioni analitiche reali. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio, $f\colon U \to \mathbb{R}$ è analitica reale e f si annulla su un aperto non vuoto contenuto in U, allora f è identicamente nulla.

Esercizio 3.1.2. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio e $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione analitica reale tale che $f|_W$ sia armonica su un aperto non vuoto $W \subset U$. Dimostrare che f è armonica su tutto il dominio.

Esercizio 3.1.3. Si consideri $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Costruire una funzione analitica reale su $(0,1)$ che non ammetta complessificazione al rettangolo $(0,1) + i(-\epsilon,\epsilon) \subset \mathbb{C}$ per alcun $\epsilon > 0$. Perché ciò non contraddice la proposizione?

Un polinomio $P(x)$ nelle n variabili reali $(x_1,\dots,x_n)$ è omogeneo di grado d se $P(sx) = s^d P(x)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e ogni $x \in \mathbb{R}^n$. In un polinomio omogeneo di grado d tutti i monomi hanno grado totale d. Se f è analitica reale vicino ad $a \in \mathbb{R}^n$, scriviamo la serie di potenze di f centrata in a come

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x-a),$$

dove f_m è un polinomio omogeneo di grado m. Chiamiamo f_m la *parte omogenea di grado* m di f in a.

Per le funzioni analitiche reali in $\mathbb{C}^n$ c'è di solito un modo più conveniente di procedere alla complessificazione. Sia $U \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ analitica reale. Per semplicità supponiamo $a = 0 \in U$. Scrivendo $z = x + iy$, vicino a 0 si ha

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right).$$

Il polinomio f_m diventa un polinomio omogeneo di grado m nelle variabili z e $\bar z$ e la serie diventa una serie di potenze in z e $\bar z$. Scriviamo dunque la funzione come $f(z,\bar z)$ e consideriamo lo sviluppo in z e $\bar z$ anziché in x e y. Con la notazione a multiindici, una serie di potenze centrata in $a \in \mathbb{C}^n$ si scrive

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}(z-a)^\alpha(\bar z - \bar a)^\beta.$$

Ogni funzione olomorfa è analitica reale. Il viceversa non vale: fra le funzioni analitiche reali sono olomorfe precisamente quelle che non dipendono da $\bar z$. Prima di discutere la complessificazione nelle variabili z e $\bar z$, ci serve un lemma.

Lemma 3.1.4. Sia $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ un dominio, con coordinate $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Poniamo

$$D = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \zeta = \bar{z}\},$$

e supponiamo $D \cap V \neq \emptyset$. Se $f, g \colon V \to \mathbb{C}$ sono olomorfe e $f = g$ su $D \cap V$, allora $f = g$ su tutto V.

L'insieme D viene talvolta chiamato *diagonale*.

Dimostrazione. Possiamo supporre $g = 0$. Per $(z, \bar{z}) \in V$ si ha $f(z, \bar{z}) = 0$. Si tratta della composizione di f con l'applicazione che manda z in $(z, \bar{z})$. Poiché la composizione è identicamente nulla, gli operatori di Wirtinger la annullano. Per la regola della catena,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big[f(z, \bar{z})\Big] = \frac{\partial f}{\partial \zeta_k}(z, \bar{z}).$$

Analogamente, derivando rispetto alle z_k,

$$0 = \frac{\partial}{\partial z_k}\Big[f(z, \bar{z})\Big] = \frac{\partial f}{\partial z_k}(z, \bar{z}).$$

In entrambi i casi otteniamo un'altra funzione olomorfa in z e ζ che si annulla su D. Per induzione, per tutti i multiindici α e β si ottiene

$$0 = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\Big[f(z, \bar{z})\Big] = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} f}{\partial z^\alpha \partial \zeta^\beta}(z, \bar{z}).$$

Tutte le derivate olomorfe di f rispetto a z e ζ sono nulle in ogni punto $(z, \bar{z})$ della diagonale. La serie di potenze centrata in ciascun $(z, \bar{z})$ è quindi nulla e f si annulla in un intorno di ogni $(z, \bar{z})$. La conclusione segue dal teorema di identità. □

Sia f una funzione analitica reale e supponiamo che la serie (scritta con i multiindici)

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}(z - a)^\alpha (\bar{z} - \bar{a})^\beta$$

converga in un polidisco $\Delta_r(a) \subset \mathbb{C}^n$. Per convergenza intendiamo quella assoluta, vale a dire che converge

$$\sum_{\alpha,\beta} |c_{\alpha,\beta}|\, |z - a|^\alpha |\bar{z} - \bar{a}|^\beta$$

La serie converge ancora se sostituiamo $\bar{z}_k$ con ζ_k, dove $|\zeta_k - \bar{a}_k| \leq |\bar{z}_k - \bar{a}_k|$. Perciò la serie

$$F(z, \zeta) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}(z - a)^\alpha (\zeta - \bar{a})^\beta$$

converge assolutamente per ogni $(z, \zeta) \in \Delta_r(a) \times \Delta_r(\bar{a})$.

Combinando questa osservazione con il lemma si ottiene la proposizione seguente.

Proposizione 3.1.5. (Complessificazione, seconda parte.) Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $f \colon U \to \mathbb{C}$ analitica reale. Esistono un dominio $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tale che

$$\{(z, \zeta) : \zeta = \bar{z} \text{ e } z \in U\} \subset V,$$

e un'unica funzione olomorfa $F \colon V \to \mathbb{C}$ tale che $F(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z})$ per ogni $z \in U$.

Possiamo vedere f come la restrizione di F all'insieme in cui $\zeta = \bar{z}$. Con un abuso di notazione scriveremo $f(z, \zeta)$ sia per f sia per il suo prolungamento. Il motivo appare dai calcoli precedenti. Quella che chiamiamo f è una funzione di $(z, \bar{z})$ se la pensiamo sulla

diagonale, dove $\zeta = \bar{z}$. È una funzione di z se la pensiamo come $z \mapsto f(z, \bar{z})$, oppure è la funzione $(z, \zeta) \mapsto f(z, \zeta)$. Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\quad z \mapsto (z,\bar{z}) \quad} & V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ & {\scriptstyle f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle f \quad (=F)} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Chiamiamo f tutte e tre le descrizioni dell'applicazione suggerite dal diagramma. La freccia uscente da V era indicata con F nella proposizione. Questa notazione si accorda bene con la derivazione e gli operatori di Wirtinger. Derivare f (cioè la F della proposizione) rispetto a ζ_k e poi valutare in $(z, \bar{z})$ equivale a valutare prima in $(z, \bar{z})$ e a derivare poi rispetto a $\bar{z}_k$ con l'operatore di Wirtinger:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_k}(z, \bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial \zeta_k}(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big[f(z, \bar{z})\Big] = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}(z, \bar{z}).$$

Se socchiudiamo un po' gli occhi, la distinzione tra $\bar{z}$ e ζ quasi scompare. Avevamo già usato questa idea per le funzioni lisce, ma per quelle analitiche reali possiamo trattare davvero z e $\bar{z}$ come variabili indipendenti. Una volta compreso, l'abuso di notazione è del tutto giustificato.

Osservazione 3.1.6. Il dominio V della proposizione non è semplicemente il prodotto di U per il coniugato di U. In generale è più piccolo. Per esempio, la complessificazione di una funzione analitica reale $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ non si estende necessariamente a tutto $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Il dominio di convergenza di una serie di Taylor di una funzione analitica reale su $\mathbb{C}^n$ non è necessariamente tutto $\mathbb{C}^n$. In dimensione uno, la funzione

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{1 + |z|^2}$$

è analitica reale su $\mathbb{C}$, ma non è la restrizione alla diagonale di una funzione olomorfa definita in tutto $\mathbb{C}^2$. Infatti la funzione complessificata

$$f(z, \zeta) = \frac{1}{1 + z\zeta}$$

non è definita dove $z\zeta = -1$, condizione che, per nostra fortuna, non si presenta mai quando $\zeta = \bar{z}$.

Osservazione 3.1.7. Questa forma di complessificazione è talvolta chiamata *polarizzazione* per il legame con le identità di polarizzazione.[35] Possiamo ricostruire una matrice hermitiana A e dunque la forma sesquilineare $\langle Az, w\rangle$, per $z, w \in \mathbb{C}^n$, conoscendo soltanto il valore di

$$\langle Az, z\rangle = z^* Az = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell}\, \bar{z}_k z_\ell$$

per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. A ben vedere, la proposizione 3.1.5 è una polarizzazione in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, ma questo ci porterebbe lontano.

Trattare $\bar{z}$ come una variabile a sé è un'idea molto efficace e, come abbiamo appena visto, del tutto naturale per le funzioni analitiche reali. È uno dei motivi per cui esse occupano un posto speciale nell'analisi complessa.

[35] Per esempio $4\langle z, w\rangle = \|z + w\|^2 - \|z - w\|^2 + i\big(\|z + iw\|^2 - \|z - iw\|^2\big)$.

Esercizio 3.1.4. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione pluriarmonica. Dimostrare che φ è analitica reale.

Esercizio 3.1.5. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, $z_0 \in U$ e $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione pluriarmonica. Sappiamo che φ è analitica reale. Usando la complessificazione, scrivere una formula per una funzione olomorfa in un intorno di z_0 la cui parte reale sia φ.

Esercizio 3.1.6. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Supponiamo che $f = \bar{g}$ su U. Usare la complessificazione (complessificando $f - \bar{g}$) per mostrare che f e g sono costanti.

Esempio 3.1.8. Una funzione di classe C^∞ può non essere analitica reale. Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞ e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k. La serie di Taylor di f nell'origine non converge a f in alcun intorno dell'origine. Converge alla funzione nulla, che in nessun intorno coincide con f. Dunque non esiste un intorno V dell'origine in $\mathbb{C}$ tale che f sia la restrizione a $V \cap \mathbb{R}$ di una funzione olomorfa in V.

Esercizio 3.1.7. Dimostrare le affermazioni dell'esempio precedente.

Definizione 3.1.9. Un'ipersuperficie reale $M \subset \mathbb{R}^n$ si dice *analitica reale* se, localmente presso ciascun punto, è il grafico di una funzione analitica reale. In altri termini, vicino a ogni punto, dopo aver eventualmente rinumerato le coordinate, M si scrive come grafico

$$y = \varphi(x),$$

dove φ è analitica reale e $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.

Si confronti con la definizione 2.2.1. Si potrebbe definire un'ipersuperficie analitica reale mediante una funzione definente, come nella definizione 2.2.1, e dimostrare poi un analogo della proposizione 2.2.9 per ottenere l'equivalenza con la definizione appena data. Lasciamo questo approfondimento al lettore interessato.

Esercizio 3.1.8. Mostrare che la definizione 3.1.9 è equivalente all'analogo della definizione 2.2.1. Enunciare, cioè, la definizione alternativa di ipersuperficie analitica reale e dimostrare l'analogo della proposizione 2.2.9.

Un'applicazione a valori in $\mathbb{R}^m$ è analitica reale se tutte le sue componenti sono funzioni analitiche reali. La complessificazione dà una semplice dimostrazione del risultato seguente.

Proposizione 3.1.10. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ aperti e siano $f\colon U \to V$ e $g\colon V \to \mathbb{R}^m$ analitiche reali. Allora $g \circ f$ è analitica reale.

Dimostrazione. Usiamo le coordinate $x \in \mathbb{R}^n$ in U e $y \in \mathbb{R}^k$ in V. Complessifichiamo $f(x)$ e $g(y)$ permettendo a x di essere un vettore complesso in un piccolo intorno di U in $\mathbb{C}^n$ e a y di essere un vettore complesso in un piccolo intorno di V in $\mathbb{C}^k$. Consideriamo dunque f e g come applicazioni olomorfe. In un opportuno intorno di U in $\mathbb{C}^n$, la composizione $g \circ f$ è ben definita e olomorfa, perché la composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa. Restringendo di nuovo la complessificazione di $g \circ f$ a $\mathbb{R}^n$, si ottiene un'applicazione analitica reale. □

La dimostrazione illustra un uso elementare della complessificazione. Molte proprietà delle funzioni olomorfe sono facili da provare perché queste funzioni soddisfano certe equazioni alle derivate parziali, le equazioni di Cauchy–Riemann. Nessuna equazione alle derivate parziali caratterizza allo stesso modo le funzioni analitiche reali. La complessificazione permette quindi di trasferire a queste ultime alcune proprietà delle funzioni olomorfe. Occorre però cautela: un'ipotesi sul comportamento di una funzione analitica reale vale per il suo prolungamento olomorfo soltanto nei punti in cui è stata imposta.

Esercizio 3.1.9. Illustrare l'osservazione appena fatta trovando una funzione analitica reale $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, limitata e non costante, che ammetta complessificazione a tutto $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 3.1.10. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $\varphi\colon (0,1) \to U$ una curva analitica reale e $f\colon U \to \mathbb{R}$ analitica reale. Supponiamo che $(f \circ \varphi)(t) = 0$ per ogni $t \in (0, \epsilon)$, per un certo $\epsilon > 0$. Dimostrare che f si annulla sull'immagine $\varphi\big((0,1)\big)$.

3.2 Funzioni CR

Occorre anzitutto precisare che cosa significhi per una funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ essere liscia quando X non è aperto, per esempio quando X è un'ipersuperficie.

Definizione 3.2.1. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. La funzione $f\colon X \to \mathbb{C}$ si dice liscia (rispettivamente, analitica reale) se per ogni $p \in X$ esistono un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di p e una funzione $F\colon U \to \mathbb{C}$ liscia (rispettivamente, analitica reale) tale che $F(q) = f(q)$ per $q \in X \cap U$.

Per un insieme arbitrario X questa definizione solleva questioni delicate. È invece facile da usare se X è un insieme regolare, come un'ipersuperficie, oppure se X è la chiusura di un dominio con frontiera liscia.

Proposizione 3.2.2. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie reale liscia (rispettivamente, analitica reale). Una funzione $f\colon M \to \mathbb{C}$ è liscia (rispettivamente, analitica reale) se e solo se vale la seguente proprietà. Ogni volta che, vicino a un punto, scriviamo M nelle coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ nella forma

$$y = \varphi(x),$$

con φ liscia (rispettivamente, analitica reale), l'espressione $f(x, \varphi(x))$ è una funzione liscia (rispettivamente, analitica reale) di x.

Esercizio 3.2.1. Dimostrare la proposizione.

Esercizio 3.2.2. Dimostrare che, se M è un'ipersuperficie liscia o analitica reale e $f\colon M \to \mathbb{C}$ è rispettivamente liscia o analitica reale, la funzione F della definizione non è mai unica, neppure fissando l'intorno U.

Esercizio 3.2.3. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie liscia, $f\colon M \to \mathbb{C}$ una funzione liscia, $p \in M$ e $X_p \in T_pM$. Dimostrare che X_pf è ben definito. Più precisamente, siano U un intorno di p e $F\colon U \to \mathbb{C}$ e $G\colon U \to \mathbb{C}$ funzioni lisce che coincidono entrambe con f su $U \cap M$. Dimostrare che $X_pF = X_pG$.

Per l'ultimo esercizio, possiamo applicare i vettori di T_pM a una funzione liscia sull'ipersuperficie applicandoli a un suo prolungamento liscio qualunque. Analogamente possiamo applicare i vettori di $\mathbb{C}T_pM$ alle funzioni lisce su M, poiché $\mathbb{C}T_pM$ è lo spazio generato sul campo complesso dai vettori di T_pM.

Definizione 3.2.3. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia. Una funzione liscia $f\colon M \to \mathbb{C}$ è una *funzione CR liscia* se

$$X_pf = 0$$

per ogni $p \in M$ e ogni vettore $X_p \in T_p^{(0,1)}M$.

Osservazione 3.2.4. Nella definizione basta una derivata, senza richiedere la regolarità C^∞. Se si interpretano le derivate nel senso delle distribuzioni si può perfino definire una funzione CR continua, ma questo ci porterebbe lontano.

Osservazione 3.2.5. Quando $n = 1$, un'ipersuperficie reale $M \subset \mathbb{C}$ è una curva e $T_p^{(0,1)}M$ è lo spazio nullo. Tutte le funzioni lisce $f\colon M \to \mathbb{C}$ sono dunque CR.

Proposizione 3.2.6. Sia $M \subset U$ un'ipersuperficie reale liscia (rispettivamente, analitica reale) in un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$. Se $F\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa, la restrizione $f = F|_M$ è una funzione CR liscia (rispettivamente, analitica reale).

Dimostrazione. Verifichiamo prima che f sia liscia. La funzione F è liscia e definita in un intorno di ciascun punto di M, quindi fornisce il prolungamento richiesto dalla definizione. Lo stesso argomento vale per l'analiticità reale. Mostriamo che f è CR in un punto $p \in M$. Derivare f secondo i vettori di $\mathbb{C}T_pM$ equivale a derivare F. Poiché $T_p^{(0,1)}M \subset T_p^{(0,1)}\mathbb{C}^n$, otteniamo

$$X_p f = X_p F = 0 \qquad \text{per ogni} \quad X_p \in T_p^{(0,1)}M.$$

□

Non tutte le funzioni CR lisce sono restrizioni di funzioni olomorfe.

Esempio 3.2.7. Consideriamo la funzione liscia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ già costruita, che non è analitica reale nell'origine. Sia $M \subset \mathbb{C}^2$ l'ipersuperficie analitica reale di equazione $\Im z_2 = 0$. Lo spazio $T_p^{(0,1)}M$ ha dimensione complessa uno e in ogni punto $p \in M$ il vettore $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\big|_p$ è tangente e genera $T_p^{(0,1)}M$. Definiamo $g\colon M \to \mathbb{C}$ ponendo

$$g(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = f(\Re z_2).$$

Allora g è CR poiché è indipendente da $\bar{z}_1$. Se $G\colon U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ è olomorfa in un aperto U contenente l'origine, la restrizione di G a M è necessariamente analitica reale (si sviluppa in serie di potenze di $\Re z_1$, $\Im z_1$ e $\Re z_2$). Pertanto G non può coincidere con g su M.

Esercizio 3.2.4. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia e $f\colon M \to \mathbb{C}$ una funzione CR ottenuta restringendo una funzione olomorfa $F\colon U \to \mathbb{C}$ definita in un intorno $U \subset \mathbb{C}^n$ di M. Mostrare che F è unica: se $G\colon U \to \mathbb{C}$ è un'altra funzione olomorfa con $G|_M = f = F|_M$, allora $G = F$ (considerare le componenti dell'intorno che incontrano l'ipersuperficie).

Esercizio 3.2.5. Mostrare che per le funzioni CR non vale in generale un principio del massimo. Trovare un'ipersuperficie reale liscia $M \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, e una funzione CR liscia f su M tali che $|f|$ assuma un massimo stretto in un punto.

Esercizio 3.2.6. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, l'ipersuperficie reale di equazione $\Im z_n = 0$. Mostrare che ogni funzione CR liscia su M è olomorfa nelle variabili $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Dedurne che per nessuna funzione CR liscia f su M il modulo $|f|$ può assumere un massimo *stretto* su M. Mostrare però che esiste una funzione CR liscia non costante f tale che $|f|$ assuma un massimo non stretto su M.

Le funzioni CR analitiche reali su un'ipersuperficie analitica reale M si prolungano sempre a funzioni olomorfe in un intorno di M. Per dimostrarlo complessifichiamo tutte le espressioni, trattando le z e le $\bar{z}$ come variabili indipendenti. La consueta rappresentazione come grafico è poco adatta a questo scopo. Mostreremo invece che un'ipersuperficie analitica reale è la restrizione alla diagonale del grafico di una funzione olomorfa nelle variabili complessificate. Nelle variabili (z, w) scriveremo M come grafico di $\bar{w}$ in funzione di z, $\bar{z}$ e w. Potremo così eliminare $\bar{w}$ da qualunque espressione analitica reale.

Proposizione 3.2.8. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale e $p \in M$. Dopo una traslazione e una rotazione unitaria si ha $p = 0$ e, vicino all'origine, nelle coordinate $(z, w) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, l'ipersuperficie M è data da

$$\bar{w} = \Phi(z, \bar{z}, w),$$

dove $\Phi(z, \zeta, w)$ è olomorfa in un intorno dell'origine in $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$. Inoltre Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial z_k}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k}$ si annullano nell'origine per ogni k e vale $w = \bar{\Phi}(\zeta, z, \Phi(z, \zeta, w))$ per tutti gli z, ζ e w dell'intorno considerato.

Una base locale dei campi di vettori di $T^{(0,1)}M$ è data da

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \quad \left(= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right), \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Sia infine $\mathcal{M}$ l'insieme definito vicino all'origine nelle coordinate $(z, \zeta, w, \omega) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dall'equazione $\omega = \Phi(z, \zeta, w)$. Allora $\mathcal{M}$ è l'unica *complessificazione* di M vicino all'origine nel senso seguente: se $f(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ è analitica reale e si annulla su M vicino all'origine, allora $f(z, \zeta, w, \omega)$ si annulla su $\mathcal{M}$ vicino all'origine.

Con il consueto lieve abuso, Φ indica sia la funzione $\Phi(z, \zeta, w)$ sia $\Phi(z, \bar{z}, w)$.

Dimostrazione. Trasliamo e ruotiamo le coordinate affinché M sia data da

$$\Im w = \varphi(z, \bar{z}, \Re w),$$

dove φ è $O(2)$. Scriviamo la funzione definente come $r(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = -\frac{w - \bar{w}}{2i} + \varphi(z, \bar{z}, \frac{w + \bar{w}}{2})$. Complessificando, consideriamo $r(z, \zeta, w, \omega)$ come funzione olomorfa di $2n$ variabili e indichiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme definito da $r(z, \zeta, w, \omega) = 0$. La derivata di r rispetto a ω (cioè $\bar{w}$) non si annulla vicino all'origine. Il teorema olomorfo delle funzioni implicite permette di scrivere $\mathcal{M}$ vicino all'origine come

$$\omega = \Phi(z, \zeta, w).$$

Restringendo alla diagonale, $\bar{w} = \omega$ e $\bar{z} = \zeta$, otteniamo $\bar{w} = \Phi(z, \bar{z}, w)$. Rispetto alle z e alle $\bar{z}$ l'ordine è 2, poiché φ è $O(2)$.

Poiché r è reale, si ha $r(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = \overline{r(z, \bar{z}, w, \bar{w})} = \bar{r}(\bar{z}, z, \bar{w}, w)$. Complessificando, si ottiene $r(z, \zeta, w, \omega) = \bar{r}(\zeta, z, \omega, w)$ per ogni (z, ζ, w, ω) vicino all'origine. Se $r(z, \zeta, w, \omega) = 0$, allora

$$0 = \overline{r(z, \zeta, w, \omega)} = \overline{\bar{r}(\zeta, z, \omega, w)} = r(\bar{\zeta}, \bar{z}, \bar{\omega}, \bar{w}) = 0.$$

Dunque $(z, \zeta, w, \omega) \in \mathcal{M}$ se e solo se $(\bar{\zeta}, \bar{z}, \bar{\omega}, \bar{w}) \in \mathcal{M}$. Vicino all'origine, $(z, \zeta, w, \omega) \in \mathcal{M}$ equivale a $\omega = \Phi(z, \zeta, w)$ e quindi anche a $\bar{w} = \Phi(\bar{\zeta}, \bar{z}, \bar{\omega})$. Coniugando, otteniamo che $\mathcal{M}$ è descritta anche da

$$w = \bar{\Phi}(\zeta, z, \omega).$$

Poiché $\big(z, \zeta, w, \Phi(z, \zeta, w)\big) \in \mathcal{M}$, per tutti gli z, ζ e w considerati si ha

$$w = \bar{\Phi}\big(\zeta, z, \Phi(z, \zeta, w)\big).$$

Il campo $X_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ annulla $\Phi(z, \bar{z}, w) - \bar{w}$, ma questo non basta. Deve annullare una funzione definente reale, come la parte reale o immaginaria di $\Phi(z, \bar{z}, w) - \bar{w}$ quando ha differenziale non nullo. Occorre dunque che X_k annulli anche la coniugata $\bar{\Phi}(\bar{z}, z, \bar{w}) - w$,

almeno su M. Per $(z,w)\in M$ calcoliamo

$$\begin{aligned} X_k\big[\bar\Phi(\bar z,z,\bar w)-w\big] &= \frac{\partial\bar\Phi}{\partial\bar z_k}(\bar z,z,\bar w)+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar z_k}(z,\bar z,w)\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\bar w}(\bar z,z,\bar w)\\ &= \frac{\partial\bar\Phi}{\partial\bar z_k}(\bar z,z,\Phi(z,\bar z,w))+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar z_k}(z,\bar z,w)\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\bar w}(\bar z,z,\Phi(z,\bar z,w))\\ &= \frac{\partial}{\partial\bar z_k}\Big[\bar\Phi\big(\bar z,z,\Phi(z,\bar z,w)\big)\Big]=\frac{\partial}{\partial\bar z_k}\Big[w\Big]=0. \end{aligned}$$

L'ultima affermazione della proposizione è lasciata per esercizio. □

Perché l'ultima affermazione esprime l'«unicità» della complessificazione? Supponiamo di definire una complessificazione $\mathcal{M}'$ mediante un'altra equazione olomorfa $f=0$. Per quanto appena affermato, $\mathcal{M}\subset\mathcal{M}'$ almeno vicino all'origine. Se il differenziale df non è nullo nell'origine, da $f\big(z,\zeta,w,\Phi(z,\zeta,w)\big)=0$ segue che $\frac{\partial f}{\partial\omega}$ non è nulla nell'origine. Il teorema olomorfo delle funzioni implicite permette di risolvere univocamente $f=0$ rispetto a ω. La soluzione è Φ, quindi $\mathcal{M}'=\mathcal{M}$ vicino all'origine.

Ricordiamo per esempio che in $\mathbb{C}^2$ la sfera privata di un punto è biolomorfa all'ipersuperficie $\Im w=|z|^2$. Si ha cioè $\frac{w-\bar w}{2i}=z\bar z$. Risolvendo rispetto a $\bar w$ e introducendo ζ e ω otteniamo l'equazione della complessificazione $\omega=-2iz\zeta+w$. Allora $\Phi(z,\zeta,w)=-2iz\zeta+w$ e $\bar\Phi(\zeta,z,\omega)=2i\zeta z+\omega$. Verifichiamo che Φ ha la proprietà richiesta: $\bar\Phi\big(\zeta,z,\Phi(z,\zeta,w)\big)=2i\zeta z+(-2iz\zeta+w)=w$. Il campo vettoriale CR è $\frac{\partial}{\partial\bar z}-2iz\frac{\partial}{\partial\bar w}$.

Esercizio 3.2.7. Completare la dimostrazione della proposizione. Sia $M\subset\mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale descritta vicino all'origine da $\bar w=\Phi(z,\bar z,w)$ come nella proposizione. Sia $f(z,\bar z,w,\bar w)$ analitica reale e tale che $f=0$ su M. Dimostrare che la complessificazione $f(z,\zeta,w,\omega)$ si annulla su $\mathcal{M}$.

Esercizio 3.2.8. Nella proposizione abbiamo usato soltanto traslazioni e rotazioni. Mostrare che, con un ulteriore cambiamento di coordinate non necessariamente lineare, si può fare in modo che la funzione Φ soddisfi $\Phi(z,0,w)=\Phi(0,\zeta,w)=w$ per ogni z, ζ e w. Queste coordinate si chiamano *coordinate normali*.

Esercizio 3.2.9. Sia Φ una funzione olomorfa definita in un intorno dell'origine in $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$.

a) Mostrare che $\bar w=\Phi(z,\bar z,w)$ definisce un'ipersuperficie analitica reale vicino all'origine se e solo se $w=\bar\Phi\big(\zeta,z,\Phi(z,\zeta,w)\big)$ per ogni z, ζ e w dell'intorno considerato. *Suggerimento.* Una delle implicazioni è già stata dimostrata.

b) Mostrare, come esempio, che $\bar w=z\bar z$ non soddisfa questa condizione e non definisce un'ipersuperficie reale.

Dimostriamo che le funzioni CR analitiche reali su ipersuperfici analitiche reali sono restrizioni di funzioni olomorfe. Per capire l'idea consideriamo una funzione analitica reale f sulla circonferenza $|z|^2=z\bar z=1$ (la condizione CR per f è vuota). La funzione f è la restrizione di una funzione analitica reale in un intorno della circonferenza, che scriviamo $f(z,\bar z)$. Sulla circonferenza vale $\bar z=1/z$. Quindi $F(z)=f\big(z,1/z\big)$ è olomorfa in un intorno della circonferenza e coincide con f su di essa. In dimensione superiore la nostra strategia sarà eliminare una delle variabili coniugate mediante la proposizione 3.2.8 e usare le condizioni CR per eliminare le rimanenti.

Teorema 3.2.9. (Severi.) Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale e $p \in M$. Per ogni funzione CR analitica reale $f\colon M \to \mathbb{C}$ esistono un intorno U di p e una funzione olomorfa $F \in \mathcal{O}(U)$ tali che $F(q) = f(q)$ per ogni $q \in M \cap U$.

Dimostrazione. Vicino a p scriviamo M come $\bar{w} = \Phi(z, \bar{z}, w)$. Sia $\mathcal{M}$ l'insieme definito nelle $2n$ variabili (z, w, ζ, ω) da $\omega = \Phi(z, \zeta, w)$. Prendiamo f e consideriamo un qualunque prolungamento analitico reale di f a un intorno di p. Scriviamolo come $f(z, w, \bar{z}, \bar{w})$ e complessifichiamolo come prima,[36] ottenendo $f(z, w, \zeta, \omega)$. Su $\mathcal{M}$ vale $f(z, w, \zeta, \omega) = f\big(z, w, \zeta, \Phi(z, \zeta, w)\big)$. Poniamo

$$F(z, w, \zeta) = f\big(z, w, \zeta, \Phi(z, \zeta, w)\big).$$

Chiaramente $F(z, w, \bar{z})$ coincide con f su M. Poiché f è CR, il campo $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ la annulla su M. Dunque

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_k} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k}\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$$

su $M \subset \mathcal{M}$. La funzione analitica reale $\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k}(z, w, \bar{z})$ si annulla su M, per cui $\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k}(z, w, \zeta) = 0$ su $\mathcal{M}$, ancora per la proposizione 3.2.8. Poiché $\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k}$ dipende soltanto da z, w e ζ ed è indipendente da ω, abbiamo $\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_k} = 0$ per ogni (z, w, ζ) in un intorno dell'origine. Pertanto F è indipendente da ζ: F è in realtà una funzione olomorfa delle sole z e w e vale $F = f$ su M. □

Le funzioni CR che non sono necessariamente analitiche reali si incontrano soprattutto come valori al bordo di funzioni olomorfe.

Proposizione 3.2.10. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera liscia. Sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ una funzione liscia, olomorfa in U. Allora $f|_{\partial U}$ è una funzione CR liscia.

Dimostrazione. La funzione $f|_{\partial U}$ è evidentemente liscia. Sia $p \in \partial U$. Se $X_p \in T^{(0,1)}_p \partial U$ è tale che

$$X_p = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_p,$$

prendiamo una successione $\{q_\ell\}$ in U convergente a p. Consideriamo

$$X_{q_\ell} = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big|_{q_\ell}.$$

Si ha $X_{q_\ell} f = 0$ per ogni ℓ e, per continuità, $X_p f = 0$. □

I valori al bordo determinano univocamente una funzione olomorfa. Se due funzioni olomorfe continue fino alla frontiera liscia coincidono su un aperto non vuoto della frontiera, coincidono nel dominio.

Proposizione 3.2.11. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontiera liscia e sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in U. Se $f = 0$ su un aperto non vuoto di ∂U, allora $f = 0$ in tutto U.

Dimostrazione. Scegliamo $p \in \partial U$ tale che $f = 0$ in un intorno di p in ∂U. Sia Δ un piccolo intorno connesso di p tale che f si annulli su $\partial U \cap \Delta$. Definiamo $g\colon \Delta \to \mathbb{C}$ ponendo $g(z) = f(z)$ se $z \in U$ e $g(z) = 0$ altrove. Si veda la figura 3.1. È facile verificare che g è continua ed è evidentemente olomorfa dove è diversa da zero. Per il teorema di

[36] A questo punto f indica tre oggetti distinti: la funzione su M, il suo prolungamento analitico reale a un intorno in $\mathbb{C}^n$ e la complessificazione di quest'ultimo a un intorno di $(p, \bar{p})$ in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Radó (teorema 2.4.12), g è olomorfa. Poiché si annulla su un aperto non vuoto di Δ, è identicamente nulla su Δ. Pertanto f si annulla su un aperto non vuoto di U e la conclusione segue dal teorema di identità. □

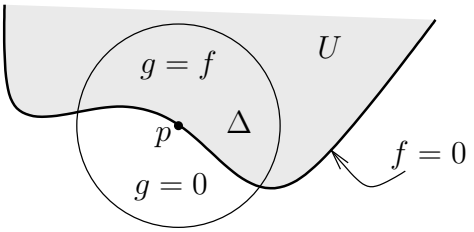


Figura 3.1: Prolungamento di una funzione che si annulla su una porzione di frontiera.

Esercizio 3.2.10. Trovare un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$ e frontiera liscia, e una funzione CR liscia $f\colon \partial U \to \mathbb{C}$ che non sia il valore al bordo di alcuna funzione olomorfa in U o nell'esterno di U, continua fino alla frontiera, con valori al bordo uguali a f (nell'originale l'esterno è indicato con $\mathbb{C}^n \setminus U$).

Esercizio 3.2.11.

a) Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto limitato con frontiera liscia, $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ una funzione continua, olomorfa in U, e $f|_{\partial U}$ a valori reali. Mostrare che f è costante su ogni componente connessa.

b) Trovare un controesempio se si permette a U di essere illimitato.

Esercizio 3.2.12. Trovare sulla sfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ una funzione CR liscia che non sia la restrizione di una funzione olomorfa in un intorno di S^{2n-1}.

Esercizio 3.2.13. Dimostrare la versione globale del teorema di Severi. Dati un'ipersuperficie analitica reale $M \subset \mathbb{C}^n$ e una funzione CR analitica reale $f\colon M \to \mathbb{C}$, mostrare che esistono un intorno U di M e una funzione $F \in \mathcal{O}(U)$ tale che $F|_U = f$.

Il prossimo problema consiste nel prolungare una funzione CR liscia dalla frontiera di un dominio a una funzione olomorfa al suo interno. È un problema per equazioni alle derivate parziali: le equazioni sono quelle di Cauchy–Riemann e la funzione assegnata sulla frontiera è il dato al bordo. Le equazioni di Cauchy–Riemann sono *sovradeterminate*: ci sono troppe equazioni e non tutti i dati al bordo ammettono soluzione. La proposizione 3.2.10 mostra che la condizione CR sul dato è necessaria, benché in generale non sia sufficiente. La proposizione 3.2.11 garantisce l'unicità della soluzione quando esiste.

3.3 Approssimazione delle funzioni CR

Il teorema seguente, dimostrato intorno al 1980, vale in condizioni molto più generali. Ne diamo la versione più semplice. In particolare consideriamo funzioni CR lisce, sebbene il risultato valga anche per funzioni CR continue quando le condizioni CR sono interpretate nel senso delle distribuzioni.

Teorema 3.3.1. (Baouendi–Trèves.) Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia, $p \in M$ un suo punto e $z = (z_1, \dots, z_n)$ le coordinate olomorfe di $\mathbb{C}^n$. Esiste un intorno compatto $K \subset M$ di p tale che, per ogni funzione CR liscia $f\colon M \to \mathbb{C}$, esista una successione $\{p_\ell\}$ di polinomi in z con

$$p_\ell(z) \to f(z) \qquad \text{uniformemente su } K.$$

Il compatto K non può essere scelto arbitrariamente: dipende da p e da M. D'altra parte K è indipendente da f. Fissati M e $p \in M$, esiste uno stesso K tale che *ogni* funzione CR su M sia approssimabile uniformemente su K mediante polinomi olomorfi. Il teorema vale anche in dimensione uno, dove tuttavia il teorema di Mergelyan (teorema B.31) è molto più generale.

Esempio 3.3.2. Vediamo perché K non è arbitrario. Per semplicità prendiamo $n = 1$. Sia $S^1 \subset \mathbb{C}$ la circonferenza unitaria, bordo del disco. Ogni funzione liscia su S^1 è CR. Sia f una funzione liscia reale non costante, per esempio $\Re z$. Supponiamo per assurdo di poter prendere $K = S^1$ nel teorema. Allora $f(z) = \Re z$ sarebbe approssimabile uniformemente su S^1 mediante polinomi olomorfi. Per il principio del massimo i polinomi convergerebbero su $\mathbb{D}$ a una funzione olomorfa in $\mathbb{D}$ e continua su $\overline{\mathbb{D}}$. Questa funzione avrebbe valori al bordo reali e non costanti, il che è impossibile. Dunque K non può essere l'intera circonferenza.

L'esempio si estende a $\mathbb{C}^n$ prendendo $M = S^1 \times \mathbb{C}^{n-1}$. Allora $\Re z_1$ è una funzione CR liscia su M che non si può approssimare uniformemente su $S^1 \times \{0\}$ mediante polinomi olomorfi.

Useremo più avanti lo stesso argomento in una situazione più generale, per prolungare funzioni CR mediante il teorema di Baouendi–Trèves.

Osservazione 3.3.3. Si tenga presente la differenza fra il teorema di Baouendi–Trèves (e altri analoghi dell'analisi complessa) e il teorema di approssimazione di Weierstrass. Il primo fornisce polinomi olomorfi, il secondo polinomi nelle variabili reali, ossia in z e $\bar{z}$. Per esempio, per Weierstrass ogni funzione continua su S^1 è uniformemente approssimabile mediante polinomi in $\Re z$ e $\Im z$, quindi mediante polinomi in z e $\bar{z}$. In generale questi polinomi possono non convergere in alcun punto fuori da S^1.

Esercizio 3.3.1. Scriviamo $z = x + iy$ come al solito in $\mathbb{C}$. Trovare una successione di polinomi in x e y che converga uniformemente a e^{x-y} su S^1 e diverga in ogni altro punto.

La dimostrazione è una variazione ingegnosa del metodo classico di dimostrazione del teorema di Weierstrass. Avendo già incontrato i mollificatori, anche chi non conosce quella dimostrazione riconoscerà il metodo. Usiamo il consueto argomento di convoluzione, questa volta con una funzione olomorfa. Scrivendo $z = x + iy$, eseguiamo la convoluzione soltanto nelle variabili x, fissando a zero le componenti libere di y. La condizione CR permetterà di ottenere l'approssimazione anche per gli altri valori di y. Per un vettore $v = (v_1, \dots, v_n)$ sarà utile la notazione

$$[v]^2 \stackrel{\text{def}}{=} v_1^2 + \cdots + v_n^2.$$

Il lemma seguente applica idee di più variabili complesse a un problema che a prima vista sembra estraneo alle funzioni olomorfe.

Lemma 3.3.4. Sia W l'insieme delle matrici complesse $n \times n$, indicate con A, per le quali

$$\|(\Im A)x\| < \|(\Re A)x\|$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ non nullo e per le quali $\Re A$ è definita positiva. Allora per ogni $A \in W$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-[Ax]^2} \det A \, dx = \pi^{n/2}.$$

Dimostrazione. Se A è reale e A è definita positiva (quindi A è anche invertibile), con un cambiamento di coordinate si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-[Ax]^2} \det A \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-[x]^2} \, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \, dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} \, dx_n\right) = (\sqrt{\pi})^n.$$

Sia ora A una matrice qualunque in W. Esiste $\epsilon > 0$ tale che $\|(\Im A)x\|^2 \leq (1-\epsilon^2)\|(\Re A)x\|^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Basta infatti verificare la disuguaglianza per x sulla sfera unitaria, che è compatta (esercizio). Poiché $\Re A$, $\Im A$ e x sono reali, valgono $[(\Re A)x]^2 = \|(\Re A)x\|^2$ e $[(\Im A)x]^2 = \|(\Im A)x\|^2$. Dunque

$$\left|e^{-[Ax]^2}\right| = e^{-\Re[Ax]^2} \leq e^{-[(\Re A)x]^2 + [(\Im A)x]^2} \leq e^{-\epsilon^2[(\Re A)x]^2}.$$

Un calcolo come il precedente mostra così che l'integrale esiste per ogni A in W. L'espressione

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-[Ax]^2} \det A \, dx$$

è una funzione olomorfa ben definita degli elementi di A, considerando W come dominio in $\mathbb{C}^{n^2}$ (si vedano gli esercizi). Questa funzione olomorfa è costantemente uguale a $\pi^{n/2}$ su $W \cap \mathbb{R}^{n^2}$ e vale quindi $\pi^{n/2}$ in tutto W. □

Esercizio 3.3.2. Dimostrare l'esistenza di $\epsilon > 0$ nella dimostrazione precedente.

Esercizio 3.3.3. Mostrare che l'insieme $W \subset \mathbb{C}^{n^2}$ del lemma è un dominio, cioè è aperto e connesso.

Esercizio 3.3.4. Giustificare la derivazione sotto il segno di integrale usata per dimostrare l'olomorfia rispetto agli elementi di A.

Esercizio 3.3.5. Mostrare che sono necessarie ipotesi sulla matrice. In particolare, prendere $n = 1$ e determinare esattamente l'insieme dei valori di A, ora un numero complesso, per cui vale la conclusione del lemma.

Data una matrice A di dimensioni $n \times n$, indichiamo con $\|A\|$ la norma di operatore,

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Esercizio 3.3.6. Sia W come nel lemma 3.3.4. Sia B una matrice reale $n \times n$ tale che $\|B\| < 1$. Mostrare che $I + iB \in W$.

Useremo le forme differenziali. Il lemma seguente dice che, rispetto alla derivazione esterna, tutte le funzioni CR si comportano come restrizioni di funzioni olomorfe.

Lemma 3.3.5. Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia, $f\colon M \to \mathbb{C}$ una funzione CR liscia e $(z_1, \dots, z_n)$ le coordinate olomorfe di $\mathbb{C}^n$. In ogni punto $p \in M$ il differenziale esterno df è una combinazione lineare di $dz_1, \dots, dz_n$, considerando $z_1, \dots, z_n$ come funzioni su M. In particolare,

$$d(f\,dz) = df \wedge dz = 0.$$

Ricordiamo la notazione $dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n$.

Dimostrazione. Dopo un cambiamento affine complesso di coordinate basta dimostrare il risultato nell'origine. Siano $\xi_1, \dots, \xi_n$ le nuove coordinate olomorfe, scelte in modo che lo spazio tangente $T_0^{(1,0)}M$ sia generato da $\frac{\partial}{\partial \xi_1}\big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_{n-1}}\big|_0$, che $\frac{\partial}{\partial \Re \xi_n}\big|_0$ sia tangente e $\frac{\partial}{\partial \Im \xi_n}\big|_0$ normale. Nell'origine le condizioni CR sono $\frac{\partial f}{\partial \xi_k}(0) = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n-1$, quindi

$$df(0) = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(0)\, d\xi_1(0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \xi_{n-1}}(0)\, d\xi_{n-1}(0) + \frac{\partial f}{\partial \Re \xi_n}(0)\, d(\Re \xi_n)(0).$$

Inoltre nell'origine, sull'ipersuperficie, $d\xi_n(0) = d(\Re \xi_n)(0) + i d(\Im \xi_n)(0) = d(\Re \xi_n)(0)$. Pertanto $df(0)$ è una combinazione lineare di $d\xi_1(0), \dots, d\xi_n(0)$. Poiché ξ è una funzione affine complessa di z, ogni $d\xi_k$ è una combinazione lineare di dz_1 fino a dz_n. Ne segue la tesi. Se f è CR, vale dunque $d(f\,dz) = df \wedge dz = 0$, perché $dz_k \wedge dz_k = 0$. □

Dimostrazione del teorema di Baouendi–Trèves. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia. Senza perdita di generalità supponiamo $p = 0 \in M$. Siano $z = (z_1, \dots, z_n)$ le coordinate olomorfe, scriviamo $z = x + iy$ e $y = (y', y_n)$ e supponiamo che M sia data da

$$y_n = \psi(x, y'),$$

dove ψ è $O(2)$. Le variabili (x, y') parametrizzano M vicino a 0:

$$z_k = x_k + i y_k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n-1, \quad \text{e} \quad z_n = x_n + i\psi(x, y').$$

Definiamo

$$\varphi(x, y') = (y_1, \dots, y_{n-1}, \psi(x, y')).$$

Scriviamo la parametrizzazione nella forma $(x, y') \mapsto z = x + i\varphi(x, y')$, considerando cioè z come funzione di (x, y').

Siano $r > 0$ e $d > 0$ due numeri piccoli, da precisare in seguito. Scegliamoli abbastanza piccoli perché f e φ siano definite e lisce in un intorno dell'insieme in cui $\|x\| \le r$ e $\|y'\| \le d$. Esiste una funzione liscia $g\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ tale che $g \equiv 1$ in $B_{r/2}(0)$ e $g \equiv 0$ fuori da $B_r(0)$. Si veda la figura 3.2. Si può dare una formula esplicita oppure ottenere g applicando un mollificatore alla funzione che vale uno su $B_{3r/4}(0)$ e zero altrove. Una funzione g di questo tipo si chiama *funzione di taglio*.

Esercizio 3.3.7. Trovare una formula esplicita per g senza usare mollificatori.

Poniamo

$$K' = \{(x, y') : \|x\| \le r/4, \|y'\| \le d\}.$$

Sia $K = z(K')$, cioè l'immagine di K' mediante $z(x, y')$. Consideriamo la funzione CR f come funzione di (x, y') e scriviamo $f(x, y')$. Per $\ell \in \mathbb{N}$ definiamo la forma differenziale α_ℓ di grado n, trattando $w \in \mathbb{C}^n$ come parametro costante, mediante

$$\begin{aligned}
\alpha_\ell(x, y') &= \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\ell[w-z]^2} g(x) f(x, y')\, dz \\
&= \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\ell[w-x-i\varphi(x,y')]^2} g(x) f(x, y') \\
&\qquad (dx_1 + i\,dy_1) \wedge \cdots \wedge (dx_{n-1} + i\,dy_{n-1}) \wedge \big(dx_n + i\,d\psi(x, y')\big).
\end{aligned}$$

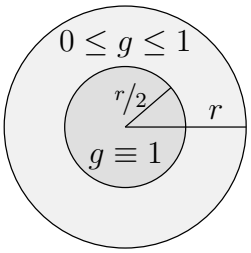


Figura 3.2: Una funzione di taglio.

L'esponenziale ricorda la funzione a supporto compatto usata come mollificatore, ma qui w e z possono essere complessi. Inoltre l'esponenziale è olomorfo in w, il che ci darà funzioni approssimanti intere.

Fissiamo y' con $0 < \|y'\| < d$ e definiamo D mediante

$$D = \big\{(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| < r \text{ e } s = ty' \text{ per } t \in (0,1)\big\}.$$

L'insieme D è un «cilindro» di dimensione $(n+1)$. Prendiamo una palla nelle direzioni x e, nelle variabili s, il segmento che arriva al punto fissato y'. Si veda la figura 3.3.

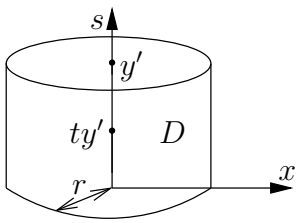


Figura 3.3: Il cilindro D.

Orientiamo D nel modo consueto, come se fosse disposto nelle variabili (x,t) di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Il teorema di Stokes dà

$$\int_D d\alpha_\ell(x,s) = \int_{\partial D} \alpha_\ell(x,s).$$

Poiché $g(x) = 0$ per $\|x\| \ge r$, la forma α_ℓ si annulla sulla superficie laterale del cilindro D. Nell'integrale su ∂D contribuiscono soltanto le due basi. Grazie a g, su ciascuna base possiamo estendere l'integrazione a $\mathbb{R}^n$. Come è abituale in questi argomenti, trascuriamo con un lieve abuso il fatto che f e φ non sono definite dove g è identicamente nulla:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \alpha_\ell(x,s) \\
&= \Big(\frac{\ell}{\pi}\Big)^{n/2} \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\ell[w-x-i\varphi(x,y')]^2} g(x) f(x,y')\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge \big(dx_n + i d_x\psi(x,y')\big) \\
&\quad - \Big(\frac{\ell}{\pi}\Big)^{n/2} \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\ell[w-x-i\varphi(x,0)]^2} g(x) f(x,0)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge \big(dx_n + i d_x\psi(x,0)\big),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Qui d_x indica il differenziale nelle sole direzioni x, ossia $d_x\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} dx_n$.

Mostreremo che, per $\ell \to \infty$, il primo membro di (3.1) tende a zero uniformemente per $w \in K$, mentre il primo termine a secondo membro tende a $f(\tilde{x}, y')$ se $w = z(\tilde{x}, y')$ appartiene a M. Definiamo dunque le funzioni intere che approssimeranno f:

$$f_\ell(w) = \Big(\frac{\ell}{\pi}\Big)^{n/2} \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\ell[w-x-i\varphi(x,0)]^2} g(x) f(x,0)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge \big(dx_n + i d_x\psi(x,0)\big).$$

Ogni f_ℓ è olomorfa e definita per ogni $w \in \mathbb{C}^n$. Nella prima delle due affermazioni seguenti è essenziale che f sia CR.

Affermazione 3.3.6. Si ha

$$d\alpha_\ell(x,s) = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\ell[w-z(x,s)]^2} f(x,s)\, dg(x) \wedge dz(x,s),$$

e per $r > 0$ e $d > 0$ abbastanza piccoli vale

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} \int_{(x,s)\in D} e^{-\ell[w-z(x,s)]^2} f(x,s)\, dg(x) \wedge dz(x,s) = 0$$

uniformemente rispetto a $w \in K$ e $y' \in B_d(0)$ (ricordiamo che D dipende da y').

Dimostrazione. La funzione $(x,s) \mapsto e^{-\ell[w-z(x,s)]^2}$ è CR come funzione su M, e lo stesso vale per $f(x,s)$. Quindi, per il lemma 3.3.5,

$$d\alpha_\ell(x,s) = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} e^{-\ell[w-z(x,s)]^2} f(x,s)\, dg(x) \wedge dz(x,s).$$

Poiché dg si annulla per $\|x\| \le r/2$, nell'integrale

$$\int_D d\alpha_\ell(x,s) = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} \int_D e^{-\ell[w-z(x,s)]^2} f(x,s)\, dg(x) \wedge dz(x,s)$$

contribuisce soltanto la parte di D in cui $\|x\| > r/2$. Siano $w \in K$ e $(x,s) \in D$ con $\|x\| > r/2$. Poniamo $w = z(\tilde{x},\tilde{s})$. Dobbiamo stimare

$$\left|e^{-\ell[w-z(x,s)]^2}\right| = e^{-\ell\Re[w-z(x,s)]^2}.$$

Si ha

$$-\Re[w-z]^2 = -\|\tilde{x}-x\|^2 + \|\varphi(\tilde{x},\tilde{s}) - \varphi(x,s)\|^2.$$

Per il teorema del valor medio,

$$\|\varphi(\tilde{x},\tilde{s}) - \varphi(x,s)\| \le \|\varphi(\tilde{x},\tilde{s}) - \varphi(x,\tilde{s})\| + \|\varphi(x,\tilde{s}) - \varphi(x,s)\| \le a\|\tilde{x}-x\| + A\|\tilde{s}-s\|,$$

dove a e A sono dati da

$$a = \sup_{\|\hat{x}\|\le r, \|\hat{y}'\|\le d} \left\| \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}')\right] \right\|, \qquad A = \sup_{\|\hat{x}\|\le r, \|\hat{y}'\|\le d} \left\| \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y'}(\hat{x},\hat{y}')\right] \right\|.$$

Qui $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$ e $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right]$ sono le matrici delle derivate di φ rispetto a x e y' rispettivamente, e si usa la norma di operatore. Poiché $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$ è nulla nell'origine, scegliamo r e d abbastanza piccoli (e quindi K abbastanza piccolo) da avere $a \le 1/4$. Se occorre riduciamo ancora d per ottenere $d \le \frac{r}{32A}$. Si ha $r/2 \le \|x\| \le r$, mentre $\|\tilde{x}\| \le r/4$ (ricordiamo che $w \in K$). Quindi

$$\frac{r}{4} \le \|\tilde{x}-x\| \le \frac{5r}{4}.$$

Inoltre $\|\tilde{s}-s\| \le 2d$ per la disuguaglianza triangolare. Pertanto

$$\begin{aligned}
-\Re[w-z(x,s)]^2 &\le -\|\tilde{x}-x\|^2 + a^2\|\tilde{x}-x\|^2 + A^2\|\tilde{s}-s\|^2 + 2aA\|\tilde{x}-x\|\|\tilde{s}-s\| \\
&\le \frac{-15}{16}\|\tilde{x}-x\|^2 + A^2\|\tilde{s}-s\|^2 + \frac{A}{2}\|\tilde{x}-x\|\|\tilde{s}-s\| \\
&\le \frac{-r^2}{64}.
\end{aligned}$$

In altri termini,

$$\left|e^{-\ell[w-z(x,s)]^2}\right| \leq e^{-\ell r^2/64},$$

ossia

$$\left|\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} \int_{(x,s)\in D} e^{-\ell[w-z(x,s)]^2} f(x,s)\, dg(x)\wedge dz(x,s)\right| \leq C\ell^{n/2} e^{-\ell r^2/64},$$

per una costante C. Si osservi che D dipende da y'. L'insieme dei parametri y' con $\|y'\| \leq d$ è compatto, perciò si può scegliere C abbastanza grande da renderlo indipendente dal parametro y' prescelto. Segue la tesi. □

Affermazione 3.3.7. Per i valori fissati di $r > 0$ e $d > 0$ si ha

$$\lim_{\ell\to\infty}\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\ell[\tilde{x}+i\varphi(\tilde{x},y')-x-i\varphi(x,y')]^2} g(x)f(x,y')dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}\wedge(dx_n+id_x\psi(x,y')) = f(\tilde{x},y')$$

uniformemente rispetto a $(\tilde{x}, y') \in K'$.

Consideriamo cioè (3.1) ponendovi $w = z(\tilde{x}, y') \in K$. Come sopra, la funzione di taglio g evita di valutare f, ψ o φ dove non sono definite.

Dimostrazione. La formula del cambiamento di variabili dà

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}\wedge(dx_n+id_x\psi(x,y')) = d_x z(x,y') = \det\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y')\right] dx,$$

dove $[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y')]$ è la matrice della derivata dell'applicazione z rispetto alle variabili x nel punto (x, y'). Introduciamo la nuova variabile di integrazione $\xi = \sqrt{\ell}(x - \tilde{x})$:

$$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{n/2} \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\ell[\tilde{x}+i\varphi(\tilde{x},y')-x-i\varphi(x,y')]^2} g(x)f(x,y')\det\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y')\right] dx =$$
$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{-\left[\xi+i\sqrt{\ell}\left(\varphi\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)-\varphi(\tilde{x},y')\right)\right]^2}$$
$$g\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}}\right) f\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)\det\left[\frac{\partial z}{\partial x}\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)\right] d\xi.$$

Per passare al limite per $\ell \to \infty$ applichiamo il teorema della convergenza dominata. Cerchiamo dunque una maggiorante integrabile. Il secondo fattore dell'integranda è uniformemente limitato, indipendentemente da ℓ, perché

$$x \mapsto g(x)f(x,y')\det\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x,y')\right]$$

è una funzione continua a supporto compatto grazie a g. Basta quindi stimare l'esponenziale, limitandosi ai punti ξ in cui l'integranda è diversa da zero. Ricordiamo che r e d sono abbastanza piccoli perché

$$\sup_{\|\hat{x}\|\leq r,\|\hat{y}'\|\leq d}\left\|\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}')\right]\right\| \leq \frac{1}{4},$$

e che $\|\tilde{x}\| \leq r/4$, poiché $(\tilde{x}, y') \in K$, mentre $\left\|\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}}\right\| \leq r$, perché altrimenti g è nulla. Ne segue

$$\left\|\varphi\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)-\varphi(\tilde{x},y')\right\| \leq \frac{1}{4}\left\|\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}}-\tilde{x}\right\| = \frac{\|\xi\|}{4\sqrt{\ell}}.$$

Nelle stesse condizioni si ha dunque

$$\begin{aligned}\left|e^{-\left[\xi+i\sqrt{\ell}\left(\varphi\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)-\varphi(\tilde{x},y')\right)\right]^2}\right| &= e^{-\Re\left[\xi+i\sqrt{\ell}\left(\varphi\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)-\varphi(\tilde{x},y')\right)\right]^2} \\ &= e^{-\|\xi\|^2+\ell\left\|\varphi\left(\tilde{x}+\frac{\xi}{\sqrt{\ell}},y'\right)-\varphi(\tilde{x},y')\right\|^2} \\ &\leq e^{-(15/16)\|\xi\|^2}.\end{aligned}$$

La maggiorante è integrabile. Possiamo quindi passare al limite puntuale sotto il segno d'integrale e ottenere

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{-\left[\xi+i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tilde{x},y')\right]\xi\right]^2} g(\tilde{x})f(\tilde{x},y')\det\left[\frac{\partial z}{\partial x}(\tilde{x},y')\right]d\xi.$$

Nell'esponente compare il rapporto incrementale che dà la derivata nella direzione ξ con y' fissato. Per $(\tilde{x},y')\in K'$ si ha $g(\tilde{x})=1$, perciò si può omettere g. Poniamo $A = I + i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tilde{x},y')\right]$. Il lemma 3.3.4 dà

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{-\left[\xi+i\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tilde{x},y')\right]\xi\right]^2} f(\tilde{x},y')\det\left[\frac{\partial z}{\partial x}(\tilde{x},y')\right]d\xi = f(\tilde{x},y').$$

La verifica dell'uniformità della convergenza rispetto a $(\tilde{x},y')\in K'$ è lasciata per esercizio. □

Esercizio 3.3.8. Completare la dimostrazione dell'ultima affermazione verificando la convergenza uniforme rispetto a $(\tilde{x},y')\in K'$. *Suggerimento.* Può essere più semplice usare l'integrale nella forma precedente al cambiamento di variabili e dimostrare che la successione è uniformemente di Cauchy.

La dimostrazione del teorema è ormai conclusa. Le due affermazioni e (3.1) mostrano che le funzioni intere f_ℓ approssimano f uniformemente su K. Ogni funzione intera può a sua volta essere approssimata uniformemente sui compatti mediante polinomi: basta prendere le somme parziali della sua serie di Taylor centrata nell'origine. □

Esercizio 3.3.9. Spiegare perché l'approssimabilità su K mediante polinomi olomorfi non implica necessariamente che f sia analitica reale.

Esercizio 3.3.10. Sia $M\subset\mathbb{C}^n$ l'ipersuperficie di equazione $\Im z_n = 0$. Usando il teorema classico di approssimazione di Weierstrass, dimostrare che per ogni $K\subset\subset M$ e ogni funzione CR liscia $f\colon M\to\mathbb{C}$ si può approssimare f uniformemente su K mediante polinomi olomorfi.

3.4 Prolungamento delle funzioni CR

Applicheremo la cosiddetta «tecnica dei dischi analitici» insieme al teorema di Baouendi–Trèves per dimostrare il teorema di prolungamento di Lewy. La dimostrazione originale di Lewy era diversa e precedette il teorema di Baouendi–Trèves. Il primo teorema locale di prolungamento di questo tipo fu dimostrato da Helmut Kneser nel 1936.

Teorema 3.4.1. (Lewy.) Siano $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia e $p \in M$. Esiste un intorno U di p con la seguente proprietà. Sia $r\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione definente liscia per $M \cap U$. Indichiamo con $U_- \subset U$ l'insieme in cui r è negativa e con $U_+ \subset U$ quello in cui r è positiva. Sia $f\colon M \to \mathbb{C}$ una funzione CR liscia. Allora valgono le affermazioni seguenti.

(i) Se la forma di Levi rispetto a r ha un autovalore positivo in p, f si prolunga a una funzione olomorfa in U_- e continua fino a M (ossia continua su $\{z \in U : r(z) \leq 0\}$).

(ii) Se la forma di Levi rispetto a r ha un autovalore negativo in p, f si prolunga a una funzione olomorfa in U_+ e continua fino a M (ossia continua su $\{z \in U : r(z) \geq 0\}$).

(iii) Se la forma di Levi rispetto a r ha autovalori di entrambi i segni in p, f si prolunga a una funzione olomorfa in U.

Quando la forma di Levi ha autovalori di entrambi i segni, tutte le funzioni CR sono dunque restrizioni di funzioni olomorfe vicino a p. Come r possiamo scegliere qualunque funzione definente per M. Possiamo prolungarla a tutto U oppure restringere U affinché r sia definita in U. Una volta scelti i lati (quello dove r è positiva e quello dove è negativa), i numeri di autovalori positivi e negativi della forma di Levi sono fissati. Una scelta diversa di r può scambiare U_- e U_+, lasciando invariata la conclusione del teorema.

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Per ottenere (ii) basta considerare $-r$. Supponiamo $p = 0$ e scriviamo M in un intorno Ω dell'origine nella forma

$$\Im w = |z_1|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon_k |z_k|^2 + E(z_1, z', \bar{z}_1, \bar{z}', \Re w),$$

dove $z' = (z_2, \dots, z_{n-1})$, $\epsilon_k = -1, 0, 1$ e E è $O(3)$. Sia Ω_- dato da

$$0 > r = |z_1|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon_k |z_k|^2 + E(z_1, z', \bar{z}_1, \bar{z}', \Re w) - \Im w.$$

L'hessiana reale della funzione di una variabile complessa

$$z_1 \mapsto |z_1|^2 + E(z_1, 0, \bar{z}_1, 0, 0)$$

è definita positiva vicino all'origine e la funzione ha un minimo stretto in 0. Esiste quindi un piccolo disco $D \subset \mathbb{C}$ centrato nell'origine sulla cui frontiera ∂D la funzione è strettamente positiva. Pertanto, per $(z', w) \in W$ in un intorno sufficientemente piccolo $W \subset \mathbb{C}^{n-1}$ dell'origine, la funzione

$$z_1 \mapsto |z_1|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \epsilon_k |z_k|^2 + E(z_1, z', \bar{z}_1, \bar{z}', \Re w) - \Im w$$

è ancora strettamente positiva su ∂D.

Per applicare il teorema di Baouendi–Trèves prendiamo l'intorno compatto K dell'origine fornito dal teorema. Scegliamo D e W abbastanza piccoli perché $(D \times W) \cap M \subset K$ e prendiamo i polinomi p_ℓ che approssimano f uniformemente su K. Siano $z_1 \in D$ e $(z', w) \in W$ tali che $(z_1, z', w) \in \Omega_-$ e poniamo $\Delta = \big(D \times \{(z', w)\}\big) \cap \Omega_-$. Indichiamo con $\partial\Delta$ la frontiera di Δ nella topologia relativa di $\mathbb{C} \times \{(z', w)\}$.

L'insieme Ω_+ in cui $r > 0$ è aperto e contiene $(\partial D) \times \{(z', w)\}$. La frontiera $\partial\Delta$ non contiene quindi alcun punto di $(\partial D) \times \{(z', w)\}$. Pertanto $\partial\Delta$ contiene solo punti in cui $r = 0$, ossia $\partial\Delta \subset M$. Inoltre $\partial\Delta \subset D \times W$. Poiché $(D \times W) \cap M \subset K$, segue $\partial\Delta \subset K$. Si veda la figura 3.4.

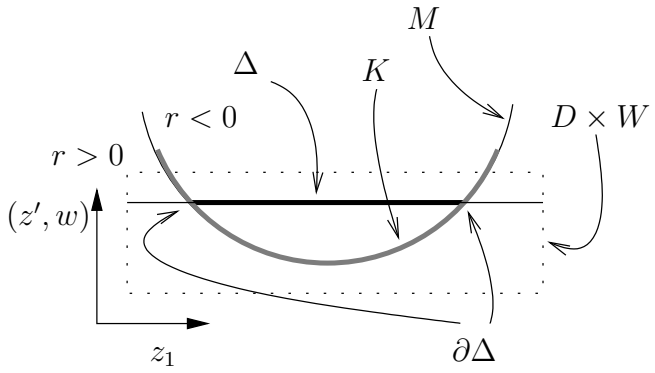


Figura 3.4: Dimostrazione del teorema di prolungamento di Lewy.

Poiché $p_\ell \to f$ uniformemente su K, si ha $p_\ell \to f$ uniformemente su $\partial\Delta$. I polinomi p_ℓ sono olomorfi, quindi per il principio del massimo p_ℓ convergono uniformemente su tutto Δ. In effetti, poiché (z_1, z', w) era un punto arbitrario di $(D \times W) \cap \Omega_-$, la medesima stima uniforme delle differenze dei polinomi mostra che p_ℓ convergono uniformemente su $(D \times W) \cap \overline{\Omega_-}$. Poniamo $U = D \times W$. Allora $U_- = (D \times W) \cap \Omega_-$. L'intorno U dipende da K, ma è indipendente da f. Dunque p_ℓ convergono a una funzione continua F su $\overline{U_-} \cap U$ e F è olomorfa in U_-. Chiaramente F coincide con f su $M \cap U$.

Per (iii) scegliamo un lato e usiamo (i) o (ii) per prolungarvi la funzione. Per il principio del barattolo di pomodori (teorema 2.3.11), la funzione si prolunga anche attraverso M e quindi a un intero intorno di p. □

Dove sono i dischi analitici annunciati all'inizio? L'insieme Δ della dimostrazione, per U abbastanza piccolo, è un disco analitico (è semplicemente connesso), ma non abbiamo avuto bisogno di dimostrarlo.

Enunciamo il corollario per un dominio fortemente convesso, anche se il risultato vale in condizioni molto più generali. Si tratta di un caso particolare del teorema di *Hartogs–Bochner*.[37] Nell'esercizio 4.3.4 lo dimostrerete per i domini fortemente pseudoconvessi. Il teorema vale per ogni dominio limitato con frontiera liscia e connessa, senza ipotesi sulla forma di Levi. Occorre però una dimostrazione diversa.

Corollario 3.4.2. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, un dominio limitato fortemente convesso con frontiera liscia e sia $f\colon \partial U \to \mathbb{C}$ una funzione CR liscia. Esiste una funzione continua $F\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$, olomorfa in U, tale che $F|_{\partial U} = f$.

Dimostrazione. Un dominio fortemente convesso è fortemente pseudoconvesso, quindi f si prolunga verso l'interno localmente presso ogni punto della frontiera. Il prolungamento

[37] Con questo nome si indica la versione di classe C^1 in cui si richiede soltanto che il dominio sia limitato e la sua frontiera connessa. Fu Martinelli, nel 1961, a dimostrarla.

è localmente unico perché due prolungamenti hanno gli stessi valori al bordo. Esiste dunque un insieme $K \subset\subset U$ tale che f si prolunghi a $U \setminus K$. Per l'esercizio seguente possiamo supporre che K sia fortemente convesso. Il caso particolare del fenomeno di Hartogs dimostrato nell'esercizio 2.1.8 fornisce allora il prolungamento olomorfo in U. □

Esercizio 3.4.1. Dimostrare l'esistenza dell'insieme fortemente convesso K usato nella dimostrazione del corollario 3.4.2.

Esercizio 3.4.2. Mostrare con un esempio che il corollario non vale quando $n = 1$. In quale punto della dimostrazione si è usato $n \geq 2$?

Esercizio 3.4.3. Sia $f\colon \partial\mathbb{B}_2 \to \mathbb{C}$ una funzione CR liscia. Scrivere una formula esplicita per il prolungamento F.

Esercizio 3.4.4. Sia $M \subset \mathbb{C}^3$ un'ipersuperficie reale liscia di equazione $\Im w = |z_1|^2 - |z_2|^2 + O(3)$ e sia f una funzione CR liscia non costante su M. Mostrare che $|f|$ non assume massimo nell'origine.

Esercizio 3.4.5. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 3$, un'ipersuperficie analitica reale tale che la forma di Levi in $p \in M$ abbia autovalori di entrambi i segni. Mostrare che ogni funzione CR liscia f su M è analitica reale in un intorno di p.

Esercizio 3.4.6. Sia $M \subset \mathbb{C}^3$ definita da $\Im w = |z_1|^2 - |z_2|^2$.

a) Mostrare che per questa M la conclusione del teorema di Baouendi–Trèves vale prendendo per $K \subset\subset M$ un compatto arbitrario.

b) Dedurne che ogni funzione CR liscia $f\colon M \to \mathbb{C}$ è la restrizione di una funzione olomorfa intera $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$.

Esercizio 3.4.7. Trovare un'ipersuperficie $M \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, e un punto $p \in M$ tali che, per ogni intorno W di p in M, esista una funzione CR $f\colon W \to \mathbb{C}$ che non si prolunghi olomorficamente da alcuno dei due lati di M in p.

Esercizio 3.4.8. Sia $f\colon \partial\mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ una funzione liscia, con $n \geq 2$. Dimostrare che f è CR se e solo se

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}v)\, e^{ik\theta} d\theta = 0 \qquad \text{per ogni } v \in \partial\mathbb{B}_n \text{ e ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3.4.9. Dimostrare (iii) del teorema di Lewy senza usare il principio del barattolo di pomodori. Più precisamente, dimostrare in modo elementare che, se $M \subset U \subset \mathbb{C}^n$ è un'ipersuperficie reale liscia in un aperto U e $f\colon U \to \mathbb{C}$ è continua e olomorfa in $U \setminus M$, allora f è olomorfa.

Osservazione 3.4.3. Lo studio delle equazioni CR non omogenee $Xf = \psi$, con X campo vettoriale CR, e il fatto che condizioni di questo tipo possano imporre l'analiticità reale di una funzione condussero Lewy a un esempio celebre, sorprendente e piuttosto semplice: un'equazione lineare alle derivate parziali con coefficienti lisci che non ammette soluzione su alcun aperto non vuoto.[38] L'esempio sorprende perché, con dati analitici reali e nelle condizioni del teorema di Cauchy–Kowalevski, un'equazione lineare alle derivate parziali ammette una soluzione locale. Inoltre, se X è un campo vettoriale reale (X appartiene a TM e non soltanto a $\mathbb{C}TM$), il metodo delle caratteristiche dà una soluzione di $Xf = \psi$ vicino ai punti in cui il campo non si annulla, anche se X e ψ sono soltanto lisci.

[38] Hans Lewy, *An example of a smooth linear partial differential equation without solution*, Annals of Mathematics, **66** (1957), 155–158.

4 Il problema del $\bar{\partial}$

4.1 La formula integrale di Cauchy generalizzata

Prima di affrontare il problema del $\bar{\partial}$, dimostriamo una versione più generale della formula di Cauchy mediante il teorema di Stokes (più precisamente, di Green). Si tratta della *formula integrale di Cauchy–Pompeiu*. A noi bastano le funzioni lisce, ma la formula si usa spesso con regolarità inferiore e segue direttamente dal teorema di Stokes, perciò la enunciamo in forma più generale. Nelle applicazioni la frontiera è spesso soltanto liscia a tratti, il che è sufficiente per Stokes.

Teorema 4.1.1. (Cauchy–Pompeiu.) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂U di classe C^1 a tratti, orientata positivamente (si veda l'appendice B). Sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua con derivate parziali continue e limitate in U. Per $z \in U$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Se f è olomorfa, il secondo termine è nullo e si ritrova la consueta formula di Cauchy. Per $\zeta = x + iy$ l'orientazione standard di $\mathbb{C}$ è quella corrispondente alla forma d'area $dA = dx \wedge dy$. A meno di una costante, $d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$ è proprio la forma d'area. Infatti,

$$d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = (dx + i\, dy) \wedge (dx - i\, dy) = (-2i) dx \wedge dy = (-2i) dA.$$

Per applicare Stokes esprimiamo il differenziale esterno nelle variabili z e $\bar{z}$. Per $z = x + iy$ si ottiene

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Esercizio 4.1.1. Si osservi la singolarità nel secondo termine della formula di Cauchy–Pompeiu. Dimostrare che l'integrale ha comunque senso, cioè che la funzione è integrabile. *Suggerimento.* Usare le coordinate polari.

Esercizio 4.1.2. Perché nel secondo termine della formula di Cauchy–Pompeiu non possiamo derivare rispetto a $\bar{z}$ sotto il segno di integrale? Si osservi che si giungerebbe a una conclusione impossibile.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in U$. Vogliamo applicare il teorema di Stokes,[39] ma l'integranda non è liscia in z. Prendiamo un piccolo disco $\Delta_r(z)$ tale che $\Delta_r(z) \subset\subset U$, come nella figura 4.1.

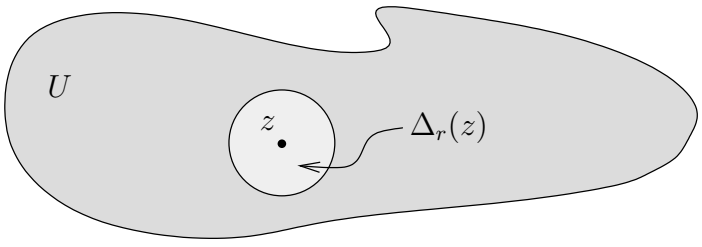


Figura 4.1: Dimostrazione della formula di Cauchy–Pompeiu.

[39] Usiamo propriamente il teorema di Green, ossia il teorema di Stokes generalizzato in dimensione 2. Si veda il teorema B.2.

Su $U \setminus \Delta_r(z)$ possiamo applicare Stokes. Esprimendo il differenziale esterno rispetto a ζ e $\bar{\zeta}$ si ottiene

$$\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial \Delta_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{U \setminus \Delta_r(z)} d\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right) = \int_{U \setminus \Delta_r(z)} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta.$$

La seconda uguaglianza vale perché il termine contenente la derivata rispetto a ζ ha un fattore $d\zeta$, il cui prodotto esterno con $d\zeta$ è nullo. Facciamo tendere a zero il raggio r. Per il primo esercizio, la forma $\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$ è integrabile su tutto U. Pertanto

$$\lim_{r \to 0} \int_{U \setminus \Delta_r(z)} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = -\int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

L'ultima uguaglianza si ottiene scambiando l'ordine di $d\zeta$ e $d\bar{\zeta}$. La continuità di f conclude la dimostrazione:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta = f(z). \quad \square$$

Esercizio 4.1.3.

a) Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 a tratti. Sia $f \colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, dA(\zeta) = 0$$

per ogni $z \in \partial U$. Dimostrare che $f|_{\partial U}$ è il valore al bordo di una funzione continua su $\overline{U}$ e olomorfa in U.

b) Dato un qualunque $\epsilon > 0$, trovare una funzione f di classe C^1 sul disco unitario chiuso $\overline{\mathbb{D}}$ per cui $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ sia identicamente nulla fuori da un ϵ-intorno dell'origine, eppure $f|_{\partial \mathbb{D}}$ non rappresenti i valori al bordo di alcuna funzione olomorfa.

Esercizio 4.1.4. Siano $U \subset \mathbb{C}$ e f come nel teorema, ma si prenda $z \notin \overline{U}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0.$$

4.2 Il problema del $\bar\partial$ a supporto compatto

Per una funzione liscia ψ scriviamo il differenziale esterno nelle variabili z e $\bar z$:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z_1}dz_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial z_n}dz_n + \frac{\partial\psi}{\partial \bar z_1}d\bar z_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial \bar z_n}d\bar z_n.$$

Diamo un nome alle due parti del differenziale:

$$\partial\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\psi}{\partial z_1}dz_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial z_n}dz_n, \qquad \bar\partial\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\psi}{\partial \bar z_1}d\bar z_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial \bar z_n}d\bar z_n.$$

Si ha dunque $d\psi = \partial\psi + \bar\partial\psi$. Si osservi che ψ è olomorfa se e solo se $\bar\partial\psi = 0$.

Il *problema non omogeneo del* $\bar\partial$ (il simbolo $\bar\partial$ si legge «d barra») consiste nel risolvere rispetto a ψ l'equazione

$$\bar\partial\psi = g,$$

assegnata la 1-forma

$$g = g_1 d\bar z_1 + \cdots + g_n d\bar z_n.$$

Una tale g si dice *forma di tipo* $(0,1)$. Poiché le derivate parziali miste di ψ commutano, perché possa esistere una soluzione, g deve soddisfare certe condizioni di compatibilità che preciseremo tra poco.

Esercizio 4.2.1. Trovare un esempio esplicito di g in $\mathbb{C}^2$ per cui non esista alcuna ψ corrispondente.

In ogni aperto in cui $g = 0$, la funzione ψ è olomorfa. Per un dato g generale, cerchiamo dunque una funzione il cui scostamento dall'olomorfia sia assegnato.

Teorema 4.2.1. Sia g una forma di tipo $(0,1)$ in $\mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, data da

$$g = g_1 d\bar z_1 + \cdots + g_n d\bar z_n,$$

dove le $g_j \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sono funzioni lisce a supporto compatto che soddisfano le *condizioni di compatibilità*

$$\frac{\partial g_k}{\partial \bar z_\ell} = \frac{\partial g_\ell}{\partial \bar z_k} \qquad \text{per ogni } k, \ell = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Esiste allora un'unica funzione liscia a supporto compatto $\psi \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale che

$$\bar\partial\psi = g.$$

Le condizioni di compatibilità su g sono necessarie, mentre il supporto compatto non è necessario per l'esistenza di una soluzione in generale. Rinunciando a questa ipotesi entra però in gioco il dominio su cui è posta l'equazione. Lasciamo da parte la questione e dimostriamo che il problema a supporto compatto ammette sempre soluzione. La soluzione a supporto compatto è unica. Infatti, se ψ_1 e ψ_2 sono soluzioni, allora $\bar\partial(\psi_1 - \psi_2) = g - g = 0$, quindi $\psi_1 - \psi_2$ è olomorfa. L'unica funzione olomorfa a supporto compatto è 0, il che dà l'unicità di ψ fra le soluzioni a supporto compatto.

Dimostrazione. Abbiamo n funzioni lisce $g_1, \ldots, g_n$ e l'equazione $\bar\partial\psi = g$ equivale alle n equazioni

$$\frac{\partial\psi}{\partial \bar z_k} = g_k,$$

in cui le g_k soddisfano le condizioni (4.1). Affermiamo che una soluzione esplicita è

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{g_1(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{g_1(\zeta + z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.\end{aligned}$$

La singolarità non pregiudica l'integrabilità, per lo stesso motivo già visto per la formula di Cauchy generalizzata.

Verifichiamo che ψ è la soluzione. Usiamo la formula di Cauchy generalizzata nella variabile z_1. Scegliamo R abbastanza grande perché $g_k(\zeta, z_2, \ldots, z_n)$ si annulli per $|\zeta| \geq R$ e per ogni k. Per ciascun k otteniamo

$$\begin{aligned}g_k(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{g_k(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|\leq R} \frac{\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_1}(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_1}(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.\end{aligned}$$

Usando la seconda espressione che definisce ψ, le condizioni di compatibilità (4.1) e il calcolo precedente, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_k}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}_k}(\zeta + z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_1}(\zeta + z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_1}(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = g_k(z).\end{aligned}$$

Esercizio 4.2.2. Giustificare la derivazione di ψ sotto il segno di integrale nel calcolo precedente e spiegare perché si può procedere così soltanto con la seconda forma dell'integrale.

Il fatto che ψ abbia supporto compatto segue dal supporto compatto di g_1 e dal teorema di identità. In particolare ψ è olomorfa per z di norma abbastanza grande, perché $\bar{\partial}\psi = g = 0$ quando la norma di z è grande. Quando almeno una delle coordinate $z_2, \ldots, z_n$ ha modulo abbastanza grande, ψ è identicamente nulla già per definizione. Si veda la figura 4.2.

Nelle regioni grigio chiaro e bianche del disegno vale $\bar{\partial}\psi = 0$, perciò ψ vi è olomorfa. Poiché ψ si annulla nella regione grigio chiaro, per il teorema di identità si annulla anche nella regione bianca. In altri termini, ψ è nulla sulla componente illimitata dell'aperto in cui $g = 0$ e dunque ψ ha supporto compatto. □

La prima parte della dimostrazione funziona anche per $n = 1$ e fornisce una soluzione ψ. L'ultimo argomento invece viene meno in una variabile e quindi ψ può avere supporto non compatto.

Esercizio 4.2.3.

a) Mostrare che, se il supporto di g è contenuto in $K \subset\subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, allora il supporto di ψ è contenuto nel complementare della componente illimitata di $\mathbb{C}^n \setminus K$. In particolare, se K è il supporto di g e $\mathbb{C}^n \setminus K$ è connesso, mostrare che il supporto di ψ è K.

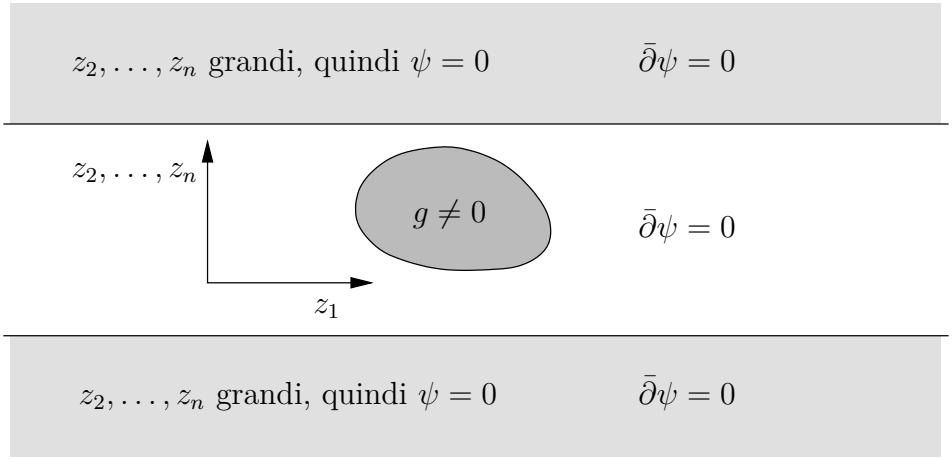


Figura 4.2: Abbastanza lontano dall'origine si ha $\bar{\partial}\psi = 0$.

b) Trovare un esempio esplicito in cui il supporto di ψ contenga strettamente quello di g.

Esercizio 4.2.4. Trovare una funzione liscia $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a supporto compatto tale che nessuna soluzione $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dell'equazione $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = g$ abbia supporto compatto (una soluzione esiste comunque).

4.3 Il fenomeno di Hartogs generale

Possiamo ora dimostrare il fenomeno di Hartogs nella sua forma generale applicando la soluzione del problema non omogeneo del $\bar\partial$ a supporto compatto. In precedenza ne avevamo dimostrato casi particolari mediante le figure di Hartogs. La storia della dimostrazione è complessa, perché quella originale di Hartogs del 1906 presentava alcune lacune. Una dimostrazione completa fu data da Fueter nel 1939 per $n = 2$ e, indipendentemente, da Bochner e Martinelli per valori superiori di n all'inizio degli anni Quaranta. La dimostrazione oggi consueta, che presentiamo qui, è dovuta a Leon Ehrenpreis e risale al 1961.

Teorema 4.3.1. (Fenomeno di Hartogs.) Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, con $n \geq 2$, e sia $K \subset\subset U$ un compatto tale che $U \setminus K$ sia connesso. Ogni funzione olomorfa $f\colon U \setminus K \to \mathbb{C}$ si prolunga in modo unico a una funzione olomorfa in U. Si veda la figura 4.3.

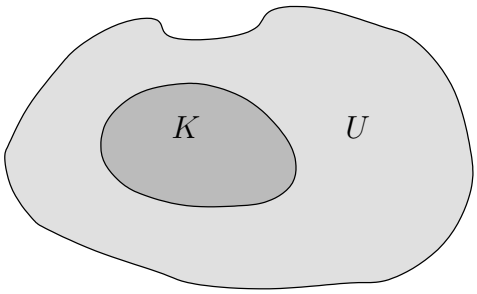


Figura 4.3: Il fenomeno di Hartogs.

L'idea è di costruire dapprima un prolungamento liscio e poi correggerlo, risolvendo un problema per il $\bar\partial$, in modo da renderlo olomorfo.

Dimostrazione. Troviamo anzitutto una funzione liscia φ che valga 1 in un intorno di K e abbia supporto compatto in U (si veda il primo esercizio). Poniamo $f_0 = (1-\varphi)f$ in $U \setminus K$ e $f_0 = 0$ su K. La funzione f_0 è liscia in U. Vicino alla frontiera di U, dove φ vale 0, essa coincide con f ed è olomorfa. Poniamo $g = \bar\partial f_0$ in U, ossia $g_k = \frac{\partial f_0}{\partial \bar z_k}$, e $g = 0$ fuori da U. Poiché le g_k sono identicamente nulle vicino a ∂U, ogni g_k è liscia in tutto $\mathbb{C}^n$. Le condizioni di compatibilità (4.1) valgono per la commutatività delle derivate parziali. Vediamo che g ha supporto compatto. Basta controllare $U \setminus K$, poiché altrove $g = 0$ automaticamente. Dall'olomorfia di f in $U \setminus K$ otteniamo

$$\frac{\partial f_0}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial}{\partial \bar z_k}((1-\varphi)f) = (1-\varphi)\frac{\partial f}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z_k} f = -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z_k} f.$$

Per costruzione $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar z_k}$ ha supporto compatto in $U \setminus K$. Risolvendo il problema del $\bar\partial$ a supporto compatto troviamo una funzione ψ a supporto compatto per cui $\bar\partial \psi = g$. Poniamo $F = f_0 - \psi$. Verifichiamo che F è il prolungamento cercato. Anzitutto è olomorfa, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial f_0}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar z_k} = g_k - g_k = 0.$$

Inoltre dall'esercizio 4.2.3 e dalla connessione di $U \setminus K$ segue che ψ ha supporto compatto in U. Dunque F coincide con f vicino alla frontiera (in particolare, su un aperto) e quindi ovunque in $U \setminus K$, perché $U \setminus K$ è connesso. □

Le ipotesi sulla dimensione e sulla connessione di $U \setminus K$ sono necessarie. In una variabile il teorema non vale. Anche quando $U \setminus K$ è sconnesso è facile costruire un controesempio, come si vedrà negli esercizi.

Esercizio 4.3.1. Dimostrare che la funzione φ della dimostrazione esiste. *Suggerimento.* Usare i mollificatori.

Esercizio 4.3.2. Nelle dimensioni del teorema, siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $K \subset U$ un compatto (ora $U \setminus K$ potrebbe essere sconnesso). Dimostrare che per ogni $f \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ esiste $F \in \mathcal{O}(U)$ che coincide con f sull'intersezione di U con la componente illimitata di $\mathbb{C}^n \setminus K$.

Esercizio 4.3.3. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $K \subset U$ un compatto tale che $U \setminus K$ sia sconnesso. Costruire un controesempio alla conclusione del teorema di Hartogs.

Una delle molte conseguenze del fenomeno di Hartogs è che, in dimensione almeno 2, l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa f, se non vuoto, non è mai compatto. Esistono anche dimostrazioni più semplici (si veda l'esercizio 1.6.6). Se tale insieme fosse compatto, applicando il teorema a $\frac{1}{f}$ si otterrebbe una contraddizione. Si veda anche l'esercizio 1.6.5.

Corollario 4.3.2. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, con $n \geq 2$, e $f \colon U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se l'insieme degli zeri $f^{-1}(0)$ non è vuoto, allora non è compatto.

Quando al posto di $U \setminus K$ si considera un'ipersuperficie di classe C^1 o liscia, si parla solitamente del teorema di Hartogs–Bochner. Il caso analitico reale fu enunciato per primo da Severi nel 1931.

Corollario 4.3.3. (Severi.) Sia $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, un dominio limitato con frontiera analitica reale connessa e sia $f \colon \partial U \to \mathbb{C}$ una funzione CR analitica reale. Esistono un intorno $U' \subset \mathbb{C}^n$ di $\overline{U}$ e una funzione olomorfa $F \colon U' \to \mathbb{C}$ tali che $F|_{\partial U} = f$.

Dimostrazione. Per il risultato di Severi (teorema 3.2.9), per ogni $p \in \partial U$ esiste una piccola palla B_p centrata in p tale che f si prolunghi a B_p. Ricopriamo ∂U con un numero finito di queste palle, in modo che, se B_p interseca B_q, l'intersezione connessa $B_p \cap B_q$ contenga punti di ∂U. I prolungamenti in B_p e B_q coincidono allora su una porzione dell'ipersuperficie ∂U e quindi sull'intersezione. Prendendo l'unione delle B_p otteniamo un unico prolungamento in un intorno di ∂U. Scriviamo l'intorno come $U' \setminus K$, dove K è compatto e U' è connesso, con $\overline{U} \subset U'$. Consideriamo le componenti connesse di $\mathbb{C}^n \setminus K$. Per la connessione di ∂U e la limitatezza di U, la componente illimitata di $\mathbb{C}^n \setminus K$ deve contenere tutta ∂U. Poiché U è limitato, tutte le altre componenti sono relativamente compatte in U. Aggiungendole a K, otteniamo ancora un compatto K e ora $U' \setminus K$ è connesso. Basta applicare il fenomeno di Hartogs. □

Esercizio 4.3.4. (Ancora il teorema di Hartogs–Bochner.) Sia $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, un dominio limitato con frontiera liscia, connessa e fortemente pseudoconvessa. Sia $f \colon \partial U \to \mathbb{C}$ una funzione CR liscia. Dimostrare che esiste una funzione continua $F \colon \overline{U} \to \mathbb{C}$, olomorfa in U, tale che $F|_{\partial U} = f$. *Nota.* Si può fare a meno della pseudoconvessità forte mantenendo la limitatezza e la frontiera liscia e connessa, ma la dimostrazione è assai più difficile.

Esercizio 4.3.5. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, un dominio di olomorfia limitato. Usare il fenomeno di Hartogs per mostrare che $\mathbb{C}^n \setminus U$ è connesso.

Esercizio 4.3.6. Siano $W \subset U \subset \mathbb{C}^n$ domini, con $n \geq 3$, tali che per ogni scelta fissata di $z_3^0, z_4^0, \ldots, z_n^0$ si abbia

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : (z_1, z_2, z_3^0, \ldots, z_n^0) \in U \setminus W\} \\ \subset\subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : (z_1, z_2, z_3^0, \ldots, z_n^0) \in U\}.$$

Dimostrare che ogni $f \in \mathcal{O}(W)$ si prolunga a una funzione olomorfa su U. *Nota.* È importante che W sia connesso.

Esercizio 4.3.7.

a) Dimostrare che, se $n \geq 2$, nessun dominio della forma $U = \mathbb{C}^n \setminus K$, con K compatto, è biolomorfo a un dominio limitato.

b) Dimostrare che ogni dominio della forma $U = \mathbb{C} \setminus K$, con K compatto di interno non vuoto, è biolomorfo a un dominio limitato.

Esercizio 4.3.8. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, un dominio tale che, per una certa applicazione affine $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n$, l'insieme $A^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus U)$ abbia una componente connessa limitata. Dimostrare che U non è un dominio di olomorfia.

4.4 Risolubilità del problema del $\bar\partial$ nel polidisco

Affrontiamo il problema del $\bar\partial$ per le forme differenziali. In generale la sua risolubilità equivale alla convessità olomorfa, ma la dimostrazione è impegnativa. Ci limiteremo perciò ai polidischi e ad altri esempi semplici. Come prima, separiamo la derivata nelle parti olomorfa e antiolomorfa. Per le forme di grado superiore useremo ancora i multiindici, con una convenzione leggermente diversa.

Definizione 4.4.1. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e p e q interi con $0 \le p, q \le n$. Siano α e β rispettivamente una p-upla e una q-upla ordinate di interi distinti, con $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \le n$ e $1 \le \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_q \le n$. Scriviamo

$$dz_\alpha = dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_p} \quad \text{e} \quad d\bar z_\beta = d\bar z_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{\beta_q}.$$

Una forma differenziale di *bigrado* (p, q), o semplicemente una (p, q)-*forma*, si scrive

$$\eta = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta,$$

dove α e β percorrono tutte le p-uple e le q-uple sopra descritte e le $\eta_{\alpha\beta}$ sono funzioni lisce su U. Le $(0, 0)$-forme sono semplicemente le funzioni lisce su U. Una k-forma qualsiasi è somma di (p, q)-forme al variare di p e q con $p + q = k$. Definiamo

$$\partial\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta \quad \text{e} \quad \bar\partial\eta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \eta_{\alpha\beta}}{\partial \bar z_k} d\bar z_k \wedge dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta.$$

Se η ha bigrado (p, q), allora $\partial\eta$ ha bigrado $(p + 1, q)$ e $\bar\partial\eta$ ha bigrado $(p, q + 1)$. Ritroviamo il differenziale esterno totale $d\eta = \partial\eta + \bar\partial\eta$.

Esercizio 4.4.1. Dimostrare che $d\eta = \partial\eta + \bar\partial\eta$ e verificare la *regola di Leibniz*: se η è una (p, q)-forma, allora

$$\partial(\eta \wedge \omega) = \partial\eta \wedge \omega + (-1)^{p+q} \eta \wedge \partial\omega \quad \text{e} \quad \bar\partial(\eta \wedge \omega) = \bar\partial\eta \wedge \omega + (-1)^{p+q} \eta \wedge \bar\partial\omega.$$

Esercizio 4.4.2. Mostrare che $\bar\partial^2 = 0$, ossia $\bar\partial^2\eta = \bar\partial\bar\partial\eta = 0$ per ogni forma η. Analogamente, mostrare che $\partial^2 = 0$.

Esercizio 4.4.3. Data un'ipersuperficie $M \subset \mathbb{C}^n$ con funzione definente r, calcolare $\partial\bar\partial r$ e mostrare che si ottiene la forma di Levi. Più precisamente, per un campo Z di tipo $T^{(1,0)}M$, la forma di Levi è data da $\langle \partial\bar\partial r, Z \wedge \bar Z\rangle$. *Suggerimento.* Si veda nell'appendice C come valutare le forme differenziali come forme multilineari.

Una forma η è $\bar\partial$-*esatta* se esiste una forma ω tale che $\bar\partial\omega = \eta$. Una forma η è $\bar\partial$-*chiusa* se $\bar\partial\eta = 0$. Per un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$ definiamo i *gruppi di coomologia di Dolbeault* come quozienti di spazi vettoriali complessi:

$$H^{(p,q)}(U) = \frac{\{\text{forme } \bar\partial\text{-chiuse di bigrado } (p, q) \text{ su } U\}}{\{\text{forme } \bar\partial\text{-esatte di bigrado } (p, q) \text{ su } U\}}.$$

Per convenzione l'unica $(0, 0)$-forma esatta è la forma identicamente nulla.

Esercizio 4.4.4. Mostrare che le forme $\bar\partial$-chiuse di bigrado (p, q) costituiscono un sottospazio dello spazio vettoriale delle (p, q)-forme e che lo stesso vale per le forme $\bar\partial$-esatte di bigrado (p, q).

Esercizio 4.4.5. Dimostrare che, se due domini $U, V \subset \mathbb{C}^n$ sono biolomorfi, allora $H^{(p,q)}(U)$ e $H^{(p,q)}(V)$ sono isomorfi come spazi vettoriali per ogni (p,q).

Il problema del $\bar\partial$ per le (p,q)-forme consiste dunque nel risolvere l'equazione $\bar\partial\omega = \eta$ per ogni (p,q)-forma η che soddisfi la necessaria condizione di compatibilità $\bar\partial\eta = 0$. In termini coomologici ciò equivale a $H^{(p,q)}(U) = 0$, dove 0 indica lo spazio vettoriale nullo. La coomologia di Dolbeault affina, in un certo senso, la coomologia di de Rham: quest'ultima è la consueta coomologia delle forme lisce che descrive la topologia di U, mentre quella di Dolbeault tiene conto anche della struttura complessa. Si osservi che $H^{(0,0)}(U)$ è lo spazio delle $(0,0)$-forme $\bar\partial$-chiuse, ossia lo spazio $\mathcal{O}(U)$ delle funzioni olomorfe su U. Più in generale, $H^{(p,0)}(U)$ è lo spazio delle $(p,0)$-forme $\bar\partial$-chiuse, cioè delle forme

$$\eta = \sum_\alpha \eta_\alpha \, dz_\alpha \quad \text{con} \quad \bar\partial\eta = \sum_\alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \bar z_k} d\bar z_k \wedge dz_\alpha = 0.$$

Tutti i coefficienti η_α sono dunque olomorfi.

La risolubilità dell'equazione $\bar\partial\omega = \eta$ per ogni (p,q)-forma η con $\bar\partial\eta = 0$ e $q \geq 1$ equivale alla convessità olomorfa. La dimostrazione completa esula dai limiti di questo libro. Negli esercizi di questa sezione dimostrerete una delle implicazioni in $\mathbb{C}^2$ e nella prossima sezione ne daremo la dimostrazione in dimensione arbitraria (teorema 4.5.6): l'annullarsi dei gruppi di coomologia implica che il dominio sia di olomorfia. L'implicazione opposta è una versione del teorema B di Cartan. Enunciamo il risultato senza dimostrazione.

Teorema 4.4.2. Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è di olomorfia (e quindi olomorficamente convesso) se e solo se $H^{(0,q)}(U) = 0$ per ogni $1 \leq q \leq n-1$.

Se U è un dominio di olomorfia, vale addirittura $H^{(p,q)}(U) = 0$ per ogni $q \geq 1$. Non dimostreremo questo fatto in generale, ma lo dimostreremo per un polidisco. Abbiamo già visto che $H^{(p,0)}(U)$ non è mai banale. Vale anche il teorema di annullamento di Malgrange: $H^{(p,n)}(U) = 0$ per ogni dominio $U \subset \mathbb{C}^n$.

Esercizio 4.4.6. Dimostrare che basta considerare $p = 0$, ossia che $H^{(0,q)}(U) = 0$ se e solo se $H^{(p,q)}(U) = 0$ per ogni p.

Esercizio 4.4.7. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Dimostrare che $H^{(p,q)}(U) = 0$ se e solo se $H^{(p,q)}(W) = 0$ per ogni componente connessa W di U.

Esempio 4.4.3. Se U non è un dominio di olomorfia, il problema del $\bar\partial$ non è sempre risolubile e i gruppi di coomologia di Dolbeault possono essere non nulli. Mostriamo che $H^{(0,1)}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ contiene un elemento non nullo. Poniamo $r = |z|^2 + |w|^2$. Scriviamo

$$\frac{1}{zw} = \frac{\bar w}{zr} - \frac{-\bar z}{wr}.$$

Le due funzioni a secondo membro differiscono per una funzione olomorfa dove z e w sono entrambi non nulli, quindi hanno lo stesso $\bar\partial$ dove entrambe sono definite. Il primo termine è definito per $z \neq 0$ e il secondo per $w \neq 0$. La forma η seguente è perciò ben definita su $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$:

$$\eta = \bar\partial\left(\frac{\bar w}{zr}\right) \quad \text{se } z \neq 0, \qquad \text{e} \qquad \eta = \bar\partial\left(\frac{-\bar z}{wr}\right) \quad \text{se } w \neq 0.$$

Poiché $\bar\partial^2 = 0$, η è $\bar\partial$-chiusa. Supponiamo per assurdo che esista una funzione liscia $f\colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ con $\bar\partial f = \eta$ e definiamo $g = zf - \bar w/r$. Quando $z \neq 0$ si ha $g/z = f - \bar w/zr$

e quindi $\bar\partial(g/z) = 0$. Dunque g è olomorfa dove $z \neq 0$. Ma g è liscia su $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$: questo è il punto da cui nasce la contraddizione. Per continuità soddisfa le equazioni di Cauchy–Riemann su $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, quindi g è olomorfa su $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Per il fenomeno di Hartogs, in una qualunque delle versioni viste, g si prolunga olomorficamente a $\mathbb{C}^2$. In particolare g è olomorfa vicino a 0, il che contraddice $g(0, w) = -1/w$.

Esempio 4.4.4. Come già sappiamo, la sola topologia non determina i gruppi $H^{(p,q)}$. L'esempio precedente funziona ancora su $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \Im z \neq 0 \text{ oppure } \Im w \neq 0\}$. Infatti la funzione g dell'esempio precedente si può definire su $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ e quindi si prolunga a $\mathbb{C}^2$ (si veda l'esercizio 2.1.10 sul complementare del piano reale), portando ancora a una contraddizione. Il dominio $\mathbb{C}^2 \setminus \{z = 0\}$ ha esattamente la stessa topologia di $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$. Eppure $\mathbb{C}^2 \setminus \{z = 0\}$ è un dominio di olomorfia e, per un esercizio che segue, $H^{(0,1)}\big(\mathbb{C}^2 \setminus \{z = 0\}\big) = 0$. In questo caso la funzione f esiste per costruzione: $f = \bar w/zr$. Allora g è identicamente nulla e non si ottiene alcuna contraddizione.

Esercizio 4.4.8. Se $U \subset \mathbb{C}^2$ è un dominio e $K \subset U$ un compatto non vuoto, dimostrare che $H^{(0,1)}(U \setminus K) \neq 0$.

Esercizio 4.4.9. Dare un altro esempio del fatto che la topologia non basta. Considerare la figura di Hartogs $H = \big\{(z, w) \in \mathbb{D}^2 : |z| > 1/2 \text{ oppure } |w| < 1/2\big\}$. Mostrare che, sebbene H sia omeomorfa al polidisco (abbia cioè topologia banale), $H^{(0,1)}(H)$ non è banale.

Esercizio 4.4.10. Dimostrare che, se $U \subset \mathbb{C}^2$ è un dominio con $H^{(0,1)}(U) = 0$, allora U è di olomorfia. *Suggerimento.* Procedere per contrapposizione. Supporre che U non sia di olomorfia e, ragionando come negli esempi, mostrare che $H^{(0,1)}(U) \neq 0$.

Esercizio 4.4.11. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontiera liscia, con $0 \in \partial U$ e $\{z_1 = z_2 = 0\} \cap U = \emptyset$. Se la forma di Levi nell'origine ha un autovalore negativo, mostrare che $H^{(0,1)}(U) \neq 0$.

Esercizio 4.4.12. Mostrare che $H^{(0,1)}\big(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\big)$, oltre a essere non banale, è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Dimostreremo la risolubilità del problema del $\bar\partial$ nel polidisco. Ammetteremo che alcuni fattori siano uguali a $\mathbb{C}$. Per *polidisco eventualmente illimitato* $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ intendiamo dunque $\Delta = D_1 \times \cdots \times D_n$ dove ogni D_k è un disco oppure $\mathbb{C}$. Otterremo così anche una soluzione su tutto $\mathbb{C}^n$. Il risultato che dimostreremo è il seguente.

Teorema 4.4.5. Sia $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco eventualmente illimitato, siano $p \geq 0$ e $q \geq 1$ interi e sia η una (p, q)-forma liscia su Δ tale che $\bar\partial\eta = 0$. Esiste una $(p, q-1)$-forma liscia ω tale che $\bar\partial\omega = \eta$. In altri termini, $H^{(p,q)}(\Delta) = 0$ per $q \geq 1$.

Prima di dimostrare il teorema risolviamo un semplice problema del $\bar\partial$ in una variabile mediante la formula di Cauchy–Pompeiu.

Lemma 4.4.6. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 a tratti. Sia $g\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ una funzione liscia, cioè la restrizione di una funzione liscia in un intorno di $\overline{U}$. Allora la funzione $\psi\colon U \to \mathbb{C}$ definita da

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar\zeta$$

è liscia e soddisfa $\frac{\partial\psi}{\partial\bar z} = g$.

Per coniugazione si risolve analogamente il problema $\frac{\partial\psi}{\partial z} = g$. Inoltre, essendo la soluzione espressa da un integrale, si può risolvere il problema con parametri: se g dipende in modo liscio oppure olomorfo da altre variabili, la soluzione ψ dipende nello stesso modo da tali variabili. Si confronti l'espressione di ψ con quella usata nella dimostrazione del teorema 4.2.1.

La dimostrazione si basa sul fatto che $\psi(z) = \log|z|^2$ risolve il problema del $\bar\partial$ con $g(z) = 1/\bar z$. A prima vista ciò può sorprendere: un calcolo puramente formale suggerisce la funzione multivalore $\log\bar z + \log z = \log|z|^2$ è univoca, come richiesto. Attraverso gli esercizi il lemma porta a dimostrare che $H^{(0,1)}(U) = 0$ per ogni dominio $U \subset \mathbb{C}$. Ogni $(0,1)$-forma $g\,d\bar z$ in U è $\bar\partial$-chiusa, perciò $H^{(0,1)}(U) = 0$ equivale alla risolubilità di $\frac{\partial\psi}{\partial\bar z} = g$ per ogni funzione liscia g su U.

Esercizio 4.4.13. È importante ammettere funzioni a valori complessi. Per la funzione $g(x+iy) = \frac{y}{x^2+y^2}$ su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mostrare che non esiste alcuna funzione reale $\psi\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ che soddisfi $\frac{\partial\psi}{\partial z} = g$, né una che soddisfi $\frac{\partial\psi}{\partial\bar z} = g$.

Dimostrazione del lemma. Fissiamo $z \in U$ e prendiamo un piccolo disco $\Delta_r(z)$ con $\overline{\Delta_r(z)} \subset U$ (figura 4.4). Per Stokes,

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} g(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\bar\zeta - \int_{\partial\Delta_r(z)} g(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\bar\zeta &= \int_{U\setminus\Delta_r(z)} d\big(g(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\bar\zeta\big)\\ &= \int_{U\setminus\Delta_r(z)} \frac{\partial g}{\partial\zeta}(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\bar\zeta + \int_{U\setminus\Delta_r(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\bar\zeta.\end{aligned}$$

Sia $\log|\zeta - z|^2$ sia $\frac{1}{\zeta - z}$ sono integrabili su U rispetto alla misura d'area. Per $r \to 0$ l'ultimo termine converge a $\int_U \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\bar\zeta$, ossia a $2\pi i\psi(z)$. Inoltre g è limitata su $\overline{U}$, diciamo in modulo da M, quindi

$$\left|\int_{\partial\Delta_r(z)} g(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\bar\zeta\right| \le \int_{\partial\Delta_r(z)} M\left|\log(r^2)\right| |d\bar\zeta| = 2\pi r M\left|\log(r^2)\right| \underset{\text{per } r\to 0}{\to} 0.$$

Passando al limite si ottiene

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} g(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\bar\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{\partial g}{\partial\zeta}(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\bar\zeta.$$

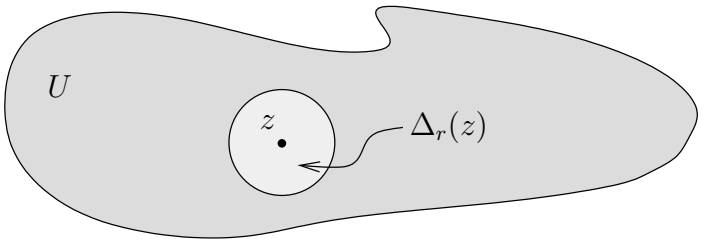


Figura 4.4: Applicazione del teorema di Stokes.

Le derivate parziali rispetto a $\Re z$ e $\Im z$ lasciano le integrande integrabili e possiamo portare la derivazione sotto il segno di integrale. In particolare ψ è di classe C^1 e possiamo

derivare rispetto a $\bar{z}$. Applichiamo allora la formula di Cauchy–Pompeiu, più precisamente la coniugata della formula applicata a $\bar{g}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = g(z).$$

È così dimostrata l'esistenza della soluzione. Rimane da verificarne la regolarità. Poiché g è liscia, anche $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$ è liscia. Basta dimostrare che $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ è liscia perché lo sia ψ. Derivando rispetto a z invece che a $\bar{z}$, troviamo

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Il primo integrale è evidentemente liscio. Il secondo è precisamente del tipo che abbiamo appena mostrato essere di classe C^1, con g sostituita da $\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}$. Pertanto ψ è di classe C^2. Per induzione $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ è liscia, e così pure ψ. □

Passiamo a più variabili. Mostreremo che in ogni polidisco si può risolvere il problema su un polidisco più piccolo. Il risultato è detto *lemma di Dolbeault* o *di Dolbeault–Grothendieck*. Poiché è l'analogo del lemma di Poincaré, lo si chiama anche *lemma di Poincaré per il* $\bar{\partial}$.

Lemma 4.4.7. (Dolbeault–Grothendieck.) Siano $\Delta_s(w) \subset \Delta_r(w) \subset \mathbb{C}^n$ polidischi tali che $0 < s_\ell < r_\ell < \infty$ per ogni ℓ. Siano $p \geq 0$ e $q \geq 1$ interi e η una (p,q)-forma liscia in $\Delta_r(w)$ con $\bar{\partial}\eta = 0$. Esiste una $(p, q-1)$-forma liscia ω su $\Delta_s(w)$ con $\bar{\partial}\omega = \eta$.

Dimostrazione. Sia k un intero tale che in η figurino, fra i differenziali coniugati, soltanto $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_k$. Se $k = 0$ il lemma è immediato: poiché $q \geq 1$, η dev'essere nulla. Procediamo per induzione. Scriviamo

$$\eta = d\bar{z}_k \wedge \tau + \theta,$$

dove in τ e θ compaiono soltanto i differenziali coniugati $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{k-1}$. Ora

$$0 = \bar{\partial}\eta = \bar{\partial}(d\bar{z}_k \wedge \tau + \theta) = -d\bar{z}_k \wedge \bar{\partial}\tau + \bar{\partial}\theta.$$

I coefficienti di τ e θ sono quindi olomorfi in $z_{k+1}, \ldots, z_n$ perché le derivate rispetto alle corrispondenti variabili coniugate sono nulle. In particolare, se $\tau_{\alpha\beta}$ è un coefficiente di τ, esso è liscio nel polidisco maggiore e olomorfo nelle variabili $z_{k+1}, \ldots, z_n$.

Esercizio 4.4.14. Verificare l'affermazione che i coefficienti di τ e θ sono olomorfi nelle variabili $z_{k+1}, \ldots, z_n$.

Per il lemma 4.4.6 esiste una funzione liscia $\psi_{\alpha\beta}$ della variabile z_k per cui $\frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_k} = \tau_{\alpha\beta}$. Inoltre ciascuna $\psi_{\alpha\beta}$ è liscia in

$$\Delta_{r_1}(w_1) \times \cdots \times \Delta_{r_{k-1}}(w_{k-1}) \times \Delta_t(w_k) \times \Delta_{r_{k+1}}(w_{k+1}) \times \cdots \times \Delta_{r_n}(w_n)$$

per un certo t tale che $s_k < t < r_k$ ed è olomorfa nelle variabili $z_{k+1}, \ldots, z_n$. Con le funzioni $\psi_{\alpha\beta}$ costruiamo una $(p, q-1)$-forma ψ. Calcoliamo $\bar{\partial}\psi$:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\left(\sum_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta\right) &= \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta + \sum_{\alpha\beta}\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_\ell} d\bar{z}_\ell \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \\
&= d\bar{z}_k \wedge \left(\sum_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta\right) + \sum_{\alpha\beta}\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_\ell} d\bar{z}_\ell \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \\
&= d\bar{z}_k \wedge \tau + \delta,
\end{aligned}$$

dove gli unici differenziali coniugati che possono figurare in δ sono $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{k-1}$. Ora

$$\bar{\partial}(\theta - \delta) = \bar{\partial}(\eta - \bar{\partial}\psi) = \bar{\partial}\eta - \bar{\partial}^2\psi = 0.$$

Poiché in θ e δ compaiono soltanto i differenziali coniugati $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_{k-1}$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva e trovare una $(p, q-1)$-forma φ con $\bar{\partial}\varphi = \theta - \delta$. Basta allora porre $\omega = \psi + \varphi$, poiché

$$\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}(\psi + \varphi) = d\bar{z}_k \wedge \tau + \delta + \theta - \delta = \eta.$$

□

Esercizio 4.4.15. Provare che, per le $(0,1)$-forme a supporto compatto della sezione 4.2, la costruzione della dimostrazione restituisce la soluzione a supporto compatto, purché si parta da un polidisco abbastanza grande.

Esercizio 4.4.16. Dimostrare il lemma sostituendo i polidischi $\Delta_s(w)$ e $\Delta_r(w)$ con due palle concentriche di centro w, con la chiusura della più piccola contenuta nella più grande.

Passiamo alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione del teorema 4.4.5. Distinguiamo due casi. Supponiamo anzitutto $q > 1$. Scegliamo una successione di polidischi Δ_k, tutti centrati nell'origine dopo una traslazione, tali che $\bigcup_k \Delta_k = \Delta$ e $\overline{\Delta_k} \subset \Delta_{k+1}$ per ogni k. Applicando il lemma di Dolbeault–Grothendieck con Δ_3 e Δ_4, troviamo una forma liscia ω_1 definita su Δ_3 con $\bar{\partial}\omega_1 = \eta$. Costruiremo una successione di forme $\{\omega_k\}$, ciascuna ω_k definita su Δ_{k+2}, tali che $\omega_{k+1}|_{\Delta_k} = \omega_k|_{\Delta_k}$. Supponiamo di avere già definito $\omega_1, \ldots, \omega_k$. Applicando ancora il lemma con Δ_{k+3} e Δ_{k+4}, costruiamo una forma σ su Δ_{k+3} con $\bar{\partial}\sigma = \eta$. Dobbiamo correggere σ in modo che coincida con ω_k su Δ_k. Su Δ_{k+2} si ha $\bar{\partial}(\omega_k - \sigma) = \eta - \eta = 0$, dunque $\omega_k - \sigma$ è chiusa. Per il lemma esiste una forma θ su Δ_{k+1} tale che $\bar{\partial}\theta = \omega_k - \sigma$. Definiamo una funzione di taglio liscia φ su $\mathbb{C}^n$ tale che $\varphi = 1$ su $\overline{\Delta_k}$ e con φ a supporto compatto in Δ_{k+1}. Poniamo $\omega_{k+1} = \sigma + \bar{\partial}(\varphi\theta)$. È una forma liscia su Δ_{k+3} perché φ è identicamente nulla dove θ non è definita. Dall'identità $\bar{\partial}^2 = 0$ segue che $\bar{\partial}\omega_{k+1} = \bar{\partial}\sigma = \eta$ su Δ_{k+3}. Su Δ_k si ha $\omega_{k+1} = \sigma + \bar{\partial}\theta = \sigma + \omega_k - \sigma = \omega_k$. Si veda la figura 4.5. La successione $\{\omega_k\}$ è così definita. Definiamo ω su Δ ponendo semplicemente $\omega = \omega_k$ su Δ_k.

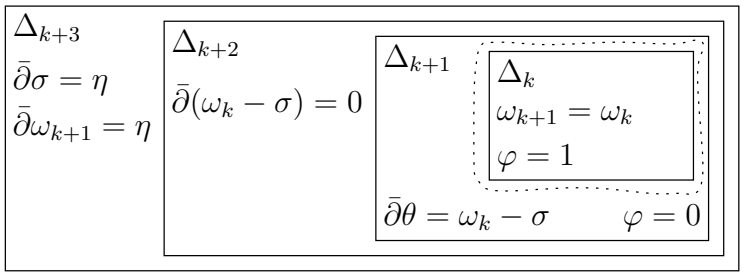


Figura 4.5: Costruzione di $\omega_{k+1} = \sigma + \bar{\partial}(\varphi\theta)$. La linea punteggiata rappresenta $\operatorname{supp}\varphi$.

Supponiamo ora $q = 1$. Per l'esercizio 4.4.6 basta considerare $p = 0$, semplificando la notazione. Cerchiamo cioè una funzione liscia ω con $\bar{\partial}\omega = \eta$. Prendiamo i polidischi Δ_k come prima e definiamo ω_1 su Δ_2 usando η su Δ_3. Invece di imporre che ω_{k+1} e ω_k coincidano su Δ_k, richiediamo

$$|\omega_{k+1}(z) - \omega_k(z)| < 2^{-k} \quad \text{per } z \in \overline{\Delta_k}.$$

Supponiamo di avere costruito $\omega_1, \dots, \omega_k$ con queste proprietà. Applichiamo il lemma a Δ_{k+3} e Δ_{k+2} ottenendo una funzione liscia σ su Δ_{k+2} tale che $\bar\partial\sigma = \eta$. La funzione $\sigma - \omega_k$ è olomorfa su Δ_{k+1}, dove è definita ω_k, poiché $\bar\partial(\sigma - \omega_k) = \eta - \eta = 0$. Ammette quindi uno sviluppo in serie di potenze uniformemente convergente su $\overline{\Delta_k}$. Esiste dunque un polinomio olomorfo P tale che

$$|\sigma(z) - \omega_k(z) - P(z)| < 2^{-k} \quad \text{per } z \in \overline{\Delta_k}.$$

Poniamo $\omega_{k+1} = \sigma - P$. Essendo P olomorfo, si ha $\bar\partial\omega_{k+1} = \eta$ e tutte le condizioni richieste sono soddisfatte.

Su ciascun $\overline{\Delta_\ell}$ la successione $\{\omega_k\}$ è uniformemente di Cauchy: per $m > k \geq \ell$ vale $|\omega_m(z) - \omega_k(z)| < 2^{-k} + 2^{-k-1} + \cdots + 2^{-m+1} < 2^{-k+1}$. La successione converge dunque uniformemente sui compatti di Δ a una funzione $\omega\colon \Delta \to \mathbb{C}$. Dobbiamo mostrare che ω è liscia e che $\bar\partial\omega = \eta$. Le funzioni $\omega_m - \omega_\ell$ convergono uniformemente per $m \to \infty$ su Δ_ℓ. Poiché $\bar\partial(\omega_m - \omega_\ell) = \eta - \eta = 0$, queste differenze sono olomorfe e quindi anche il limite $\omega - \omega_\ell$ è olomorfo. In particolare ω è liscia, perché ω_ℓ è liscia, e $\bar\partial\omega = \bar\partial\omega_\ell = \eta$. □

Esercizio 4.4.17. Dimostrare che il teorema vale anche per una palla, per esempio per la palla unitaria $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$. *Suggerimento.* Usare l'esercizio 4.4.16.

Esercizio 4.4.18. Per un disco $D \subset \mathbb{C}$ indichiamo con D^* il disco puntato $D^* = D \setminus \{a\}$, dove a è il centro. Dimostrare che il teorema vale anche per $U = D_1 \times \cdots \times D_k \times D^*_{k+1} \times \cdots \times D^*_n$, con $D_1, \dots, D_n$ dischi eventualmente illimitati. *Suggerimento.* Potrebbe servire una versione leggermente più generale del lemma di Dolbeault–Grothendieck. Si veda anche l'esercizio 1.2.4 sulle serie di Laurent.

Esercizio 4.4.19. Dimostrare che in una variabile, per ogni dominio $U \subset \mathbb{C}$, vale $H^{(0,1)}(U) = 0$.

Esercizio 4.4.20. Dimostrare il teorema per il triangolo di Hartogs $T = \{(z, w) \in \mathbb{D}^2 : |z| > |w|\}$.

Esercizio 4.4.21. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $p \in \partial U$. Supponiamo che per un polidisco Δ centrato in p valga $H^{(0,q)}(U \cap \Delta) \neq 0$. Dimostrare che $H^{(0,q)}(U) \neq 0$. *Suggerimento.* Trovare una funzione liscia φ su $U \cap \Delta$ tale che φ sia identicamente nulla vicino alla frontiera di U e identicamente uno vicino alla frontiera di Δ. Usare il teorema.

Esercizio 4.4.22. Usare gli esercizi 4.4.21 e 4.4.11 per dimostrare che, se $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, è un dominio con frontiera liscia e $p \in \partial U$ è tale che la forma di Levi in p abbia un autovalore negativo e $n - 2$ autovalori positivi, allora $H^{(0,1)}(U) \neq 0$.

Esercizio 4.4.23. Un'inclusione di domini non impone alcuna relazione di annullamento fra i gruppi di coomologia di Dolbeault. Trovare domini $U \subset V \subset W \subset \mathbb{C}^2$ tali che $H^{(0,1)}(U) = H^{(0,1)}(W) = 0$ e tuttavia $H^{(0,1)}(V)$ sia non banale.

4.5 Prolungamento da un sottospazio affine

Sia $L \subset \mathbb{C}^n$ un *sottospazio affine complesso* di dimensione k, ossia l'insieme definito da $Mz = c$ per una matrice M di dimensioni $(n-k) \times n$ e rango $n-k$ e per un vettore $c \in \mathbb{C}^{n-k}$. Mediante una trasformazione lineare complessa e una traslazione possiamo supporre $L = \{z \in \mathbb{C}^n : z_{k+1} = \cdots = z_n = 0\}$. Una funzione f definita su un aperto di L si dice olomorfa se, in queste coordinate, è olomorfa nelle variabili $z_1, \ldots, z_k$. Se $k = n-1$ chiamiamo L *iperpiano affine complesso*; se $k = 1$ chiamiamo L *retta complessa*.

È facile vedere che, se $U \subset \mathbb{C}^n$ è aperto, L è un sottospazio affine e $F \in \mathcal{O}(U)$, allora $F|_{U \cap L}$ è olomorfa. Per le dimostrazioni per induzione sulla dimensione sarebbe utile poter compiere l'operazione inversa: partire da una funzione olomorfa f su $U \cap L$ e trovare una funzione olomorfa su U che per restrizione dia f. Se f è soltanto liscia, trovare un prolungamento liscio è facile qualunque sia la forma di U. Per le funzioni olomorfe il problema è più difficile e può perfino non avere soluzione. Nei domini di olomorfia il prolungamento da un sottospazio affine è possibile. Vedremo anzi che questa proprietà caratterizza tali domini.

Esempio 4.5.1. Siano $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ e $L = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = 0\}$. Allora $U \cap L$ è il piano complesso puntato. Consideriamo la funzione $f(z) = 1/z$ su $U \cap L$. Se esistesse $F \in \mathcal{O}(U)$ con restrizione f su $U \cap L$, tale F si prolungherebbe a tutto $\mathbb{C}^2$. Quindi f si prolungherebbe a tutto L, ossia al piano della variabile z, il che è impossibile. Abbiamo così provato che $H^{(0,1)}(U)$ non è banale.

Esempio 4.5.2. Siano $U = B_2\big((0,1)\big) \subset \mathbb{C}^2$ e $L = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = 0\}$. L'intersezione $U \cap L$ è un disco di raggio $\sqrt{3}$ nel piano della variabile z. Sia $f \colon U \cap L \to \mathbb{C}$ olomorfa rispetto a z e non prolungabile attraverso alcun punto del bordo del disco. Il modo più immediato di prolungare f a una funzione F sarebbe porre $F(z, w) = f(z)$, ma questa espressione non è definita su tutto U. L'esistenza di un prolungamento a tutto U richiede qualche sforzo in più. Si veda la figura 4.6. In questo caso particolare il prolungamento si può costruire esplicitamente (esercizio seguente). Si osservi che $H^{(0,1)}(U) = 0$, come si è dimostrato per esercizio nella sezione precedente.

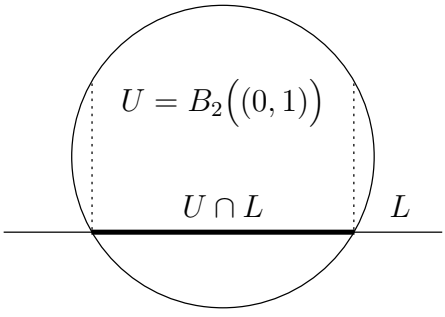


Figura 4.6: Prolungamento di f da un iperpiano alla palla. All'interno delle linee punteggiate il prolungamento è immediato.

Esercizio 4.5.1. Nella situazione dell'esempio 4.5.2 costruire esplicitamente il prolungamento F della funzione olomorfa f.

Esercizio 4.5.2. Trovare in $\mathbb{C}^2$ un dominio U e un iperpiano L tali che $H^{(0,1)}(U)$ non sia banale, ma ogni $f \in \mathcal{O}(U \cap L)$ si prolunghi olomorficamente a U.

Esercizio 4.5.3. Si possono considerare più iperpiani. Sia $L \subset \mathbb{C}^2$ l'insieme in cui $z = 0$, sia M quello in cui $w = 0$ e sia N quello in cui $z = w$. Siano f, g e h funzioni olomorfe rispettivamente su L, M e N. Occorre un'ipotesi che le leghi fra loro. Per semplicità supponiamo che le tre funzioni e tutte le loro derivate prime si annullino nell'origine. Dimostrare che esiste una funzione olomorfa F su $\mathbb{C}^2$ con $F|_L = f$, $F|_M = g$ e $F|_N = h$.

Esercizio 4.5.4. Mostrare che l'iperpiano non si può sostituire con un insieme privo di struttura complessa. Trovare un dominio di olomorfia $U \subset \mathbb{C}^2$ e una funzione analitica reale $f\colon U \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ che non sia la restrizione di una funzione olomorfa su U. Si osservi che f si prolunga olomorficamente a un qualche intorno di $U \cap \mathbb{R}^2$ in U, ma non necessariamente a tutto U.

In generale si parte da un prolungamento semplice a un intorno di L, come $F(z, w) = f(z)$, poi con una funzione di taglio lo si prolunga in modo liscio a tutto U. Per ottenere un prolungamento olomorfo a U lo si corregge risolvendo un opportuno problema del $\bar\partial$. Fin qui abbiamo parlato di funzioni olomorfe, ma con lo stesso sforzo possiamo trattare le (p, q)-forme $\bar\partial$-chiuse: le funzioni olomorfe sono precisamente le $(0, 0)$-forme $\bar\partial$-chiuse.

Occorre prima definire la restrizione delle (p, q)-forme a L. Come per le funzioni, semplifichiamo mediante una scelta di coordinate. Informalmente, restringiamo i coefficienti della forma a L e conserviamo soltanto le parti «dirette lungo L». Per semplicità supponiamo che L sia un iperpiano: ne seguirà il caso generale. Con una trasformazione lineare e una traslazione ci riduciamo a $L = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = 0\}$. Scriviamo una (p, q)-forma come

$$\eta = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta + \omega_2 \wedge dz_n + \omega_3 \wedge d\bar z_n,$$

dove α e β non contengono l'indice n (nel primo termine non compaiono quindi né dz_n né $d\bar z_n$). Allora

$$\eta|_L = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}|_L\, dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta.$$

In sostanza, restringiamo i coefficienti a L e scartiamo i differenziali che si annullano sui vettori tangenti a L. Se η è una funzione, ossia una $(0, 0)$-forma, si ritrova la consueta restrizione.

Teorema 4.5.3. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con $H^{(p,q+1)}(U) = 0$ e sia L un iperpiano affine. Se ψ è una (p, q)-forma liscia $\bar\partial$-chiusa su $U \cap L$, esiste una (p, q)-forma liscia $\bar\partial$-chiusa Ψ su U tale che $\Psi|_{U\cap L} = \psi$.

Per prolungare funzioni olomorfe da un iperpiano è dunque sufficiente che $H^{(0,1)}(U) = 0$.

Dimostrazione. Con una traslazione e un'applicazione lineare supponiamo $L = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = 0\}$. Scriviamo $z = (z', z_n)$ come al solito. Sia $\chi\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione liscia identicamente uguale a 1 in un intorno di $U \cap L$ e identicamente uguale a 0 in un intorno di $\{z \in U : (z', 0) \notin U \cap L\}$. Si veda la figura 4.7.

Definiremo

$$\Psi(z) = \chi(z)\psi(z') + z_n\eta(z),$$

scegliendo η in modo che Ψ sia $\bar\partial$-chiusa. La forma Ψ è definita su U poiché χ è identicamente nulla dove ψ non è definita. Se troviamo una tale η, allora $\Psi|_{U\cap L} = \psi$. Per capire quale condizione imporre a η, calcoliamo $\bar\partial\Psi$. Dove ψ è definita si ottiene

$$\bar\partial\Psi = \bar\partial\chi \wedge \psi + \chi\cancelto{0}{\bar\partial\psi} + \cancelto{0}{\bar\partial z_n} \wedge \eta + z_n\bar\partial\eta = \bar\partial\chi \wedge \psi + z_n\bar\partial\eta.$$

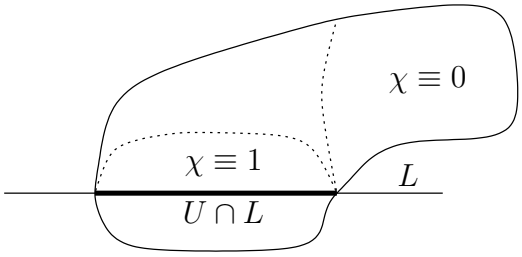


Figura 4.7: La funzione di taglio χ. Si ha $\chi \equiv 0$ in un intorno dei punti in cui il prolungamento di ψ non è immediato.

Poiché $\bar\partial\chi$ vale 0 in un intorno di $U\cap L$, la forma $\frac{-\bar\partial\chi\wedge\psi}{z_n}$ si prolunga in modo liscio attraverso $U\cap L$. È inoltre una $(p,q+1)$-forma liscia su tutto U, perché $\bar\partial\chi$ è identicamente nulla in un intorno dei punti in cui ψ non è definita. La forma è $\bar\partial$-chiusa perché $\bar\partial^2=0$, $\bar\partial\psi=0$ e $1/z_n$ è olomorfa dove $\bar\partial\chi$ è diversa da zero. Per ipotesi esiste dunque η tale che $\bar\partial\eta=\frac{-\bar\partial\chi\wedge\psi}{z_n}$. La dimostrazione è conclusa. □

Il prolungamento è possibile anche a partire dagli insiemi di zeri di funzioni olomorfe, ossia dalle sottovarietà analitiche (capitolo 6), oltre che dagli iperpiani. È il teorema di prolungamento di Cartan, che non dimostriamo. Per esercizio si consideri tuttavia il caso di due iperpiani.

Esercizio 4.5.5. Siano $U\subset\mathbb{C}^n$ un aperto con $H^{(p,q+1)}(U)=0$ e L_1 e L_2 due iperpiani affini tali che $U\cap L_1\cap L_2=\emptyset$. Siano ψ_1 una (p,q)-forma liscia $\bar\partial$-chiusa su $U\cap L_1$ e ψ_2 una (p,q)-forma liscia $\bar\partial$-chiusa su $U\cap L_2$. Mostrare che esiste una (p,q)-forma liscia $\bar\partial$-chiusa Ψ su U con $\Psi|_{U\cap L_1}=\psi_1$ e $\Psi|_{U\cap L_2}=\psi_2$.

Nel seguito, quando consideriamo $U\cap L$ come aperto dell'iperpiano L, lo identifichiamo con un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}$. Più in generale, se L è un sottospazio affine di dimensione k, trattiamo $U\cap L$ come un aperto di $\mathbb{C}^k$.[40]

Corollario 4.5.4. Siano $U\subset\mathbb{C}^n$ un aperto, L un iperpiano affine e $q\geq 1$. Se $H^{(p,q)}(U)=0$ e $H^{(p,q+1)}(U)=0$, allora $H^{(p,q)}(U\cap L)=0$.

Dimostrazione. Sia ψ una (p,q)-forma $\bar\partial$-chiusa su $U\cap L$. Poiché $H^{(p,q+1)}(U)=0$, per il teorema precedente esiste una (p,q)-forma $\bar\partial$-chiusa Ψ su U tale che $\Psi|_{U\cap L}=\psi$. Poiché $H^{(p,q)}(U)=0$, esiste una $(p,q-1)$-forma Φ su U con $\bar\partial\Phi=\Psi$. È facile verificare l'identità $(\bar\partial\Phi)|_{U\cap L}=\bar\partial(\Phi|_{U\cap L})$, valida per ogni forma. Dunque $\varphi=\Phi|_{U\cap L}$ risolve $\bar\partial\varphi=\psi$. □

Esercizio 4.5.6. Verificare che per ogni (p,q)-forma vale $(\bar\partial\Phi)|_{U\cap L}=\bar\partial(\Phi|_{U\cap L})$.

Segue subito un altro corollario.

Corollario 4.5.5. Siano $U\subset\mathbb{C}^n$ un aperto tale che $H^{(0,q)}(U)=0$ per ogni $1\leq q\leq n-1$ e L un iperpiano affine. Allora $H^{(0,q)}(U\cap L)=0$ per ogni $1\leq q\leq n-2$.

Esercizio 4.5.7. Dimostrare un corollario più generale. Siano $U\subset\mathbb{C}^n$ un dominio e L un sottospazio affine di dimensione k con $1\leq k\leq n-1$. Se $H^{(0,q)}(U)=0$ per ogni $1\leq q\leq n-1$, allora $H^{(0,q)}(U\cap L)=0$ per ogni $1\leq q\leq k-1$ e ogni $f\in\mathcal{O}(U\cap L)$ ammette un prolungamento olomorfo a U.

[40] Nell'originale compare $\mathbb{C}^{n-k}$; lo spazio ambiente ha qui la dimensione del sottospazio affine. [N.d.T.]

Dimostriamo ora in dimensione arbitraria una delle implicazioni del teorema menzionato nella sezione precedente. Con una costruzione diretta si è visto per esercizio che, se $H^{(0,1)}(U) = 0$ in $\mathbb{C}^2$, allora U è un dominio di olomorfia. Estendiamo il risultato a $\mathbb{C}^n$.

Teorema 4.5.6. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio tale che $H^{(0,q)}(U) = 0$ per ogni $1 \leq q \leq n-1$. Allora U è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione. Per $n = 1$ l'ipotesi dice soltanto che U è un dominio e ogni dominio in $\mathbb{C}$ è di olomorfia. Supponiamo il teorema valido per ogni dominio in $\mathbb{C}^{n-1}$.

Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e siano V e W aperti di $\mathbb{C}^n$ tali che $\emptyset \neq V \subset U \cap W$, W sia connesso e W contenga punti esterni a U. Si tratta della configurazione di V e W che compare nella definizione di dominio di olomorfia. Vogliamo mostrare che esiste almeno una $F \in \mathcal{O}(U)$ per cui non vi è alcuna $G \in \mathcal{O}(W)$ tale che $F = G$ su V. Consideriamo una componente di $W \cap U$ che contenga una componente di V. Senza perdita di generalità, per V possiamo prendere una piccola palla in tale componente di $W \cap U$. Non è difficile verificare (esercizio) che, spostandola se necessario, si può scegliere V in modo che esista un punto $z_0 \in \partial U \cap \partial V \cap W$.

Esercizio 4.5.8. Dimostrare l'esistenza di una tale V.

Esiste un iperpiano affine L passante per z_0 tale che la frontiera di $V \cap L$ nella topologia di L contenga z_0. Quindi anche la frontiera di $U \cap L$ nella topologia di L contiene z_0. Qui usiamo il fatto che V è una palla: basta scegliere L contenente la direzione normale al bordo di V in z_0. Si veda la figura 4.8. Per il corollario 4.5.5 si ha $H^{(0,q)}(U \cap L) = 0$ per $1 \leq q \leq n-2$. Per l'ipotesi induttiva e l'esercizio 4.4.7, ogni componente di $U \cap L$ è un dominio di olomorfia. Poiché z_0 appartiene alla frontiera di $U \cap L$, esiste $f \in \mathcal{O}(U \cap L)$ che non si prolunga lungo L attraverso z_0. Essendo $H^{(0,1)}(U) = 0$, esiste $F \in \mathcal{O}(U)$ tale che $F|_{U \cap L} = f$. Se esistesse $G \in \mathcal{O}(W)$ coincidente con F su V, allora $G|_{W \cap L}$ prolungherebbe f attraverso z_0, il che è impossibile. Dunque una tale G non esiste. □

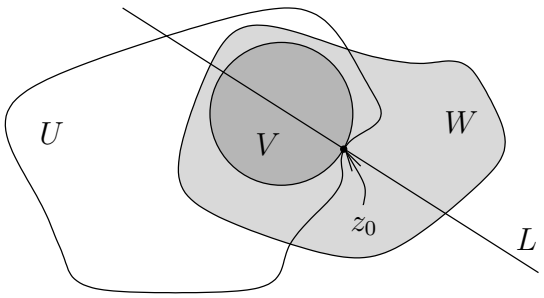


Figura 4.8: Posizione di z_0, della palla V e dell'iperpiano L rispetto a U e W.

Nella dimostrazione abbiamo usato l'annullamento della coomologia per ottenere il prolungamento. In effetti basta poter prolungare da rette complesse, cioè da sottospazi affini di dimensione 1, perché in tal caso le componenti di $U \cap L$ sono sempre domini di olomorfia. La sola proprietà di prolungamento dagli iperpiani, invece, non è sufficiente: si veda l'esercizio 4.5.12.

Teorema 4.5.7. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio tale che, per ogni retta complessa L e ogni $f \in \mathcal{O}(U \cap L)$, esista $F \in \mathcal{O}(U)$ con $F|_{U \cap L} = f$. Allora U è un dominio di olomorfia.

Esercizio 4.5.9. Dimostrare il teorema 4.5.7.

Esercizio 4.5.10. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio di olomorfia e L un sottospazio affine di dimensione k. Mostrare che ogni componente di $U \cap L$ è un dominio di olomorfia.

Esercizio 4.5.11. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $H^{(0,q)}(U) = 0$ per ogni $1 \leq q \leq n-k$. Se per ogni sottospazio affine L di dimensione k ciascuna componente di $U \cap L$ è un dominio di olomorfia, dimostrare che U è un dominio di olomorfia.

Esercizio 4.5.12. Il prolungamento dagli iperpiani non basta. Trovare un dominio $U \subset \mathbb{C}^3$ che non sia di olomorfia e tale che per ogni iperpiano affine L e ogni $f \in \mathcal{O}(U \cap L)$ esista $F \in \mathcal{O}(U)$ con $F|_{U\cap L} = f$. *Suggerimento.* Modificare l'esempio 4.5.1.

Osservazione 4.5.8. Abbiamo incontrato diverse condizioni equivalenti affinché un dominio sia di olomorfia, anche se non abbiamo dimostrato tutte le implicazioni. Per un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ sono equivalenti le condizioni seguenti.

(i) U è un dominio di olomorfia.

(ii) U è pseudoconvesso nel senso di Levi (quando U ha frontiera liscia).

(iii) U è pseudoconvesso nel senso di Hartogs, cioè ammette una funzione di esaustione continua e plurisubarmonica.

(iv) $-\log \rho(z)$ è plurisubarmonica, dove ρ è la distanza da ∂U.

(v) U è convesso rispetto alle funzioni plurisubarmoniche.

(vi) U è olomorficamente convesso.

(vii) Vale $\operatorname{dist}(K, \partial U) = \operatorname{dist}(\hat{K}_U, \partial U)$ per ogni $K \subset\subset U$.

(viii) Vale $H^{(0,q)}(U) = 0$ per ogni $1 \leq q \leq n-1$.

(ix) Ogni $f \in \mathcal{O}(U \cap L)$ si prolunga olomorficamente a U per ogni retta complessa L.

4.6 I problemi di Cousin

In molti libri di analisi complessa in una variabile, un capitolo è dedicato al teorema di Mittag-Leffler sull'esistenza di una funzione meromorfa con poli assegnati, e un altro a un teorema di Weierstrass sull'esistenza di una funzione olomorfa con un insieme di zeri assegnato. In più variabili complesse i problemi analoghi prendono rispettivamente il nome di primo e secondo problema di Cousin.[41] Il primo problema di Cousin è la versione additiva e dà l'analogo del teorema di Mittag-Leffler. Il secondo è la versione moltiplicativa e dà l'analogo del teorema di Weierstrass.

Definizione 4.6.1. *(Primo problema di Cousin).* Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, sia $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un ricoprimento aperto di U e, ogni volta che $U_\iota \cap U_\kappa \neq \emptyset$, sia data $h_{\iota\kappa} \in \mathcal{O}(U_\iota \cap U_\kappa)$ in modo che

$$\begin{aligned} h_{\iota\kappa} + h_{\kappa\iota} &= 0 \qquad\quad \text{in } U_\iota \cap U_\kappa, \\ h_{\iota\kappa} + h_{\kappa\lambda} + h_{\lambda\iota} &= 0 \quad \text{in } U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda. \end{aligned}$$

Il ricoprimento e le funzioni $h_{\iota\kappa}$ costituiscono i *dati del primo problema di Cousin.* Una *soluzione del primo problema di Cousin* è una famiglia di funzioni olomorfe $f_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota)$ tali che

$$h_{\iota\kappa} = f_\iota - f_\kappa.$$

È chiaro che, se le f_ι esistono, le loro differenze soddisfano le due condizioni. La difficoltà sta nel percorso inverso, ossia nel trovare le f_ι a partire dalle $h_{\iota\kappa}$. Potremmo sempre supporre distinti gli indici ι, κ e λ. La prima condizione implica infatti $h_{\iota\iota} = 0$ per ogni ι e quindi, se due indici coincidono, la seconda condizione si riduce alla prima.

Esercizio 4.6.1. Dalla condizione sulla somma di tre termini segue una condizione analoga per 4 o più addendi. La sola condizione sulla somma di due termini è invece insufficiente.

1. Trovare un esempio in cui valga la prima condizione $h_{\iota\kappa}+h_{\kappa\iota} = 0$ ma non la seconda, $h_{\iota\kappa} + h_{\kappa\lambda} + h_{\lambda\iota} = 0$.

2. Dimostrare che, se valgono entrambe le condizioni (ossia se abbiamo effettivamente dati del primo problema di Cousin), allora $h_{\iota\kappa}+h_{\kappa\lambda}+h_{\lambda\mu}+h_{\mu\iota} = 0$, e analogamente per un numero qualsiasi di termini.

Per comprendere il rapporto con Mittag-Leffler, osserviamo che si potrebbe enunciare quest'ultimo teorema assegnando localmente delle funzioni meromorfe e cercando poi di raccordarle. Ricordiamo che una funzione meromorfa è localmente il quoziente di due funzioni olomorfe. Supponiamo dunque di avere un ricoprimento $\{U_\iota\}$ e, in ogni U_ι, una funzione meromorfa g_ι tale che $g_\iota - g_\kappa$ sia olomorfa in $U_\iota \cap U_\kappa$ (più precisamente, ammetta un prolungamento olomorfo a tale insieme). In una variabile ciò significa che le due funzioni hanno la stessa parte principale. Si cerca una funzione meromorfa globale con lo stesso comportamento singolare (la stessa parte principale).

Su $U_\iota \cap U_\kappa$ poniamo

$$h_{\iota\kappa} = g_\iota - g_\kappa.$$

Si verifica subito che si ottengono dati del primo problema di Cousin. Se questo problema è risolubile in U, esistono funzioni olomorfe f_ι come sopra. Definiamo una funzione meromorfa f su U ponendo in ciascun U_ι

$$f = g_\iota - f_\iota.$$

[41] Il nome ricorda il matematico francese Pierre Cousin e non una lite fra cugini.

La funzione è ben definita. Infatti su $U_\iota \cap U_\kappa$ le due espressioni possibili sono $g_\iota - f_\iota$ e $g_\kappa - f_\kappa$, e la loro differenza è nulla:

$$(g_\iota - f_\iota) - (g_\kappa - f_\kappa) = (g_\iota - g_\kappa) + (f_\kappa - f_\iota) = h_{\iota\kappa} + h_{\kappa\iota} = 0.$$

La funzione f ha la stessa singolarità di g_ι in U_ι, poiché $f - g_\iota$ è olomorfa.

I dati forniscono dunque soluzioni locali di un problema e la soluzione del problema di Cousin permette di incollarle in una soluzione globale. Enunciamo il risultato sotto forma di proposizione. Vale anche il viceversa, che qui non dimostriamo.

Proposizione 4.6.2. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un ricoprimento aperto di U e g_ι funzioni meromorfe sui rispettivi U_ι, tali che $g_\iota - g_\kappa$ sia olomorfa su $U_\iota \cap U_\kappa$. Se il primo problema di Cousin è risolubile su U, esiste una funzione meromorfa f su U tale che, in ogni U_ι, $f - g_\iota$ è olomorfa.

In una variabile il primo problema di Cousin (ossia quello di Mittag-Leffler) è risolubile in ogni dominio di $\mathbb{C}$. In più variabili è risolubile nei domini di olomorfia di $\mathbb{C}^n$. In particolare, è risolubile quando sappiamo risolvere il problema del $\bar\partial$ per le forme di bigrado $(0,1)$.

Esempio 4.6.3. Vediamo un caso in cui il primo problema di Cousin non è risolubile. Prendiamo $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, per il quale sappiamo che $H^{(0,1)}(U)$ non è banale. Scriviamo $U = U_1 \cup U_2$ con $U_1 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z \neq 0\}$ e $U_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : w \neq 0\}$. Su $U_1 \cap U_2$ poniamo

$$h_{12}(z,w) = \frac{1}{zw}, \quad h_{21}(z,w) = \frac{-1}{zw}.$$

Queste funzioni olomorfe costituiscono dati del primo problema di Cousin. Supponiamo che il problema sia risolubile e che esistano $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ e $f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$ tali che su $U_1 \cap U_2$ valga

$$f_1 - f_2 = h_{12} = \frac{1}{zw}.$$

In altri termini $f_1 = \frac{1}{zw} + f_2$ su $U_1 \cap U_2$. Allora zf_1 si prolunga olomorficamente a U_2, quindi a U e di conseguenza a $\mathbb{C}^2$. Analogamente wf_2 si prolunga olomorficamente a $\mathbb{C}^2$. Pertanto $zwf_1 - zwf_2$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}^2$ che si annulla nell'origine. D'altra parte $zwf_1 - zwf_2 = zw(h_{12}) \equiv 1$ su $U_1 \cap U_2$, e si ha una contraddizione.

Il primo problema di Cousin con dati lisci ammette soluzioni lisce in ogni dominio.

Lemma 4.6.4. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto, $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un ricoprimento aperto di U e $h_{\iota\kappa}$ dati lisci (non necessariamente olomorfi) del primo problema di Cousin. Esistono allora funzioni lisce f_ι (non necessariamente olomorfe) che risolvono il problema.

Dimostrazione. Scegliamo una partizione liscia dell'unità $\{\varphi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ subordinata al ricoprimento $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$. Le φ_γ sono dunque funzioni lisce su U a valori in $[0,1]$, la cui somma in ogni punto è 1. In un intorno di ogni punto solo un numero finito di φ_γ è diverso da zero. Il supporto di ogni φ_γ è contenuto in qualche U_κ. Indichiamo un tale indice $\kappa \in I$ con κ_γ. Per $z \in U_\iota$ poniamo

$$f_\iota(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(z) h_{\iota\kappa_\gamma}(z).$$

Verifichiamo che l'espressione è ben definita e liscia. Fissati $z \in U_\iota$ e un indice γ, e quindi κ_γ, o $\varphi_\gamma = 0$ in un intorno di z, oppure $z \in U_{\kappa_\gamma} \cap U_\iota$. Ogni termine si interpreta perciò

come una funzione liscia su U_ι. In un intorno di z si somma al più un numero finito di funzioni lisce, cosicché f_ι è liscia in U_ι. Per $z \in U_\iota \cap U_\lambda$ si ha

$$f_\iota(z) - f_\lambda(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(z)\big(h_{\iota\kappa_\gamma}(z) - h_{\lambda\kappa_\gamma}(z)\big) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(z) h_{\iota\lambda}(z) = h_{\iota\lambda}(z).$$

□

Il primo problema di Cousin per funzioni olomorfe è risolubile in ogni dominio di olomorfia e, più in generale, in ogni dominio il cui primo gruppo di coomologia di Dolbeault sia banale.

Teorema 4.6.5. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio tale che $H^{(0,1)}(U) = 0$. Allora il primo problema di Cousin è risolubile.

Dimostrazione. Siano $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un ricoprimento aperto di U e $h_{\iota\kappa}$ dati olomorfi del primo problema di Cousin. Per il lemma esistono soluzioni lisce f_ι. Le f_ι possono non essere olomorfe, ma le differenze $f_\iota - f_\kappa = h_{\iota\kappa}$ sono olomorfe, perciò $\bar\partial f_\iota - \bar\partial f_\kappa = \bar\partial(f_\iota - f_\kappa) = 0$. La forma di bigrado $(0,1)$ denotata con η e data da

$$\eta = \bar\partial f_\iota$$

è dunque ben definita su U. Inoltre η è $\bar\partial$-chiusa, quindi per l'ipotesi su U esiste una funzione liscia ψ tale che $\bar\partial\psi = \eta$. In ogni U_ι poniamo

$$F_\iota = f_\iota - \psi.$$

Su $U_\iota \cap U_\kappa$ si ha

$$F_\iota - F_\kappa = f_\iota - f_\kappa = h_{\iota\kappa},$$

e su U_ι si ha

$$\bar\partial F_\iota = \bar\partial f_\iota - \bar\partial\psi = \eta - \eta = 0.$$

Pertanto le F_ι risolvono il primo problema di Cousin. □

Corollario 4.6.6. Il primo problema di Cousin è risolubile in ogni polidisco di $\mathbb{C}^n$, anche illimitato.

Esercizio 4.6.2. Usare la soluzione del problema del $\bar\partial$ nel polidisco per dimostrare che, se il primo problema di Cousin è risolubile in un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, allora $H^{(0,1)}(U) = 0$. *Suggerimento.* Risolvere il problema localmente e seguire poi lo stesso procedimento usato sopra per raccordare le funzioni meromorfe.

Esercizio 4.6.3. Formulare una versione del primo problema di Cousin per funzioni continue a valori interi su domini di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che il problema non è sempre risolubile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Accenniamo ora al secondo problema di Cousin e ai suoi rapporti con il primo problema e con il teorema di Weierstrass.

Definizione 4.6.7. *(Secondo problema di Cousin).* Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un ricoprimento aperto di U. Per ogni coppia di indici tale che $U_\iota \cap U_\kappa \neq \emptyset$ siano date funzioni $h_{\iota\kappa} \in \mathcal{O}(U_\iota \cap U_\kappa)$ che non si annullano mai e soddisfano

$$\begin{aligned} h_{\iota\kappa}h_{\kappa\iota} &= 1 \qquad \text{in } U_\iota \cap U_\kappa, \\ h_{\iota\kappa}h_{\kappa\lambda}h_{\lambda\iota} &= 1 \quad \text{in } U_\iota \cap U_\kappa \cap U_\lambda. \end{aligned}$$

Il ricoprimento e le funzioni $h_{\iota\kappa}$ costituiscono i *dati del secondo problema di Cousin*. Una *soluzione del secondo problema di Cousin* è una famiglia di funzioni olomorfe mai nulle $f_\iota \in \mathcal{O}(U_\iota)$ tali che

$$h_{\iota\kappa} = \frac{f_\iota}{f_\kappa}.$$

Il secondo problema di Cousin è l'analogo del teorema di fattorizzazione di Weierstrass: si cerca una funzione con un insieme di zeri assegnato. Supponiamo che $M \subset U$ sia definito localmente dall'annullarsi di una sola funzione olomorfa con differenziale non nullo (sia cioè una sottovarietà complessa di codimensione 1).[42] In altri termini, per ogni $p \in U$ esistono un intorno U_ι e una funzione olomorfa g_ι con $dg_\iota \neq 0$ tali che $g_\iota^{-1}(0) = M \cap U_\iota$. Su $U_\iota \cap U_\kappa$ poniamo

$$h_{\iota\kappa} = \frac{g_\iota}{g_\kappa}.$$

Esercizio 4.6.4. Dimostrare che $h_{\iota\kappa}$ è olomorfa e non si annulla mai.

Abbiamo così dati del secondo problema di Cousin. Se il problema è risolubile, esistono le f_ι della definizione. Definiamo una funzione olomorfa f su U ponendo in ogni U_ι

$$f = \frac{g_\iota}{f_\iota}.$$

Come sopra, la funzione è ben definita e si annulla precisamente su M. Inoltre il suo differenziale non si annulla su M. Enunciamo il risultato come proposizione.

Proposizione 4.6.8. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio sul quale il secondo problema di Cousin è risolubile e $M \subset U$ un'ipersuperficie complessa (localmente l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa con differenziale non nullo). Esiste allora $f \in \mathcal{O}(U)$ tale che $f^{-1}(0) = M$ e $df \neq 0$ su M.

A differenza del primo problema di Cousin, il secondo non è risolubile in ogni dominio di olomorfia: occorre una condizione aggiuntiva sulla topologia del dominio. È interessante osservare che in un dominio di olomorfia l'esistenza di una soluzione anche solo continua del secondo problema di Cousin implica l'esistenza di una soluzione olomorfa. Omettiamo la dimostrazione, ma vediamo come nasce l'ostruzione topologica. Siano dati $h_{\iota\kappa}$ per il secondo problema di Cousin. Raffiniamo il ricoprimento affinché gli insiemi U_ι e le loro intersezioni $U_\iota \cap U_\kappa$ siano semplicemente connessi. Prendiamo i logaritmi $g_{\iota\kappa} = \log h_{\iota\kappa}$, scegliendo i rami in modo che $g_{\kappa\iota} = -g_{\iota\kappa}$ e quindi $g_{\iota\kappa} + g_{\kappa\iota} = 0$. Per la somma di tre termini otteniamo

$$g_{\iota\kappa} + g_{\kappa\lambda} + g_{\lambda\iota} = 2\pi i m_{\iota\kappa\lambda}$$

per un opportuno intero $m_{\iota\kappa\lambda}$. Non è sempre possibile scegliere i rami in modo che $m_{\iota\kappa\lambda} = 0$ per ogni terna di indici. Se lo fosse, potremmo cercare di risolvere il corrispondente primo problema di Cousin. Si tratta di una questione di ordinaria coomologia singolare, ossia di topologia.[43]

[42] L'ipotesi sul differenziale non è necessaria. La adottiamo per semplicità.

[43] Per il lettore interessato, la condizione coomologica aggiuntiva che occorre è $H^2(U, \mathbb{Z}) = 0$.

Esercizio 4.6.5. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con $H^{(0,1)}(U) = 0$ e $M \subset U$ un'ipersuperficie complessa. Supponiamo che esista una funzione continua g su U tale che, per ogni $p \in M$, se r è una funzione definente locale per M (olomorfa con differenziale non nullo), allora r/g si prolunga a una funzione continua mai nulla in un intorno di p. Dimostrare che esiste $f \in \mathcal{O}(U)$ tale che $f^{-1}(0) = M$ e $df \neq 0$ su M. *Suggerimento.* Prendere un ricoprimento con palle U_ι e in ciascuna definire $\log(r_\iota/g)$. Si ottengono così dati del primo problema di Cousin.

Esercizio 4.6.6. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e si supponga che il secondo problema di Cousin vi sia risolubile (in $\mathbb{C}$ lo è sempre). Usare il secondo problema di Cousin per dimostrare il teorema classico di Weierstrass. Precisamente, assegnati un insieme numerabile di punti di U e le rispettive molteplicità, supponendo che l'insieme non abbia punti di accumulazione in U, trovare una funzione $f \in \mathcal{O}(U)$ che si annulli precisamente nei punti assegnati, in ciascuno con la molteplicità assegnata.

5 Nuclei integrali

5.1 Il nucleo di Bochner–Martinelli

Una generalizzazione della formula di Cauchy a più variabili è la formula integrale di Bochner–Martinelli, che per $n = 1$ si riduce alla formula di Cauchy (di Cauchy–Pompeiu). Come per la formula di Cauchy, dimostreremo la formula per tutte le funzioni lisce mediante il teorema di Stokes. Definiamo anzitutto il *nucleo di Bochner–Martinelli*:

$$\omega(\zeta, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{\|\zeta - z\|^{2n}} \, d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_k} \wedge d\zeta_k \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta_n.$$

Il segno $\widehat{d\bar{\zeta}_k}$ indica che il fattore sottostante va omesso.

Teorema 5.1.1. *(Bochner–Martinelli).* Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto limitato con frontiera liscia e sia $f \colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ una funzione liscia. Allora, per $z \in U$,

$$f(z) = \int_{\partial U} f(\zeta)\omega(\zeta, z) - \int_U \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \omega(\zeta, z).$$

In particolare, se $f \in \mathcal{O}(U)$,

$$f(z) = \int_{\partial U} f(\zeta)\omega(\zeta, z).$$

Ricordiamo che, se $\zeta = x + iy$ sono le coordinate in $\mathbb{C}^n$, l'orientazione scelta in questo libro per $\mathbb{C}^n$[44] è quella corrispondente alla forma di volume

$$dV = dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

Con questa orientazione

$$d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_n = (-2i)^n dV,$$

e quindi

$$d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta_n = (2i)^n dV.$$

Esercizio 5.1.1. Come nella formula di Cauchy–Pompeiu, il secondo termine della formula di Bochner–Martinelli presenta una singolarità. Dimostrare che l'integrale ha comunque senso, ossia che la funzione è integrabile.

Esercizio 5.1.2. Verificare che per $n = 1$ la formula di Bochner–Martinelli si riduce all'usuale formula di Cauchy–Pompeiu.

Si richiamino la definizione 4.4.1 di ∂ e $\bar{\partial}$ e l'identità $d\eta = \partial\eta + \bar{\partial}\eta$.

Dimostrazione del teorema di Bochner–Martinelli. La dimostrazione segue essenzialmente quella del teorema di Cauchy–Pompeiu per $n = 1$, anche se alcune formule sono più elaborate.

Fissiamo $z \in U$. Prendiamo $r > 0$ così piccolo che $\overline{B_r(z)} \subset U$. Orientiamo positivamente sia ∂U sia $\partial B_r(z)$. Poiché $f(\zeta)\omega(\zeta, z)$ contiene tutti i differenziali olomorfi $d\zeta_k$, si

[44] Ricordiamo che non esiste un'orientazione canonica di $\mathbb{C}^n$, e non tutti gli autori seguono questa convenzione, forse la più diffusa.

ha

$$\begin{aligned} d(f(\zeta)\omega(\zeta,z)) &= \bar\partial(f(\zeta)\omega(\zeta,z)) \\ &= \bar\partial f(\zeta)\wedge\omega(\zeta,z) \\ &\quad + f(\zeta)\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial\bar\zeta_k}\left[\frac{\bar\zeta_k-\bar z_k}{\|\zeta-z\|^{2n}}\right] d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Calcolando si ottiene

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial\bar\zeta_k}\left[\frac{\bar\zeta_k-\bar z_k}{\|\zeta-z\|^{2n}}\right] = \sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{\|\zeta-z\|^{2n}} - n\frac{|\zeta_k-z_k|^2}{\|\zeta-z\|^{2n+2}}\right) = 0.$$

Pertanto $d(f(\zeta)\omega(\zeta,z)) = \bar\partial f(\zeta)\wedge\omega(\zeta,z)$. Il teorema di Stokes dà

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} f(\zeta)\omega(\zeta,z) - \int_{\partial B_r(z)} f(\zeta)\omega(\zeta,z) &= \int_{U\setminus\overline{B_r(z)}} d(f(\zeta)\omega(\zeta,z)) \\ &= \int_{U\setminus\overline{B_r(z)}} \bar\partial f(\zeta)\wedge\omega(\zeta,z). \end{aligned}$$

Grazie all'integrabilità dimostrata in un esercizio precedente, il secondo membro converge all'integrale su U per $r\to 0$. Come per la formula di Cauchy–Pompeiu, resta da dimostrare che l'integrale su $\partial B_r(z)$ tende a $f(z)$ per $r\to 0$.

Scriviamo dunque

$$\int_{\partial B_r(z)} f(\zeta)\omega(\zeta,z) = f(z)\int_{\partial B_r(z)}\omega(\zeta,z) + \int_{\partial B_r(z)}(f(\zeta)-f(z))\omega(\zeta,z).$$

Per concludere dimostreremo che $\int_{\partial B_r(z)}\omega(\zeta,z) = 1$ e che il secondo termine tende a zero. Applichiamo nuovamente il teorema di Stokes, tenendo presente che il volume di $B_r(z)$ è $\frac{\pi^n}{n!}r^{2n}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_r(z)}\omega(\zeta,z) \\ &\quad= \int_{\partial B_r(z)}\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^n\frac{\bar\zeta_k-\bar z_k}{\|\zeta-z\|^{2n}}\, d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{d\bar\zeta_k}\wedge d\zeta_k\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n \\ &\quad= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{r^{2n}}\int_{\partial B_r(z)}\sum_{k=1}^n(\bar\zeta_k-\bar z_k)d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{d\bar\zeta_k}\wedge d\zeta_k\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n \\ &\quad= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{r^{2n}}\int_{B_r(z)} d\left(\sum_{k=1}^n(\bar\zeta_k-\bar z_k)d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge\widehat{d\bar\zeta_k}\wedge d\zeta_k\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n\right) \\ &\quad= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{r^{2n}}\int_{B_r(z)} n\, d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n \\ &\quad= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{r^{2n}}\int_{B_r(z)} n(2i)^n\, dV = 1. \end{aligned}$$

Passiamo al secondo termine. Con lo stesso calcolo di prima si trova

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_r(z)}(f(\zeta)-f(z))\omega(\zeta,z) \\ &\qquad= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{r^{2n}}\left(\int_{B_r(z)}(f(\zeta)-f(z))n\, d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n\right. \\ &\qquad\qquad\left. + \int_{B_r(z)}\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_k}(\zeta)(\bar\zeta_k-\bar z_k)\, d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n\right). \end{aligned}$$

Poiché U è limitato e f è liscia fino alla frontiera, valgono $|f(\zeta) - f(z)| \leq M\|\zeta - z\|$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(\zeta)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\right| \leq M\|\zeta - z\|$ per un'opportuna costante M nella palla in esame. Per ogni $\zeta \in B_r(z)$ si hanno dunque $|f(\zeta) - f(z)| \leq Mr$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}(\zeta)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\right| \leq Mr$. Ne segue che

$$\left|\int_{\partial B_r(z)} (f(\zeta) - f(z))\omega(\zeta, z)\right| \leq \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n}\frac{1}{r^{2n}}\left(\int_{B_r(z)} n2^n Mr\, dV + \int_{B_r(z)} n2^n Mr\, dV\right) = 2Mr.$$

Questo termine tende dunque a zero per $r \to 0$. □

Un inconveniente della formula di Bochner–Martinelli $\int_{\partial U} f(\zeta)\omega(\zeta, z)$ è che il nucleo non è olomorfo in z, salvo quando $n = 1$. La formula da sola non produce quindi funzioni olomorfe. Derivando rispetto a $\bar{z}$ sotto il segno di integrale su ∂U, non si ottiene necessariamente zero. D'altra parte, la formula è esplicita e non dipende da U. I nuclei di Bergman e di Szegő che incontreremo fra poco dipendono invece dal dominio, ma hanno le proprietà di olomorfia desiderate.

Esercizio 5.1.3. Dimostrare che, se $z \notin \overline{U}$, al posto di $f(z)$ nella formula si ottiene zero, ossia

$$\int_{\partial U} f(\zeta)\omega(\zeta, z) - \int_U \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \omega(\zeta, z) = 0.$$

Esercizio 5.1.4. Sia f olomorfa in un intorno di $\overline{B_r(z)}$.

1. Usando la formula di Bochner–Martinelli, dimostrare che

$$f(z) = \frac{1}{V(B_r(z))}\int_{B_r(z)} f(\zeta)\, dV(\zeta),$$

   dove $V(B_r(z))$ è il volume di $B_r(z)$.

2. Usare la prima parte per dimostrare il principio del massimo per le funzioni olomorfe.

Esercizio 5.1.5. Usare la formula di Bochner–Martinelli per risolvere il problema del $\bar{\partial}$ con supporto compatto. Precisamente, sia $g = g_1 d\bar{z}_1 + \cdots + g_n d\bar{z}_n$ una forma liscia di bigrado $(0, 1)$ a supporto compatto in $\mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, e supponiamo che $\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_\ell} = \frac{\partial g_\ell}{\partial \bar{z}_k}$ per ogni k, ℓ. Dimostrare che

$$\psi(z) = -\int_{\mathbb{C}^n} g(\zeta) \wedge \omega(\zeta, z)$$

è una soluzione liscia a supporto compatto di $\bar{\partial}\psi = g$. *Suggerimento.* Si rilegga la dimostrazione precedente.

5.2 Il nucleo di Bergman

Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Definiamo lo *spazio di Bergman* di U ponendo

$$A^2(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(U) \cap L^2(U).$$

Dunque $A^2(U)$ è lo spazio delle funzioni olomorfe $f \in \mathcal{O}(U)$ per cui

$$\|f\|^2_{A^2(U)} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|^2_{L^2(U)} = \int_U |f(z)|^2 dV < \infty.$$

Su $A^2(U)$ consideriamo il prodotto scalare di $L^2(U)$,

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_U f(z)\overline{g(z)}\, dV.$$

Dimostreremo che $A^2(U)$ è completo, ossia che è uno spazio di Hilbert. Dimostriamo anzitutto che la norma di $A^2(U)$ maggiora, a meno di una costante, la norma uniforme sui compatti.

Lemma 5.2.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e sia $K \subset\subset U$ un compatto. Esiste una costante C_K tale che

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_{A^2(U)} \qquad \text{per ogni } f \in A^2(U).$$

Di conseguenza $A^2(U)$ è completo.

Dimostrazione. Poiché K è compatto, esiste $r > 0$ tale che $\overline{\Delta_r(z)} \subset U$ per ogni $z \in K$. Fissiamo un punto qualsiasi $z \in K$. Per l'esercizio 1.2.10 e la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{V(\Delta_r(z))} \int_{\Delta_r(z)} f(\xi)\, dV(\xi) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi^n r^{2n}} \sqrt{\int_{\Delta_r(z)} 1^2\, dV(\xi)} \sqrt{\int_{\Delta_r(z)} |f(\xi)|^2\, dV(\xi)} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|f\|_{A^2(\Delta_r(z))} \leq \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|f\|_{A^2(U)}. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore per $z \in K$ otteniamo la stima. Se dunque $\{f_\ell\}$ è una successione in $A^2(U)$ convergente in $L^2(U)$ a una funzione $f \in L^2(U)$, essa converge uniformemente sui compatti e il limite ha un rappresentante olomorfo, cioè $f \in \mathcal{O}(U)$. Pertanto $A^2(U)$ è un sottospazio chiuso di $L^2(U)$ ed è quindi completo. □

Per un dominio limitato $A^2(U)$ ha sempre dimensione infinita, come si vedrà in un esercizio. Esistono domini illimitati per cui $A^2(U)$ è banale (contiene soltanto la funzione nulla, per esempio quando $U = \mathbb{C}^n$) e persino domini per cui ha dimensione finita positiva. Quando $n = 1$, $A^2(U)$ è banale oppure ha dimensione infinita.[45]

Esercizio 5.2.1. Dimostrare che, se il dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ è limitato, $A^2(U)$ ha dimensione infinita.

[45] Per esempi di spazi $A^2(U)$ di dimensione finita positiva con $n \geq 2$ e per il risultato in dimensione $n = 1$, si veda J. J. O. O. Wiegerinck, *Domains with finite dimensional Bergman space*, Math. Z. **187** (1984), 559–562.

Esercizio 5.2.2.

1. Dimostrare che $A^2(\mathbb{C}^n)$ è banale (contiene soltanto la funzione nulla).
2. Dimostrare che $A^2(\mathbb{D} \times \mathbb{C})$ è banale.
3. Trovare un esempio di dominio illimitato U per cui $A^2(U)$ ha dimensione infinita. *Suggerimento.* Per semplicità, lavorare in una variabile.

Esercizio 5.2.3.

1. Dimostrare che $A^2(\mathbb{D})$ si può identificare con $A^2(\mathbb{D} \setminus \{0\})$, ossia che ogni funzione del secondo spazio si prolunga a una funzione del primo.
2. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathcal{O}(U)$ con f non identicamente nulla, e $X = f^{-1}(0)$. Dimostrare che ogni funzione di $A^2(U \setminus X)$ è la restrizione di una funzione di $A^2(U)$, ossia che $A^2(U) \cong A^2(U \setminus X)$.

Il lemma afferma in particolare che la valutazione in un punto è un funzionale lineare limitato. Infatti, fissato $z \in U$ e preso $K = \{z\}$, l'operatore lineare

$$f \mapsto f(z)$$

è limitato. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste $k_z \in A^2(U)$ tale che

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle.$$

Definiamo il *nucleo di Bergman* di U ponendo

$$K_U(z, \bar{\zeta}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{k_z(\zeta)}.$$

La funzione K_U è definita al variare di $(z, \bar{\zeta})$ in $U \times U^*$, dove scriviamo

$$U^* = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \bar{\zeta} \in U\}.$$

Per ogni $f \in A^2(U)$ vale dunque

$$f(z) = \int_U f(\zeta) K_U(z, \bar{\zeta})\, dV(\zeta). \tag{5.1}$$

Quest'ultima identità prende il nome di *proprietà riproducente* del nucleo.

Il nucleo di Bergman dipende da U, motivo per cui lo indichiamo con $K_U(z, \bar{\zeta})$.

Proposizione 5.2.2. Il nucleo di Bergman $K_U(z, \bar{\zeta})$ è olomorfo in z, antiolomorfo in ζ e soddisfa

$$\overline{K_U(z, \bar{\zeta})} = K_U(\zeta, \bar{z}).$$

Dimostrazione. Ciascuna k_z appartiene ad $A^2(U)$, quindi è olomorfa in ζ. Ne segue che K_U è antiolomorfo in ζ. Provando l'identità $\overline{K_U(z, \bar{\zeta})} = K_U(\zeta, \bar{z})$, avremo anche che K_U è olomorfo in z.

Poiché $\overline{K_U(z, \bar{\zeta})} = k_z(\zeta)$ appartiene ad $A^2(U)$, si ha

$$\begin{aligned}
\overline{K_U(z, \bar{\zeta})} &= \int_U \overline{K_U(z, \bar{w})} K_U(\zeta, \bar{w}) dV(w) \\
&= \overline{\left(\int_U \overline{K_U(\zeta, \bar{w})} K_U(z, \bar{w}) dV(w) \right)} = \overline{\overline{K_U(\zeta, \bar{z})}} = K_U(\zeta, \bar{z}).
\end{aligned}$$

□

Prendendo dunque $\bar{\zeta}$ come variabile, si vede che K_U è una funzione olomorfa di $2n$ variabili.

Esempio 5.2.3. Calcoliamo esplicitamente il nucleo di Bergman (e, già che ci siamo, anche il nucleo di Szegő della prossima sezione) per il disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, cioè f sia olomorfa in $\mathbb{D}$ e continua fino alla frontiera. Sia $z \in \mathbb{D}$. Allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Sulla circonferenza unitaria vale $\zeta\bar{\zeta} = 1$. Indichiamo con ds la misura di lunghezza d'arco sulla circonferenza parametrizzata da $\zeta = e^{is}$. Si ha $d\zeta = ie^{is}\, ds$, ossia $\bar{\zeta} d\zeta = i\, ds$, e quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} \bar{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}}\, ds.$$

Otteniamo così un ordinario integrale di linea: la singolarità che prima si trovava all'interno del disco unitario è scomparsa (l'abbiamo «riflessa» all'esterno). Il nucleo $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}$ è detto *nucleo di Szegő*. Ne parleremo brevemente nella prossima sezione. Applichiamo il teorema di Stokes al secondo integrale della catena precedente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} \bar{\zeta}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \left[\frac{\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right] d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2}\, dA(\zeta). \end{aligned}$$

Un candidato per il nucleo di Bergman del disco unitario è dunque

$$K_{\mathbb{D}}(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - z\bar{\zeta})^2}.$$

Che si tratti davvero del nucleo di Bergman segue dall'esercizio 5.2.5: $K_{\mathbb{D}}$ è l'unica funzione a simmetria hermitiana con la proprietà riproducente che, per ζ fissato, appartenga ad $A^2(\mathbb{D})$. Abbiamo dimostrato la formula solo per funzioni continue fino alla frontiera, ma queste sono dense in $A^2(\mathbb{D})$.

Esempio 5.2.4. In un esercizio abbiamo visto che $A^2(\mathbb{C}^n) = \{0\}$. Pertanto $K_{\mathbb{C}^n}(z, \bar{\zeta}) \equiv 0$.

Per un dominio più generale è difficile, e solitamente impossibile, calcolare esplicitamente il nucleo di Bergman. Disponiamo tuttavia della formula seguente.

Proposizione 5.2.5. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e sia $\{\varphi_\ell(z)\}_{\ell \in I}$ un sistema ortonormale completo per $A^2(U)$. Allora

$$K_U(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\ell \in I} \varphi_\ell(z) \overline{\varphi_\ell(\zeta)},$$

con convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di $U \times U^*$.

Dimostrazione. Per $\zeta \in U$ fissato, la funzione $z \mapsto K_U(z, \bar{\zeta})$ appartiene ad $A^2(U)$. Sviluppiamola rispetto alla base e applichiamo la proprietà riproducente di K_U:

$$K_U(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\ell \in I} \left(\int_U K_U(w, \bar{\zeta}) \overline{\varphi_\ell(w)}\, dV(w) \right) \varphi_\ell(z) = \sum_{\ell \in I} \overline{\varphi_\ell(\zeta)} \varphi_\ell(z).$$

Per ζ fissato si ha convergenza in L^2 come funzioni di z. Sia $K \subset\subset U$ un compatto. Per il lemma 5.2.1, la convergenza in L^2 per le funzioni di $A^2(U)$ implica la convergenza

uniforme sui compatti. Dunque, per ζ fissato, la convergenza è uniforme rispetto a $z \in K$. In particolare, si ha convergenza puntuale. Pertanto

$$\sum_{\ell \in I} |\varphi_\ell(z)|^2 = \sum_{\ell \in I} \varphi_\ell(z)\overline{\varphi_\ell(z)} = K_U(z, \bar{z}) \leq C_K < \infty,$$

dove C_K è l'estremo superiore del modulo di $K_U(z, \bar{\zeta})$ su $K \times K^*$. Per $(z, \bar{\zeta}) \in K \times K^*$ segue

$$\sum_{\ell \in I} \left|\varphi_\ell(z)\overline{\varphi_\ell(\zeta)}\right| \leq \sqrt{\sum_{\ell \in I} |\varphi_\ell(z)|^2} \sqrt{\sum_{\ell \in I} |\varphi_\ell(\zeta)|^2} \leq C_K < \infty.$$

Si ottiene così convergenza uniforme su $K \times K^*$. □

Esercizio 5.2.4.

1. Dimostrare che, se $U \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio limitato, $K_U(z, \bar{z}) > 0$ per ogni $z \in U$.
2. Perché la conclusione può cadere quando U è illimitato? Trovare un controesempio (banale).

Esercizio 5.2.5. Dimostrare che, dato un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, il nucleo di Bergman è l'unica funzione $K_U(z, \bar{\zeta})$ che soddisfi le seguenti condizioni:

1. per ζ fissato, $K_U(z, \bar{\zeta})$ appartiene ad $A^2(U)$;
2. vale $\overline{K_U(z, \bar{\zeta})} = K_U(\zeta, \bar{z})$;
3. vale la proprietà riproducente (5.1).

Esercizio 5.2.6. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ la palla unitaria oppure il polidisco unitario. Dimostrare che $A^2(U) \cap C(\overline{U})$ è denso in $A^2(U)$. Per riconoscere il nucleo di Bergman è quindi sufficiente verificare la proprietà riproducente sulle funzioni continue fino alla frontiera.

Esercizio 5.2.7. Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ due domini e sia $f \colon U \to V$ un biolomorfismo. Dimostrare che

$$K_U(z, \bar{\zeta}) = \det Df(z)\, \overline{\det Df(\zeta)}\, K_V\big(f(z), \overline{f(\zeta)}\big).$$

Esercizio 5.2.8. Dimostrare che il nucleo di Bergman del polidisco è

$$K_{\mathbb{D}^n}(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(1 - z_\ell \bar{\zeta}_\ell)^2}.$$

Esercizio 5.2.9. *(Difficile).* Dimostrare che, per opportune costanti c_α, tutti i monomi $\frac{z^\alpha}{c_\alpha}$ formano un sistema ortonormale completo per $A^2(\mathbb{B}_n)$. *Suggerimento.* Per provare l'ortogonalità, calcolare l'integrale in coordinate polari separatamente per ciascuna variabile, ponendo $z_\ell = r_\ell e^{i\theta_\ell}$ con $\theta \in [0, 2\pi]^n$ e $\sum_\ell r_\ell^2 < 1$. Per provare la completezza, mostrare che, se $f \in A^2(\mathbb{B}_n)$ è ortogonale a tutti i z^α, allora $f = 0$. Per ricavare esplicitamente $c_\alpha = \sqrt{\frac{\pi^n \alpha!}{(n+|\alpha|)!}}$ occorre la classica funzione β della teoria delle funzioni speciali.

Esercizio 5.2.10. Usando l'esercizio precedente, dimostrare che il nucleo di Bergman della palla unitaria è

$$K_{\mathbb{B}_n}(z, \bar{\zeta}) = \frac{n!}{\pi^n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{n+1}},$$

dove $\langle z, \zeta \rangle$ è il prodotto scalare usuale in $\mathbb{C}^n$.

5.3 Il nucleo di Szegő

Con la stessa tecnica costruiamo un nucleo riproducente sulla frontiera, partendo da $L^2(\partial U, d\sigma)$ anziché da $L^2(U)$. Nella formula così ottenuta l'integrazione avviene sulla frontiera del dominio. Ne daremo una breve descrizione senza entrare nei dettagli.

Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con frontiera liscia. Indichiamo con $C(\overline{U}) \cap \mathcal{O}(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe in U e continue fino alla frontiera. La restrizione di $f \in C(\overline{U}) \cap \mathcal{O}(U)$ a ∂U è continua, e quindi $f|_{\partial U}$ appartiene ad $L^2(\partial U, d\sigma)$, dove $d\sigma$ è la misura superficiale su ∂U. Prendendo la chiusura di queste restrizioni in $L^2(\partial U)$ si ottiene lo spazio di Hilbert $H^2(\partial U)$, detto *spazio di Hardy*. Il prodotto scalare su $H^2(\partial U)$ è quello di $L^2(\partial U, d\sigma)$,

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial U} f(z)\overline{g(z)}\, d\sigma(z).$$

Esercizio 5.3.1. Dimostrare che i monomi z^α costituiscono un sistema ortogonale completo in $H^2(\partial \mathbb{B}_n)$.

Esercizio 5.3.2. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio limitato con frontiera liscia. Dimostrare che $H^2(\partial U)$ ha dimensione infinita.

Data $f \in H^2(\partial U)$, consideriamo l'integrale di Poisson

$$Pf(z) = \int_{\partial U} f(\zeta)\, P(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

dove $P(z, \zeta)$ è il nucleo di Poisson. L'integrale di Poisson riproduce le funzioni armoniche. Poiché le funzioni olomorfe sono armoniche, se $f \in C(\overline{U}) \cap \mathcal{O}(U)$ si ha $Pf = f$.

Benché $f \in H^2(\partial U)$ sia definita solo sulla frontiera, l'integrale di Poisson ci fornisce i valori $Pf(z)$ per $z \in U$. Per ogni $z \in U$ l'applicazione

$$f \mapsto Pf(z)$$

è un funzionale lineare continuo. Come prima, esiste $s_z \in H^2(\partial U)$ tale che

$$Pf(z) = \langle f, s_z \rangle.$$

Per $z \in U$ e $\zeta \in \partial U$ poniamo

$$S_U(z, \bar{\zeta}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{s_z(\zeta)},$$

tenendo presente che, per z fissato, questa funzione è definita soltanto quasi ovunque, essendo un elemento di $L^2(\partial U, d\sigma)$. La funzione S_U si chiama *nucleo di Szegő*. Se $f \in H^2(\partial U)$, allora

$$Pf(z) = \int_{\partial U} f(\zeta)\, S_U(z, \bar{\zeta})\, d\sigma(\zeta).$$

Le funzioni di $H^2(\partial U)$ si prolungano a $\overline{U}$: possiamo quindi considerare $f \in H^2(\partial U)$ come una funzione su $\overline{U}$, i cui valori in U sono dati da Pf. Naturalmente, trattandosi del prolungamento di una funzione di classe L^2, i valori sulla frontiera sono definiti solo quasi ovunque. Analogamente prolunghiamo $S_U(z, \bar{\zeta})$ a una funzione su $U \times \overline{U}^*$. Enunciamo senza dimostrazione la formula seguente. Se $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in I}$ è un sistema ortonormale completo per $H^2(\partial U)$, allora

$$S_U(z, \bar{\zeta}) = \sum_{\ell \in I} \varphi_\ell(z)\overline{\varphi_\ell(\zeta)} \tag{5.2}$$

per $(z, \bar{\zeta}) \in U \times U^*$, con convergenza uniforme sui compatti. Come nel caso precedente, la formula mostra che S_U ha simmetria hermitiana, per cui si prolunga a $(U \times \overline{U}^*) \cup (\overline{U} \times U^*)$.

Esempio 5.3.1. Nell'esempio 5.2.3 abbiamo calcolato che, se $f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D})$, allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\bar{\zeta}} \, ds.$$

In altri termini, $S_{\mathbb{D}}(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}$.

Esercizio 5.3.3. Usando la formula (5.2), calcolare $S_{\mathbb{B}_n}$.

6 Varietà analitiche complesse

6.1 L'anello dei germi

Definizione 6.1.1. Sia p un punto di uno spazio topologico X. Siano Y un insieme e $U, V \subset X$ intorni aperti di p. Due funzioni $f\colon U \to Y$ e $g\colon V \to Y$ si dicono equivalenti se esiste un intorno W di p tale che $f|_W = g|_W$. Una classe di equivalenza, rispetto a questa relazione, di funzioni definite in intorni di p si chiama *germe di funzione*. Si indica il germe con (f, p), o semplicemente con f quando il contesto è chiaro. Di solito ci si limita a una determinata classe di funzioni, per esempio lisce oppure olomorfe.

I germi delle funzioni a valori complessi formano un anello commutativo. La verifica dei dettagli è richiesta nell'esercizio seguente. Per moltiplicare (f, p) e (g, p), per esempio, si prendono due rappresentanti f e g definiti su un intorno comune, si moltiplicano e si considera il germe (fg, p). Analogamente si definisce $(f, p) + (g, p)$ come $(f + g, p)$. Si verifica facilmente che queste operazioni sono ben definite.

Esercizio 6.1.1. Siano X uno spazio topologico e $p \in X$. Sia $\mathcal{F}$ una classe di funzioni a valori complessi definite su aperti di X, con le seguenti proprietà. Se $f\colon U \to \mathbb{C}$ appartiene a $\mathcal{F}$ e $W \subset U$ è aperto, allora $f|_W \in \mathcal{F}$. Inoltre, se f e g sono due funzioni di $\mathcal{F}$ e W è un aperto su cui sono entrambe definite, anche $fg|_W$ e $(f + g)|_W$ appartengono a $\mathcal{F}$. Si supponga che tutte le funzioni costanti appartengano a $\mathcal{F}$. Verificare che le operazioni di anello introdotte sopra sono ben definite sui germi in p di funzioni di $\mathcal{F}$ e che l'insieme dei germi in p delle funzioni di $\mathcal{F}$ è un anello commutativo.

Esercizio 6.1.2. Siano $X = Y = \mathbb{R}$ e $p = 0$. Si consideri l'anello dei germi di funzioni continue (oppure di funzioni lisce). Dimostrare che, per ogni funzione continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ogni intorno W di 0, esiste una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(f, 0) = (g, 0)$ e tuttavia $g|_W \neq f|_W$.

Il teorema di identità rende i germi particolarmente utili per le funzioni olomorfe. In particolare, il fenomeno dell'esercizio 6.1.2 non si verifica per le funzioni olomorfe. Inoltre, come si vedrà in un esercizio, l'anello dei germi di funzioni olomorfe si identifica con l'anello delle serie di potenze convergenti. Per le funzioni lisce non vale un risultato analogo.

Definizione 6.1.2. Sia $p \in \mathbb{C}^n$. Indichiamo con ${}_n\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p$ l'anello dei germi in p di funzioni olomorfe.

L'anello dei germi $\mathcal{O}_p$ ha molte proprietà interessanti e in genere si comporta meglio dell'anello $\mathcal{O}(U)$ per un aperto U. È quindi più comodo lavorare con i germi quando interessano le proprietà locali e si vuole prescindere dalla geometria di U.

Esercizio 6.1.3.

1. Dimostrare che $\mathcal{O}_p$ è un *dominio d'integrità* (non ha divisori dello zero).
2. Dimostrare che l'anello dei germi in $0 \in \mathbb{R}$ di funzioni lisce a valori reali non è un dominio d'integrità.

Esercizio 6.1.4. Dimostrare che le unità (gli elementi invertibili rispetto al prodotto) di $\mathcal{O}_p$ sono i germi delle funzioni che non si annullano in p.

Esercizio 6.1.5.

1. (Facile.) Dimostrare che, dato un germe $(f, p) \in \mathcal{O}_p$, esistono un intorno aperto fissato U di p e un rappresentante $f\colon U \to \mathbb{C}$ tali che ogni altro rappresentante g ammetta un prolungamento analitico da p a una funzione olomorfa su U.

2. (Facile.) Dati due rappresentanti $f\colon U \to \mathbb{C}$ e $g\colon V \to \mathbb{C}$ di un germe $(f, p) \in \mathcal{O}_p$, sia W la componente connessa di $U \cap V$ che contiene p. Dimostrare che $f|_W = g|_W$.

3. Trovare un germe $(f, p) \in \mathcal{O}_p$ tale che, per ogni suo rappresentante $f\colon U \to \mathbb{C}$, esista un altro rappresentante $g\colon V \to \mathbb{C}$ dello stesso germe, con V connesso, tale che $g|_{U\cap V} \neq f|_{U\cap V}$. *Suggerimento.* Basta prendere $n = 1$.

Esercizio 6.1.6. Dimostrare che $\mathcal{O}_p$ è isomorfo all'anello delle serie di potenze convergenti.

Definizione 6.1.3. Sia p un punto di uno spazio topologico X. Due insiemi $A, B \subset X$ si dicono equivalenti se esiste un intorno W di p tale che $A \cap W = B \cap W$. Una classe di equivalenza di insiemi rispetto a questa relazione si chiama *germe di insieme* in p. Si indica con (A, p), o semplicemente con A quando il contesto è chiaro.

L'inclusione $(A, p) \subset (B, p)$ ha il significato naturale: esistono rappresentanti A e B e un intorno W di p tali che $A \cap W \subset B \cap W$. Analogamente, se (A, p) e (B, p) sono germi con rappresentanti A e B rispettivamente, l'intersezione $(A, p) \cap (B, p)$ è il germe $(A \cap B, p)$, l'unione $(A, p) \cup (B, p)$ è il germe $(A \cup B, p)$ e il complementare $(A, p)^c$ è il germe (A^c, p).

Esercizio 6.1.7. Verificare che le nozioni di inclusione, unione, intersezione e complementare per i germi di insiemi sono ben definite.

Sia R un anello di germi di funzioni a valori complessi in un punto $p \in X$ di uno spazio topologico X. Per una funzione f a valori complessi, indichiamo con Z_f l'insieme degli zeri di f, ossia $f^{-1}(0)$. Se $(f, p) \in R$ è un germe di funzione, ha senso parlare del germe (Z_f, p): si prende l'insieme degli zeri di un qualsiasi rappresentante e se ne considera il germe in p.

Esercizio 6.1.8. Siano f e g due rappresentanti di un germe (f, p). Dimostrare che i germi (Z_f, p) e (Z_g, p) coincidono.

Esercizio 6.1.9. Dimostrare che, se (f, p) e (g, p) appartengono a R e f e g ne sono rappresentanti, allora $(Z_f, p) \cup (Z_g, p) = (Z_{fg}, p)$.

6.2 I teoremi di preparazione e di divisione di Weierstrass

Sia f (il germe di) una funzione olomorfa in un punto $p \in \mathbb{C}^n$. Scriviamo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z-p),$$

dove f_k è un polinomio omogeneo di grado k, ossia $f_k(tz) = t^k f_k(z)$.

Definizione 6.2.1. Siano $p \in \mathbb{C}^n$ e f una funzione olomorfa in un intorno di p. Se f non è identicamente nulla come germe, definiamo

$$\operatorname{ord}_p f \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}_0 : f_k \not\equiv 0\}.$$

Se $f \equiv 0$, poniamo $\operatorname{ord}_p f = \infty$. Il numero $\operatorname{ord}_p f$ si chiama *ordine di annullamento* di f in p.

In altri termini, l'ordine di annullamento di f in p è k se tutte le derivate parziali di ordine minore di k si annullano in p ed esiste almeno una derivata di ordine k che non si annulla in p.

In una variabile complessa, una funzione olomorfa f con $\operatorname{ord}_0 f = k$ si può scrivere localmente nella forma $f(z) = z^k u(z)$, con u olomorfa e mai nulla. Una tale u è un'*unità* dell'anello $\mathcal{O}_0$, ossia un elemento dotato di inverso moltiplicativo. In più variabili vale un risultato analogo, o meglio una coppia di risultati, i teoremi di preparazione e di divisione di Weierstrass. Anzitutto occorre trovare il sostituto di z^k.

Definizione 6.2.2. Sia $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un aperto, con $0 \in U$, e indichiamo con $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ le coordinate. Sia $P \in \mathcal{O}(U)[z_n]$ un polinomio monico di grado $k \geq 0$,

$$P(z', z_n) = z_n^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell(z')\, z_n^\ell,$$

dove le c_ℓ sono funzioni olomorfe su U e $c_\ell(0) = 0$ per ogni ℓ. Allora P si dice *polinomio di Weierstrass* di grado k. Se le c_ℓ sono germi in $\mathcal{O}_0 = {}_{n-1}\mathcal{O}_0$, allora $P \in \mathcal{O}_0[z_n]$ e P si dice *germe di polinomio di Weierstrass*.

La definizione (e il teorema che segue) vale anche per $n = 1$. Leggendo attentamente la definizione, si vede che per $n = 1$ l'unico polinomio di Weierstrass di grado k è z^k. Per ogni n, se $k = 0$, si ha $P = 1$.

L'obiettivo della sezione è provare che ogni germe non nullo di funzione olomorfa in $\mathcal{O}_0$, a meno di un'unità e di un'eventuale piccola rotazione, è un polinomio di Weierstrass, che contiene tutta l'informazione sugli zeri di f. Potremo così studiare le proprietà algebriche e geometriche di ${}_n\mathcal{O}_0$ mediante quelle di ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$.

Teorema 6.2.3. *(Teorema di preparazione di Weierstrass).* Sia $f \in \mathcal{O}(U)$, con $U \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ aperto, $0 \in U$ e $f(0) = 0$. Supponiamo che $z_n \mapsto f(0, z_n)$ non sia identicamente nulla vicino all'origine e che il suo ordine di annullamento nell'origine sia $k \geq 1$.

Esistono allora un polidisco aperto $V = V' \times D \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ con $0 \in V \subset U$, un'unica funzione $u \in \mathcal{O}(V)$ tale che $u(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$ e un unico polinomio di Weierstrass P di grado k, con coefficienti olomorfi in V', tali che

$$f(z', z_n) = u(z', z_n)\, P(z', z_n),$$

e tali che tutti i k zeri di $z_n \mapsto P(z', z_n)$, contati con la loro molteplicità, appartengano a D per ogni $z' \in V'$.

Dimostrazione. Esiste un piccolo disco $D \subset \mathbb{C}$ di centro zero tale che $\{0\} \times \overline{D} \subset U$ e $f(0, z_n) \neq 0$ per ogni $z_n \in \overline{D} \setminus \{0\}$. Per continuità di f esiste un piccolo polidisco $V = V' \times D$ tale che $\overline{V} \subset U$ e f non si annulli su $V' \times \partial D$. La figura 6.1 illustra la costruzione. Studiamo gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ per $z' \in V'$ (figura 6.2).

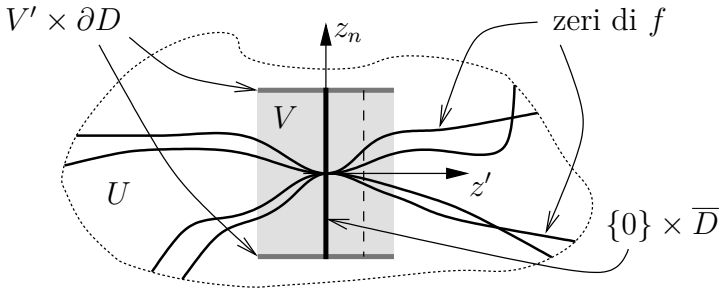


Figura 6.1: Scelta dell'intorno V. I due dischi della figura 6.2 appaiono qui come il segmento verticale nero spesso e il segmento tratteggiato sottile.

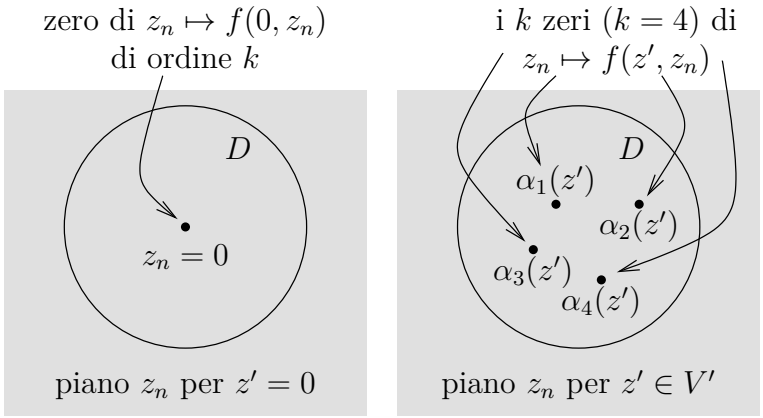


Figura 6.2: Gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$.

Per il principio dell'argomento in una variabile (teorema B.25), il numero degli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ in D, contati con molteplicità, è

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)}\, d\zeta.$$

Poiché $f(z', \zeta)$ non si annulla per $z' \in V'$ e $\zeta \in \partial D$, l'espressione è una funzione continua di $z' \in V'$ a valori interi. Vale k per $z' = 0$, dunque vale k per ogni $z' \in V'$. Indichiamo gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ con $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_k(z')$, ripetendoli secondo la molteplicità. Per ogni z' scegliamo un ordinamento qualsiasi. Poniamo

$$P(z', z_n) = \prod_{\ell=1}^{k} (z_n - \alpha_\ell(z')) = z_n^k + c_{k-1}(z')\, z_n^{k-1} + \cdots + c_0(z').$$

Per z' fissato, P e quindi i coefficienti $c_0, \ldots, c_{k-1}$ sono univocamente determinati, poiché il prodotto non dipende dall'ordine degli zeri. Si ha $c_j(0) = 0$ per ogni j, in quanto

$\alpha_\ell(0) = 0$ per ogni ℓ. Questo è l'unico polinomio monico con tali zeri (esercizio 6.2.6), da cui segue l'unicità asserita nel teorema. Resta da verificare che i coefficienti siano olomorfi su V' e che u sia olomorfa su V.

Per quanto si scelga bene l'ordinamento degli zeri per ciascun z', le funzioni α_ℓ possono in generale non essere continue (esempio 6.2.4). Dimostreremo tuttavia che le c_ℓ sono olomorfe. A meno del segno, le c_ℓ sono le *funzioni simmetriche elementari* di $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, che richiameremo fra poco. Un teorema classico di algebra (le identità di Newton, esercizio 6.2.1) afferma che le funzioni simmetriche elementari sono polinomi nelle *somme di potenze* delle α_ℓ,

$$s_m(z') = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell(z')^m, \qquad m = 1, \dots, k.$$

Se le somme di potenze s_m sono olomorfe su V', anche le c_ℓ sono dunque olomorfe su V'.

Ricordiamo una forma più precisa del principio dell'argomento (teorema B.25). Siano h e g funzioni olomorfe nel disco D, continue su $\overline{D}$. Se g non ha zeri su ∂D e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono gli zeri di g in D, contati con molteplicità, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} h(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{\ell=1}^{k} h(\alpha_\ell).$$

Prendendo $h(\zeta) = \zeta^m$ e $g(\zeta) = f(z', \zeta)$ si ricava

$$s_m(z') = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell(z')^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \zeta^m \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)}\, d\zeta.$$

La funzione s_m è evidentemente continua. Derivando sotto il segno di integrale rispetto alle variabili coniugate, con gli operatori $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{n-1}}$, si vede che s_m è olomorfa. Di conseguenza $c_0, \dots, c_{k-1}$ sono olomorfe e P è un polinomio di Weierstrass.

Infine, mostriamo che P divide f come richiesto, ossia che u è olomorfa. Per ogni z' fissato, la teoria in una variabile mostra che $z_n \mapsto \frac{f(z', z_n)}{P(z', z_n)}$ ha solo singolarità eliminabili. Dopo averle eliminate, la funzione non ha zeri, perché abbiamo costruito P proprio in modo che li cancelli tutti con le rispettive molteplicità. Dalla formula di Cauchy applicata a f/P segue che la funzione

$$u(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z', \zeta)}{P(z', \zeta)(\zeta - z_n)}\, d\zeta$$

coincide con $\frac{f(z', z_n)}{P(z', z_n)}$ dove il quoziente è definito. La u è continua e, per z' fissato, olomorfa in z_n. Derivando sotto il segno di integrale si vede che è olomorfa anche in z'. □

Esempio 6.2.4. Consideriamo l'insieme degli zeri di $f(z_1, z_2) = z_2^2 - z_1$, un polinomio di Weierstrass in z_2 di grado $k = 2$. Qui $z' = z_1$. Per ogni z_1 diverso da zero si hanno due zeri, $\pm\sqrt{z_1}$. Chiamiamoli $\alpha_1(z_1)$ e $\alpha_2(z_1)$. Non esiste alcuna scelta continua della radice quadrata valida per tutti gli z_1, quindi, comunque si scelgano i valori, α_1 e α_2 non sono continue su tutto il disco. Nell'origine si ha uno zero di molteplicità due, cosicché $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$. Invece le funzioni simmetriche $c_1(z_1) = -\alpha_1(z_1) - \alpha_2(z_1) = 0$ e $c_0(z_1) = \alpha_1(z_1)\alpha_2(z_1) = -z_1$ sono olomorfe. Si veda la figura 6.3.

Il valore di k dipende dalle coordinate scelte. Consideriamo $g(z_1, z_2) = -f(z_2, z_1) = z_2 - z_1^2$, polinomio di Weierstrass in z_2 di grado $k = 1$. In queste coordinate si ha un solo zero per ogni z', precisamente $\alpha_1(z_1) = z_1^2$, e dunque $c_0(z_1) = -z_1^2$.

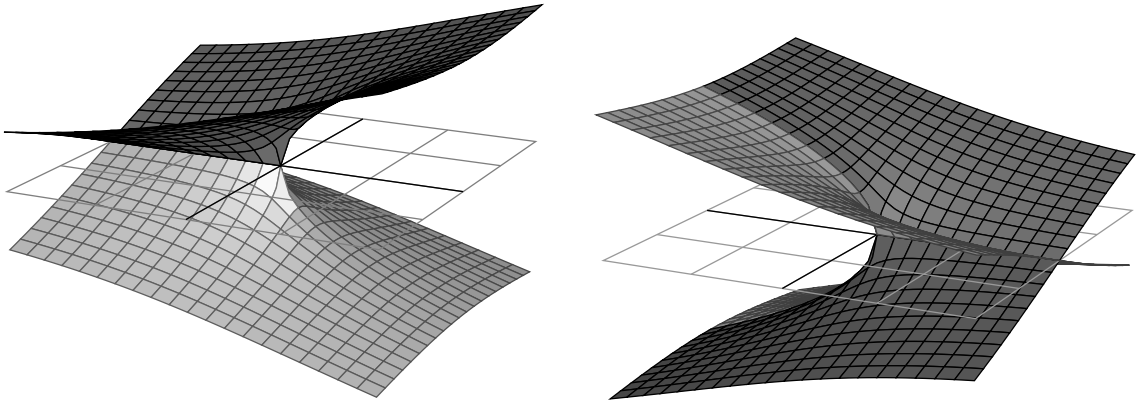


Figura 6.3: Grafici delle parti reale e immaginaria dei due rami $\pm\sqrt{z_1}$. Una possibile scelta del ramo $\alpha_1(z_1)$ è disegnata in tono più scuro. Si osservi la discontinuità della sua parte immaginaria. La superficie $z_2^2 - z_1 = 0$ non interseca sé stessa in $\mathbb{C}^2$.

Una funzione $f(z_1, \dots, z_n)$ si dice *simmetrica* se $f = f \circ p$ per ogni permutazione p delle variabili. Le *funzioni simmetriche elementari* di $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono i coefficienti $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ del polinomio

$$\prod_{\ell=1}^{k} (t + \alpha_\ell) = t^k + \sigma_1\, t^{k-1} + \cdots + \sigma_{k-2}\, t^2 + \sigma_{k-1}\, t + \sigma_k.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k, \\
\sigma_2 &= \alpha_1\alpha_2 \,+\, \alpha_1\alpha_3 \,+\, \cdots \,+\, \alpha_{k-1}\alpha_k, \\
&\;\;\vdots \\
\sigma_{k-1} &= \alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_k \,+\, \alpha_1\alpha_3\alpha_4\cdots\alpha_k \,+\, \cdots \,+\, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}, \\
\sigma_k &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k.
\end{aligned}$$

Per esempio, se $k = 2$, si hanno $\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2$ e $\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$. La funzione σ_1 è già una somma di potenze. Anche σ_2 si esprime come polinomio nelle somme di potenze:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \right).$$

In generale, come si è detto, ciascuna σ_ℓ si esprime in termini delle somme di potenze delle α_j. Le formule corrispondenti sono le *identità di Newton*, dette anche *formule di Girard–Newton*. Non le scriveremo esplicitamente: lasciamo per esercizio il compito di trovarle, oppure soltanto di provarne l'esistenza.

Esercizio 6.2.1. Dimostrare che le funzioni simmetriche elementari sono polinomi nelle somme di potenze. In altri termini, esprimere le funzioni simmetriche elementari σ_ℓ mediante le somme di potenze delle α_j.

Esercizio 6.2.2. Dimostrare il *teorema fondamentale dei polinomi simmetrici*: ogni polinomio simmetrico si esprime come polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Si proceda per doppia induzione. Supporre vero il teorema per un numero di variabili minore di k e, in k variabili, per i polinomi di grado minore di d. Prendere un polinomio simmetrico $P(z_1, \dots, z_k)$ di grado d. Per l'ipotesi induttiva, scrivere $P(z_1, \dots, z_{k-1}, 0)$ come polinomio

nelle funzioni simmetriche elementari di una variabile in meno. Mantenendo gli stessi coefficienti, sostituire a queste le funzioni simmetriche elementari di k variabili, esclusa quella in k variabili di grado k, ossia $z_1 z_2 \cdots z_k$. Si ottiene una funzione simmetrica $L(z_1, \ldots, z_k)$: verificare che $L(z_1, \ldots, z_{k-1}, 0) = P(z_1, \ldots, z_{k-1}, 0)$. Usare ora la simmetria per provare che

$$P(z_1, \ldots, z_k) = L(z_1, \ldots, z_k) + z_1 z_2 \cdots z_k Q(z_1, \ldots, z_k).$$

Osservare che Q ha grado inferiore e concludere per induzione.

Esercizio 6.2.3. Estendere l'esercizio precedente alle serie di potenze. Sia $f(z_1, \ldots, z_k)$ una serie di potenze simmetrica convergente in un intorno di 0. Dimostrare che f si può esprimere come serie di potenze convergente nelle funzioni simmetriche elementari.

Esercizio 6.2.4. Sia $P(z', z_n)$ un polinomio di Weierstrass di grado k. Indichiamo i suoi zeri con $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_k(z')$. In generale essi non sono funzioni olomorfe. Sia tuttavia f una serie di potenze simmetrica in k variabili convergente in un intorno dell'origine. Dimostrare che $f(\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_k(z'))$ è una funzione olomorfa di z' vicino all'origine.

Le ipotesi del teorema di preparazione non costituiscono un ostacolo. Se per una funzione olomorfa f non identicamente nulla la restrizione $z_n \mapsto f(0, z_n)$ si annulla identicamente, si può fare un cambiamento lineare di coordinate L (la matrice L si può scegliere arbitrariamente vicina all'identità) per cui $f \circ L$ soddisfa le ipotesi del teorema. Per esempio, $f(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_3 + z_2 z_3$ non soddisfa le ipotesi, perché $f(0, 0, z_3) \equiv 0$. Tuttavia per $\epsilon \neq 0$ arbitrariamente piccolo, sostituendo z_2 con $z_2 + \epsilon z_3$ si ottiene $\tilde{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2 + \epsilon z_3, z_3) = z_1 z_3 + z_2 z_3 + \epsilon z_3^2$, con $\tilde{f}(0, 0, z_3) = \epsilon z_3^2$. Pertanto $\tilde{f}$ soddisfa le ipotesi del teorema.

Esercizio 6.2.5. Dimostrare l'affermazione precedente sull'esistenza di L arbitrariamente vicino all'identità.

Esercizio 6.2.6. Dimostrare che un polinomio monico $P(\zeta)$ in una variabile è univocamente determinato dagli zeri con le loro molteplicità. Precisamente, se P e Q sono due polinomi monici con gli stessi zeri e le stesse molteplicità, allora $P = Q$. Ne segue l'unicità del polinomio di Weierstrass.

Esercizio 6.2.7. Siano $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato, $0 \in D$, $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un dominio, $0 \in U'$ e $P \in \mathcal{O}(U')[z_n]$ un polinomio di Weierstrass tale che $P(z', z_n)$ non si annulli su $U' \times \partial D$. Dimostrare che, per ogni $z' \in U'$, tutti gli zeri di $z_n \mapsto P(z', z_n)$ appartengono a D.

Esercizio 6.2.8. Siano $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un dominio. Sia f una funzione continua su $U' \times \overline{D}$ e olomorfa su $U' \times D$. Supponiamo che f si annulli in almeno un punto di $U' \times D$ e che f non si annulli mai su $U' \times \partial D$. Dimostrare che $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha almeno uno zero in D per ogni $z' \in U'$.

L'ordine di annullamento di f nell'origine è un limite inferiore per il numero k del teorema. Rispetto a una particolare variabile l'ordine di annullamento può essere maggiore. Per $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^3$ il valore di k è 3, mentre $\operatorname{ord}_0 f = 2$. Con un piccolo cambiamento lineare di coordinate si può ottenere $k = \operatorname{ord}_0 f$. Per la f appena considerata, $f(z_1 + \epsilon z_2, z_2)$ dà $k = 2$, come previsto (per $\epsilon \neq 0$).

Se $k = 1$ nel teorema di preparazione, il polinomio di Weierstrass è $z_n + c_0(z')$. L'insieme degli zeri di f è dunque il grafico della funzione olomorfa $-c_0$. Il teorema di Weierstrass generalizza così il teorema delle funzioni implicite al caso in cui $\frac{\partial f}{\partial z_n}$ si annulla. Anche allora si può «risolvere» rispetto a z_n, ma si ottiene una soluzione a k valori, dati dagli zeri del polinomio di Weierstrass.

La formulazione del teorema di preparazione in termini di germi è immediata.

Esercizio 6.2.9. Enunciare e dimostrare una versione del teorema di preparazione per i germi.

Il teorema seguente è pressoché immediato in una variabile. Sia f una funzione olomorfa vicino all'origine in $\mathbb{C}$ e sia dato $k \in \mathbb{N}$. Indichiamo con r il polinomio di Taylor di f in 0 di grado $k-1$. Allora $f - r$ è divisibile per z^k, ossia $f = qz^k + r$. In più variabili si sostituisce z^k con un polinomio di Weierstrass e si ha ancora un teorema di divisione.

Teorema 6.2.5. *(Teorema di divisione di Weierstrass).* Sia f olomorfa vicino all'origine e sia P un polinomio di Weierstrass di grado $k \geq 1$ in z_n. Esistono un intorno V dell'origine e un'unica coppia $q, r \in \mathcal{O}(V)$ tali che r sia un polinomio in z_n di grado minore di k e su V valga

$$f = qP + r.$$

Il resto r non è necessariamente un polinomio di Weierstrass: non è richiesto che sia monico né che i suoi coefficienti si annullino nell'origine. È semplicemente un polinomio in z_n i cui coefficienti sono funzioni olomorfe delle prime $n-1$ variabili.

Dimostrazione. Lasciamo l'unicità per esercizio. Esiste un intorno connesso $V = V' \times D$ dell'origine in cui D è un disco, f e P sono continue su $V' \times \overline{D}$ e P non si annulla su $V' \times \partial D$. Poniamo

$$q(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z', \zeta)}{P(z', \zeta)(\zeta - z_n)}\, d\zeta.$$

Poiché P non si annulla su $V' \times \partial D$, la funzione q è olomorfa in V, come si vede derivando sotto il segno di integrale. Se P dividesse f, q sarebbe proprio f/P. Quando invece P non divide f, non si può applicare la formula integrale di Cauchy e q non coincide con f/P. L'espressione fornisce comunque il quoziente della divisione con resto.

Scriviamo f mediante la formula di Cauchy nella variabile z_n e sottraiamo qP per ottenere r:

$$\begin{aligned} r(z', z_n) &= f(z', z_n) - q(z', z_n)P(z', z_n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z', \zeta)P(z', \zeta) - f(z', \zeta)P(z', z_n)}{P(z', \zeta)(\zeta - z_n)}\, d\zeta. \end{aligned}$$

Mostriamo che r è un polinomio in z_n di grado inferiore a k. Nell'integranda il numeratore è della forma $\sum_{\ell=1}^{k} h_\ell(z', \zeta)(\zeta^\ell - z_n^\ell)$ ed è quindi divisibile per $(\zeta - z_n)$. Il numeratore è un polinomio di grado k in z_n. Dopo la divisione per $(\zeta - z_n)$, l'integranda diventa un polinomio in z_n di grado $k-1$. Per linearità dell'integrale possiamo integrare i coefficienti del polinomio. Ciascun coefficiente così ottenuto è una funzione olomorfa in V', e la dimostrazione è conclusa. Poiché qualche coefficiente può dare integrale nullo, possiamo soltanto affermare che il grado di r è al più $k-1$. □

Per esempio, poniamo $f(z, w) = e^z + z^4 e^w + z w^2 e^w + zw$ e $P(z, w) = w^2 + z^3$. Allora P è un polinomio di Weierstrass in w di grado $k = 2$. Con un breve calcolo si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{e^z + z^4 e^\zeta + z\zeta^2 e^\zeta + z\zeta}{(\zeta^2 + z^3)(\zeta - w)} d\zeta = z e^w, \quad \text{quindi} \quad f(z, w) = \underbrace{(z e^w)}_{q} \underbrace{(w^2 + z^3)}_{P} + \underbrace{zw + e^z}_{r}.$$

Il resto r è un polinomio di grado 1 in w, ma non è monico e i suoi coefficienti non si annullano tutti in 0.

Esercizio 6.2.10. Dimostrare l'unicità asserita nel teorema. *Suggerimento.* Ricordare che V è stato scelto connesso.

Esercizio 6.2.11. Enunciare e dimostrare una versione del teorema di divisione per i germi.

Il teorema di divisione di Weierstrass generalizza l'algoritmo di divisione dei polinomi a coefficienti in un campo, per esempio il campo complesso. Se $f(\zeta)$ è un polinomio e $P(\zeta)$ è un polinomio non nullo di grado k, esistono polinomi $q(\zeta)$ e $r(\zeta)$, con r di grado minore di k, tali che $f = qP + r$. Se i coefficienti appartengono a un anello commutativo, si può eseguire la divisione purché P sia monico. Il teorema di divisione di Weierstrass afferma che possiamo dividere per un polinomio monico di Weierstrass $P \in {}_{n-1}\mathcal{O}_p[z_n]$ anche quando f è una funzione olomorfa (un «polinomio di grado infinito»).

Osservazione 6.2.6. A dispetto di quanto potrebbero suggerire le nostre dimostrazioni, i teoremi di preparazione e di divisione riguardano in realtà le serie di potenze. Valgono anche per le serie formali, cioè per serie di potenze senza alcuna ipotesi di convergenza. Un altro metodo classico consiste nel dimostrare prima la versione formale, per poi provare che, partendo da serie convergenti, anche le serie ottenute sono convergenti.

6.3 Dipendenza degli zeri dai parametri

Dimostriamo che gli zeri variano olomorficamente finché non vengono a coincidere. Vedremo fra poco che ciò può accadere soltanto su un insieme piccolo, precisamente sull'insieme degli zeri di una funzione olomorfa chiamata discriminante.

Due zeri di una funzione di una variabile si dicono *geometricamente distinti* se corrispondono a punti distinti di $\mathbb{C}$. Se l'insieme degli zeri consiste di un solo numero complesso, parliamo di *zero geometricamente unico*. Per esempio, $(\zeta-1)^2$ ha uno zero geometricamente unico in 1, mentre $(\zeta-1)^2(\zeta+1)$ ha due zeri geometricamente distinti, 1 e -1.

Proposizione 6.3.1. Siano $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ e $D \subset \mathbb{C}$ due domini e sia $f \in \mathcal{O}(U' \times D)$. Supponiamo che per ogni $z' \in U'$ fissato la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ abbia uno zero geometricamente unico $\alpha(z') \in D$. Allora α è olomorfa in U'.

La conclusione di regolarità del teorema olomorfo delle funzioni implicite vale dunque se esiste una soluzione localmente unica rispetto a z_n, anche quando la derivata si annulla. Questa proprietà è specifica delle funzioni olomorfe e viene meno già per le funzioni analitiche reali, e quindi anche per quelle lisce. Per esempio, $x^2 - y^3 = 0$ ha un'unica soluzione reale $y = x^{2/3}$, ma $x^{2/3}$ non è neppure differenziabile nell'origine.

Dimostrazione. Occorre provare che α è olomorfa vicino a ogni punto. Possiamo prendere come punto l'origine e supporre $\alpha(0) = 0$. Per il teorema di preparazione si ha $f = uP$, dove P è un polinomio di Weierstrass in $\mathcal{O}(V')[z_n]$ per un opportuno $V' \subset U'$ e tutti gli zeri di $z_n \mapsto P(z', z_n)$ appartengono a D. Poiché α è uno zero geometricamente unico in D,

$$P(z', z_n) = \big(z_n - \alpha(z')\big)^k = z_n^k - k\alpha(z')z_n^{k-1} + \cdots$$

I coefficienti di P sono olomorfi, dunque anche α è olomorfa. □

Proposizione 6.3.2. Siano $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ e $D \subset \mathbb{C}$ due domini e sia $f \in \mathcal{O}(U' \times D)$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $z' \in U'$, la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ abbia precisamente m zeri geometricamente distinti. Allora, in un intorno di ogni punto di U', esistono m funzioni olomorfe $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_m(z')$, interi positivi $k_1, \ldots, k_m$ e una funzione olomorfa mai nulla u tali che

$$f(z', z_n) = u(z', z_n) \prod_{\ell=1}^{m} \big(z_n - \alpha_\ell(z')\big)^{k_\ell}.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. In generale le funzioni da α_1 a α_m si possono definire solo localmente, su un dominio più piccolo: se U' non è semplicemente connesso, può essere impossibile mantenere un ordinamento coerente da α_1 a α_m lungo tutti i cammini. Se U' è semplicemente connesso, le funzioni si possono definire globalmente per prolungamento analitico. Per un esempio con U' non semplicemente connesso, torniamo all'esempio 6.2.4. Prendiamo $U' = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e, per semplicità, $D = \mathbb{C}$ al posto di un disco. Il dominio U' non è semplicemente connesso e non esistono funzioni continue $\alpha_1(z_1)$ e $\alpha_2(z_1)$ definite su U' che siano gli zeri del polinomio di Weierstrass, ossia per le quali valga $z_2^2 - z_1 = (z_2 - \alpha_1(z_1))(z_2 - \alpha_2(z_1))$. Sarebbero infatti le due radici quadrate di z_1, mentre su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ non esiste una radice quadrata continua, tanto meno olomorfa. È invece possibile scegliere radici olomorfe su ogni aperto semplicemente connesso contenuto in U', per esempio su ogni disco $\Delta \subset U'$.

Esercizio 6.3.1. Siano $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato, $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un dominio e f una funzione continua su $U' \times \overline{D}$ e olomorfa su $U' \times D$. Supponiamo che f si annulli in almeno un punto di $U' \times D$ e che f non si annulli su $U' \times \partial D$. Se per ogni $z' \in U'$ la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha al più uno zero geometricamente distinto in D, dimostrare che per ogni $z' \in U'$ la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha uno zero geometricamente unico in D. Per la proposizione 6.3.1, tale zero è una funzione olomorfa del parametro.

Esercizio 6.3.2. Dimostrare la proposizione 6.3.2. Si usino l'esercizio precedente e la proposizione 6.3.1.

Teorema 6.3.3. Siano $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato, $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(U' \times D)$. Supponiamo che l'insieme degli zeri $f^{-1}(0)$ non abbia punti di accumulazione su $U' \times \partial D$. Esistono allora $m \in \mathbb{N}$ e una funzione olomorfa $\Delta \colon U' \to \mathbb{C}$ non identicamente nulla tali che, per ogni $z' \in U' \setminus E$, posto $E = \Delta^{-1}(0)$, la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ abbia esattamente m zeri geometricamente distinti in D, mentre $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha strettamente meno di m zeri geometricamente distinti per $z' \in E$.[46]

Il complementare dell'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla su un dominio è connesso, aperto e denso. Chiamiamo Δ *funzione discriminante* e il suo insieme degli zeri E *insieme discriminante*. Per l'equazione quadratica $a(z')z_n^2 + b(z')z_n + c(z') = 0$, supponendo che a non si annulli mai e che esistano due zeri distinti per qualche z', la funzione Δ è, a meno di un'unità, il discriminante familiare fin dalla scuola, $b^2 - 4ac$. Più precisamente, per la Δ costruita nella dimostrazione seguente si ha $-a^2\Delta = b^2 - 4ac$.

Dimostrazione. Gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ sono isolati e, per ogni z', sono in numero finito, poiché D è limitato e $f^{-1}(0)$ non ha punti di accumulazione su $U' \times \partial D$. Per ogni $p' \in U'$ definiamo due cammini. Sia γ l'unione delle frontiere di piccoli dischi disgiunti in D, uno attorno a ciascuno zero geometricamente distinto di $z_n \mapsto f(p', z_n)$. Sia λ un cammino chiuso più grande in D che circondi esattamente una volta tutti gli zeri, in modo che l'interno di λ sia contenuto in D. Scegliamo γ e λ in modo che non passino per alcuno zero (figura 6.4). Per continuità, le curve γ e λ non incontrano alcuno zero per z' vicino a p'. Poiché $f^{-1}(0)$ è chiuso e gli zeri non si accumulano su $U' \times \partial D$, per z' vicino a p' gli zeri restano a distanza positiva dalla frontiera. Si può quindi scegliere λ in modo che circondi esattamente una volta tutti gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ per z' vicino a p'.

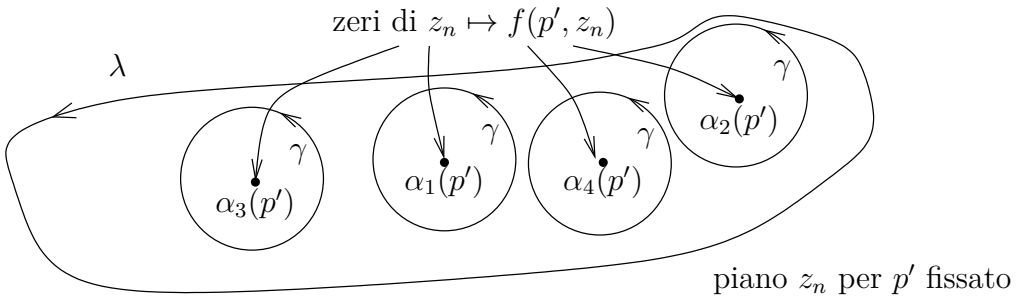


Figura 6.4: Una curva attorno a ciascuno zero.

Sia $M(z')$ il numero degli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$, contati con molteplicità. Per ogni p' scegliamo come sopra un cammino λ che racchiuda tutti gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ per ogni

[46] Se la funzione non ha alcuno zero, si intende $m = 0$ e si può prendere $\Delta = 1$.

z' in un intorno di p'. Il principio dell'argomento dà

$$M(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_\lambda \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} d\zeta,$$

Quindi M è costante in tale intorno, essendo una funzione continua a valori interi. La funzione M è localmente costante su U', che è connesso, e pertanto M è costante. Il numero di zeri geometricamente distinti per un dato z' è maggiorato da M, ma può variare. Indichiamo con m il massimo di tale numero: in qualche punto di U' si hanno esattamente m zeri geometricamente distinti.

Sia $U'_m \subset U'$ l'insieme dei $z' \in U'$ per cui $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha esattamente m zeri geometricamente distinti. Scriviamo U' come unione disgiunta $U' = U'_m \cup E$, dove $E = U' \setminus U'_m$. Per definizione di m, l'insieme U'_m è non vuoto. Sia $p' \in U'_m$ e sia γ il cammino che circonda gli zeri come sopra. Sia γ_j una componente di γ attorno a uno degli zeri. Il principio dell'argomento applicato a γ_j mostra che γ_j racchiude almeno uno zero per ogni z' vicino a p'. Poiché le componenti di γ sono in numero finito, per z' in un opportuno intorno di p' la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha almeno m zeri geometricamente distinti all'interno di γ, almeno uno per componente. Ma m è il massimo, quindi gli zeri geometricamente distinti sono esattamente m. Ciò prova che U'_m è aperto.

Localmente in U'_m, per la proposizione precedente, gli zeri sono dati da m funzioni olomorfe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Non possiamo definirle su tutto U'_m perché non disponiamo di un ordinamento globale. Tuttavia la funzione

$$\Delta(z') = \prod_{j \neq k} (\alpha_j(z') - \alpha_k(z'))$$

definita per $z' \in U'_m$ è indipendente dall'ordinamento. Quindi Δ è ben definita sull'aperto U'_m e, poiché le α_k si possono scegliere localmente olomorfe, anche Δ è olomorfa.

Sia $p' \in E \cap \overline{U'_m}$ e scegliamo γ e λ come sopra. In p' vi sono meno di m zeri geometricamente distinti e quindi γ ha meno di m componenti. Ogni componente γ_j di γ racchiude almeno uno zero per ogni z' vicino a p', per lo stesso ragionamento di prima. Il cammino λ circonda tutti gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ per z' vicino a p'. Il numero degli zeri fra λ e γ per il parametro z' è

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - \gamma} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} d\zeta,$$

una funzione continua a valori interi, nulla per $z' = p'$ e quindi nulla in un intorno. Non ci sono dunque zeri fra γ e λ. Poiché λ circonda tutti gli zeri per z' vicino a p', tutti gli zeri di $z_n \mapsto f(z', z_n)$ cadono all'interno di γ per z' vicino a p'. Esistono punti $z' \in U'_m$ arbitrariamente vicini a p'. Per ciascuno di essi, per il principio dei cassetti, una componente γ_j racchiude almeno due zeri geometricamente distinti di $z_n \mapsto f(z', z_n)$.

Sia $\{z'_\ell\}$ una successione qualsiasi in U'_m convergente a p'. Poiché le componenti di γ sono in numero finito, passando a una sottosuccessione possiamo fissare una componente γ_j di γ tale che $z_n \mapsto f(z'_\ell, z_n)$ abbia almeno due zeri distinti in γ_j per ogni z'_ℓ. Indichiamo due di questi zeri con $\alpha_1(z'_\ell)$ e $\alpha_2(z'_\ell)$. Per p' vi è un solo zero geometricamente distinto in γ_j, che denotiamo con $\alpha_1(p')$. Poiché $f^{-1}(0)$ è chiuso, $\alpha_1(z'_\ell)$ e $\alpha_2(z'_\ell)$ tendono entrambi a $\alpha_1(p')$ per $\ell \to \infty$. Gli zeri sono limitati, dunque $\lim_{\ell \to \infty} \Delta(z'_\ell) = 0$. Da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione lungo la quale il limite è zero, perciò

$$\lim_{z' \in U'_m \to p'} \Delta(z') = 0.$$

Abbiamo già definito Δ su U'_m, dove non si annulla. Poniamo $\Delta(z') = 0$ per $z' \in E$. La funzione Δ è continua su U', si annulla precisamente su E ed è olomorfa su U'_m. Per il teorema di Radó (teorema 2.4.12), Δ è olomorfa in U'. □

Il discriminante così costruito appartiene all'insieme $f^{-1}(0)$. Per il teorema di preparazione possiamo supporre che la funzione che definisce tale insieme sia un polinomio di Weierstrass. Per un polinomio di Weierstrass si definisce spesso il discriminante mediante il prodotto $\prod_{j\neq k}(\alpha_j(z') - \alpha_k(z'))$, contando però gli zeri con la loro molteplicità. Questo «discriminante» può quindi essere identicamente nullo. Dagli esercizi che seguono risulterà che, per un polinomio di Weierstrass irriducibile, le due nozioni coincidono.

Esercizio 6.3.3. Dimostrare che, se $f \in \mathcal{O}(U)$, il complementare $U \setminus f^{-1}(0)$ non è semplicemente connesso quando $f^{-1}(0)$ è non vuoto. In particolare, nel teorema, $U' \setminus E$ non è semplicemente connesso se $E \neq \emptyset$.

Esercizio 6.3.4. Siano $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $U' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un dominio. Supponiamo che f sia continua su $U' \times \overline{D}$, olomorfa su $U' \times D$ e che f non si annulli mai su $U' \times \partial D$. Sia $\gamma\colon [0,1] \to U'$ continua e valga $f\big(\gamma(0), c\big) = 0$ per un certo $c \in D$. Dimostrare che esiste una funzione continua $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ tale che $\alpha(0) = c$ e $f\big(\gamma(t), \alpha(t)\big) = 0$ per ogni $t \in [0,1]$. *Suggerimento.* Partire da un cammino arbitrariamente vicino a γ che eviti l'insieme discriminante.

6.4 Proprietà dell'anello dei germi

Dato un anello commutativo R, un *ideale* $I \subset R$ è un sottoinsieme non vuoto con le due proprietà seguenti: $fg \in I$ ogni volta che $f \in R$ e $g \in I$, e $g+h \in I$ ogni volta che $g, h \in I$. L'intersezione di ideali è ancora un ideale: ha dunque senso parlare del più piccolo ideale contenente un insieme di elementi. Un ideale I è *generato* da $f_1, \dots, f_k$ se I è il più piccolo ideale contenente $\{f_1, \dots, f_k\}$. Scriviamo allora $I = (f_1, \dots, f_k)$. Ogni elemento di I si può scrivere nella forma $c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k$ con $c_1, \dots, c_k \in R$. Un *ideale principale* è un ideale generato da un solo elemento, cioè della forma (f).

Per comodità, parlando di germi di funzioni, identificheremo spesso un rappresentante con il germe quando il contesto lo consente. Per abuso di notazione scriveremo dunque $f \in \mathcal{O}_p$ per $(f, p) \in \mathcal{O}_p$ e $(f_1, \dots, f_k)$ per $\big((f_1, p), \dots, (f_k, p)\big)$, come negli esercizi seguenti.

Esercizio 6.4.1.

1. Siano $f \in \mathcal{O}_p$, $f(p) \neq 0$ e sia (f) l'ideale generato da f. Provare che $(f) = \mathcal{O}_p$.
2. Sia $\mathfrak{m}_p = (z_1 - p_1, \dots, z_n - p_n) \subset \mathcal{O}_p$ l'ideale generato dalle funzioni coordinate centrate in p. Mostrare che, se $f(p) = 0$, allora $f \in \mathfrak{m}_p$.
3. Mostrare che, se $I \subsetneq \mathcal{O}_p$ è un *ideale proprio* (ossia $I \neq \mathcal{O}_p$), allora $I \subset \mathfrak{m}_p$. In particolare $\mathfrak{m}_p$ è un *ideale massimale*.

Esercizio 6.4.2. Supponiamo $n = 1$. Mostrare che ${}_1\mathcal{O}_p$ è un *dominio a ideali principali* (PID), cioè che ogni suo ideale è principale. Più precisamente, dato un ideale $I \subset {}_1\mathcal{O}_p$ con $I \neq \{0\}$, mostrare che esiste $k = 0, 1, 2, \dots$ tale che $I = \big((z-p)^k\big)$.

Esercizio 6.4.3. Siano $U, V \subset \mathbb{C}^n$ due aperti, $h \colon U \to V$ un biolomorfismo e $h(q) = p$. Provare anzitutto che ha senso parlare del germe $(f \circ h, q) \in \mathcal{O}_q$ per ogni $(f, p) \in \mathcal{O}_p$. Provare poi che $f \mapsto f \circ h$ induce un isomorfismo di anelli fra $\mathcal{O}_p$ e $\mathcal{O}_q$.

Un anello commutativo R è *noetheriano* se ogni ideale di R è finitamente generato. Ciò significa che per ogni ideale $I \subset R$ esistono generatori in numero finito $f_1, \dots, f_k \in I$ tali che ogni $g \in I$ si scrive $g = c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k$ per opportuni $c_1, \dots, c_k \in R$. In un esercizio abbiamo visto che ${}_1\mathcal{O}_p$ è un dominio a ideali principali. Dunque ${}_1\mathcal{O}_p$ è noetheriano. In dimensione superiore l'anello dei germi può avere ideali non principali, ma è ancora noetheriano.

Teorema 6.4.1. L'anello $\mathcal{O}_p$ è noetheriano.

Dimostrazione. Possiamo supporre $p = 0$. Procediamo per induzione sulla dimensione. Per l'esercizio 6.4.2, ${}_1\mathcal{O}_0$ è noetheriano. Per l'esercizio 6.4.3 possiamo effettuare cambiamenti biolomorfi di coordinate vicino all'origine.

Supponiamo per induzione che ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ sia noetheriano e sia $I \subset {}_n\mathcal{O}_0$ un ideale. Se $I = \{0\}$ oppure $I = {}_n\mathcal{O}_0$, l'asserto è immediato. Supponiamo dunque che tutti gli elementi di I si annullino nell'origine ($I \neq {}_n\mathcal{O}_0$) e che esistano elementi non identicamente nulli ($I \neq \{0\}$). Sia g uno di essi. Dopo un eventuale cambiamento lineare di coordinate e la moltiplicazione per un'unità, per il teorema di preparazione possiamo supporre che g sia un polinomio di Weierstrass in z_n.

L'anello ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ è un sottoanello di ${}_n\mathcal{O}_0$. L'insieme $J = {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n] \cap I$ è un ideale di ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Per il teorema della base di Hilbert (si veda la dimostrazione del teorema D.4), poiché ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ è noetheriano, anche ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ è noetheriano. Dunque J ha un numero finito di generatori, cioè $J = (h_1, \dots, h_k)$ nell'anello ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$.

Per il teorema di divisione ogni $f \in I$ è della forma $f = qg + r$ con $r \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ e $q \in {}_n\mathcal{O}_0$. Poiché f e g appartengono a I, vi appartiene anche r. Sia g sia r sono in ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ e quindi entrambi sono in J. Scriviamo $g = c_1h_1 + \cdots + c_kh_k$ e $r = d_1h_1 + \cdots + d_kh_k$. Allora $f = (qc_1 + d_1)h_1 + \cdots + (qc_k + d_k)h_k$. Dunque $h_1, \ldots, h_k$ generano anche I in ${}_n\mathcal{O}_0$. □

Esercizio 6.4.4. Provare che, dopo un eventuale cambiamento lineare di coordinate, ogni ideale proprio $I \subset \mathcal{O}_0$ con $I \neq \{0\}$ è generato da polinomi di Weierstrass. Si osservi che il polinomio di Weierstrass di grado 0 è 1: l'enunciato vale dunque anche per $I = \mathcal{O}_0$.

Esercizio 6.4.5. Abbiamo visto che ${}_1\mathcal{O}_p$ è un dominio a ideali principali. Dimostrare che, se $n > 1$, allora ${}_n\mathcal{O}_p$ non è un dominio a ideali principali.

In un anello commutativo R, un elemento $f \in R$ si dice *irriducibile* se f non è un'unità e ogni volta che $f = gh$ almeno uno dei fattori g e h è un'unità.

Teorema 6.4.2. L'anello $\mathcal{O}_p$ è un *dominio a fattorizzazione unica* (UFD). In altri termini, a meno dell'ordine dei fattori e di moltiplicazioni per unità, ogni elemento non nullo e non invertibile ammette un'unica fattorizzazione in elementi irriducibili di $\mathcal{O}_p$.

Dimostrazione. Supponiamo di nuovo $p = 0$ e procediamo per induzione sulla dimensione. Il caso di dimensione uno è un esercizio qui sotto. Se ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ è un dominio a fattorizzazione unica, per il lemma di Gauss (teorema D.6) lo è anche ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$. Sia $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ tale che $f(0) = 0$ e $f \not\equiv 0$. Dopo un eventuale cambiamento lineare di coordinate si ha $f = qP$, con q unità di ${}_n\mathcal{O}_0$ e P polinomio di Weierstrass in z_n. Poiché ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica, P ammette in ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ un'unica fattorizzazione $P = P_1P_2 \cdots P_k$. Dunque $f = qP_1P_2 \cdots P_k$. Scegliamo monici i fattori $P_1, \ldots, P_k$. Poiché $P(0, z_n) = z_n^d$ per un certo d, si ha $P_1(0, z_n) = z_n^{d_1}$, $\ldots$, $P_k(0, z_n) = z_n^{d_k}$, e quindi tutti i fattori sono polinomi di Weierstrass. Lasciamo per esercizio la verifica che i P_ℓ sono irriducibili in ${}_n\mathcal{O}_0$.

Supponiamo che $f = \tilde{q}g_1g_2 \cdots g_m$ sia un'altra fattorizzazione in irriducibili. Il teorema di preparazione si applica a ogni g_ℓ. Scriviamo dunque $g_\ell = u_\ell\widetilde{P}_\ell$ con u_ℓ unità e $\widetilde{P}_\ell$ polinomio di Weierstrass. Si ottiene $f = u\widetilde{P}_1\widetilde{P}_2 \cdots \widetilde{P}_m$ per un'unità u. Per l'unicità nel teorema di preparazione, $P = \widetilde{P}_1\widetilde{P}_2 \cdots \widetilde{P}_m$. Si conclude osservando che ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica. □

Esercizio 6.4.6. Dimostrare che ${}_1\mathcal{O}_p$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Esercizio 6.4.7. Mostrare che un polinomio di Weierstrass irriducibile in ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ è irriducibile in ${}_n\mathcal{O}_0$.

6.5 Varietà analitiche

Come sopra, per una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ indichiamo con $Z_f = f^{-1}(0) \subset U$ l'insieme degli zeri di f.

Definizione 6.5.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto. Sia $X \subset U$ un insieme tale che per ogni $p \in U$ esistano un intorno W di p e una famiglia di funzioni olomorfe $\mathcal{F}$ definite su W per cui

$$W \cap X = \big\{z \in W : f(z) = 0 \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}\big\} = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} Z_f.$$

Allora X si chiama *varietà analitica complessa* o *sottovarietà analitica complessa* di U. Si dice anche che X è un *insieme analitico*. Diciamo che $X \subset U$ è una *sottovarietà propria* se $\emptyset \neq X \subsetneq U$.

Quando il contesto lo consente ometteremo l'aggettivo «complessa». Esistono anche sottovarietà reali definite da funzioni analitiche reali, di cui qui non ci occuperemo. In geometria algebrica le (sotto)varietà sono definite mediante polinomi e in genere si richiede che siano «irriducibili». Parleremo più avanti di irriducibilità.

Esempio 6.5.2. L'insieme $X = \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà, perché l'origine è l'unico zero comune delle funzioni $\mathcal{F} = \{z_1, \dots, z_n\}$. Anche $X = \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà di $\mathbb{C}^n$: basta prendere $\mathcal{F} = \emptyset$ oppure $\mathcal{F} = \{0\}$.

Esempio 6.5.3. L'insieme definito da $z_2 = e^{1/z_1}$ è una sottovarietà di $U = \big\{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0\big\}$. Non è una sottovarietà di alcun aperto che contenga strettamente U.

Se nella definizione sostituiamo «in un intorno di ogni $p \in U$» con «in un intorno di ogni $p \in X$», otteniamo una nozione leggermente diversa: X si dice allora una *varietà locale*. Una varietà locale X è una sottovarietà di un opportuno intorno di X, ma può non essere chiusa in U. Per esempio, $X = \big\{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0, |z_2| < 1\big\}$ è una varietà locale, ma non è una sottovarietà di $\mathbb{C}^2$. D'altra parte, X è una sottovarietà della palla unitaria $\big\{z \in \mathbb{C}^2 : \|z\| < 1\big\}$.

La famiglia $\mathcal{F}$ dipende da p: in intorni di punti diversi si possono usare funzioni diverse. Chiaramente $\mathcal{F}$ non è unica. A priori ammettiamo che $\mathcal{F}$ sia infinita. Vediamo perché basta considerare famiglie finite $\mathcal{F}$. Lavoriamo con i germi. Se (f, p) è un germe di funzione, (Z_f, p) è il germe dell'insieme degli zeri di un suo rappresentante. Poniamo

$$I_p(X) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{(f, p) \in \mathcal{O}_p : (X, p) \subset (Z_f, p)\big\}.$$

Dunque $I_p(X)$ è l'insieme dei germi di funzioni olomorfe che si annullano su X vicino a p. La somma di due funzioni nulle su X si annulla anch'essa su X, e ogni multiplo di una funzione nulla su X si annulla su X. Pertanto $I_p(X)$ è un ideale. Poiché $I_p(X)$ dipende soltanto dal germe di X in p, poniamo $I_p\big((X, p)\big) = I_p(X)$.

L'anello $\mathcal{O}_p$ è noetheriano, perciò ogni ideale di $\mathcal{O}_p$ è finitamente generato. Sia $I \subset \mathcal{O}_p$ un ideale generato da $f_1, f_2, \dots, f_k$. Poniamo

$$V_p(I) \stackrel{\text{def}}{=} (Z_{f_1}, p) \cap (Z_{f_2}, p) \cap \cdots \cap (Z_{f_k}, p).$$

In altri termini, $V_p(I)$ è il germe della sottovarietà definita dall'annullarsi degli elementi di I: ogni elemento di I si annulla infatti nei punti in cui si annullano tutti i generatori. Supponiamo che i generatori abbiano rappresentanti $f_1, \dots, f_k$ definiti in un intorno W di p e che il germe $(g, p) \in I$ abbia un rappresentante g definito in W tale che $g =$

$c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k$, con le c_j anch'esse olomorfe su W. Se $q \in Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_k}$, allora $g(q) = 0$. Pertanto $Z_{f_1} \cap \cdots \cap Z_{f_k} \subset Z_g$ o, in termini di germi, $V_p(I) \subset (Z_g, p)$. Abbiamo evitato di definire $V_p(I)$ come intersezione degli insiemi degli zeri di tutti i germi di I, perché sarebbe un'intersezione infinita, operazione che non abbiamo definito per i germi.

Esercizio 6.5.1. Mostrare che $V_p(I)$ è indipendente dalla scelta dei generatori.

Esercizio 6.5.2. Supponiamo che $I_p(X)$ sia generato dalle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Provare che

$$(X, p) = (Z_{f_1}, p) \cap (Z_{f_2}, p) \cap \cdots \cap (Z_{f_k}, p).$$

Esercizio 6.5.3. Dato il germe (X, p) di una sottovarietà in p, mostrare che $V_p(I_p(X)) = (X, p)$ (si veda sopra). Dato poi un ideale $I \subset \mathcal{O}_p$, mostrare che $I_p(V_p(I)) \supset I$.

Esercizio 6.5.4. Sia $X \subset \mathbb{C}^n$ una sottovarietà che è un cono complesso, ossia tale che, se $z \in X$, allora $\lambda z \in X$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Dimostrare che $I_0(X)$ è generato da un numero finito di polinomi omogenei. *Suggerimento.* Data una funzione f olomorfa vicino a 0 che si annulla su X, scrivere $f = \sum_k f_k(z)$ con f_k polinomi omogenei. Mostrare che i f_k si annullano su X. Applicare il teorema della base di Hilbert, per cui l'anello dei polinomi è noetheriano.

Esercizio 6.5.5. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $U \subset \mathbb{C}^k$ un aperto, $f \colon \Omega \to U$ olomorfa e $X \subset U$ una sottovarietà. Supponiamo che esista un aperto non vuoto $W \subset \Omega$ tale che $f(W) \subset X$. Provare che $f(\Omega) \subset X$.

L'ideale $I_p(X)$ è finitamente generato. Vicino a ogni punto p basta quindi un numero finito di funzioni per definire una sottovarietà: come si è visto in un esercizio, il loro insieme degli zeri comuni dà la sottovarietà. Dicendo *funzioni definenti* per il germe di una sottovarietà si intende in genere che queste funzioni ne generano l'ideale: la sola condizione sugli zeri comuni è più debole. Un teorema che non dimostreremo in tutta la sua generalità, il *Nullstellensatz* (teorema degli zeri), afferma che, prendendo il germe di sottovarietà definito dalle funzioni di un ideale $I \subset \mathcal{O}_p$ e passando poi all'ideale di tale sottovarietà, si ottiene il radicale di I. Il *radicale* di I è per definizione $\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f^m \in I \text{ per qualche } m\}$. In simboli, il Nullstellensatz afferma che $I_p(V_p(I)) = \sqrt{I}$. I germi di sottovarietà sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali radicali di $\mathcal{O}_p$.

Esempio 6.5.4. La sottovarietà $X = \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ può essere definita da $\mathcal{F} = \{z_1^2, z_2^2\}$. Se $I = (z_1^2, z_2^2) \subset \mathcal{O}_0$ è l'ideale dei germi generato da queste due funzioni, allora $I_0(X) \neq I$. Abbiamo visto che $I_0(X)$ è l'ideale massimale $\mathfrak{m}_0 = (z_1, z_2)$. Poiché $I \subset (z_1, z_2) = \mathfrak{m}_0$ e i quadrati di z_1 e z_2 appartengono entrambi a I, si ottiene $\sqrt{I} = (z_1, z_2) = \mathfrak{m}_0$.

Le proprietà locali di una sottovarietà in p si riflettono nelle proprietà dell'ideale $I_p(X)$. Lo studio delle sottovarietà passa quindi spesso per lo studio delle proprietà algebriche degli ideali di $\mathcal{O}_p$. Un altro oggetto che si studia è il cosiddetto *anello locale* $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_p / I_p(X)$, che rappresenta le funzioni su (X, p). Identifichiamo cioè due funzioni se la loro differenza appartiene all'ideale, perché in tal caso coincidono su X. Riunendo tutti gli anelli locali in un fascio si ottiene il *fascio strutturale* $\mathcal{O}_X$: l'oggetto di studio è allora la coppia $(X, \mathcal{O}_X)$. Ma torniamo al nostro argomento.

Vicino alla maggior parte dei suoi punti una sottovarietà assomiglia a un aperto di $\mathbb{C}^k$: più precisamente è un grafico su $\mathbb{C}^k$. Il grafico di $f \colon U' \subset \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{n-k}$ è l'insieme

$\Gamma_f \subset U' \times \mathbb{C}^{n-k} \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ definito da

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, w) \in U' \times \mathbb{C}^{n-k} : w = f(z)\}.$$

Definizione 6.5.5. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $X \subset U$ una sottovarietà. Sia $p \in X$ un punto tale che, dopo una permutazione delle coordinate, X sia il grafico di un'applicazione olomorfa vicino a p. In altre parole, rinumerate le coordinate, esistono un intorno $U' \times U'' \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ di p, per un certo $k = 0, 1, \ldots, n$, e un'applicazione olomorfa $f\colon U' \to \mathbb{C}^{n-k}$ tali che

$$X \cap (U' \times U'') = \Gamma_f.$$

Allora p si chiama *punto regolare* (o *punto semplice*) di X e la *dimensione* complessa di X in p è k. Scriviamo $\dim_p X = k$. Poiché la dimensione ambiente[47] è n (X è una sottovarietà di U), diciamo che X ha *codimensione* $n - k$ in p. Se tutti i punti di X sono regolari di dimensione k, diciamo che X è una *varietà complessa* (o *sottovarietà complessa*) liscia di dimensione complessa k.

L'insieme dei punti regolari di X si indica con X_{reg}. Un punto che non è regolare è *singolare*. L'insieme dei punti singolari di X si indica con X_{sing}.

Una sottovarietà X può avere punti regolari di dimensioni diverse. Se un punto è regolare di dimensione k, anche tutti i punti sufficientemente vicini sono regolari di dimensione k, perché possiamo usare gli stessi U' e U''. In particolare, X_{reg} è aperto in X. Un punto isolato di X è automaticamente regolare di dimensione 0. Talvolta si considera l'insieme vuoto una varietà complessa di dimensione -1 (oppure $-\infty$). Non è difficile provare che la nozione di punto regolare è invariante per cambiamenti biolomorfi di coordinate (esercizio 6.5.8). Resta infine da verificare che la dimensione è ben definita (esercizio 6.5.6).

Esempio 6.5.6. L'insieme $U = \mathbb{C}^n$ è una sottovarietà complessa liscia di dimensione n (codimensione 0). In particolare, $U_{reg} = U$ e $U_{sing} = \emptyset$.

L'insieme $M = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_3 = z_1^2 - z_2^2\}$ è una sottovarietà complessa liscia di dimensione 2 (codimensione 1). Anche qui $M_{reg} = M$ e $M_{sing} = \emptyset$.

La cosiddetta *cuspide* $C = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^3 - z_2^2 = 0\}$, invece, non è una sottovarietà complessa liscia. L'origine è un punto singolare di C (si veda l'esercizio più sotto). Vicino a ogni altro punto possiamo scrivere $z_2 = \pm z_1^{3/2}$, quindi $C_{reg} = C \setminus \{0\}$ e $C_{sing} = \{0\}$. La dimensione in ogni punto regolare è 1. La figura 6.5 mostra $C \cap \mathbb{R}^2$.

Un altro tipo di singolarità si presenta quando due varietà complesse lisce si intersecano. Per esempio, $X = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 - z_2^2 = 0\}$ è l'unione delle due varietà complesse lisce di dimensione uno definite da $z_1 + z_2 = 0$ e $z_1 - z_2 = 0$. In questo caso $X_{sing} = \{0\}$ e $X_{reg} = X \setminus \{0\}$. Si veda la rappresentazione di $X \cap \mathbb{R}^2$ nella figura 6.5.

Esercizio 6.5.6. Dimostrare che, se p è un punto regolare di una sottovarietà $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ di un dominio U, la dimensione in p è ben definita. *Suggerimento.* Se fossero possibili due aperti U' di dimensioni diverse (eventualmente in coordinate affini diverse), costruire un'applicazione da uno di tali aperti U' all'altro U' con differenziale non degenere.

Esercizio 6.5.7. Considerare la cuspide $C = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^3 - z_2^2 = 0\}$. Dimostrare che l'origine non è un punto regolare di C.

[47] Con «ambiente» si indica lo spazio che contiene l'oggetto di cui si parla.

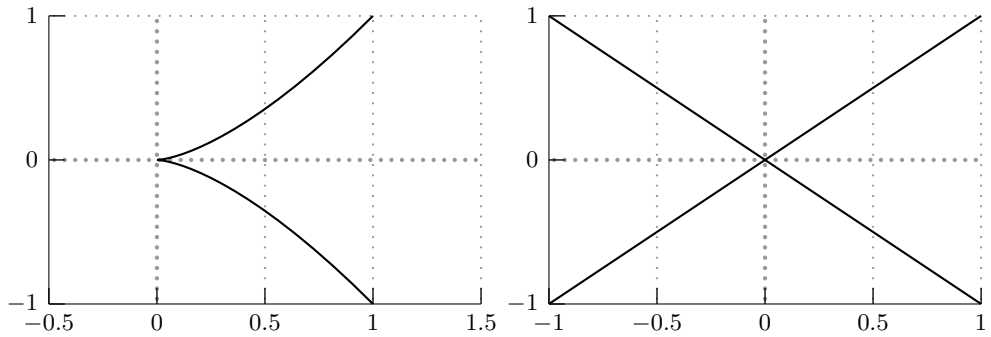


Figura 6.5: La cuspide C (a sinistra) e le due varietà che si intersecano in X (a destra), rappresentate nelle rispettive sezioni reali.

Esercizio 6.5.8. Mostrare che p è un punto regolare di dimensione k di una sottovarietà X se e solo se esiste un cambiamento locale biolomorfo di coordinate che porta p nell'origine e tale che, vicino a 0, X sia definita da $w = 0$, con $(z, w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. In altre parole, ammettendo nella definizione un cambiamento biolomorfo di coordinate anziché la sola permutazione, possiamo prendere $f = 0$.

Definiamo la dimensione anche in un punto singolare. Dimostreremo fra poco che l'insieme dei punti regolari è non vuoto e denso in ogni sottovarietà non vuota. Ci sono dunque punti regolari arbitrariamente vicini a ogni suo punto.

Definizione 6.5.7. Sia $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ una sottovarietà di U e sia $p \in X$. Definiamo la *dimensione* complessa di X in p ponendo

$$\dim_p X \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k \in \mathbb{N}_0 : \forall\, W \ni p \text{ aperto},\ \exists\, q \in W \cap X_{reg} : \dim_q X = k\}.$$

Se (X, p) è un germe e X un suo rappresentante, la *dimensione* di (X, p) è la dimensione di X in p. La dimensione dell'intera sottovarietà X è definita da

$$\dim X \stackrel{\text{def}}{=} \max_{p \in X_{reg}} \dim_p X.$$

Diciamo che X è di *dimensione pura* k se in ogni punto regolare p la dimensione di X in p è k. Un germe (X, p) ha dimensione pura k se esiste un rappresentante di X di dimensione pura k. Come prima, la *codimensione* è la differenza fra la dimensione ambiente e la dimensione di X.

Esempio 6.5.8. La cuspide $C = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1^3 - z_2^2 = 0\}$ ha dimensione 1 in ogni punto regolare e l'origine è il suo unico punto singolare. Ne segue che $\dim_0 C = 1$ e quindi $\dim C = 1$. La sottovarietà C è di dimensione pura 1.

Riformuliamo nel linguaggio delle varietà il teorema 1.6.2 sui punti regolari dell'insieme degli zeri.

Teorema 6.5.9. Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(U)$. Allora Z_f è vuoto, oppure Z_f è una sottovarietà di codimensione pura 1, oppure $Z_f = U$. Inoltre $(Z_f)_{reg}$ è aperto e denso in Z_f.

Passiamo, come promesso, al risultato per varietà arbitrarie.

Lemma 6.5.10. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $X \subset U$ una sottovarietà non vuota. Allora X_{reg} è non vuoto. Di conseguenza X_{reg} è aperto e denso in X.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione ambiente. Per $n = 1$ le sottovarietà sono costituite da punti isolati oppure da intere componenti di U, cosicché tutti i punti sono regolari. Supponiamo il lemma vero in dimensione $n-1$. Basta trovare un solo punto regolare di X, perché potremo applicare lo stesso ragionamento in ogni intorno di ogni punto di X. Per semplicità supponiamo $0 \in X$. Se X contiene un intero intorno di 0, allora 0 è regolare. In caso contrario esiste vicino a 0 una funzione olomorfa non identicamente nulla f che si annulla su X. Dopo un cambiamento lineare di coordinate si applica il teorema di preparazione di Weierstrass e possiamo supporre che f sia un polinomio di Weierstrass. Scriviamo $(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) = (z', z_n)$. In un opportuno intorno V dell'origine, con $V \subset U$, si applica a f il teorema 6.3.3: indichiamo con $\Delta(z')$ la funzione discriminante. Considerando Δ come funzione su V, supponiamo che $\Delta(q) \neq 0$ per qualche $q \in X \cap V$. Esiste allora un intorno W di q tale che $Z_f \cap W$ sia il grafico di una funzione olomorfa e $X \cap W \subset Z_f \cap W$. Dopo un cambiamento locale biolomorfo di variabili possiamo supporre che $Z_f \cap W$ sia un aperto di $\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$. Dunque $X \cap W$ è di fatto contenuto in $\mathbb{C}^{n-1}$ e possiamo applicare l'ipotesi induttiva.

Supponiamo ora che Δ si annulli su X. La funzione Δ dipende solo da $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Dopo un cambiamento lineare nelle variabili z', applichiamo il teorema di preparazione in z' rispetto a z_{n-1} e otteniamo $\Delta = uP$ in un intorno di 0, dove u è un'unità e P è un polinomio di Weierstrass in z_{n-1} con coefficienti che dipendono solo da $z_1, \ldots, z_{n-2}$. Sia Δ' il discriminante di P. Ripetiamo il procedimento: o Δ' non si annulla in qualche punto di X e applichiamo l'ipotesi induttiva come sopra, oppure, vicino all'origine, X è contenuto nell'insieme degli zeri di Δ'. Se X è contenuto nell'insieme degli zeri di Δ', applichiamo di nuovo il teorema di preparazione e otteniamo un polinomio in z_{n-2} con coefficienti che dipendono solo da $z_1, \ldots, z_{n-3}$. Proseguendo, o a un certo punto possiamo applicare l'ipotesi induttiva, oppure dopo $n-1$ passi X è contenuto nell'insieme degli zeri di un polinomio di Weierstrass in una sola variabile. In tal caso, vicino all'origine, X è contenuto nell'insieme definito da $z_1 = 0$ e possiamo ancora applicare l'induzione. □

Enunciamo senza dimostrazione che l'insieme singolare è a sua volta una sottovarietà di dimensione inferiore. Nella prossima sezione lo dimostreremo per le varietà di codimensione pura 1.

Teorema 6.5.11. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $X \subset U$ una sottovarietà. Allora $X_{sing} \subset X$ è una sottovarietà mai densa in X e $\dim X_{sing} < \dim X$.

Esercizio 6.5.9. Sia $X \subset U \subset \mathbb{C}^n$ una sottovarietà del dominio U tale che X_{reg} sia connesso. Mostrare che X è di dimensione pura.

6.6 Ipervarietà

Le sottovarietà di codimensione pura 1 godono di proprietà particolarmente semplici. Le sottovarietà di codimensione pura 1 si chiamano talvolta *ipervarietà*. Dimostreremo due risultati: localmente basta una sola funzione per definire un'ipervarietà e l'insieme singolare di un'ipervarietà è una sottovarietà.

Teorema 6.6.1. Se (X, p) è un germe di sottovarietà di codimensione pura 1, esiste un germe di funzione olomorfa f in p tale che $(Z_f, p) = (X, p)$ e $I_p(X)$ sia generato da (f, p).

Le proprietà locali di una sottovarietà di codimensione pura 1 si possono dunque studiare mediante gli zeri di un solo polinomio di Weierstrass.

Dimostrazione. Cerchiamo una funzione che si annulli su (X, p) e divida ogni altra funzione che vi si annulla. Esiste almeno un germe di funzione non identicamente nulla che si annulla su X vicino a p, pur potendo annullarsi su un insieme più grande. Possiamo supporre $p = 0$ e, dopo un cambiamento lineare di coordinate, applicare il teorema di preparazione. Più precisamente, supponiamo che X sia una sottovarietà di codimensione pura 1 di un polidisco sufficientemente piccolo $U' \times D \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ centrato nell'origine. La funzione che si annulla su X sia un polinomio di Weierstrass $P(z', z_n)$ definito per $z' \in U'$, con tutti gli zeri di $z_n \mapsto P(z', z_n)$ in D per $z' \in U'$. Si applica il teorema 6.3.3. Sia $E \subset U'$ l'insieme discriminante, definito dagli zeri di una funzione olomorfa. Su $U' \setminus E$ il numero di zeri geometricamente distinti di $z_n \mapsto P(z', z_n)$ è costante.

Sia X' una componente connessa di $X \setminus (E \times D)$. Sopra ogni $z' \in U' \setminus E$ indichiamo con $\alpha_1(z'), \ldots, \alpha_k(z')$ gli zeri distinti che appartengono a X', ossia tali che $(z', \alpha_\ell(z')) \in X'$. Vicino a ogni suo punto X' è un grafico olomorfo su $U' \setminus E$, quindi possiamo scegliere localmente $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ olomorfe. Ne segue anche che X' è costituito da punti regolari di X di dimensione $n - 1$. Il numero di tali zeri geometricamente distinti in X' sopra ciascun punto di $U' \setminus E$ è localmente costante. Poiché $U' \setminus E$ è connesso (esercizio 1.6.5), esiste un unico valore di k. Poniamo

$$F(z', z_n) = \prod_{\ell=1}^{k} (z_n - \alpha_\ell(z')) = z_n^k + \sum_{\ell=0}^{k-1} g_\ell(z') z_n^\ell.$$

Per $z' \in U' \setminus E$ i coefficienti g_ℓ sono ben definiti, perché indipendenti dall'ordinamento di $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. I g_ℓ sono olomorfi su $U' \setminus E$, perché localmente ciascuna α_ℓ può essere scelta olomorfa. I coefficienti g_ℓ sono limitati e, per il teorema di prolungamento di Riemann, si prolungano attraverso il discriminante in U' a funzioni olomorfe su U'. Dunque F è un polinomio in $\mathcal{O}(U')[z_n]$. Gli zeri di F sopra $z' \in U' \setminus E$ sono semplici e danno precisamente X'. Per il principio dell'argomento gli zeri di F sopra $z' \in E$ sono limiti di zeri sopra punti di $U' \setminus E$. Pertanto l'insieme degli zeri di F è la chiusura di X' in $U' \times D$. Lasciamo al lettore la verifica che tutte le g_ℓ si annullano nell'origine e che F è un polinomio di Weierstrass, fatto utile negli esercizi che seguono.

Se il polinomio $P(z', z_n)$ ha grado m, allora $z_n \mapsto P(z', z_n)$ ha al più m zeri. Tenendo conto della connessione di $U' \setminus E$, ne segue che $X \setminus (E \times D)$ ha solo un numero finito di componenti, al più m. A ogni componente connessa di $X \setminus (E \times D)$ associamo una funzione F e prendiamo il loro prodotto f. Nessun aperto non vuoto $M \subset X_{reg}$ può essere interamente contenuto in $E \times D$. Altrimenti un aperto di M sarebbe anche un aperto di $E \times D$ (esercizio 6.6.4). Sappiamo però che P si annulla su M, il che è impossibile, poiché per ogni z' fissato il polinomio si annulla in un numero finito di punti. Poiché X_{reg} è denso in X (lemma 6.5.10), la chiusura di $X \setminus (E \times D)$ contiene X e quindi $Z_f = X$. La verifica che f genera $I_p(X)$ è lasciata all'esercizio 6.6.3. □

Esempio 6.6.2. Per definire una sottovarietà di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $n-k$ (codimensione k) non bastano sempre k funzioni olomorfe. La conclusione è garantita per $k=1$. L'insieme definito da

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \end{bmatrix} < 2$$

è una sottovarietà di dimensione pura 4 in $\mathbb{C}^6$, quindi di codimensione 2. Le equazioni definenti sono $z_1z_5 - z_2z_4 = 0$, $z_1z_6 - z_3z_4 = 0$ e $z_2z_6 - z_3z_5 = 0$. Enunciamo senza dimostrazione che l'origine è l'unico punto singolare e che non esistono 2 funzioni olomorfe vicino all'origine che definiscano questa sottovarietà. In termini tecnici, la sottovarietà non è un'*intersezione completa*.

Un lieve affinamento della dimostrazione precedente dà il risultato seguente. Esso vale anche in codimensione maggiore, ma la dimostrazione è più difficile.

Corollario 6.6.3. Sia (X,p) un germe di sottovarietà di codimensione pura 1. Allora esistono un intorno U di p, un rappresentante $X \subset U$ di (X,p) e sottovarietà $X_1,\dots,X_k \subset U$ di codimensione pura 1 tali che $(X_\ell)_{reg}$ sia connesso per ogni ℓ e $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$.

Dimostrazione. Per ottenere ciascuna X_ℓ si prende una componente connessa di $X \setminus (E \times D)$ come nella dimostrazione del teorema 6.6.1, si costruisce la funzione F e si pone $X_\ell = Z_F$. La componente è connessa ed è densa in $(X_\ell)_{reg}$, da cui segue il corollario. □

Esercizio 6.6.1. Sia $p(z', z_n)$ un polinomio di Weierstrass di grado k tale che, per z' in un aperto denso vicino all'origine, $z_n \mapsto p(z', z_n)$ abbia k zeri geometricamente distinti. Supponiamo connesso l'insieme dei punti regolari di Z_p. Mostrare che p è irriducibile nel senso seguente: se $p = rs$ per due polinomi di Weierstrass r e s, allora $r = 1$ oppure $s = 1$.

Esercizio 6.6.2. Sia f olomorfa in un intorno dell'origine e sia finito l'ordine di $z_n \mapsto f(0, z_n)$. Mostrare che

$$f = u p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_\ell^{d_\ell},$$

dove i p_k sono polinomi di Weierstrass di grado μ_k tali che, per z' in un aperto denso, $z_n \mapsto p_k(z', z_n)$ ha μ_k zeri geometricamente distinti (nessuno zero multiplo), l'insieme dei punti regolari di Z_{p_k} è connesso e u è una funzione olomorfa mai nulla vicino a 0. Nella prossima sezione questi polinomi saranno i fattori irriducibili della fattorizzazione di f.

Esercizio 6.6.3. Dimostrare l'ultima parte del teorema 6.6.1: se (X,p) è un germe di sottovarietà di codimensione pura 1, l'ideale $I_p(X)$ è principale (ammette un solo generatore nel senso che uno è sufficiente).

Esercizio 6.6.4. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto e sia $X \subset U$ una sottovarietà di dimensione $n-1$. Sia M un piccolo tratto di sottovarietà complessa liscia di dimensione $n-1$ con $M \subset X$. Dimostrare che M coincide con X_{reg} su un aperto denso: per ogni p di un opportuno aperto denso di M esiste un intorno W di p tale che $M \cap W = X_{reg} \cap W$. *Suggerimento.* Considerare coordinate in cui M sia un grafico e il teorema 6.3.3 si applichi a una funzione che si annulla su X.

Esercizio 6.6.5. Sia $I \subset \mathcal{O}_p$ un ideale principale. Dimostrare il *Nullstellensatz* per le ipervarietà, ossia $I_p\big(V_p(I)\big) = \sqrt{I}$. In altri termini, se $(f,p) \in I_p\big(V_p(I)\big)$, mostrare che $(f^k, p) \in I$ per un certo intero positivo k.

Esercizio 6.6.6. Sia $X \subset U$ una sottovarietà di codimensione pura 1 in un aperto $U \subset \mathbb{C}^n$. Sia X' una componente connessa di X_{reg}. Provare che la chiusura $\overline{X'}$ in U è una sottovarietà di codimensione pura 1.

Esempio 6.6.4. Se X è un'ipervarietà alla quale si applica il teorema di preparazione con insieme discriminante E, si potrebbe pensare che l'insieme singolare di X sia $X \cap (E \times \mathbb{C})$, sottovarietà di codimensione 2. L'insieme $X \cap (E \times \mathbb{C})$ contiene effettivamente l'insieme singolare, ma in generale quest'ultimo è più piccolo. Un esempio semplice è $z_2^2 - z_1 = 0$. La funzione definente è un polinomio di Weierstrass in z_2 e l'insieme discriminante è definito da $z_1 = 0$. Tuttavia la sottovarietà non ha punti singolari, essendo il grafico di z_1 in funzione di z_2 (figura 6.6). L'esercizio 6.6.8 fornisce un esempio meno immediato, $z_1^2 + \cdots + z_k^2 = 0$, in cui l'insieme singolare ha una dimensione assegnata $n - k$.

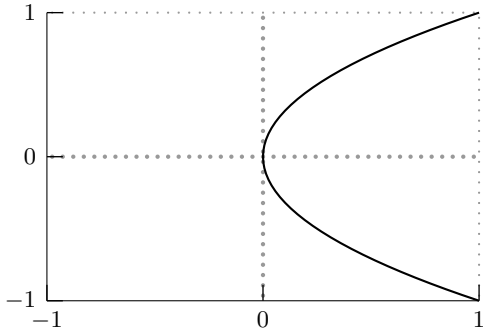


Figura 6.6: La parabola ad asse orizzontale $z_2^2 - z_1 = 0$ per z_1 e z_2 reali. Per ogni z_1 non nullo esistono due soluzioni (entrambe non reali per z_1 negativo). Per ogni z_2 fissato esiste invece esattamente una soluzione.

Dimostriamo il teorema 6.5.11 per le ipervarietà. Ora sappiamo che localmente sono definite da una sola funzione: possiamo usare il discriminante per individuarne le singolarità, purché ammettiamo infiniti cambiamenti lineari di coordinate.

Teorema 6.6.5. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $X \subset U$ una sottovarietà di codimensione pura 1 (un'ipervarietà). Allora X_{sing} è una sottovarietà di dimensione minore o uguale a $n - 2$.

Dimostrazione. Basta dimostrare il risultato localmente vicino a un punto assegnato $p \in X$. In p esiste una funzione olomorfa f tale che $I_p(X)$ sia generato da (f, p). La funzione f è definita in un intorno W e $Z_f = X \cap W$. Possiamo supporre $p = 0$ e, dopo un cambiamento lineare di coordinate, applicare vicino all'origine il teorema di preparazione e il teorema 6.3.3 rispetto a ciascuna variabile. Precisamente, esistono un intorno aperto V dell'origine e, per ciascuna direzione coordinata, un polidisco $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ centrato nell'origine con $\overline{V} \subset D$ e $\overline{D} \subset W$, tale che per $k = 1, \ldots, n$ il teorema 6.3.3 si applichi rispetto a z_k, ossia $Z_f \cap (D_1 \times \cdots \times \partial D_k \times \cdots \times D_n) = \emptyset$.

Consideriamo $q \in X_{reg} \cap V$. Per definizione X è un grafico vicino a q e, riordinando le variabili, possiamo supporre che sia il grafico di z_n su $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Sia D il polidisco corrispondente e scriviamo $D = D' \times D_n \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$. Sia $E \subset D'$ l'insieme discriminante definito da $\Delta \in \mathcal{O}(D')$. Possiamo considerare Δ come un elemento di $\mathcal{O}(D)$. Se $q \notin E \times D_n$, allora $\Delta(q) \neq 0$: abbiamo trovato una funzione olomorfa in V che non si annulla in q. Costruiremo una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni olomorfe su V, una per ciascun $q \in X_{reg} \cap V$. Nel caso appena trattato inseriamo Δ in $\mathcal{F}$.

Supponiamo ora $\Delta(q) = 0$. Possiamo prendere per f il polinomio di Weierstrass in z_n costruito nella dimostrazione del teorema 6.6.1. Ha un certo grado m e, per z' generico

(fuori dall'insieme discriminante), la funzione $z_n \mapsto f(z', z_n)$ ha m radici geometricamente distinte, dunque anche m radici contate con molteplicità. Scriviamo $q = (q', q_n)$. Poiché $q \in X_{reg}$ e abbiamo scelto la direzione del grafico, lo zero di $z_n \mapsto f(q', z_n)$ in $z_n = q_n$ è semplice, ma gli altri non sono tutti semplici, dato che q' appartiene al discriminante. Cambieremo variabili affinché la nuova retta verticale passante per q incontri X solo in zeri semplici. Lo zero in q è già semplice, quindi faremo ruotare la retta attorno a q.

Introduciamo le variabili $\tilde{z} = (\tilde{z}', z_n)$ mediante $(z', z_n) = (\tilde{z}' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ con $\epsilon' \in \mathbb{C}^{n-1}$ piccolo. La nuova retta verticale è $\{\tilde{z}' = q'\}$. Per ϵ' piccolo e $\tilde{z}'$ vicino a q', la funzione $z_n \mapsto f(\tilde{z}' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ ha ancora esattamente m radici con molteplicità, per il principio dell'argomento. Se $z_n \mapsto f(q' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ ha m radici geometricamente distinte, anche $z_n \mapsto f(\tilde{z}' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ ne ha altrettante per $\tilde{z}'$ vicino a q': basta usare m piccoli dischi e il principio dell'argomento, come nella dimostrazione del teorema 6.3.3. Lasciamo per esercizio l'esistenza di ϵ' arbitrariamente piccolo tale che $z_n \mapsto f(q' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ abbia m radici geometricamente distinte. Si può procedere un'intersezione alla volta della retta $z_n \mapsto (q' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ con X: vicino a un'intersezione di molteplicità k, una piccola variazione generica di ϵ' dà k intersezioni distinte. Si veda l'esercizio 6.6.7.

Prendiamo, nelle variabili $\tilde{z}$, un polidisco leggermente più piccolo $\widetilde{D} = \widetilde{D}' \times D_n \subset D$ tale che valga ancora $V \subset \widetilde{D}$ (a questo scopo può essere necessario scegliere ϵ' abbastanza piccolo) e che il teorema 6.3.3 si applichi in $\widetilde{D}$. Poiché il numero di zeri distinti di $f(\tilde{z}' + (q_n - z_n)\epsilon', z_n)$ è m per ogni $\tilde{z}'$ vicino a q', incluso $\tilde{z}' = q'$, il discriminante $\widetilde{\Delta}$ nelle nuove variabili non si annulla in q'. Consideriamo di nuovo $\widetilde{\Delta}$ come funzione su V: poiché non si annulla in q, aggiungiamo $\widetilde{\Delta}$ a $\mathcal{F}$. La costruzione è illustrata nella figura 6.7. Ripetendola per ogni $q \in X_{reg} \cap V$ otteniamo $\mathcal{F}$.

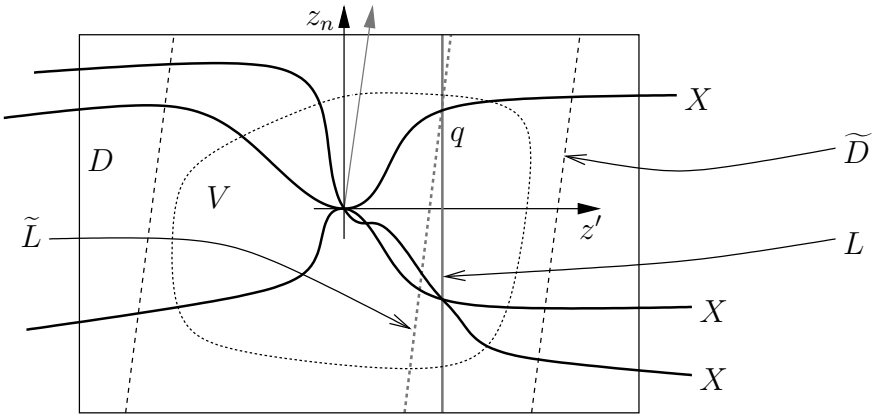


Figura 6.7: Cambiamento di variabili che rende il discriminante non nullo in q. Qui L è la retta $\{z' = q'\}$ e $\widetilde{L}$ è la retta inclinata $\{\tilde{z}' = q'\}$.

Se $q \in X \cap V$ è singolare, ogni funzione discriminante usata sopra deve annullarsi in q: fuori dall'insieme discriminante, in ogni punto di X l'insieme X è localmente un grafico, quindi è regolare. Dunque $\varphi(q) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{F}$. Se q è regolare, almeno una $\varphi \in \mathcal{F}$ non si annulla in q. Ne segue che l'intersezione dell'insieme degli zeri comuni delle funzioni di $\mathcal{F}$ con $X \cap V$ è precisamente $X_{sing} \cap V$. Pertanto X_{sing} è una sottovarietà. Non può avere dimensione $n - 1$: altrimenti vicino a un suo punto sarebbe una varietà complessa liscia di dimensione $n - 1$ e, per l'esercizio 6.6.4, non tutti quei punti sarebbero singolari per X. □

Per definire X_{sing} abbiamo impiegato infinite funzioni in $\mathcal{F}$. Poiché $\mathcal{O}_p$ è noetheriano, bastano però un numero finito di generatori per $I_p(X_{sing})$ e quindi un numero finito di

funzioni per definire X_{sing} vicino a p. Non è tuttavia possibile, in generale, fare un solo cambiamento lineare generico di variabili e usare soltanto le n funzioni discriminanti, una per ogni variabile. Possono servire più di n funzioni: comunque si scelgano inizialmente le coordinate, la situazione della figura 6.7 può presentarsi per qualche q arbitrariamente vicino a p.

Esercizio 6.6.7.

1. Sia $D = D' \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco, con $0 \in D$, e sia P un polinomio di Weierstrass di grado k con coefficienti in $\mathcal{O}(D')$ tale che per z' generico (fuori dall'insieme discriminante) $z_n \mapsto P(z', z_n)$ abbia k zeri semplici. Dimostrare che esistono una palla $B \subset \mathbb{C}^{n-1}$ centrata nell'origine e un aperto denso $W \subset B$ tali che per ogni $\epsilon' \in W$ la funzione $z_n \in D_n \mapsto P((1 - z_n)\epsilon', z_n)$ abbia esattamente k zeri geometricamente distinti in D_n. *Suggerimento.* Cambiare le coordinate vicino all'origine in modo che tutte queste rette diventino verticali.

2. Mostrare che la prima parte prova l'asserzione usata nella dimostrazione del teorema. Osservare che la prima parte corrisponde a $q = (0, 1) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ nella dimostrazione.

Esercizio 6.6.8.

1. Dimostrare che l'ipervarietà di $\mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, definita da $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 0$ ha una singolarità isolata nell'origine, ossia che l'origine è il suo unico punto singolare.

2. Per ogni $0 \leq k \leq n - 2$ trovare un'ipervarietà X di $\mathbb{C}^n$ il cui insieme singolare sia una sottovarietà di dimensione k.

6.7 Irriducibilità, parametrizzazione locale e teorema di Puiseux

Definizione 6.7.1. Un germe di sottovarietà $(X, p) \subset (\mathbb{C}^n, p)$ è *riducibile* in p se esistono due germi di sottovarietà (X_1, p) e (X_2, p) con $(X_1, p) \not\subset (X_2, p)$ e $(X_2, p) \not\subset (X_1, p)$ tali che $(X, p) = (X_1, p) \cup (X_2, p)$. In caso contrario (X, p) è *irriducibile* in p.

Analogamente, a livello globale, una sottovarietà $X \subset U$ è *riducibile* in U se esistono due sottovarietà X_1 e X_2 di U, con $X_1 \not\subset X_2$ e $X_2 \not\subset X_1$, tali che $X = X_1 \cup X_2$. Altrimenti X è *irriducibile* in U.

Esempio 6.7.2. La riducibilità locale e quella globale sono nozioni diverse. La sottovarietà definita da

$$z_2^2 = z_1(z_1 - 1)^2$$

è irriducibile in $\mathbb{C}^2$ (l'insieme dei punti regolari è connesso), ma localmente è riducibile nel punto $(1, 0)$. In un suo intorno è infatti l'unione di due grafici, $z_2 = \pm\sqrt{z_1}(z_1 - 1)$. La figura 6.8 ne mostra la sezione reale.

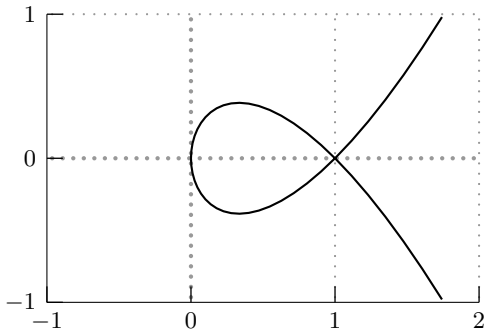


Figura 6.8: Una curva localmente riducibile.

Esercizio 6.7.1. Provare che un germe di sottovarietà (X, p) è irriducibile se e solo se $I_p(X)$ è un ideale primo. Ricordiamo che un ideale I è *primo* se $I \neq \mathcal{O}_p$ e se da $ab \in I$ segue $a \in I$ oppure $b \in I$.

Esercizio 6.7.2. Sia (X, p) un germe di ipervarietà. Provare che (X, p) è irriducibile se e solo se per ogni rappresentante X esiste un rappresentante $X' \subset X$ per il quale X'_{reg} è connesso.

Esercizio 6.7.3. Sia $X \subset U$ una sottovarietà di codimensione pura 1 di un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$. Provare che X è irriducibile se e solo se X_{reg} è connesso. *Suggerimento.* Si veda l'esercizio precedente.

Una sottovarietà analitica complessa è irriducibile se e solo se l'insieme dei suoi punti regolari è connesso. Omettiamo la dimostrazione nel caso generale. Per le ipervarietà è l'esercizio appena proposto. È dunque naturale scomporre una sottovarietà nelle sue parti irriducibili.

Proposizione 6.7.3. Sia $(X, p) \subset (\mathbb{C}^n, p)$ un germe di sottovarietà. Esistono allora germi di sottovarietà irriducibili in numero finito $(X_1, p), \ldots, (X_k, p)$ tali che $(X_1, p) \cup \ldots \cup (X_k, p) = (X, p)$ e tali che $(X_m, p) \not\subset (X_\ell, p)$ per $m \neq \ell$.

Dimostrazione. Supponiamo (X, p) riducibile. Troviamo (Y_1, p) e (Y_2, p) tali che $(Y_1, p) \not\subset (Y_2, p)$, $(Y_2, p) \not\subset (Y_1, p)$ e $(Y_1, p) \cup (Y_2, p) = (X, p)$. Poiché $(Y_\ell, p) \subsetneq (X, p)$,

si ha $I_p(Y_\ell) \supsetneq I_p(X)$ per entrambi gli indici ℓ. Se (Y_1, p) e (Y_2, p) sono irriducibili abbiamo finito. Altrimenti applichiamo lo stesso ragionamento a ciascun (Y_ℓ, p) riducibile, eventualmente a entrambi. Il procedimento termina dopo un numero finito di passi: l'anello $\mathcal{O}_p$ è noetheriano e non ammette catene strettamente crescenti infinite di ideali. Eliminando eventuali componenti contenute in altre si ottiene la famiglia richiesta. □

I germi $(X_1, p), \dots, (X_k, p)$ si chiamano *componenti irriducibili*. Omettiamo la dimostrazione della loro unicità nel caso generale. Per un germe di ipervarietà le componenti irriducibili si ottengono dalla fattorizzazione unica in $\mathcal{O}_p$. La fattorizzazione trovata nell'esercizio 6.6.2 è quindi unica.

Ciascuna componente irriducibile ha la struttura descritta dal teorema seguente. Lo enunciamo senza dimostrazione nel caso generale. In codimensione pura 1 ne abbiamo già dimostrato sostanzialmente tutti gli ingredienti, che lasciamo al lettore il compito di riunire.

Teorema 6.7.4. *(Teorema di parametrizzazione locale).* Sia $(X, 0)$ un germe irriducibile di sottovarietà di dimensione k in $\mathbb{C}^n$ e sia X un suo rappresentante. Dopo un eventuale cambiamento lineare di coordinate, indicata con $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ la proiezione sulle prime k componenti, esistono un intorno $U = \pi(U) \times D \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ dell'origine, tale che $X \cap U$ sia una sottovarietà di U e $X \cap U$ non abbia punti di accumulazione su $\pi(U) \times \partial D$, e una sottovarietà propria $E \subset \pi(U)$ (l'*insieme discriminante*) tali che:

(i) $X' = X \cap U \setminus \pi^{-1}(E)$ è una varietà complessa liscia connessa di dimensione k, densa in $X \cap U$.

(ii) $\pi\colon X' \to \pi(U) \setminus E$ è un rivestimento a m fogli per un certo intero m.

(iii) $\pi\colon X \cap U \to \pi(U)$ è un'applicazione propria.

Il rivestimento a m fogli in questo caso è un biolomorfismo locale che assume ogni valore esattamente m volte.

Esercizio 6.7.4. Usare il teorema 6.3.3 per dimostrare il teorema di parametrizzazione quando $(X, 0)$ è di codimensione pura 1.

Siano $(z_1, \dots, z_n)$ le coordinate. Il cambiamento lineare richiesto serve a garantire che l'origine sia un punto isolato dell'intersezione dell'insieme definito da $z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0$ con X. È la stessa condizione che occorre per applicare il teorema di preparazione di Weierstrass quando X è l'insieme degli zeri di una sola funzione.

Abbiamo visto che le ipersuperfici sono fra gli esempi più semplici di sottovarietà. All'estremo opposto, per ragioni diverse, anche le sottovarietà di dimensione 1 sono relativamente semplici. Una sottovarietà di dimensione 1 irriducibile in un punto è, vicino a quel punto, un disco analitico. Possiamo inoltre scegliere iniettiva la parametrizzazione di questi dischi. Tali sottovarietà hanno quindi una struttura naturale di varietà topologica anche nei punti singolari.

Esempio 6.7.5. L'immagine dell'applicazione olomorfa $\xi \mapsto (\xi^2, \xi^3)$ è la cuspide definita da $z_1^3 - z_2^2 = 0$ in $\mathbb{C}^2$.

Il teorema seguente si enuncia spesso solo in $\mathbb{C}^2$ per gli insiemi degli zeri di una sola funzione. Tuttavia segue allo stesso modo dal teorema di parametrizzazione locale in spazi di dimensione maggiore. Poiché abbiamo dimostrato quest'ultimo teorema (più precisamente, lo ha dimostrato il lettore in un esercizio) soltanto per sottovarietà di codimensione

1, anche per il risultato seguente disponiamo qui di una dimostrazione completa soltanto in $\mathbb{C}^2$.

Teorema 6.7.6. *(Puiseux).* Siano $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ le coordinate e sia $f\colon U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^\ell$ un'applicazione olomorfa. Supponiamo che $f(z, w) = 0$ definisca una sottovarietà unidimensionale X di U, che $0 \in X$ e che $w \mapsto f(0, w)$ abbia uno zero isolato nell'origine. Esistono allora un intero positivo k e una funzione olomorfa g a valori in $\mathbb{C}^{n-1}$, definita vicino all'origine in $\mathbb{C}$, tali che per ogni ξ vicino all'origine si abbia

$$f(\xi^k, g(\xi)) = 0.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $(X, 0)$ irriducibile e applicare il teorema di parametrizzazione locale. Lavoriamo in un piccolo disco $D \subset \mathbb{C}$ centrato nell'origine, in cui l'origine sia l'unico possibile punto dell'insieme discriminante (la sottovarietà E). Poniamo $N = \{z \in D : \Im z = 0, \Re z \leq 0\}$. Poiché $D \setminus N$ è semplicemente connesso, sono ben definite le funzioni $\alpha_1(z), \ldots, \alpha_m(z)$ olomorfe in $D \setminus N$ che risolvono $f(z, \alpha_j(z)) = 0$. Esse si prolungano analiticamente attraverso N lontano dall'origine. Il prolungamento coincide ancora con uno degli zeri: per esempio $\alpha_j(z)$ diventa $\alpha_\ell(z)$ e, per continuità, la corrispondenza rimane la stessa lungo tutto il taglio N privato dell'origine. Esiste dunque una permutazione σ di m elementi tale che, quando z gira in senso antiorario intorno all'origine passando dal semipiano superiore attraverso N al semipiano inferiore, $\alpha_j(z)$ si prolunga come $\alpha_{\sigma(j)}(z)$. Esiste un intero positivo k tale che σ^k sia l'identità.

Mentre ξ percorre una circonferenza attorno all'origine, ξ^k compie k giri. Partiamo da un valore reale positivo di ξ e definiamo inizialmente $g(\xi)$ come $\alpha_1(\xi^k)$. Facciamo ruotare ξ in senso antiorario attorno all'origine prolungando analiticamente g. Dividiamo il disco in settori di ampiezza $2\pi/k$, con bordi dati da $\xi^k \in N$. Raggiunto il bordo del primo settore passiamo a $\alpha_{\sigma(1)}(\xi^k)$, poi al bordo del successivo passiamo a $\alpha_{\sigma(\sigma(1))}(\xi^k)$, e così via. Dopo k passi, cioè quando ξ ha compiuto un giro intero, siamo tornati a $\alpha_1(\xi^k)$ perché σ^k è l'identità. Quindi $g(\xi)$ è olomorfa e ben definita fuori dall'origine. Poniamo $g(0) = 0$: per il teorema di prolungamento di Riemann g è olomorfa anche in 0. Si veda l'esempio della figura 6.9. □

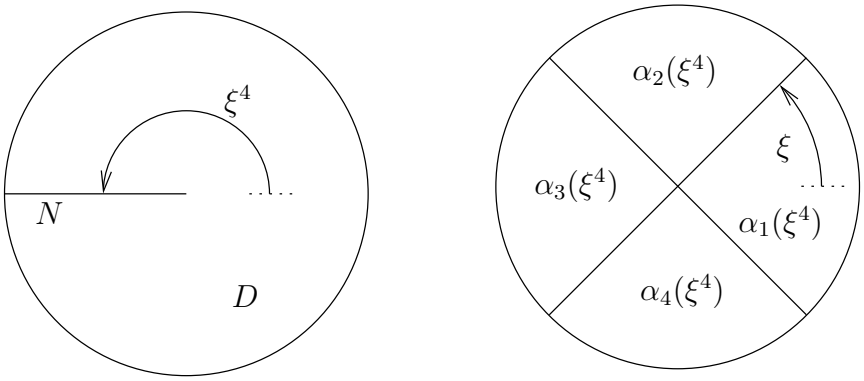


Figura 6.9: La dimostrazione del teorema di Puiseux per $m = k = 4$. La permutazione σ manda 1 in 2, 2 in 3, 3 in 4 e 4 in 1. Quando ξ percorre la freccia circolare corta a destra, ξ^4 percorre la freccia circolare lunga a sinistra. Il diagramma di destra indica come è definita g.

Esercizio 6.7.5. Sia $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ un germe irriducibile definito da un polinomio di Weierstrass irriducibile $f(z,w) = 0$ (nella variabile w) di grado k. Dimostrare che esiste una funzione olomorfa g tale che $f(\xi^k, g(\xi)) = 0$ e che $\xi \mapsto (\xi^k, g(\xi))$ è iniettiva e ha per immagine un intorno di 0 in X.

Esercizio 6.7.6. Sia $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ un germe di sottovarietà unidimensionale. Dimostrare che, dopo un eventuale cambiamento lineare di coordinate, esistono numeri naturali $d_1, \dots, d_k$ e funzioni olomorfe $c_1(\xi), \dots, c_k(\xi)$ nulle in 0 tali che X sia definita vicino a 0 da

$$\prod_{\ell=1}^{k} \prod_{m=0}^{d_\ell - 1} \left(w - c_\ell\bigl(e^{m2\pi i/d_\ell} z^{1/d_\ell}\bigr)\right) = 0.$$

Esercizio 6.7.7. Usando il teorema di parametrizzazione locale, dimostrare che, se (X,p) è un germe irriducibile di sottovarietà di dimensione maggiore di 1, esistono un intorno U di p e una sottovarietà chiusa $X \subset U$ (il cui germe in p è (X,p)) tali che per ogni $q \in X$ esista una sottovarietà irriducibile $Y \subset X$ di dimensione 1 con $p \in Y$ e $q \in Y$.

Esercizio 6.7.8. Rafforzare il risultato dell'esercizio precedente: oltre alla curva Y, provare che esiste un disco analitico $\varphi\colon \mathbb{D} \to U$ tale che $\varphi(\mathbb{D}) \subset X$, $\varphi(0) = p$ e $\varphi(1/2) = q$.

Esercizio 6.7.9. Sia $X \subset U$ una sottovarietà del dominio $U \subset \mathbb{C}^n$. Mostrare che X è irriducibile se e solo se, per ogni coppia di punti $p, q \in X$, esistono una successione finita di punti $p_0 = p, p_1, \dots, p_k = q$ di X e una successione finita di dischi analitici $\Delta_\ell \subset X$ tali che p_ℓ e $p_{\ell-1}$ appartengano a Δ_ℓ per ogni indice.

Esercizio 6.7.10. Usando gli esercizi precedenti, dimostrare un *principio del massimo per le sottovarietà*. Sia $X \subset U$ una sottovarietà irriducibile di un aperto U e sia $f\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ plurisubarmonica. Se la restrizione $f|_X$ assume il proprio massimo in un punto $p \in X$, allora $f|_X$ è costante.

Esercizio 6.7.11. Dimostrare che un disco analitico in $\mathbb{C}^2$ è localmente una varietà locale unidimensionale nel senso seguente: se $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^2$ è olomorfa non costante e $p \in \mathbb{D}$, esiste un intorno Δ di p tale che $f(\Delta)$ sia una varietà locale unidimensionale.

Il teorema di Puiseux permette spesso di parametrizzare direttamente i germi di sottovarietà complesse unidimensionali. Per le varietà di dimensione maggiore possiamo trovare abbastanza curve unidimensionali passanti per ogni punto e parametrizzare tali curve.

Non ogni sottovarietà irriducibile è localmente immagine iniettiva di un aperto di $\mathbb{C}^k$ mediante un'applicazione olomorfa. Un teorema molto profondo, la risoluzione delle singolarità, consente tuttavia una simile descrizione se si ammette che in alcuni punti l'applicazione non sia iniettiva.

6.8 Varietà di Segre e geometria CR

La presenza di dischi analitici, o di sottovarietà complesse, sulla frontiera di un dominio fornisce molte informazioni sulla geometria della frontiera.

Esempio 6.8.1. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia contenente un'ipersuperficie complessa X (l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa con differenziale non nullo) vicino a $p \in X \subset M$. Facciamo un cambiamento locale biolomorfo di coordinate in p in modo che, nelle nuove coordinate $(z, w) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, l'ipersuperficie X sia data da $w = 0$ e p sia l'origine. L'iperpiano tangente a M in 0 contiene $\{w = 0\}$. Ruotando la coordinata w (moltiplicandola per $e^{i\theta}$), possiamo supporre che M sia tangente all'insieme $\{(z, w) : \Im w = 0\}$. In altre parole, M è data da

$$\Im w = \rho(z, \bar{z}, \Re w),$$

con $d\rho(0) = 0$. Poiché $\{w = 0\} \subset M$, troviamo $\rho = 0$ per $\Re w = 0$. La funzione ρ è dunque divisibile per $\Re w$ e M è definita da

$$\Im w = (\Re w)\widetilde{\rho}(z, \bar{z}, \Re w),$$

per una funzione liscia $\widetilde{\rho}$. La forma di Levi nell'origine si annulla. Poiché $p = 0$ era un punto arbitrario di $M \cap X$, la forma di Levi di M si annulla su $M \cap X$.

Esempio 6.8.2. Se le varietà complesse contenute in M hanno dimensione sufficientemente piccola, la forma di Levi può anche non annullarsi. Consideriamo $M \subset \mathbb{C}^3$ con forma di Levi non degenere ma indefinita:

$$\Im w = |z_1|^2 - |z_2|^2 .$$

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, l'ipersuperficie M contiene la retta complessa L_θ definita da $z_1 = e^{i\theta} z_2$ e $w = 0$. L'unione $\bigcup_\theta L_\theta$ di queste rette complesse non è contenuta in una singola sottovarietà complessa interna a M. Infatti qualunque sottovarietà complessa contenente tutte le rette L_θ deve contenere l'intera ipersuperficie complessa definita da $w = 0$, che non è contenuta in M. Si veda la figura 6.10.

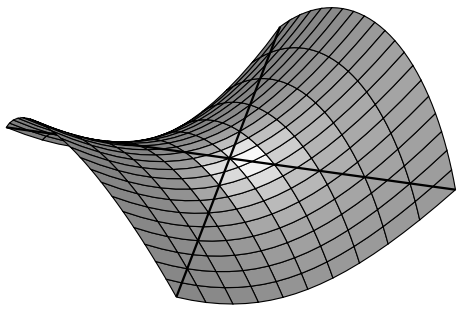


Figura 6.10: Una sezione dell'ipersuperficie nello spazio $(\Re z_1, \Re z_2, \Im w)$. Si vedono le tracce delle due rette complesse L_0 e L_π nel piano $w = 0$, corrispondenti a $z_1 = z_2$ e $z_1 = -z_2$.

Esercizio 6.8.1. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia. Dimostrare che, se M contiene in p una sottovarietà complessa liscia di dimensione complessa maggiore di $\frac{n-1}{2}$, allora la forma di Levi è degenere, cioè ha almeno un autovalore nullo.

Esercizio 6.8.2. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie reale liscia pseudoconvessa (uno dei due lati di M è pseudoconvesso). Supponiamo che M contenga in p una sottovarietà complessa liscia X di dimensione k. Mostrare che la forma di Levi ha almeno k autovalori nulli.

Esercizio 6.8.3. Trovare un'ipersuperficie reale liscia $M \subset \mathbb{C}^n$ che contenga un germe di sottovarietà analitica complessa singolare (X, p) passante per p, unico nel senso seguente: se (Y, p) è un altro germe di sottovarietà analitica complessa in M, allora $(Y, p) \subset (X, p)$.

Introduciamo ora uno strumento che permette, fra l'altro, di trovare tali sottovarietà complesse in M: la *varietà di Segre*. Le varietà di Segre si basano sulla complessificazione e si applicano nel contesto analitico reale.

Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale e sia $p \in M$. Supponiamo $M \subset U$, dove $U \subset \mathbb{C}^n$ è un piccolo dominio con funzione definente $r\colon U \to \mathbb{R}$ per M: la funzione r è analitica reale in U e soddisfa $M = r^{-1}(0)$, con $dr \neq 0$ su M. Poniamo

$$U^* = \{z \in \mathbb{C}^n : \bar{z} \in U\}.$$

Sia U abbastanza piccolo perché la serie di Taylor di r converga in $U \times U^*$ trattando z e $\bar{z}$ come variabili indipendenti. In altri termini, $r(z, \zeta)$ è ben definita su $U \times U^*$ e l'equazione $r(z, \zeta) = 0$ definisce una complessificazione $\mathcal{M}$ in $U \times U^*$. Supponiamo inoltre U così piccolo che il differenziale dr della funzione complessificata r non si annulli su $\mathcal{M}$ e che $\mathcal{M}$ sia connessa. Si veda anche la proposizione 3.2.8.

Dato $q \in U$, definiamo la *varietà di Segre*

$$\Sigma_q(U, r) = \{z \in U : r(z, \bar{q}) = 0\} = \{z \in U : (z, \bar{q}) \in \mathcal{M}\}.$$

come illustrato nella figura 6.11. A priori la sottovarietà Σ_p dipende da U e da r. Se tuttavia $\widetilde{r}$ è una funzione analitica reale che si complessifica su $U \times U^*$ e si annulla su M, deve annullarsi anche sulla complessificazione $\mathcal{M}$. Se $\widetilde{r}$ è una funzione definente come sopra, cioè $d\widetilde{r}$ non si annulla sul suo insieme degli zeri e l'insieme degli zeri della complessificata di $\widetilde{r}$ è connesso in $U \times U^*$, allora anche $\widetilde{r}(z, \zeta) = 0$ definisce $\mathcal{M}$. La particolare scelta di r è dunque irrilevante. Per $q \in M$ si ha $q \in \Sigma_q(U, r)$ e, per ogni q, la varietà di Segre è un'ipersuperficie complessa, quando non è vuota. Se $\widetilde{U}$ è un piccolo intorno di q, la stessa r è una funzione definente in $\widetilde{U}$ e si ottiene la stessa complessificazione ristretta a $\widetilde{U} \times \widetilde{U}^*$. Il germe in $q \in U$ è quindi ben definito e scriviamo

$$\Sigma_q = (\Sigma_q(U, r), q).$$

La varietà di Segre è dunque ben definita come germe. Quando si parla di Σ_q senza menzionare U o r, si intende il germe Σ_q oppure un suo rappresentante sufficientemente piccolo.

Esercizio 6.8.4. Sia $r\colon U \to \mathbb{R}$ una funzione analitica reale a valori reali che si complessifica su $U \times U^*$. Mostrare che $r(z, \bar{\zeta}) = 0$ se e solo se $r(\zeta, \bar{z}) = 0$. In altre parole, $z \in \Sigma_\zeta(U, r)$ se e solo se $\zeta \in \Sigma_z(U, r)$.

Esempio 6.8.3. Consideriamo un'ipersuperficie analitica reale M data da

$$\Im w = (\Re w)\rho(z, \bar{z}, \Re w),$$

con ρ nulla nell'origine. L'ipersuperficie definita da $w = 0$ è contenuta in M. Riscriviamo l'equazione mediante w e $\bar{w}$:

$$\frac{w - \bar{w}}{2i} = \left(\frac{w + \bar{w}}{2}\right) \rho\left(z, \bar{z}, \frac{w + \bar{w}}{2}\right).$$

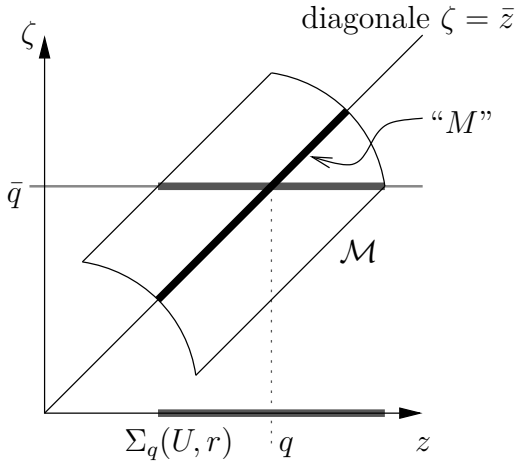


Figura 6.11: Schema di $\Sigma_q(U,r)$. Il simbolo «M» è fra virgolette perché rappresenta un insieme nello spazio delle z, che qui identifichiamo con un sottoinsieme della diagonale.

Ponendo $\bar{z} = \bar{w} = 0$ otteniamo

$$\frac{w}{2i} = \left(\frac{w}{2}\right) \rho\left(z, 0, \frac{w}{2}\right).$$

Poiché ρ si annulla nell'origine, vicino all'origine l'equazione definisce l'ipersuperficie complessa $w = 0$. Dunque Σ_0 è definita da $w = 0$. In questo caso Σ_0 è precisamente l'ipersuperficie complessa contenuta in M.

L'esempio non è fortuito. La proprietà più importante delle varietà di Segre è che permettono di individuare le sottovarietà complesse contenute in una sottovarietà analitica reale. La enunceremo per i dischi analitici. Ciò è sufficiente poiché, come abbiamo visto, si possono riempire le sottovarietà complesse di dischi analitici.

Proposizione 6.8.4. Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale e sia $p \in M$. Se $\Delta \subset M$ è un disco analitico passante per p, allora, come germi, $(\Delta, p) \subset \Sigma_p$.

Dimostrazione. Sia U un intorno di p nel quale è definito un rappresentante di Σ_p: supponiamo cioè che Σ_p sia chiusa in U e sia $r(z,\bar{z})$ la corrispondente funzione definente. Sia $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ una parametrizzazione di Δ con $\varphi(0) = p$. Possiamo restringere φ a un disco più piccolo attorno all'origine, poiché ci interessa soltanto il germe di Δ in p. Se più punti di $\mathbb{D}$ hanno immagine p, ripetiamo il ragionamento per ciascuno di essi. Possiamo quindi supporre $\varphi(\mathbb{D}) = \Delta \subset U$. Poiché $\Delta \subset M$, si ha

$$r\big(\varphi(\xi), \overline{\varphi(\xi)}\big) = r\big(\varphi(\xi), \bar{\varphi}(\bar{\xi})\big) = 0.$$

La funzione $\xi \mapsto r\big(\varphi(\xi), \bar{\varphi}(\bar{\xi})\big)$ è analitica reale su $\mathbb{D}$, quindi si complessifica in un intorno dell'origine. Anzi, si complessifica su $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, poiché $\varphi(\xi) \in U$ per ogni $\xi \in \mathbb{D}$. Possiamo perciò trattare ξ e $\bar{\xi}$ separatamente. Per complessificazione l'equazione vale per tutte le coppie di variabili indipendenti ξ e $\bar{\xi}$ così ottenute. Ponendo $\bar{\xi} = 0$ ricaviamo

$$0 = r\big(\varphi(\xi), \bar{\varphi}(0)\big) = r\big(\varphi(\xi), \bar{p}\big) \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{D}.$$

In particolare $\varphi(\mathbb{D}) \subset \Sigma_p$, come volevamo. □

Esercizio 6.8.5. Mostrare che, se un'ipersuperficie reale analitica $M \subset \mathbb{C}^n$ è fortemente pseudoconvessa in $p \in M$ (uno dei lati di M è fortemente pseudoconvesso in p), allora $\Sigma_p \cap (M,p) = \{p\}$ come germi.

Esercizio 6.8.6. Usare la proposizione e l'esercizio precedente per dimostrare che un'ipersuperficie reale analitica fortemente pseudoconvessa M non contiene dischi analitici non costanti in alcun punto di M.

Concludiamo lo studio delle varietà di Segre con la loro applicazione forse più nota, il lemma di Diederich–Fornæss. Lo enunciamo e dimostriamo per ipersuperfici analitiche reali, ma vale più in generale. Il risultato consta di due parti, anche se il nome di *lemma di Diederich–Fornæss* si riserva di solito al corollario.

Anzitutto, ogni punto di un'ipersuperficie analitica reale possiede un intorno fissato al quale si prolungano i germi di sottovarietà complesse contenute nell'ipersuperficie.

Teorema 6.8.5. *(Diederich–Fornæss).* Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale. Per ogni $p \in M$ esiste un intorno U di p con la seguente proprietà: se $q \in M \cap U$ e (X, q) è un germe di sottovarietà complessa tale che $(X, q) \subset (M, q)$, esiste una sottovarietà complessa $Y \subset U$ (in particolare chiusa in U) tale che $Y \subset M$ e $(X, q) \subset (Y, q)$.

Dimostrazione. Sia U un polidisco centrato in p abbastanza piccolo perché la funzione definente r di M si complessifichi su $U \times U^*$ come sopra. Sia $q \in M \cap U$ un punto per il quale (X, q) è un germe di sottovarietà complessa di dimensione positiva con $(X, q) \subset (M, q)$. La maggior parte dei punti di una sottovarietà sono regolari, quindi possiamo supporre che q sia regolare, ossia che (X, q) sia un germe di sottovarietà complessa liscia. Sia X un rappresentante del germe (X, q) tale che $X \subset M$ e $X \subset U$, senza supporre che sia chiuso.

Supponiamo X immagine di un aperto $V \subset \mathbb{C}^k$ mediante un'applicazione olomorfa suriettiva $\varphi\colon V \to X$. Poiché $r(\varphi(\xi), \overline{\varphi(\xi)}) = 0$ per ogni $\xi \in V$, possiamo trattare ξ e $\bar{\xi}$ come variabili indipendenti. In particolare $r(z, \bar{\zeta}) = 0$ per ogni $z, \zeta \in X$.

Definiamo le sottovarietà complesse $Y', Y \subset U$ (chiuse in U) ponendo

$$Y' = \bigcap_{a \in X} \Sigma_a(U, r) \qquad \text{e} \qquad Y = \bigcap_{a \in Y'} \Sigma_a(U, r).$$

Se $a \in Y'$ e $b \in X$, allora $r(a, \bar{b}) = 0$. Poiché r è a valori reali, segue $r(b, \bar{a}) = 0$. Dunque $X \subset Y \subset Y'$. Inoltre $r(z, \bar{z}) = 0$ per ogni $z \in Y$, quindi $Y \subset M$. □

Corollario 6.8.6. *(Diederich–Fornæss).* Sia $M \subset \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie analitica reale compatta. In nessun punto $q \in M$ esiste un germe di sottovarietà complessa (X, q) di dimensione positiva tale che $(X, q) \subset (M, q)$.

Dimostrazione. Sia $S \subset M$ l'insieme dei punti per i quali passa un germe di sottovarietà complessa di dimensione positiva contenuto in M. Se questo insieme è non vuoto, poiché M e quindi $\overline{S}$ sono compatti, esiste un punto $p \in \overline{S}$ di distanza massima dall'origine. Mediante una trasformazione unitaria e un cambiamento di scala possiamo supporre $p = (1, 0, \dots, 0)$. Sia U l'intorno di p fornito dal teorema precedente. Per punti arbitrariamente vicini a p passano germi di varietà contenuti in M. Dunque per ogni $\epsilon > 0$ esiste una sottovarietà $Y \subset U$ di dimensione positiva (in particolare Y è chiusa in U) con $Y \subset M$, contenente punti a distanza minore di ϵ da p. Consideriamo la funzione $\Re z_1$, che assume su $\overline{S}$ un massimo stretto in p. Poiché $\Re z_1$ assume un massimo strettamente minore di 1 su $\partial U \cap \overline{S}$, per ϵ abbastanza piccolo otterremmo una funzione pluriarmonica con un massimo interno su Y e con valori strettamente minori alla frontiera, in contraddizione con il principio del massimo per le varietà dimostrato nell'esercizio 6.7.10. La situazione è illustrata nella figura 6.12. □

Esempio 6.8.7. I risultati precedenti cessano di valere nel caso liscio. Diamo un controesempio al teorema, lasciando per esercizio un controesempio al corollario. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

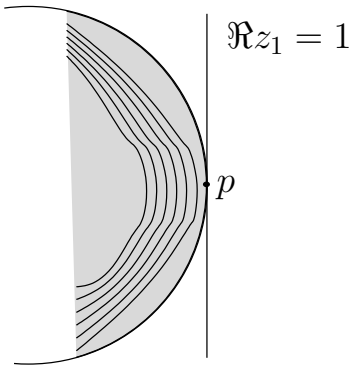


Figura 6.12: Contraddizione con il principio del massimo vicino a p.

una funzione liscia strettamente positiva per $|t| > 1$ e tale che $g(t) = 0$ per ogni $|t| \leq 1$. Definiamo M in $(z, w) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ mediante

$$\Im w = g(\|z\|^2 + (\Re w)^2).$$

L'insieme M è un'ipersuperficie reale liscia. Consideriamo $p = (0, \ldots, 0, 1) \in M$. Per ogni $0 < s < 1$ poniamo $q_s = (0, \ldots, 0, s) \in M$ e $X_s = \{(z, w) \in M : w = s\}$. Ciascun X_s è la chiusura di una varietà complessa locale di dimensione $n - 1$ e $(X_s, q_s) \subset (M, q_s)$. Il diametro di X_s tende a zero per $s \to 1$ e X_s non può prolungarsi a una sottovarietà complessa più grande contenuta in M. Dunque in p non esiste alcun intorno U con la proprietà del teorema.

Esercizio 6.8.7. Trovare un'ipersuperficie reale liscia compatta $M \subset \mathbb{C}^n$ che contenga un germe di sottovarietà complessa di dimensione positiva.

... ed ecco come si possono prevenire i terremoti usando vesciche di pecora!

A Notazione e terminologia di base

Richiamiamo brevemente alcune notazioni usate nel libro che potrebbero non essere state spiegate altrove. Indichiamo con $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ rispettivamente i numeri complessi e reali, e con i l'unità immaginaria (una radice quadrata di -1). Scriviamo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ per i numeri naturali, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ per i naturali a partire da zero e $\mathbb{Z}$ per l'insieme degli interi. Salvo indicazione contraria, scrivendo $\mathbb{C}^n$ oppure $\mathbb{R}^n$ sottintendiamo $n \geq 1$.

La differenza insiemistica $A \setminus B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B. Se l'insieme ambiente è chiaro, indichiamo con X^c il complementare di X. Per esempio, se X è considerato come sottoinsieme di $\mathbb{C}$, allora $X^c = \mathbb{C} \setminus X$. La chiusura topologica di S si denota con $\overline{S}$, la sua frontiera con ∂S e il suo interno con S°. Se S è relativamente compatto in X (ossia la sua chiusura in X è compatta), scriviamo $S \subset\subset X$.

Indichiamo una funzione di dominio X e codominio Y con $f\colon X \to Y$. L'immagine diretta di S mediante f è $f(S)$. Usiamo f^{-1} per la controimmagine di insiemi e di singoli punti. Quando f è biiettiva (iniettiva e suriettiva), usiamo f^{-1} anche per la funzione inversa. Per un insieme $T \subset Y$, $f^{-1}(T)$ è quindi l'insieme dei punti di X che f manda in T. Per un punto q, $f^{-1}(q)$ denota l'insieme dei punti di immagine q, mentre se la funzione è biiettiva indica l'unico punto di immagine q. Per definire una funzione senza darle un nome scriviamo $x \mapsto F(x)$, dove $F(x)$ è una formula che ne dà il valore.

Il simbolo $f|_S$ denota la restrizione di f a S, cioè la funzione $f|_S\colon S \to Y$ tale che $f|_S(x) = f(x)$ per ogni $x \in S$. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ si dice *a supporto compatto* se il suo *supporto*, cioè l'insieme $\overline{\{p \in U : f(p) \neq 0\}}$ (chiusura in U), è compatto. Se $f(x) = g(x)$ per ogni x del dominio, scriviamo $f \equiv g$ e diciamo che f e g sono identicamente uguali. La notazione $f \circ g$ denota la composizione $x \mapsto f\big(g(x)\big)$.

Per indicare che un'uguaglianza definisce X come Y, scriviamo $X \stackrel{\text{def}}{=} Y$.

B Risultati di analisi complessa in una variabile

Raccogliamo alcuni risultati di analisi complessa in una variabile utili per leggere il libro. Per la notazione e le motivazioni di base conviene leggere prima la sezione 0.1, sebbene qui riprendiamo alcuni dei risultati già visti. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se è derivabile in senso complesso in ogni punto, ossia se il limite

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{C} \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

esiste per ogni $z \in U$. Per esempio, i polinomi e le funzioni razionali in z sono olomorfi dove sono definiti. Forse la più importante funzione olomorfa è la soluzione dell'equazione differenziale $f'(z) = f(z)$ con $f(0) = 1$, ossia l'esponenziale complesso,

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i \sin(y)\big).$$

Un *cammino* (o curva) di classe C^1 a tratti in $\mathbb{C}$ è un'applicazione continua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, con derivata continua tranne al più in un numero finito di punti, per cui esistono i limiti laterali di $\gamma'(t)$ in ogni $t \in [a,b]$ (dal lato pertinente agli estremi) e γ', o i suoi limiti laterali, non si annulla mai. Per abuso di notazione, usando γ come insieme intendiamo la sua immagine $\gamma([a,b])$. Per una funzione continua $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$ definiamo

$$\int_\gamma f(z)\,dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Poiché γ' è continua salvo al più in un numero finito di punti, l'integrale è ben definito. In modo analogo si definisce il più generale integrale lungo un cammino rispetto a $dz = dx + i\,dy$ e $d\bar z = dx - i\,dy$. Sia $z = \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\,\gamma_2(t) = x + i\,y$ una parametrizzazione del cammino. Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz + g(z)\,d\bar z &= \int_\gamma \Big(f\big(x+i\,y\big) + g\big(x+i\,y\big)\Big)\,dx + i\,\Big(f\big(x+i\,y\big) - g\big(x+i\,y\big)\Big)\,dy \\
&= \int_a^b \Big(f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) + g\big(\gamma(t)\big)\overline{\gamma'(t)}\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \bigg(\Big(f\big(\gamma(t)\big) + g\big(\gamma(t)\big)\Big)\gamma_1'(t) + i\,\Big(f\big(\gamma(t)\big) - g\big(\gamma(t)\big)\Big)\gamma_2'(t)\bigg)\,dt.
\end{aligned}$$

Un cammino si dice *chiuso* se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e *semplice* se $\gamma|_{(a,b]}$ è iniettiva e l'unica eventuale coincidenza fra valori distinti del parametro è $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Un aperto $U \subset \mathbb{C}$ ha *frontiera di classe C^1 a tratti* se per ogni $p \in \partial U$ esiste un intorno aperto W di p tale che $\partial U \cap W = \gamma\big((a,b)\big)$, dove $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ è un cammino iniettivo di classe C^1 a tratti, e ogni $p \in \partial U$ appartiene alla chiusura di $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$. Intuitivamente, vicino a ogni punto la frontiera è una curva di classe C^1 a tratti che divide localmente il piano in due aperti. Se in ciascun punto in cui la parametrizzazione di ∂U è derivabile il dominio si trova a sinistra (il vettore $\gamma'(t)$ ruotato di $\frac{\pi}{2}$ punta verso l'interno del dominio), la frontiera si dice *orientata positivamente*. Come nell'introduzione, vale la seguente formula integrale di Cauchy.

Teorema B.1. *(Formula integrale di Cauchy).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂U di classe C^1 a tratti, orientata positivamente, e sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in U. Allora, per $z \in U$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Di solito il teorema si enuncia usando gli *indici di avvolgimento*. L'indice conta quante volte un cammino chiuso γ gira attorno a un punto $p \notin \gamma$. Precisamente,

$$n(\gamma; p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-p}\, dz.$$

Si verifica facilmente che $n(\gamma; p)$ è sempre un intero ed è costante su ogni componente di $\mathbb{C} \setminus \gamma$. L'indice si definisce anche per i *cicli*, somme formali di cammini chiusi $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$, sommando gli integrali corrispondenti.

Una formulazione usuale della formula integrale di Cauchy mediante gli indici è la seguente. Se U è aperto, $f\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa e γ è un cammino chiuso di classe C^1 a tratti (o un ciclo) in U tale che $n(\gamma; p) = 0$ per ogni $p \notin U$, allora, per $z \in U$ fuori dal cammino,

$$n(\gamma; z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Per il *teorema della curva di Jordan*, un cammino semplice chiuso divide il piano in due componenti, una limitata e una illimitata. La componente limitata si chiama *interno* di γ e quella illimitata *esterno*. Per un tale cammino γ di classe C^1 a tratti si dimostra che $n(\gamma; p) = \pm 1$ per p interno a γ e $n(\gamma; p) = 0$ per p esterno a γ. Diciamo che γ è orientato positivamente se $n(\gamma; p) = 1$ nell'interno.

Più in generale, se U è un aperto limitato con frontiera ∂U di classe C^1 a tratti orientata positivamente, si può dimostrare che ∂U è costituita da un numero finito di cammini semplici chiusi orientati in modo che $n(\partial U; p) = 1$ per $p \in U$ e $n(\partial U; p) = 0$ per $p \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}$.

Un modo per ricavare la formula integrale di Cauchy passa per il teorema di Green, ossia il teorema di Stokes in due dimensioni. Nelle versioni qui enunciate occorre approssimare l'aperto dall'interno con aperti più piccoli per garantire che le derivate parziali siano limitate (si veda il teorema di Cauchy–Pompeiu 4.1.1). Per completezza enunciamo il teorema di Green usando dz e $d\bar{z}$. L'appendice C contiene un richiamo sulle forme differenziali.

Teorema B.2. *(Green).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂U di classe C^1 a tratti orientata positivamente e siano $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ e $g\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue, con derivate parziali continue e limitate in U. Allora

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} f(z)\, dz + g(z)\, d\bar{z} &= \int_U d\Big(f(z)\, dz + g(z)\, d\bar{z}\Big) = \int_U \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= (-2i) \int_U \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dx \wedge dy = (-2i) \int_U \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dA.\end{aligned}$$

È sufficiente provare la conclusione del teorema di Green con $g \equiv 0$ e talvolta il risultato viene enunciato in questa forma. La formula integrale di Cauchy equivale al teorema di Cauchy.

Teorema B.3. *(Cauchy).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂U di classe C^1 a tratti orientata positivamente e sia $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa in U. Allora

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 0.$$

Nella versione con gli indici di avvolgimento, se U è aperto, $f\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa e γ è un cammino chiuso di classe C^1 a tratti (o un ciclo) in U tale che $n(\gamma; p) = 0$ per ogni $p \notin U$, allora l'integrale di f lungo γ è nullo.

Vale anche un inverso del teorema di Cauchy. Un triangolo $T \subset \mathbb{C}$ è l'inviluppo convesso dei tre vertici (comprende quindi anche l'interno) e ∂T è la sua frontiera orientata in senso antiorario. Enunciamo il teorema seguente come equivalenza, anche se solitamente si chiama teorema di Morera solo l'implicazione inversa.

Teorema B.4. *(Morera).* Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f\colon U \to \mathbb{C}$ continua. Allora f è olomorfa se e solo se

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0 \qquad \text{per ogni triangolo } T \subset U.$$

Come abbiamo visto nell'introduzione, una funzione olomorfa ammette uno sviluppo in serie di potenze.

Proposizione B.5. Se $U \subset \mathbb{C}$ è aperto e $f\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa, allora f è infinitamente derivabile e, se $\Delta_\rho(p) \subset U$ è un disco, f ammette uno sviluppo in serie di potenze che converge assolutamente e uniformemente sui compatti di $\Delta_\rho(p)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k,$$

Dato un cammino γ semplice chiuso di classe C^1 a tratti contenuto in $\Delta_\rho(p)$, che compia un giro antiorario attorno a p, si ha

$$c_k = \frac{f^{(k)}(p)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Ne seguono le *stime di Cauchy*: se M è il massimo di $|f|$ sulla circonferenza $\partial\Delta_r(p)$, allora

$$|c_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

Viceversa, se i coefficienti di una serie di potenze soddisfano tali stime, la serie converge in $\Delta_r(p)$.

Una funzione olomorfa $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice *intera*. Un'applicazione immediata delle stime di Cauchy è il teorema di Liouville.

Teorema B.6. *(Liouville).* Se f è intera e limitata, f è costante.

Dall'esistenza dello sviluppo in serie di potenze segue anche il teorema di identità.

Teorema B.7. *(Identità).* Siano $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se l'insieme degli zeri $f^{-1}(0)$ ha un punto di accumulazione in U, allora $f \equiv 0$.

Un'altra conseguenza della formula integrale di Cauchy è la caratterizzazione delle funzioni olomorfe mediante un'equazione differenziale.

Proposizione B.8. *(Equazioni di Cauchy–Riemann).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se f è continuamente differenziabile e

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{su } U.$$

Un'altra conseguenza della formula di Cauchy (e si potrebbe sostenere che tutti i risultati di questa appendice ne siano conseguenze) è il teorema dell'applicazione aperta.

Teorema B.9. *(Applicazione aperta).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante. Allora f è un'applicazione aperta, ossia $f(V)$ è aperto ogni volta che V è aperto.

La parte reale u e la parte immaginaria v di una funzione olomorfa $f = u + iv$ sono armoniche, ossia $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$, dove ∇^2 è il laplaciano. Un dominio U si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino semplice chiuso è omotopo in U a un cammino costante. Intuitivamente il dominio non ha buchi. Per esempio un disco è semplicemente connesso.

Proposizione B.10. Se $U \subset \mathbb{C}$ è un dominio semplicemente connesso e $u\colon U \to \mathbb{R}$ è armonica, esiste una funzione armonica $v\colon U \to \mathbb{R}$ tale che $f = u + iv$ sia olomorfa.

La funzione v si chiama *coniugata armonica* di u. Per altri richiami sulle funzioni armoniche si veda la sezione 2.4. Enunciamo alcune forme del principio del massimo.

Teorema B.11. *(Principi del massimo).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio.

(i) Se $f\colon U \to \mathbb{C}$ è olomorfa e $|f|$ assume un massimo locale in U, allora f è costante.

(ii) Se U è limitato e $f\colon \overline{U} \to \mathbb{C}$ è continua e olomorfa in U, allora $|f|$ assume il massimo su ∂U.

(iii) Se $f\colon U \to \mathbb{R}$ è armonica e assume un massimo o un minimo locale in U, allora f è costante.

(iv) Se U è limitato e $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ è continua e armonica in U, allora f assume il massimo e il minimo su ∂U.

Le prime due affermazioni prendono anche il nome di *principio del massimo modulo*. Il principio del massimo implica immediatamente il lemma seguente.

Lemma B.12. *(Schwarz).* Se $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ è olomorfa e $f(0) = 0$, allora (i) $|f(z)| \leq |z|$ e (ii) $|f'(0)| \leq 1$. Inoltre, se $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oppure $|f'(0)| = 1$, esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $f(z) = e^{i\theta} z$ per ogni $z \in \mathbb{D}$.

Il lemma ha in realtà una portata assai generale.

Teorema B.13. *(Teorema di rappresentazione conforme di Riemann).* Se $U \subset \mathbb{C}$ è un dominio non vuoto semplicemente connesso tale che $U \neq \mathbb{C}$, allora U è biolomorfo a $\mathbb{D}$. Dato $z_0 \in U$, esiste un'unica applicazione biolomorfa $f\colon U \to \mathbb{D}$ tale che $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ e f massimizzi $|f'(z_0)|$ fra tutte le applicazioni olomorfe iniettive a valori in $\mathbb{D}$ tali che $f(z_0) = 0$.

Con il lemma di Schwarz si possono classificare anche gli automorfismi del disco, e quindi di ogni dominio semplicemente connesso biolomorfo al disco. Sia $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ il gruppo delle applicazioni biolomorfe del disco su sé stesso (sia f sia f^{-1} sono olomorfe).

Proposizione B.14. Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, esistono $a \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}.$$

A proposito di automorfismi, vale la seguente versione del teorema della funzione inversa.

Teorema B.15. Siano U e V aperti di $\mathbb{C}$.

(i) Se $f\colon U \to V$ è olomorfa e biiettiva (iniettiva e suriettiva), allora $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$ e $f^{-1}\colon V \to U$ è olomorfa. Se $f(p) = q$, allora

$$\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)}.$$

(ii) Se $f\colon U \to V$ è olomorfa, $f(p) = q$ e $f'(p) \neq 0$, esistono un intorno W di q e una funzione olomorfa iniettiva $g\colon W \to U$ tali che $f\big(g(z)\big) = z$ per ogni $z \in W$.

Il teorema di rappresentazione conforme di Riemann segue dal risultato seguente sull'esistenza di rami del logaritmo.

Teorema B.16. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa senza zeri in U. Esiste allora una funzione olomorfa $L\colon U \to \mathbb{C}$ tale che

$$e^L = f.$$

In particolare si possono estrarre radici: per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una funzione olomorfa $g\colon U \to \mathbb{C}$ tale che

$$g^k = f.$$

In una variabile complessa gli zeri delle funzioni olomorfe si possono eliminare mediante divisione. Inoltre, se la funzione non è identicamente nulla, ogni suo zero ha ordine finito.

Proposizione B.17. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa, non identicamente nulla, con $f(p) = 0$ per qualche $p \in U$. Esistono $k \in \mathbb{N}$ e una funzione olomorfa $g\colon U \to \mathbb{C}$ tali che $g(p) \neq 0$ e

$$f(z) = (z-p)^k g(z) \qquad \text{per ogni } z \in U.$$

Il numero k si chiama *ordine* o *molteplicità* dello zero in p. Questo fatto, insieme all'esistenza delle radici, permette di provare che ogni funzione olomorfa non costante ha localmente, presso uno zero, la forma z^k in opportune coordinate. La funzione φ della proposizione seguente si può interpretare come un cambiamento locale di coordinate.

Proposizione B.18. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa, non identicamente nulla, con $p \in U$. Esistono $k \in \mathbb{N}$, un intorno $V \subset U$ di p e una funzione olomorfa $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ con $\varphi'(p) \neq 0$ tali che

$$\big(\varphi(z)\big)^k = f(z) - f(p) \qquad \text{per ogni } z \in V.$$

Come per le funzioni continue, la convergenza che si considera per le funzioni olomorfe è quella uniforme sui compatti, detta talvolta *convergenza normale*.

Proposizione B.19. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f_k\colon U \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente sui compatti di U a $f\colon U \to \mathbb{C}$. Allora f è olomorfa e le derivate $f_k^{(\ell)}$ di ogni ordine convergono uniformemente sui compatti alla corrispondente derivata $f^{(\ell)}$.

Le funzioni olomorfe godono di una proprietà di compattezza analoga al teorema di Heine–Borel.

Teorema B.20. *(Montel).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni olomorfe. Se $\{f_n\}$ è uniformemente limitata sui compatti di U, esiste una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti di U.

Gli zeri di una successione di funzioni olomorfe non possono comparire o scomparire arbitrariamente al limite.

Teorema B.21. *(Hurwitz).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f_n \subset U \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente sui compatti di U a $f \colon U \to \mathbb{C}$. Se f non è identicamente nulla e z_0 è uno zero di f, esistono un disco $\Delta_r(z_0)$ e un indice N tali che, per ogni $n \geq N$, f_n abbia in $\Delta_r(z_0)$ lo stesso numero di zeri di f, contati con molteplicità.

Un'applicazione frequente, talvolta usata come enunciato del teorema, è la seguente: se le f_n non hanno zeri in U, il limite f è identicamente nullo oppure non ha zeri.

Se $U \subset \mathbb{C}$ è aperto, $p \in U$ e $f \colon U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, diciamo che f ha una *singolarità isolata* in p. La singolarità è *eliminabile* se esiste una funzione olomorfa $F \colon U \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = F(z)$ per ogni $z \in U \setminus \{p\}$. Una singolarità isolata è un *polo* se

$$\lim_{z \to p} f(z) = \infty \qquad \text{(that is, } |f(z)| \to \infty \text{ as } |z - p| \to 0\text{)}.$$

Una singolarità isolata che non è eliminabile né un polo è detta *essenziale*.

In una singolarità isolata non essenziale basta una potenza intera finita a compensare l'eventuale divergenza della funzione. La prima parte della proposizione seguente si chiama di solito *teorema di prolungamento di Riemann*.

Proposizione B.22. Siano $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, $p \in U$ e $f \colon U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.

(i) Se f è limitata (basta che lo sia vicino a p), allora p è una singolarità eliminabile.

(ii) Se p è un polo, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$g(z) = (z - p)^k f(z)$$

sia limitata vicino a p. Dunque g ha una singolarità eliminabile in p.

Il numero k (scelto minimo con tale proprietà) si chiama *ordine* del polo. Fra zeri e poli vi è una simmetria: se f ha uno zero di ordine k, allora $\frac{1}{f}$ ha un polo di ordine k. Se f ha un polo di ordine k, allora $\frac{1}{f}$ ha una singolarità eliminabile e la funzione prolungata ha uno zero di ordine k.

Sia $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la *sfera di Riemann*. La topologia su $\mathbb{P}^1$ si ottiene richiedendo che $\frac{1}{z}$ sia un omeomorfismo di $\mathbb{P}^1$ su sé stessa, con le convenzioni $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = \infty$. Una funzione $f \colon U \to \mathbb{P}^1$ si dice *meromorfa* se non è identicamente ∞, è olomorfa su $U \setminus f^{-1}(\infty)$ e ha poli nei punti di $f^{-1}(\infty)$. Una funzione olomorfa salvo che per dei poli diventa meromorfa assegnandole il valore ∞ nei poli. Una funzione meromorfa si può scrivere localmente come quoziente di funzioni olomorfe.

In una singolarità isolata possiamo sviluppare una funzione olomorfa in *serie di Laurent*, ammettendo anche tutte le potenze negative. La serie di Laurent caratterizza il tipo di singolarità.

Proposizione B.23. Se $\Delta \subset \mathbb{C}$ è un disco di centro $p \in \mathbb{C}$ e $f \colon \Delta \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, esiste una successione bilateralmente infinita $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ tale che la serie

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - p)^k,$$

converga assolutamente e uniformemente sui compatti di $\Delta \setminus \{p\}$. Se γ è un cammino semplice chiuso di classe C^1 a tratti che compie un giro antiorario attorno a p in Δ, allora

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - p)^{k+1}}\, d\zeta.$$

La singolarità in p è:

(i) *eliminabile* se $c_k = 0$ per ogni $k < 0$;

(ii) un *polo* di ordine $\ell \in \mathbb{N}$ se $c_k = 0$ per ogni $k < -\ell$ e $c_{-\ell} \neq 0$;

(iii) *essenziale* se esistono infiniti indici negativi k tali che $c_k \neq 0$.

Supponiamo che f abbia una singolarità isolata in p. La parte della serie corrispondente agli indici k negativi, cioè $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-p)^k$, si chiama *parte principale*. La singolarità è eliminabile se la parte principale è nulla, è un polo se la parte principale è una somma finita non nulla ed è essenziale se la parte principale ha infiniti termini non nulli.

Il coefficiente c_{-1} corrispondente a p si chiama *residuo* di f in p e si indica con $\operatorname{Res}(f, p)$. Per la proposizione, se γ è un piccolo cammino semplice chiuso che circonda p in senso positivo,

$$\operatorname{Res}(f, p) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Combinando questa equazione con il teorema di Cauchy, per calcolare integrali di funzioni con singolarità isolate basta trovare i residui, che di solito sono più semplici da calcolare. Per esempio, se p è un polo semplice (di ordine 1), allora

$$\operatorname{Res}(f, p) = \lim_{z \to p} (z - p) f(z).$$

Teorema B.24. *(Teorema dei residui).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia γ un cammino chiuso di classe C^1 a tratti in U, tale che $n(\gamma; p) = 0$ per ogni $p \notin U$. Sia $f \colon U \setminus S \to \mathbb{C}$ olomorfa salvo singolarità isolate nei punti di un insieme finito $S \subset U \setminus \gamma$, disgiunto dal cammino. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{p \in S} n(\gamma; p) \operatorname{Res}(f, p).$$

Se γ è una curva semplice chiusa orientata positivamente, $n(\gamma; p) = 1$ per ogni p nel suo interno. L'ipotesi su γ si può allora sostituire con la richiesta che l'interno di γ sia contenuto in U, senza menzionare gli indici di avvolgimento.

Per il teorema di identità gli zeri di una funzione olomorfa non costante f non hanno punti di accumulazione nel dominio e sono quindi isolati. Poiché $\frac{1}{f}$ è meromorfa con zeri nei poli di f, anche i poli sono isolati. Zeri e poli si possono contare abbastanza facilmente.

Teorema B.25. *(Principio dell'argomento).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia γ un cammino chiuso di classe C^1 a tratti in U tale che $n(\gamma; p) = 0$ per ogni $p \notin U$ e $n(\gamma; p) \in \{0, 1\}$ per ogni $p \notin \gamma$. Sia $f \colon U \to \mathbb{P}^1$ meromorfa, senza zeri né poli su γ. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

dove N è il numero di zeri di f all'interno di γ e P è il numero di poli all'interno di γ, entrambi contati con molteplicità.

Supponiamo inoltre che $h\colon U \to \mathbb{C}$ sia olomorfa. Siano $z_1, \dots, z_N$ gli zeri di f all'interno di γ e $w_1, \dots, w_P$ i poli di f all'interno di γ, ripetuti secondo le rispettive molteplicità. Allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{N} h(z_k) \quad - \quad \sum_{k=1}^{P} h(w_k).$$

Anche qui, se γ è semplice, chiuso e orientato positivamente, l'ipotesi su γ può essere sostituita dalla richiesta che l'interno di γ sia contenuto in U. La dimostrazione segue subito dal teorema dei residui: basta calcolare i residui dell'integranda negli zeri e nei poli di f. Se f ha uno zero in p di molteplicità m, l'integranda $h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ ha al più un polo semplice in p con residuo $m\,h(p)$. Analogamente, se f ha un polo in p di ordine m, allora $h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ ha in p al più un polo semplice di residuo $-m\,h(p)$.

Un altro metodo utile per contare gli zeri è il teorema di Rouché.

Teorema B.26. *(Rouché).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia γ un cammino chiuso di classe C^1 a tratti in U tale che $n(\gamma; p) = 0$ per ogni $p \notin U$ e $n(\gamma; p) \in \{0, 1\}$ per ogni $p \notin \gamma$. Siano $f\colon U \to \mathbb{C}$ e $g\colon U \to \mathbb{C}$ funzioni olomorfe tali che

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

per ogni $z \in \gamma$. Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri all'interno di γ, contati con molteplicità.

La formulazione classica, più debole, usa la disuguaglianza più restrittiva $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$. Entrambe le disuguaglianze escludono la presenza di zeri su γ.

Vicino a una singolarità essenziale una funzione olomorfa assume quasi tutti i valori. Una versione debole, di facile dimostrazione, è il *teorema di Casorati–Weierstrass*: se f è olomorfa con una singolarità essenziale in p, per ogni intorno W di p l'immagine $f(W\setminus\{p\})$ è densa in $\mathbb{C}$. Il teorema di Picard dà una conclusione assai più forte: vicino a una singolarità essenziale la funzione assume infinite volte ogni valore, con al più un'eccezione.

Teorema B.27. *(Grande teorema di Picard).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto, sia $f\colon U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ olomorfa e supponiamo che f abbia una singolarità essenziale in p. Per ogni intorno W di p, l'immagine $f(W \setminus \{p\})$ è $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{C}$ privato di un punto.

Per esempio, $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale nell'origine e non assume mai il valore 0. Dopo il grande teorema enunciamo anche il piccolo.

Teorema B.28. *(Piccolo teorema di Picard).* Se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa non costante, allora $f(\mathbb{C})$ è $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{C}$ privato di un punto.

Un risultato algebrico importante in analisi complessa, forse ancora di più in varie variabili, è il teorema fondamentale dell'algebra. Si tratta in realtà di un teorema di analisi complessa e la dimostrazione usuale passa per il principio del massimo.

Teorema B.29. *(Teorema fondamentale dell'algebra).* Se $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un polinomio non nullo di grado k, allora P ha esattamente k zeri (radici) in $\mathbb{C}$, contati con molteplicità.

Le funzioni razionali sono dense nello spazio delle funzioni olomorfe e possiamo persino scegliere dove collocarne i poli. Un polinomio non costante ha un «polo all'infinito», nel senso che $P(z) \to \infty$ per $z \to \infty$. Indicando di nuovo con $\mathbb{P}^1$ la sfera di Riemann, possiamo enunciare il teorema di approssimazione di Runge.

Teorema B.30. *(Runge).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $A \subset \mathbb{P}^1 \setminus U$ un insieme contenente almeno un punto di ciascuna componente di $\mathbb{P}^1 \setminus U$. Sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Per ogni $\epsilon > 0$ e ogni compatto $K \subset\subset U$ esiste una funzione razionale R con poli in A tale che

$$|R(z) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{per ogni } z \in K.$$

Una generalizzazione forse sorprendente del classico teorema di approssimazione di Weierstrass, e uno dei miei teoremi preferiti in una variabile, è il teorema di Mergelyan. Conviene osservare che non segue da quello di Runge.

Teorema B.31. *(Mergelyan).* Sia $K \subset\subset \mathbb{C}$ un compatto tale che $\mathbb{C} \setminus K$ sia connesso e sia $f\colon K \to \mathbb{C}$ continua e olomorfa nell'interno K°. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio P tale che

$$|P(z) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{per ogni } z \in K.$$

Ciò che sorprende è che K può avere un interno piccolo o addirittura vuoto. Prendendo un intervallo chiuso $K = [a, b]$ della retta reale si ritrova il teorema di approssimazione di Weierstrass.

Un aperto $U \subset \mathbb{C}$ si dice *simmetrico rispetto all'asse reale* se da $z \in U$ segue $\bar{z} \in U$. Dividiamo U in tre parti:

$$U_+ = \{z \in U : \Im z > 0\}, \qquad U_0 = \{z \in U : \Im z = 0\}, \qquad U_- = \{z \in U : \Im z < 0\}.$$

Il principio seguente permette di prolungare per riflessione una funzione olomorfa oltre la frontiera.

Teorema B.32. *(Principio di riflessione di Schwarz).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio simmetrico rispetto all'asse reale e sia $f\colon U_+ \cup U_0 \to \mathbb{C}$ una funzione continua, olomorfa su U_+ e a valori reali su U_0. Allora la funzione $g\colon U \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) = f(z) \quad \text{se } z \in U_+ \cup U_0, \qquad g(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{se } z \in U_-,$$

è olomorfa su U.

La riflessione riguarda in realtà le funzioni armoniche.

Teorema B.33. *(Principio di riflessione di Schwarz per le funzioni armoniche).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio simmetrico rispetto all'asse reale e sia $f\colon U_+ \cup U_0 \to \mathbb{R}$ continua, armonica su U_+ e nulla su U_0. La funzione $g\colon U \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(z) = f(z) \quad \text{se } z \in U_+ \cup U_0, \qquad g(z) = -f(\bar{z}) \quad \text{se } z \in U_-,$$

è armonica su U.

Una funzione può essere definita localmente e prolungata lungo cammini. Siano p un punto e D un disco di centro $p \in D$. Una funzione olomorfa $f\colon D \to \mathbb{C}$ *ammette prolungamento analitico* lungo un cammino $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, con $\gamma(0) = p$, se per ogni $t \in [0,1]$ esistono un disco D_t centrato in $\gamma(t)$, con $D_0 = D$, e una funzione olomorfa $f_t\colon D_t \to \mathbb{C}$, con $f_0 = f$, tali che per ogni $t_0 \in [0,1]$ esista $\epsilon > 0$ per cui, se $|t - t_0| < \epsilon$, allora $f_t = f_{t_0}$ in $D_t \cap D_{t_0}$. Il teorema di monodromia afferma che, in assenza di buchi, il prolungamento analitico definisce univocamente una funzione.

Teorema B.34. *(Monodromia).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso, $D \subset U$ un disco e $f\colon D \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa prolungabile analiticamente da $p \in D$ a ogni $q \in U$ lungo ogni cammino da p a q. Esiste allora un'unica funzione olomorfa $F\colon U \to \mathbb{C}$ tale che $F|_D = f$.

Un teorema interessante e utile, spesso assente dai corsi in una variabile, fornisce una disuguaglianza di verso opposto rispetto al lemma di Schwarz: è il teorema di Koebe del quarto ($\frac{1}{4}$). Si provi a pensare perché nulla di simile potrebbe valere per funzioni soltanto lisce. A prima vista il risultato dovrebbe sembrare contrario all'intuizione, e a una seconda occhiata addirittura scandaloso.

Teorema B.35. *(Teorema di Koebe del quarto).* Sia $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ olomorfa e iniettiva. Allora $f(\mathbb{D})$ contiene un disco di raggio $\frac{|f'(0)|}{4}$ centrato in $f(0)$.

La costante $\frac{1}{4}$ è ottimale, ossia non si può migliorare.

Infine è utile poter separare tutti gli zeri di una funzione olomorfa, anche quando non sono in numero finito. Si può procedere analogamente per i poli.

Teorema B.36. *(Teorema del prodotto di Weierstrass).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio. Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ insiemi numerabili disgiunti in U, privi di punti di accumulazione in U, e siano $\{n_k\}$ e $\{m_k\}$ famiglie numerabili di numeri naturali. Esiste allora una funzione meromorfa f su U i cui zeri sono esattamente i punti a_k con ordini dati da n_k, e i cui poli sono esattamente i punti b_k con ordini dati da m_k.

Per un enunciato più esplicito occorrono i prodotti infiniti. Il prodotto $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$ *converge* se converge la successione dei prodotti parziali $\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$. Diciamo che il prodotto *converge assolutamente* se converge $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + |a_k|)$, il che equivale alla convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$.

Definiamo

$$E_0(z) = (1 - z), \qquad E_m(z) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m}\right).$$

La funzione $E_m(z/a)$ ha uno zero di ordine 1 in a.

Teorema B.37. *(Teorema di fattorizzazione di Weierstrass).* Sia f una funzione intera i cui zeri, ripetuti con la loro molteplicità, siano i termini della successione $\{a_k\}$, a eccezione dell'eventuale zero nell'origine, che ha ordine m (eventualmente $m = 0$). Esistono una funzione intera g e una successione $\{p_k\}$ tali che

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right),$$

con convergenza assoluta e uniforme sui compatti.

Gli p_k sono scelti in modo che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{r}{a_k}\right|^{1+p_k}$$

converga per ogni $r > 0$.

Al teorema del prodotto di Weierstrass, che permette di assegnare gli zeri, si affianca il teorema di Mittag-Leffler, che permette di assegnare le parti principali dei poli.

Teorema B.38. *(Mittag-Leffler).* Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, sia $S \subset U$ un insieme numerabile senza punti di accumulazione in U e per ogni $p \in S$ sia assegnata la parte principale

$$P_p(z) = \sum_{n=1}^{k_p} \frac{c_{p,n}}{(z-p)^n}$$

di un polo di ordine k_p. Esiste una funzione meromorfa f in U con poli precisamente nei punti di S e tale che, per ogni $p \in S$, la parte principale di f in p sia P_p.

* * *

In una variabile complessa esistono molti altri teoremi utili e si potrebbe passare parecchio tempo a elencarli tutti. Spero che questa raccolta serva a rinfrescare la memoria sui risultati più comuni. Alcuni intervengono nel testo, altri sono utili per gli esercizi e altri ancora sono semplicemente troppo interessanti per tacerne.

C Forme differenziali e teorema di Stokes

Le forme differenziali ricorrono spesso nel libro, soprattutto nei capitoli 4 e 5. Ne richiamiamo la definizione ed enunciamo il teorema generale di Stokes. Questa appendice è una guida essenziale, senza dimostrazioni. Per un'introduzione più completa si veda Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* [9].

In breve, una k-forma è un oggetto che si può integrare (sommare) su un oggetto di dimensione k tenendo conto dell'orientazione. Per semplicità, come in gran parte del libro, considereremo oggetti lisci (di classe C^∞), senza ricercare di volta in volta la regolarità minima necessaria.

Le forme differenziali forniscono il contesto naturale per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Interpretiamo entrambi i membri come integrali. A sinistra integriamo la 1-forma $f'\,dx$ sull'intervallo $[a, b]$ di dimensione 1; a destra integriamo la 0-forma (una funzione) f sull'insieme $\{a, b\}$, formato da due punti e di dimensione 0. L'orientazione interviene da entrambe le parti: $[a, b]$ viene integrata da a a b, il punto $\{a\}$ ha orientazione negativa e $\{b\}$ positiva. L'insieme $\{a, b\}$ è il bordo di $[a, b]$ e l'orientazione di $\{a, b\}$ è indotta da quella di $[a, b]$.

Definiamo anzitutto gli oggetti sui quali integreremo, le sottovarietà lisce di $\mathbb{R}^n$. Il modello di sottovarietà con bordo di dimensione k è il semispazio superiore con il suo bordo:

$$\mathbb{H}^k \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}, \qquad \partial\mathbb{H}^k \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\},$$

Definizione C.1. Muniamo $M \subset \mathbb{R}^n$ della topologia indotta e sia $k \in \mathbb{N}_0$. Supponiamo che M abbia la seguente proprietà: per ogni $p \in M$ esistono un intorno $W \subset \mathbb{R}^n$ di p, un punto $q \in \mathbb{H}^k$, un intorno $U \subset \mathbb{H}^k$ di q e un'applicazione liscia, iniettiva e aperta[48] $\varphi\colon U \to M$ tali che $\varphi(q) = p$, il differenziale $D\varphi$ abbia rango k in ogni punto e $\varphi(U) = M \cap W$. Allora M si dice *sottovarietà regolare con bordo*, di dimensione k. L'applicazione φ è una *parametrizzazione locale*. Se q soddisfa $q_k = 0$ (l'ultima coordinata è nulla), $p = \varphi(q)$ è un *punto del bordo*. Indichiamo con ∂M l'insieme dei punti del bordo. Se $\partial M = \emptyset$, diciamo semplicemente che M è una *sottovarietà regolare*.

La figura C.1 illustra la situazione in un punto del bordo e in un punto interno. Si osservi che W è un intorno nello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$, più grande dell'immagine $\varphi(U)$.

A rigore dovremmo dire *sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$. Capita (anche a me) di dire *varietà* intendendo *sottovarietà*. La varietà è un concetto più astratto, ma ogni sottovarietà è una varietà. La precisazione *regolare* (in inglese *embedded*) riguarda la topologia di M: intervengono la condizione $\varphi(U) = M \cap W$ e il fatto che φ sia aperta. Ne segue che φ è un omeomorfismo sulla sua immagine $M \cap W$. È importante che W sia aperto in $\mathbb{R}^n$. Tutte le nostre sottovarietà avranno questa proprietà. Abbiamo anche abbreviato la definizione: se q non appartiene al bordo di $\mathbb{H}^k$ avremmo potuto usare $\mathbb{R}^k$ al posto di $\mathbb{H}^k$. Una sottovarietà assomiglia localmente a $\mathbb{R}^k$ e, se ha bordo, vicino al bordo assomiglia a $\mathbb{H}^k$ in un intorno di un punto di $\partial\mathbb{H}^k$.

Spesso si definiscono le sottovarietà nel verso opposto, partendo dagli aperti relativi $M \cap W$ e dalle applicazioni φ^{-1}, dette *carte*; la famiglia delle carte prende il nome di *atlante*. La definizione mediante parametrizzazioni agevola il calcolo degli integrali, proprio come accade parametrizzando le curve.

[48] «Aperta» significa che $\varphi(V)$ è relativamente aperto in M per ogni aperto $V \subset U$.

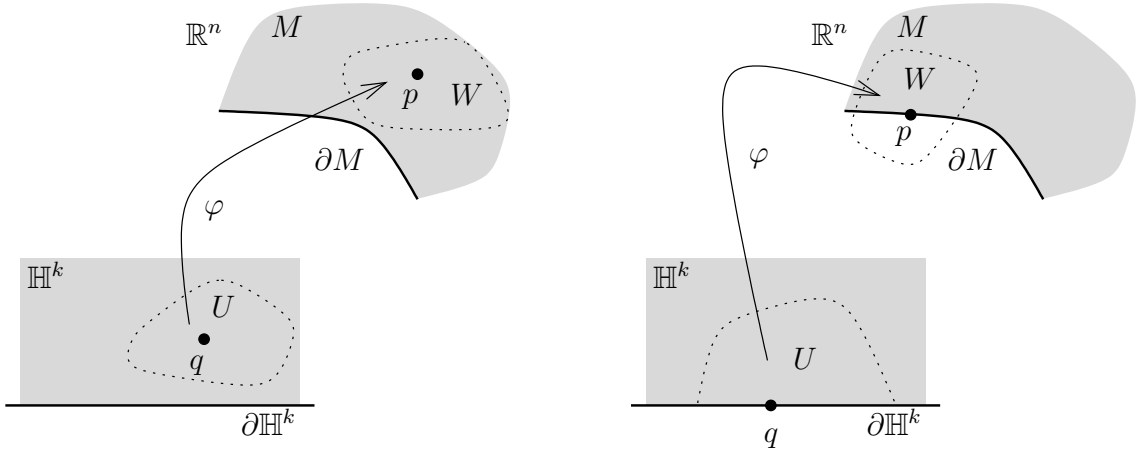


Figura C.1: Parametrizzazione in un punto interno e in un punto del bordo di una sottovarietà.

Ne sono esempi i domini con frontiera liscia considerati nella definizione 2.2.1 di ipersuperficie: nell'interno possiamo usare come parametrizzazione l'inclusione $x \mapsto x$. Considerato insieme alla sua frontiera, il dominio dà la sottovarietà M, e ∂M è la frontiera del dominio. Questa è la nostra applicazione principale. Un altro esempio è una curva liscia.

Se M è una sottovarietà regolare con bordo di dimensione k, allora ∂M è a sua volta una sottovarietà regolare di dimensione $k-1$: basta restringere le parametrizzazioni al bordo di $\mathbb{H}^k$.

Occorre inoltre definire un'orientazione.

Definizione C.2. Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà regolare con bordo di dimensione $k \geq 2$. Supponiamo di poter scegliere una famiglia di parametrizzazioni le cui immagini ricoprano M e tale che, date due parametrizzazioni $\varphi\colon U \to M$ e $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{U} \to M$ con $\varphi(U) \cap \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \neq \emptyset$, l'*applicazione di transizione* (automaticamente liscia)

$$\widetilde{\varphi}^{\,-1} \circ \varphi$$

definita su $\varphi^{-1}\big(\varphi(U) \cap \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})\big)$, cioè ovunque la composizione abbia senso, conservi l'orientazione, ossia

$$\det D(\widetilde{\varphi}^{\,-1} \circ \varphi) > 0$$

in ogni punto. Una tale famiglia determina un'*orientazione* su M; di solito si prende la famiglia massimale di parametrizzazioni compatibili.

Se M è orientata, le restrizioni delle parametrizzazioni a $\partial\mathbb{H}^k$ danno un'orientazione su ∂M, detta *orientazione indotta* su ∂M.

Nelle dimensioni $k = 0$ (punti isolati) e $k = 1$ (curve) l'orientazione va definita diversamente. Per $k = 0$ assegniamo a ciascun punto un segno $+$ o $-$. Per $k = 1$ ammettiamo parametrizzazioni da aperti sia di $\mathbb{H}^1 = [0, \infty)$ sia di $-\mathbb{H}^1 = (-\infty, 0]$. Per il resto la definizione è la stessa. Un punto del bordo che corrisponde a 0 in $[0, \infty)$ riceve l'orientazione $-$, uno che corrisponde a 0 in $(-\infty, 0]$ riceve l'orientazione $+$. Questa complicazione nasce dal fatto che, diversamente da quanto accade in $\mathbb{R}^k$ per $k \geq 2$, il semiasse $\mathbb{H}^1 = [0, \infty)$ non può essere ruotato in $\mathbb{R}^1$ né trasformato mediante un'applicazione che conservi l'orientazione nel semiasse $-\mathbb{H}^1 = (-\infty, 0]$. In $\mathbb{R}^2$, invece, si può ruotare il semipiano superiore $\mathbb{H}^2$ nel semipiano inferiore $-\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\}$. Nei calcoli con

curve compatte dotate di estremi è spesso comodo dare un'unica parametrizzazione da $[0,1]$ oppure da $[a,b]$: in quest'ultimo caso a a corrisponde il segno $-$ e a b il segno $+$.

Che le applicazioni di transizione siano lisce richiede una dimostrazione: è un buon esercizio di analisi elementare, con qualche cautela nei punti del bordo.

L'orientazione consente di definire univocamente un integrale su M, come occorre orientare una curva per definirvi un integrale di linea. Diversamente dalle curve, non tutte le sottovarietà di dimensione maggiore di uno sono *orientabili*, ossia ammettono un'orientazione. Un esempio classico è il nastro di Möbius.

Ora che sappiamo su che cosa integriamo, vediamo che cosa integriamo. Partiamo dalle 0-forme. Per definizione le 0-forme sono funzioni lisce, anche a valori complessi. Può servire una funzione definita soltanto su una sottovarietà. Una funzione f su una sottovarietà M è liscia se $f \circ \varphi$ è liscia su U per ogni parametrizzazione $\varphi\colon U \to M$. Equivalentemente, si può dimostrare che f è la restrizione di una funzione liscia definita in un intorno di M in $\mathbb{R}^n$.

L'integrale di una 0-forma ω su una sottovarietà orientata M di dimensione 0 è

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p\in M} \epsilon_p \omega(p),$$

dove ϵ_p è l'orientazione di p, ossia $+1$ o -1. Per evitare problemi di integrabilità si può supporre che ω abbia supporto compatto (è diversa da zero al più in un numero finito di punti di M), oppure che M sia compatto (sia cioè un insieme finito).

La definizione precisa di 1-forma è quella di «sezione liscia» del duale del fibrato vettoriale $T\mathbb{R}^n$. A un campo vettoriale essa associa una funzione. Usiamo la notazione di dualità $\langle \omega, v\rangle$ anziché quella funzionale $\omega(v)$ per evidenziare la linearità in v e in ω. La 1-forma dx_k è caratterizzata da

$$\left\langle dx_k, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle = 1, \qquad \left\langle dx_k, \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right\rangle = 0 \quad \text{se } \ell \neq k.$$

Per i nostri scopi basta pensare a una 1-forma in $\mathbb{R}^n$ come a un'espressione

$$\omega = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + \cdots + g_n dx_n,$$

con $g_1, g_2, \ldots, g_n$ funzioni lisce. In ogni punto una 1-forma è dunque una combinazione lineare dei $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, che varia in modo liscio da punto a punto. Sia M una sottovarietà unidimensionale, eventualmente con bordo, sia $\varphi\colon U \to M$ una parametrizzazione compatibile con l'orientazione di M e supponiamo che i coefficienti g_k abbiano supporto in $\varphi(U)$. Poniamo

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_U g_k(\varphi(t))\varphi_k'(t)\, dt,$$

dove l'integrale $\int_U \cdots dt$ si calcola con l'usuale orientazione positiva (da sinistra a destra), poiché $U \subset \mathbb{R}$, e φ_k è la componente di indice k di φ.

In generale il supporto di una 1-forma non è contenuto in una sola immagine $\varphi(U)$. Si ricorre allora a una partizione dell'unità per scrivere ω come somma localmente finita

$$\omega = \sum_\iota \omega_\iota,$$

in cui ogni ω_ι ha supporto nell'immagine di una sola parametrizzazione. «Localmente finita» significa che in ogni intorno compatto solo un numero finito di ω_ι è non nullo. Poniamo

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\iota \int_M \omega_\iota.$$

La definizione ha senso solo se la somma esiste: se ω ha supporto compatto, per esempio, la somma è finita e dunque esiste. Le forme di grado superiore si costruiscono a partire dalle 1-forme e dalle 0-forme mediante il *prodotto esterno*. Date una k-forma ω e una ℓ-forma η,

$$\omega \wedge \eta$$

è una $(k+\ell)$-forma. Richiediamo che il prodotto esterno sia bilineare in ogni punto: se f e g sono funzioni lisce, allora

$$(f\omega + g\eta) \wedge \xi = f(\omega \wedge \xi) + g(\eta \wedge \xi), \qquad \text{e} \qquad \omega \wedge (f\eta + g\xi) = f(\omega \wedge \eta) + g(\omega \wedge \xi).$$

Il prodotto esterno non è commutativo: sulle 1-forme lo si richiede anticommutativo. Se ω e η sono 1-forme, allora

$$\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega.$$

Il segno meno tiene conto dell'orientazione. Quando ω è una k-forma e η è una m-forma,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega.$$

Mediante prodotti esterni delle 1-forme di base si ottengono tutte le k-forme. Una k-forma è quindi un'espressione

$$\omega = \sum_{\ell_1=1}^{n} \sum_{\ell_2=1}^{n} \cdots \sum_{\ell_k=1}^{n} g_{\ell_1,\ldots,\ell_k}\, dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k},$$

dove le $g_{\ell_1,\ldots,\ell_k}$ sono funzioni lisce. Possiamo semplificare ancora. Per l'anticommutatività del prodotto esterno sulle 1-forme,

$$dx_\ell \wedge dx_m = -dx_m \wedge dx_\ell, \qquad \text{e} \qquad dx_\ell \wedge dx_\ell = 0.$$

Di conseguenza ogni forma $dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k}$ è nulla se due indici fra $\ell_1, \ldots, \ell_k$ coincidono, altrimenti si può scrivere nella forma $\pm dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k}$ con $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k$. Una k-forma si scrive dunque sempre come

$$\omega = \sum_{1 \le \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k \le n} g_{\ell_1,\ldots,\ell_k}\, dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k}.$$

Come le 1-forme sono funzionali lineari sui campi vettoriali, così le k-forme sono funzioni multilineari alternanti di k campi vettoriali. Vediamo come si valuta $dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k}$ su k vettori. Consideriamo i campi $X_1, \ldots, X_k$ dati da $X_j = \sum_{m=1}^{n} c_{mj} \frac{\partial}{\partial x_m}$. Poiché le k-forme sono multilineari alternanti, anziché valutarle sulla k-upla $(X_1, \ldots, X_k)$ scriviamo il prodotto esterno $X_1 \wedge \cdots \wedge X_k$, che ha le stesse proprietà del prodotto esterno delle forme. Allora

$$\langle dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k}, X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \rangle = \det \left(\begin{bmatrix} c_{\ell_1 1} & c_{\ell_1 2} & \cdots & c_{\ell_1 k} \\ c_{\ell_2 1} & c_{\ell_2 2} & \cdots & c_{\ell_2 k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\ell_k 1} & c_{\ell_k 2} & \cdots & c_{\ell_k k} \end{bmatrix} \right).$$

Ciascun dx_{ℓ_j} seleziona cioè la riga di indice ℓ_j della matrice dei coefficienti, e della matrice così ottenuta si calcola il determinante. Per esempio, per $k = 2$,

$$\left\langle dx_1 \wedge dx_2, \left(a\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \wedge \left(c\frac{\partial}{\partial x_1} + d\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \right\rangle = ad - bc.$$

Consideriamo una sottovarietà orientata M di dimensione k, eventualmente con bordo, una parametrizzazione $\varphi\colon U \to M$ compatibile con l'orientazione e una k-forma ω con supporto in $\varphi(U)$ (ogni coefficiente $g_{\ell_1,\dots,\ell_k}$ ha supporto in $\varphi(U)$). Indichiamo con $t \in U \subset \mathbb{R}^k$ le coordinate su U. Definiamo

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1\le\ell_1<\ell_2<\dots<\ell_k\le n} \int_U g_{\ell_1,\dots,\ell_k}(\varphi(t)) \det D(\varphi_{\ell_1}, \varphi_{\ell_2}, \dots, \varphi_{\ell_k})\, dt$$

dove l'integrale $\int_U \cdots dt$ è calcolato con l'orientazione usuale di $\mathbb{R}^k$ e dt è la misura ordinaria su $\mathbb{R}^k$ (si pensi a $dt = dt_1 \cdots dt_k$). Con $D(\varphi_{\ell_1}, \varphi_{\ell_2}, \dots, \varphi_{\ell_k})$ indichiamo la derivata dell'applicazione la cui componente di indice m è φ_{ℓ_m}.

Come prima, se il supporto di ω non è contenuto nell'immagine di una sola parametrizzazione, usiamo una partizione dell'unità e scriviamo

$$\omega = \sum_\ell \omega_\ell$$

come somma localmente finita, in cui ogni ω_ℓ ha supporto nell'immagine di una parametrizzazione compatibile con l'orientazione. Allora

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\ell \int_M \omega_\ell.$$

Anche qui la somma deve esistere, come accade quando ω ha supporto compatto e la somma è finita.

Le forme differenziali non nulle su $\mathbb{R}^n$ hanno gradi $0, 1, 2, \dots, n$. Le n-forme sono tutte della forma

$$f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

La forma $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ si chiama *forma di volume*. Integrandola su un dominio (una sottovarietà di dimensione n) si ottiene l'usuale integrale di volume.

Più in generale si definisce l'integrale di k-forme su k-catene, combinazioni lineari di sottovarietà lisce. Qui non ci occorre questa generalità.

Nei calcoli si possono trascurare insiemi di misura k-dimensionale nulla, per esempio il bordo della sottovarietà. Anche quando usiamo più parametrizzazioni possiamo lasciare scoperto un insieme di misura nulla. Vediamo alcuni esempi.

Esempio C.3. Consideriamo la circonferenza $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Usiamo la parametrizzazione $\varphi\colon (-\pi, \pi) \to S^1$ con $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, che orienta la circonferenza in senso antiorario. Sia $\omega(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)\, dx_1 + Q(x_1, x_2)\, dx_2$. Allora

$$\int_{S^1} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(P\big(\cos(t), \sin(t)\big)\big(-\sin(t)\big) + Q\big(\cos(t), \sin(t)\big)\cos(t) \Big)\, dt.$$

Possiamo trascurare il punto $(-1, 0)$ perché un punto ha misura 1-dimensionale nulla.

Esempio C.4. Un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà orientata. Usiamo la parametrizzazione $\varphi\colon U \to U$ con $\varphi(x) = x$. Allora

$$\int_U f(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_U f(x)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \int_U f(x)\, dV,$$

dove dV è l'usuale misura di volume.

Esempio C.5. Consideriamo infine l'emisfero superiore M della sfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ come sottovarietà con bordo, ossia

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}.$$

Il bordo è la circonferenza nel piano (x_1, x_2):

$$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Parametrizziamo M mediante le coordinate sferiche

$$\varphi(\psi, \theta) = \big(\cos(\theta)\sin(\psi), \sin(\theta)\sin(\psi), \cos(\psi)\big)$$

sull'insieme U dato da $-\pi < \theta < \pi$ e $0 < \psi \leq \pi/2$. A meno di una rotazione e di una traslazione, è un sottoinsieme di un semipiano nel piano (ψ, θ), e i punti con $\psi = \pi/2$ corrispondono ai punti del bordo. Usiamo l'orientazione corrispondente (quella della normale esterna). Restano esclusi i punti sul meridiano $\theta = \pi$ e il punto $(0, 0, 1)$. Tale insieme è una curva di dimensione 1, quindi di misura 2-dimensionale nulla e trascurabile ai fini dell'integrazione. Sia

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + Q(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 \wedge dx_3 + R(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 \wedge dx_3.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_M \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \Big[& P(\varphi(\psi,\theta)) \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \Big) \\
& + Q(\varphi(\psi,\theta)) \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \Big) \\
& + R(\varphi(\psi,\theta)) \Big(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \Big) \Big] \, d\theta \, d\psi \\
= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \Big[& P\big(\cos(\theta)\sin(\psi), \sin(\theta)\sin(\psi), \cos(\psi)\big) \cos(\psi)\sin(\psi) \\
& + Q\big(\cos(\theta)\sin(\psi), \sin(\theta)\sin(\psi), \cos(\psi)\big) \big(-\sin(\theta)\sin^2(\psi)\big) \\
& + R\big(\cos(\theta)\sin(\psi), \sin(\theta)\sin(\psi), \cos(\psi)\big) \cos(\theta)\sin^2(\psi) \Big] \, d\theta \, d\psi.
\end{aligned}$$

L'orientazione indotta su ∂M è quella antioraria usata nell'esempio C.3: restringendo la parametrizzazione al bordo si ha $\varphi(\pi/2, \theta) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta), 0\big)$, con l'orientazione corretta del semipiano corrispondente.

La derivata sulle k-forme si chiama *derivata esterna*: è un operatore lineare che trasforma k-forme in $(k+1)$-forme. Per una k-forma del tipo

$$\omega = g_{\ell_1,\ldots,\ell_k}\, dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k},$$

la derivata esterna $d\omega$ è definita da

$$d\omega \stackrel{\text{def}}{=} dg_{\ell_1,\ldots,\ell_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g_{\ell_1,\ldots,\ell_k}}{\partial x_m}\, dx_m \wedge dx_{\ell_1} \wedge dx_{\ell_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\ell_k}.$$

Si definisce poi d su ogni k-forma estendendo per linearità.

Per esempio,

$$\begin{aligned} d\,(P\,dx_2 \wedge dx_3 + Q\,dx_3 \wedge dx_1 + R\,dx_1 \wedge dx_2) \\ = \frac{\partial P}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial R}{\partial x_3}\,dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Si riconosce la divergenza del campo vettoriale (P, Q, R) del calcolo vettoriale. Tutti gli operatori differenziali usuali in $\mathbb{R}^3$ trovano qui il loro posto. Se ω è una 0-forma in $\mathbb{R}^3$, $d\omega$ corrisponde al gradiente; se ω è una 1-forma in $\mathbb{R}^3$, $d\omega$ corrisponde al rotore; se ω è una 2-forma in $\mathbb{R}^3$, $d\omega$ corrisponde alla divergenza.

Un breve calcolo dà la *regola di Leibniz*: per una p-forma ω e una q-forma η si ha

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

Poiché le derivate parziali commutano, per ogni ω risulta

$$d(d\omega) = 0.$$

Si scrive anche $d^2 = 0$. Se $\Lambda^k(M)$ denota lo spazio delle k-forme su una sottovarietà M di dimensione n, otteniamo il seguente *complesso*:

$$0 \xrightarrow{d} \Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^n(M) \xrightarrow{d} 0.$$

Il primo d, dallo spazio nullo a $\Lambda^0(M)$, è l'applicazione nulla. La topologia di M si può studiare calcolando a partire dal complesso i *gruppi di coomologia di de Rham* $H^0_{dR}(M), \ldots, H^n_{dR}(M)$, dati in grado k da $\frac{\ker(d\colon \Lambda^k \to \Lambda^{k+1})}{\mathrm{im}(d\colon \Lambda^{k-1} \to \Lambda^k)}$. Essi misurano la risolubilità globale dell'equazione differenziale $d\omega = \eta$ nell'incognita ω, per una forma chiusa assegnata. Per il teorema di de Rham questi gruppi sono isomorfi ai gruppi di coomologia singolare $H^0(M, \mathbb{R}), \ldots, H^n(M, \mathbb{R})$. Di quest'idea esistono molte varianti; una si incontra nel capitolo 4.

Enunciamo il *teorema di Stokes*, detto anche *teorema di Stokes generalizzato* per distinguerlo dal teorema classico del calcolo vettoriale, che ne è un caso particolare.[49]

Teorema C.6. *(Stokes).* Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà regolare liscia, compatta, orientata, di dimensione $(k+1)$ e con bordo. Si dia a ∂M l'orientazione indotta e sia ω una k-forma liscia definita su M. Allora

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Le ipotesi di regolarità si possono indebolire sia per ω sia per M (e per ∂M), ammettendo anche «spigoli». In $\mathbb{R}^2$ è facile dare una versione più generale: si veda il teorema di Green (teorema B.2). Il teorema di Stokes classico si ottiene nello spazio di dimensione $n = 3$ integrando su una superficie di dimensione due. Nella notazione classica l'integrale di linea si scrive come integrale di un campo vettoriale associato alla 1-forma ω e la sua derivata $d\omega$ corrisponde al rotore.

Per cogliere il significato del teorema, dimostriamolo in un caso più semplice, spesso già sufficiente nelle applicazioni e che contiene l'idea centrale della dimostrazione. Sia

[49] Curiosamente, a parte il fatto che apprezzava il teorema, Stokes non ebbe alcun ruolo nella dimostrazione di nessuna delle due versioni.

$U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio tale che per ogni $k = 1, \ldots, n$ esistano due funzioni lisce α_k e β_k per le quali U sia descritto da

$$\begin{aligned}&(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \pi_k(U),\\ &\alpha_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \leq x_k \leq \beta_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

dove $\pi_k(U)$ è la proiezione di U sulle componenti $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Orientiamo ∂U nel modo usuale. Scriviamo $x' = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ e indichiamo con dV_{n-1} la forma di volume di $\mathbb{R}^{n-1}$. Consideriamo la $(n-1)$-forma

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Allora $d\omega = (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\begin{aligned}\int_U d\omega &= \int_U (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dV_n\\ &= (-1)^{k-1} \int_{\pi_k(U)} \int_{\alpha_k(x')}^{\beta_k(x')} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k\, dV_{n-1}\\ &= (-1)^{k-1} \left(\int_{\pi_k(U)} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \beta_k(x'), x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dV_{n-1} \right.\\ &\qquad \left. - \int_{\pi_k(U)} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha_k(x'), x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dV_{n-1} \right) = \int_{\partial U} \omega.\end{aligned}$$

Il fattore $(-1)^{k-1}$ scompare grazie all'orientazione di ∂U. Ogni $(n-1)$-forma è somma di forme del tipo ω per diversi valori di k. Integrando ciascuna nella direzione corrispondente si ottiene la tesi.

D Terminologia e risultati fondamentali di algebra

Richiamiamo alcune definizioni di algebra commutativa e un paio di risultati necessari nel capitolo 6. Per una trattazione completa si veda, per esempio, Zariski e Samuel, *Commutative Algebra* [13].

Definizione D.1. Un insieme G dotato di un'operazione binaria $x * y$ si chiama *gruppo* se soddisfa i seguenti assiomi:

(G1) Se $x \in G$ e $y \in G$, allora $x * y \in G$.

(G2) *Associatività.* $(x * y) * z = x * (y * z)$ per ogni $x, y, z \in G$.

(G3) *Elemento neutro.* Esiste $1 \in G$ tale che $1 * x = x * 1 = x$ per ogni $x \in G$.

(G4) *Inverso.* Per ogni $x \in G$ esiste $x^{-1} \in G$ tale che $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$.

Il gruppo G si dice *abeliano* se soddisfa inoltre

(G5) *Commutatività.* $x * y = y * x$ per ogni $x, y \in G$.

Un sottoinsieme $K \subset G$ si chiama *sottogruppo* se K è un gruppo rispetto alla stessa operazione di G. Dati due gruppi G e H, una funzione $f\colon G \to H$ è un *omomorfismo di gruppi* se rispetta l'operazione, ossia $f(a * b) = f(a) * f(b)$. Se f è biiettiva si parla di *isomorfismo di gruppi*.

Un esempio è il gruppo degli automorfismi. Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e sia G l'insieme dei biolomorfismi $f\colon U \to U$. Allora G è un gruppo rispetto alla composizione. Non è detto che G sia abeliano: se $U = \mathbb{C}$, le funzioni $f(z) = z + 1$ e $g(z) = -z$ appartengono a G, ma $(f \circ g)(z) = -z + 1$ e $(g \circ f)(z) = -z - 1$.

Definizione D.2. Un insieme R con due operazioni, addizione $x + y$ e moltiplicazione xy, si chiama *anello commutativo* se soddisfa i seguenti assiomi:

(A1) Se $x \in R$ e $y \in R$, allora $x + y \in R$.

(A2) *Commutatività dell'addizione.* $x + y = y + x$ per ogni $x, y \in R$.

(A3) *Associatività dell'addizione.* $(x + y) + z = x + (y + z)$ per ogni $x, y, z \in R$.

(A4) Esiste $0 \in R$ tale che $0 + x = x$ per ogni $x \in R$.

(A5) Per ogni $x \in R$ esiste $-x \in R$ tale che $x + (-x) = 0$.

(M1) Se $x \in R$ e $y \in R$, allora $xy \in R$.

(M2) *Commutatività della moltiplicazione.* $xy = yx$ per ogni $x, y \in R$.

(M3) *Associatività della moltiplicazione.* $(xy)z = x(yz)$ per ogni $x, y, z \in R$.

(M4) Esiste $1 \in R$ (con $1 \neq 0$) tale che $1x = x$ per ogni $x \in R$.

(D) *Distributività.* $x(y + z) = xy + xz$ per ogni $x, y, z \in R$.

Un anello commutativo R si chiama *dominio d'integrità* se soddisfa anche la condizione

(ID) Da $xy = 0$ segue $x = 0$ oppure $y = 0$.

Un anello commutativo R si chiama *campo* se soddisfa anche la condizione

(F) Per ogni $x \in R$ con $x \neq 0$ esiste $1/x \in R$ tale che $x(1/x) = 1$.

In un anello commutativo R gli elementi $u \in R$ che ammettono un inverso $1/u$ nel senso appena descritto si chiamano *unità*.

Dati due anelli R e S, una funzione $f\colon R \to S$ è un *omomorfismo di anelli* se rispetta le operazioni e l'unità, ossia $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ e $f(1) = 1$. Se f è biiettiva si chiama *isomorfismo di anelli*.

Un anello commutativo è dunque un gruppo abeliano additivo (scriviamo + per l'operazione e 0 per l'elemento neutro), dotato anche di una moltiplicazione. Se gli elementi non nulli formano un gruppo per la moltiplicazione, l'anello è un campo. Negli anelli non commutativi viene meno la commutatività della moltiplicazione. Alcuni autori non richiedono l'esistenza di 1 nella definizione di anello.

Un esempio frequente in questo libro è l'anello delle funzioni olomorfe. Sia $\mathcal{O}(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su un aperto U. L'addizione e la moltiplicazione puntuali danno a $\mathcal{O}(U)$ una struttura di anello. Le unità sono precisamente le funzioni che non si annullano mai in U; formano un gruppo moltiplicativo.

Dato un anello commutativo R, indichiamo con $R[x]$ l'insieme dei polinomi

$$P(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

con $c_0, \ldots, c_k \in R$. Se $c_k \neq 0$, l'intero k è il *grado* del polinomio e c_k il *coefficiente direttivo* di $P(x)$. Se il coefficiente direttivo è 1, diciamo che P è *monico*. Se R è un anello commutativo, lo è anche $R[x]$. Analogamente si definisce l'anello commutativo $R[x_1, \ldots, x_n]$ dei polinomi in n indeterminate.

Il risultato più elementare sui polinomi, il teorema fondamentale dell'algebra (teorema B.29), afferma che ogni polinomio non costante a coefficienti in $R = \mathbb{C}$ ha una radice. È in realtà un teorema di analisi complessa in una variabile.

Definizione D.3. Sia R un anello commutativo. Un sottoinsieme $I \subset R$ è un *ideale* se $0 \in I$ e se da $f \in R$ e $g, h \in I$ seguono $fg \in I$ e $g+h \in I$. In breve, $I \subset R$ è un sottogruppo additivo tale che $RI = I$. Dato $S \subset R$, l'*ideale generato da S* è l'intersezione I di tutti gli ideali che contengono S. Se $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ è finito, I si dice *finitamente generato* e si scrive $I = (f_1, \ldots, f_k)$. Un *ideale principale* è un ideale generato da un solo elemento. Un dominio d'integrità nel quale ogni ideale è principale si chiama *dominio a ideali principali* (PID). Un anello commutativo R è *noetheriano* se ogni ideale di R è finitamente generato.

È facile verificare che l'ideale generato da S è effettivamente un ideale: l'intersezione di ideali è un ideale. Se I è generato da $f_1, \ldots, f_k$, ogni $g \in I$ si scrive come

$$g = c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k,$$

per certi $c_1, \ldots, c_k \in R$. L'insieme di tali elementi è chiaramente il più piccolo ideale che contiene $f_1, \ldots, f_k$.

Teorema D.4. *(Teorema della base di Hilbert).* Se R è un anello commutativo noetheriano, anche $R[x]$ è noetheriano.

La dimostrazione è breve e vale la pena riportarla.

Dimostrazione. Supponiamo R noetheriano e sia $I \subset R[x]$ un ideale. Possiamo supporre $I \neq (0)$. Partendo da un polinomio non nullo f_1 di grado minimo in I, costruiamo una successione, eventualmente finita, di polinomi $f_1, f_2, \ldots$ in cui f_k è non nullo e ha

grado minimo nell'insieme $I \setminus (f_1, \ldots, f_{k-1})$. Per costruzione la successione dei gradi $\deg(f_1), \deg(f_2), \ldots$ è non decrescente. Sia c_k il coefficiente direttivo di f_k.

Poiché R è noetheriano, per un opportuno indice k vale $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \subset (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ per ogni m per il quale i coefficienti siano definiti. Supponiamo per assurdo che esista f_{k+1}, ossia che la successione dei polinomi non si arresti a k. In particolare $(c_1, \ldots, c_{k+1}) \subset (c_1, \ldots, c_k)$, ossia

$$c_{k+1} = a_1 c_1 + \cdots + a_k c_k.$$

Poiché il grado di f_{k+1} è maggiore o uguale a quello di ciascuno dei polinomi da f_1 a f_k, possiamo definire

$$g = a_1 x^{\deg(f_{k+1}) - \deg(f_1)} f_1 + a_2 x^{\deg(f_{k+1}) - \deg(f_2)} f_2 + \cdots + a_k x^{\deg(f_{k+1}) - \deg(f_k)} f_k.$$

Il polinomio g ha lo stesso grado di f_{k+1} e lo stesso coefficiente direttivo, c_{k+1}. D'altra parte $g \in (f_1, \ldots, f_k)$, mentre $f_{k+1} \notin (f_1, \ldots, f_k)$ per costruzione. Anche $g - f_{k+1}$ non appartiene a $(f_1, \ldots, f_k)$, ma i termini direttivi si cancellano e $\deg(g - f_{k+1}) < \deg(f_{k+1})$. Ciò contraddice la minimalità del grado. Dunque f_{k+1} non esiste e $I = (f_1, \ldots, f_k)$. □

Definizione D.5. Un elemento $f \in R$ si dice *irriducibile* se f non è un'unità e da $f = gh$ con $g, h \in R$ segue che g oppure h è un'unità. Un dominio d'integrità R si dice *dominio a fattorizzazione unica* (UFD) se ogni elemento non nullo e non invertibile si fattorizza in modo unico in elementi irriducibili di R, a meno dell'ordine e della moltiplicazione per unità.

Una versione del lemma di Gauss afferma che, come la noetherianità, la fattorizzazione unica si conserva passando all'anello dei polinomi.

Teorema D.6. *(Lemma di Gauss).* Se R è un anello commutativo a fattorizzazione unica, anche $R[x]$ è un dominio a fattorizzazione unica.

La dimostrazione non è difficile, ma esula dagli scopi di questo libro.

E Risultati di analisi reale

E.1 Richiami di teoria della misura

Per iniziare questo corso non occorre l'integrale di Lebesgue, ma conoscerlo può rendere più chiari alcuni risultati dei primi capitoli e facilitare gli esercizi. In più punti dei capitoli successivi diventa invece necessario. Per agevolare una prima lettura dell'intero libro anche a chi non abbia ancora seguito un corso di teoria della misura, presentiamo le idee fondamentali dell'integrale di Lebesgue e i risultati che lo rendono così utile. Tralasciamo i dettagli della costruzione e le dimostrazioni. Il lettore interessato può consultare, per esempio, *Principles of Mathematical Analysis* [9] o *Real and Complex Analysis* di Rudin [11].

Dato un insieme X, distinguiamo una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di X, detti *insiemi misurabili*. La famiglia $\mathcal{M}$ deve essere una *σ-algebra*, ossia contenere l'insieme vuoto ed essere chiusa per complementazione, unioni numerabili e intersezioni numerabili. Sui misurabili definiamo una misura, cioè una funzione $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e tale che μ sia *σ-additiva*: la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi disgiunti è la somma delle misure. Se X è lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, esiste la *misura di Lebesgue*, che coincide con l'usuale volume n-dimensionale su insiemi semplici quali i rettangoli. Una complicazione è che allora non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ possono essere misurabili. Diciamo che $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è uno *spazio di misura*.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è *misurabile* se sono misurabili i suoi insiemi di sottolivello. Negli spazi che consideriamo bisogna di solito impegnarsi per costruire una funzione non misurabile: si può dunque perdonare al lettore l'abitudine di supporre misurabili tutte le funzioni del libro. Qui una funzione è detta *semplice* se ha supporto di misura finita e assume soltanto un numero finito di valori. Il suo integrale è definito da

$$\int_X f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y \in f(X)} y\,\mu(f^{-1}(y)).$$

Sull'insieme in cui $f(x) = y$ moltiplichiamo cioè il valore della funzione per la misura dell'insieme, poi sommiamo i contributi. Per una funzione a gradini e per la misura di Lebesgue è ciò che si fa anche nell'integrale di Riemann. Per una funzione misurabile non negativa f si pone

$$\int_X f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\varphi \le f \\ \varphi \text{ semplice}}} \int_X \varphi\,d\mu.$$

Per una funzione misurabile a valori reali si scrive $f = f_+ - f_-$ con f_+ e f_- non negative e, purché almeno uno dei due integrali sia finito, si pone

$$\int_X f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu.$$

Analogamente per una funzione misurabile a valori complessi si scrive $f = u + i\,v$ e si pone

$$\int_X f\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_X u\,d\mu + i \int_X v\,d\mu.$$

La classe di funzioni che incontriamo più spesso è quella delle funzioni *integrabili in L^1* (o semplicemente di classe L^1), per le quali

$$\int_X |f|\,d\mu < \infty.$$

Per ogni funzione il cui integrale sia definito vale la stima fondamentale

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

Ai fini dell'integrazione permettiamo spesso che una funzione non negativa assuma in qualche punto il valore ∞. Possiamo anche lasciare una funzione indefinita su un insieme di misura nulla, poiché modificarvi i valori non cambia l'integrale.

Osserviamo anzitutto che, essendo le funzioni a gradini semplici per la misura di Lebesgue, questa integrazione generalizza quella di Riemann sulla retta e in $\mathbb{R}^n$: i due integrali coincidono quando entrambi sono definiti.

In secondo luogo, una classe di funzioni assai più ampia, di fatto tutte le funzioni misurabili negli spazi euclidei considerati, si ottiene come limite di funzioni semplici, e l'integrale si costruisce passando al limite nei loro integrali. È dunque naturale aspettarsi teoremi che permettano di passare al limite sotto il segno di integrale e di stabilire l'integrabilità del limite stesso.

Una caratteristica talvolta dimenticata è che questa teoria comprende anche le serie. Su un insieme numerabile X, per esempio $\mathbb{N}$, definiamo la *misura di conteggio*: ogni sottoinsieme $S \subset X$ è misurabile e $\mu(S)$ è semplicemente il numero degli elementi di S. Se $z_n = f(n)$ è una funzione su X, allora

$$\sum_{n\in X} z_n = \int_X f\,d\mu.$$

I teoremi che seguono valgono dunque anche per le serie: appartenere a L^1 significa in questo caso che la serie è assolutamente sommabile.

Una proprietà vale *quasi ovunque* se l'insieme dove non vale ha misura nulla. Si dice anche che vale per *quasi ogni* $x \in X$. Se una successione di funzioni misurabili converge quasi ovunque a una funzione f, possiamo supporre misurabile quest'ultima, poiché coincide quasi ovunque con una funzione misurabile. I tre teoremi seguenti, a dispetto delle apparenze, sono equivalenti, ma ciascuna formulazione è adatta a situazioni diverse.

Teorema E.1.1. *(Lemma di Fatou).* Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili non negative convergente quasi ovunque a f. Allora

$$\int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Teorema E.1.2. *(Convergenza monotona).* Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili non negative con $f_n \leq f_{n+1}$ quasi ovunque per ogni n. Se $\{f_n\}$ converge quasi ovunque a f, allora

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Teorema E.1.3. *(Convergenza dominata).* Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili a valori complessi convergente quasi ovunque a f e sia $g\colon X \to [0, \infty]$ una funzione di classe L^1 tale che per ogni n valga $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni x. Allora

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Un'applicazione frequente del teorema è la derivazione sotto il segno di integrale.

Teorema E.1.4. *(Derivazione sotto il segno di integrale).* Siano $U \subset \mathbb{R}$ un aperto e $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f\colon U \times X \to \mathbb{C}$ tale che, per ogni $t \in U$, $x \mapsto f(t,x)$ appartenga a L^1; per quasi ogni x esista $\frac{\partial f}{\partial t}$ su tutto U; ed esista una funzione $g\colon X \to [0,\infty]$ di classe L^1 tale che $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \le g(x)$ per ogni $t \in U$ e quasi ogni $x \in X$. Allora, per ogni $t \in U$,

$$\frac{d}{dt}\int_X f(t,x)\,d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x).$$

Uno spazio di misura si dice *σ-finito* se è unione numerabile di insiemi di misura finita. Per esempio, lo spazio euclideo con la misura di Lebesgue è σ-finito perché è unione numerabile di palle, ciascuna di misura finita. Spesso vogliamo scrivere l'integrale su uno spazio prodotto come integrale iterato, per esempio l'integrale su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ mediante n integrali unidimensionali. Dati due spazi di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, si può definire una misura prodotto richiedendo che $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ (omettiamo ancora i dettagli). Per le funzioni non negative vale il semplice risultato seguente: non occorre verificare l'integrabilità e si ammette il valore infinito.

Teorema E.1.5. *(Tonelli).* Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi di misura σ-finiti e sia $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa. Allora:

(i) Per quasi ogni $x \in X$, $y \mapsto f(x,y)$ è misurabile e, per quasi ogni $y \in Y$, $x \mapsto f(x,y)$ è misurabile.

(ii) Le funzioni $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ e $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ sono misurabili.

(iii) Vale l'uguaglianza
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

Nel caso generale si usa il teorema di Fubini. Una misura si dice *completa* se ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla è a sua volta misurabile. Si completa una misura aggiungendo tali sottoinsiemi ai misurabili. Un piccolo dettaglio tecnico è che lo spazio prodotto di due spazi di misura non è generalmente completo e occorre completarlo. La distinzione riguarda la misurabilità delle funzioni, ma per quelle incontrate di solito nelle applicazioni è facile verificare la misurabilità sia negli spazi considerati sia nei loro completamenti.

Teorema E.1.6. *(Fubini).* Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi di misura completi e sia $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ integrabile in L^1. Allora:

(i) Per quasi ogni $x \in X$, $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile in L^1 e, per quasi ogni $y \in Y$, $x \mapsto f(x,y)$ è integrabile in L^1.

(ii) Le funzioni $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ e $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ sono integrabili in L^1.

(iii) Vale l'uguaglianza
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

I due teoremi si usano spesso insieme: con Tonelli si stabilisce l'integrabilità, con Fubini si scrive l'integrale come integrale iterato o si scambia l'ordine delle integrazioni.

Usando la misura di conteggio, i teoremi di Tonelli e di Fubini semplificano anche la trattazione delle serie di potenze. Permettono inoltre di scambiare una somma con un integrale, per esempio

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 a_n(x)\,dx.$$

Ricordiamo infine due stime utili per l'integrale di Lebesgue. La prima è la versione infinito-dimensionale della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

Teorema E.1.7. *(Cauchy–Schwarz).* Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $f\colon X \to \mathbb{C}$ e $g\colon X \to \mathbb{C}$ funzioni di classe L^2 su X: sono cioè misurabili e soddisfano $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$ e $\int_X |g|^2 d\mu < \infty$. Allora

$$\left| \int_X f\bar{g} d\mu \right|^2 \leq \int_X |f|^2 d\mu \int_X |g|^2 d\mu.$$

La seconda stima è la versione integrale della disuguaglianza che si ottiene valutando una funzione convessa su una combinazione convessa.

Teorema E.1.8. *(Disuguaglianza di Jensen).* Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di probabilità, cioè $\mu(X) = 1$, sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu$$

E.2 Convessità classica

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* (nel testo diremo anche *geometricamente convesso*) se, per ogni $x, y \in S$ e ogni $\lambda \in [0,1]$, il punto $(1-\lambda)x + \lambda y$ appartiene a S. L'interno e la chiusura di un insieme convesso sono convessi. L'intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi convessi è convessa, così come l'unione di una famiglia crescente di insiemi convessi. Dato un insieme S, l'*inviluppo convesso* di S è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono S. La sua chiusura è l'inviluppo convesso chiuso.

Un *iperpiano* $H \subset \mathbb{R}^n$ è l'insieme delle soluzioni x dell'equazione $x \cdot a = b$, per qualche vettore non nullo $a \in \mathbb{R}^n$ e qualche $b \in \mathbb{R}$. Un *semispazio chiuso* è l'insieme dei punti che soddisfano $x \cdot a \geq b$. Una funzione della forma $x \mapsto x \cdot a + b$ si dice *funzione affine reale*.

Teorema E.2.1 (dell'iperpiano di sostegno). Se $S \subset \mathbb{R}^n$ è convesso e $x_0 \in \partial S$, esiste un iperpiano di sostegno passante per x_0. Esistono cioè un vettore non nullo $a \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $b \in \mathbb{R}$ tali che $x_0 \cdot a = b$ (il punto x_0 appartiene all'iperpiano) e $x \cdot a \geq b$ per ogni $x \in S$ (l'insieme S è contenuto nel semispazio chiuso delimitato dall'iperpiano).

L'iperpiano di sostegno può non essere unico.

Teorema E.2.2 (Minkowski). Siano $S, T \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi convessi non vuoti e disgiunti. Esiste allora un iperpiano che li separa, ossia esistono un vettore non nullo $a \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $b \in \mathbb{R}$ tali che $x \cdot a \geq b$ per ogni $x \in S$ e $x \cdot a \leq b$ per ogni $x \in T$.

Combinando i risultati precedenti si ottiene il seguente corollario.

Corollario E.2.3. Un insieme convesso chiuso $S \subset \mathbb{R}^n$ è l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che contengono S. Più in generale, per ogni insieme S, l'inviluppo convesso chiuso di S è l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che contengono S.

Un punto $x_0 \in S$ si dice *punto estremo* se, per ogni $x, y \in S$ e $\lambda \in [0,1]$ tali che $(1-\lambda)x + \lambda y = x_0$, si ha $x_0 = x$ oppure $x_0 = y$. Un punto $x_0 \in S$ si dice *punto esposto* se esiste una funzione affine la cui restrizione a S raggiunge un massimo stretto in x_0. In altre parole, esiste un iperpiano di sostegno che interseca S in quel solo punto.

Teorema E.2.4 (Straszewicz). Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e convesso. L'insieme dei punti esposti di S è denso nell'insieme dei punti estremi di S.

Teorema E.2.5 (Krein–Milman). Se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto e convesso, coincide con l'inviluppo convesso dei suoi punti estremi.

In un paio di occasioni useremo il fatto che un convesso compatto non vuoto ha punti esposti. Più in generale, l'inviluppo convesso di un compatto non vuoto ha punti esposti.

Dato un insieme convesso S, una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni $x, y \in S$ e ogni $\lambda \in [0,1]$ si ha

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Equivalentemente, f è convessa se è convesso il suo *epigrafico*, definito da

$$\operatorname{epi} f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in S \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}.$$

I ragionamenti sugli insiemi convessi si possono quindi applicare alle funzioni convesse. Dal teorema dell'iperpiano di sostegno discendono, per esempio, due fatti interessanti. Considerando un iperpiano di sostegno dell'epigrafico vediamo anzitutto che le funzioni convesse ammettono iperpiani «tangenti», eventualmente più di uno.

Proposizione E.2.6. Siano $S \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, $f\colon S \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $x_0 \in S^\circ$. Esiste allora una funzione affine g tale che $g(x) \le f(x)$ per ogni $x \in S$ e $g(x_0) = f(x_0)$.

Con S° indichiamo l'interno di S, ma possiamo prendere anche il cosiddetto *interno relativo*, ossia l'interno rispetto al più piccolo sottospazio affine contenente S. Dalla proposizione segue l'identità

$$f(x_0) = \sup\bigl\{g(x_0) : g \text{ affine tale che } g(x) \le f(x) \text{ per ogni } x \in S\bigr\}.$$

E.3 Funzioni di taglio lisce e partizioni dell'unità

La funzione definita da $f(x) = 0$ per $x \le 0$ e $f(x) = e^{-1/x}$ per $x > 0$ è liscia (di classe C^∞), nulla per $x \le 0$ e positiva (e minore di 1) per $x > 0$. La funzione $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ è liscia, nulla per $x \le 0$ e uguale a 1 per $x \ge 1$. Modificando questi esempi si ottiene la seguente *funzione di taglio*.

Teorema E.3.1 (funzione di taglio). Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $K \subset U$ compatto. Esiste una funzione liscia $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ tale che φ abbia supporto compatto in U e $\varphi \equiv 1$ su un intorno di K.

Per *supporto* $\operatorname{supp}\varphi$ intendiamo la chiusura di $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$. Dire che una funzione ha supporto compatto in U significa che $\operatorname{supp}\varphi$ è un sottoinsieme compatto di U. Il lemma di Urysohn offre un'altra variante di questa costruzione.

Teorema E.3.2 (lemma di Urysohn liscio). Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e siano $A, B \subset U$ due sottoinsiemi disgiunti, chiusi nella topologia relativa. Esiste una funzione liscia $\varphi\colon U \to [0,1]$ tale che $\varphi = 0$ su A e $\varphi = 1$ su B.

Di solito si usano queste funzioni per localizzare un problema o per prolungare una funzione liscia a tutto U o a tutto $\mathbb{R}^n$. Possiamo anche chiedere che più funzioni di taglio si raccordino fra loro. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un *ricoprimento aperto* di U, ossia $U = \bigcup_\iota U_\iota$, con ciascun membro del ricoprimento aperto.

Teorema E.3.3 (partizione liscia dell'unità). Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $\{U_\iota\}_{\iota\in I}$ un ricoprimento aperto di U. Esiste allora una *partizione dell'unità subordinata al ricoprimento*. Esiste cioè una famiglia $\{\varphi_\kappa\}_{\kappa\in K}$ di funzioni lisce a supporto compatto $\varphi_\kappa\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ con le proprietà seguenti.

(i) Per ogni $\kappa \in K$ esiste un indice $\iota \in I$ tale che $\operatorname{supp}\varphi_\kappa \subset U_\iota$.

(ii) Ogni punto $x \in U$ ha un intorno su cui tutte le funzioni φ_κ, salvo un numero finito, sono identicamente nulle.

(iii) Per ogni $x \in U$ si ha $\sum_{\kappa\in K} \varphi_\kappa(x) = 1$.

Letture per approfondire

[1] M. Salah Baouendi, Peter Ebenfelt, Linda Preiss Rothschild, *Real submanifolds in complex space and their mappings*, Princeton Mathematical Series, vol. 47, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp., ISBN 0-691-00498-6, MR 1668103.

[2] Albert Boggess, *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, xviii+364 pp., ISBN 0-8493-7152-X, MR 1211412.

[3] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 46, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, xx+372 pp., ISBN 0-7923-0234-6, MR 1111477.

[4] John P. D'Angelo, *Several complex variables and the geometry of real hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993, xiv+272 pp., ISBN 0-8493-8272-6, MR 1224231.

[5] Robert C. Gunning, Hugo Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, xiv+317 pp., MR 0180696.

[6] Lars Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, 3ª ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, xii+254 pp., ISBN 0-444-88446-7, MR 1045639.

[7] Steven G. Krantz, *Function theory of several complex variables*, 2ª ed., The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992, xvi+557 pp., ISBN 0-534-17088-9, MR 1162310.

[8] Jiří Lebl, *Guide to Cultivating Complex Analysis, Working the Complex Field*, `https://www.jirka.org/ca/` oppure `https://jirilebl.github.io/ca/`.

[9] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3ª ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976, x+342 pp., MR 0385023.

[10] Walter Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 241, Springer-Verlag, New York, 1980, xiii+436 pp., ISBN 0-387-90514-6, MR 601594.

[11] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, 3ª ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987, xiv+416 pp., ISBN 0-07-054234-1, MR 924157.

[12] Hassler Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1972, xii+399 pp., MR 0387634.

[13] Oscar Zariski, Pierre Samuel, *Commutative algebra, Volume I*, The University Series in Higher Mathematics, con la collaborazione di I. S. Cohen, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958, xi+329 pp., MR 0090581.

Indice analitico

a supporto compatto, 182
abeliano, 202
ambiente, 165
analitica complessa, 5
analitica reale, 91
anello, 202
anello commutativo, 202
anello delle funzioni olomorfe, 22
anello locale, 164
aperto con frontiera liscia, 45
applicazione
    biolomorfa, 27
    propria, 27
applicazione olomorfa, 24
applicazione propria, 27
approssimazione della delta, 73
armonica, 67
atlante, 194
automorfismo, 31

bidisco, 10
bigrado, 122
biolomorfa, 27
biolomorficamente equivalenti, 27
biolomorfismo, 27
bordo di una sottovarietà, 194

cambio di carta, 195
cammino, 183
cammino chiuso, 183
cammino semplice, 183
campo, 203
campo vettoriale, 47
carte, 194
centro di un polidisco, 10
ciclo, 184
codimensione, 165
coefficiente direttivo, 203
complessificazione, 91, 93
complessificazione di un'ipersuperficie reale, 99
complesso coniugato, 5
componenti irriducibili, 174
condizioni di compatibilità, 116
congettura del jacobiano, 38
coniugata armonica, 186
convergenza
    uniforme assoluta, 16
convergenza delle serie di potenze, 15
convergenza normale, 187
convergenza uniforme assoluta, 16
convesso, 40, 48, 209
    in senso geometrico, 40, 52, 209
    rispetto a $\mathcal{F}$, 78
coomologia, 122
coomologia di de Rham, 200
coordinate antiolomorfe, 10
coordinate normali, 100
coordinate olomorfe, 10
Cousin I, 134
Cousin II, 136
curva, 183
cuspide, 165

dati del problema di Cousin I, 134
dati del problema di Cousin II, 137
debolmente pseudoconvesso, 56
derivabile in senso complesso, 5
derivata esterna, 199
derivazione sotto il segno di integrale, 207
determinante jacobiano, 25
determinante jacobiano olomorfo, 25
diagonale, 93
dimensione, 166
dimensione in un punto regolare, 165
dimensione pura, 166
disco analitico, 28
disco analitico chiuso, 28
disco unitario, 7
distanza euclidea, 5
disuguaglianza della media, 69
dominio, 4
dominio a fattorizzazione unica, 162, 204
dominio a ideali principali, 161, 203
dominio circolare, 32
dominio completo di Reinhardt, 19, 89
dominio con frontiera liscia, 45
dominio d'integrità, 22, 148, 202
dominio di convergenza, 19
dominio di Fatou–Bieberbach, 38
dominio di olomorfia, 39
dominio di Reinhardt, 19
    completo, 19, 89
    logaritmicamente convesso, 89

elemento invertibile, 150, 203
epigrafico, 209
equazioni di Cauchy–Riemann, 6, 11
esterno, 184

fascio strutturale, 164
fenomeno di Hartogs, 41, 119
fibrato tangente, 47
figura di Hartogs, 40
forma $\bar{\partial}$-chiusa, 122
forma $\bar{\partial}$-esatta, 122
forma chiusa, 122
forma di Levi, 56
forma di tipo $(0,1)$, 116
forma di tipo (p,q), 122
forma esatta, 122
formula di Cauchy, 6, 13, 183
formula integrale di Bochner–Martinelli, 139
formula integrale di Cauchy, 6, 183
    in più variabili, 13
formula integrale di Cauchy generalizzata, 114
formula integrale di Cauchy–Pompeiu, 114
formule di Girard–Newton, 153
fortemente convesso, 48
fortemente pseudoconvesso, 56
frontiera di classe C^1 a tratti, 183
frontiera di classe C^k, 45
frontiera distinta, 13
frontiera liscia, 45
funzione
    antiolomorfa, 23
    di classe C^k, 5
    liscia, 5
    localmente limitata, 11
funzione affine reale, 209
funzione convessa, 67, 209
funzione CR, 97
funzione CR liscia, 97
funzione definente, 45
funzione di esaustione, 79
funzione di taglio, 105
funzione di taglio liscia, 210
funzione discriminante, 158
funzione misurabile, 205
funzione non misurabile, 205
funzione semplice, 205
funzione simmetrica, 153
funzioni definenti, 164
funzioni simmetriche elementari, 153

gallina
    immaginaria, 5
geometricamente convesso, 40, 52, 209
geometricamente distinti, 157
geometricamente unico, 157
germe di un insieme, 149
germe di un polinomio di Weierstrass, 150
germe di una funzione, 148
grado, 203
grado di un polinomio, 5
grande teorema di Picard, 190
gruppi di coomologia di Dolbeault, 122
gruppo, 202
gruppo degli automorfismi, 31
gruppo di Heisenberg, 59

hessiana, 49
    complessa, 56
hessiana complessa, 56

ideale, 161, 203
ideale finitamente generato, 203
ideale generato da S, 203
ideale massimale, 161
ideale primo, 173
ideale principale, 161, 203
ideale proprio, 161
identità di Newton, 153
indice di avvolgimento, 184
infinitamente differenziabile, 5
insieme analitico, 36, 163
insieme di sottolivello, 79
insieme discriminante, 158, 174
insiemi misurabili, 205
integrabile in L^1, 205
intera, 185
interno, 184
interno relativo, 210
intersezione completa, 169
inviluppo, 78
inviluppo convesso, 209
inviluppo di una figura di Hartogs, 41
inviluppo olomorfo, 86
inviluppo polinomiale, 87
iperpiano, 209
iperpiano affine, 129
ipersuperficie, 45
    analitica reale, 95
    complessificazione, 99
    di classe C^k, 45

reale, 45
regolare, 45
ipersuperficie analitica reale, 95
ipersuperficie di classe C^k, 45
ipersuperficie di Lewy, 59
ipersuperficie reale, 45
ipersuperficie regolare, 45
ipervarietà, 168
irriducibile, 162, 173, 204
isomorfismo, 202, 203
isomorfismo di anelli, 203
isomorfismo di gruppi, 202

jacobiano reale, 25

Kontinuitätssatz
prima versione, 43
seconda versione, 78

laplaciano, 67
lemma di Diederich–Fornæss, 180
lemma di Dolbeault, 126
lemma di Dolbeault–Grothendieck, 126
lemma di Fatou, 206
lemma di Gauss, 204
lemma di Narasimhan, 63
lemma di Oka, 86
lemma di Poincaré per il $\bar{\partial}$, 126
lemma di Schwarz, 21, 186
liscia, di classe C^∞, 45
localmente limitata in U, 34
logaritmicamente convesso, 89

matrice jacobiana, 25
matrice jacobiana olomorfa, 25
meromorfa, 22, 188
misura completa, 207
misura di conteggio, 206
misura di Lebesgue, 205
modulo, 5
mollificatore, 73
molteplicità di uno zero, 187
monico, 203

noetheriano, 161, 203
norma dell'estremo superiore, 9
norma euclidea, 10
notazione di Landau, 50
notazione multiindice, 15
nucleo di Bergman, 143
disco unitario, 144
nucleo di Bochner–Martinelli, 139
nucleo di Cauchy, 9
nucleo di Poisson, 68
nucleo di Szegő, 146
disco unitario, 144
Nullstellensatz, 164, 169

olomorfa, 5, 11
olomorficamente convesso, 86
omeomorfismo, 27
omogeneo, 31
omomorfismo, 202, 203
omomorfismo di anelli, 203
omomorfismo di gruppi, 202
operatori di Wirtinger, 6, 11
ordine di annullamento, 150
ordine di un polo, 188
ordine di uno zero, 187
orientata positivamente, 183
orientazione, 195
orientazione indotta, 195

palla, 10
palla unitaria, 11
parametrizzazione, 194
parametrizzazione locale, 194
parte immaginaria, 5
parte omogenea, 31, 92
parte omogenea di grado m, 31, 92
parte principale, 189
parte reale, 5
partizione dell'unità subordinata al ricoprimento, 210
partizione liscia dell'unità, 210
piatta nel senso di Levi, 66
piccolo teorema di Picard, 190
PID, 161, 203
pluriarmonica, 71
plurisubarmonica, 72
plush, 72
polarizzazione, 94
poli, 22
polidisco, 10
polidisco eventualmente illimitato, 124
polidisco unitario, 10
polinomio di Weierstrass, 150
poliraggio di un polidisco, 10
polo, 188
primo problema di Cousin, 134
principio del barattolo di pomodori, 64

principio del massimo, 7, 20, 186
    funzioni plurisubarmoniche, 72
    funzioni subarmoniche, 70
    sottovarietà, 176
principio del massimo modulo, 7, 186
principio dell'argomento, 189
principio di continuità
    prima versione, 43
    seconda versione, 78
principio di riflessione di Schwarz, 191
problema del $\bar{\partial}$, 116
problema del $\bar{\partial}$ non omogeneo, 116
problema di Dirichlet, 68
problema di Levi, 64, 86
    domini completi di Reinhardt, 89
problema di Poincaré, 22
prodotto scalare euclideo, 10
prolungamento analitico, 22, 191
proprietà della media, 69
proprietà riproducente, 143
pseudoconvesso, 56, 79
pseudoconvesso nel senso di Hartogs, 79
pseudoconvesso nel senso di Levi, 56
psh, 72
punto di indeterminazione, 22
punto di picco, 65
punto esposto, 209
punto estremo, 209
punto regolare, 36, 165
punto semplice, 165
punto singolare, 36, 165

quasi ovunque, 206

radicale, 164
raggio di un polidisco, 10
regola della catena complessa, 23
regola della catena per applicazioni olomorfe, 25
regola di Leibniz, 122, 200
residuo, 189
retta complessa, 129
ricoprimento aperto, 210
riducibile, 173

secondo problema di Cousin, 137
semicontinua superiormente, 67
semispazio chiuso, 209
semplicemente connesso, 186
serie di Laurent, 18, 188
serie di potenze
    convergenza, 15
serie geometrica in più variabili, 16
sezione, 47
sfera di Riemann, 188
σ-additiva, 205
σ-algebra, 205
σ-finita, 207
simmetrico rispetto all'asse reale, 191
singolarità eliminabile, 188
singolarità essenziale, 188
singolarità isolata, 188
soluzione del problema di Cousin I, 134
soluzione del problema di Cousin II, 137
somma di potenze, 152
sottogruppo, 202
sottospazio affine, 129
sottovarietà, 194
    complessa, 36, 165
    regolare, 194
sottovarietà analitica, 36, 163
sottovarietà analitica complessa, 163
sottovarietà complessa, 163
sottovarietà con bordo, 194
sottovarietà differenziabile complessa, 36, 165
sottovarietà propria, 163
sottovarietà regolare, 194
sottovarietà regolare con bordo, 194
sovradeterminato, 102
spazio di Bergman, 142
spazio di Hardy, 146
spazio di misura, 205
spazio euclideo, 10
spazio euclideo complesso, 10
spazio tangente, 46
spazio tangente complessificato, 53
spazio tangente complesso, 54
stime di Cauchy, 9, 18, 185
strettamente convesso, 48
strettamente pseudoconvesso, 56
subarmonica, 67
supporto, 182

teorema dei residui, 189
teorema del prodotto di Weierstrass, 192
teorema del quarto di Koebe, 192
teorema dell'applicazione aperta, 185
teorema della base di Hilbert, 203
teorema della convergenza dominata, 206

teorema della convergenza monotona, 206
teorema della curva di Jordan, 184
teorema della rappresentazione conforme di Riemann, 27, 186
teorema delle funzioni implicite, 26
teorema delle funzioni implicite olomorfe, 26
teorema di approssimazione di Baouendi–Trèves, 103
teorema di approssimazione di Runge, 190
teorema di Behnke–Stein, 82, 89
teorema di Cartan–Thullen, 87
teorema di Casorati–Weierstrass, 190
teorema di divisione di Weierstrass, 155
teorema di fattorizzazione di Weierstrass, 192
teorema di Fubini, 207
teorema di Green, 184
teorema di Hartogs–Bochner, 111
teorema di Hurwitz, 21, 188
teorema di identità, 20, 185
teorema di Koebe del quarto, 192
teorema di Liouville, 185
teorema di Mergelyan, 191
teorema di Mittag-Leffler, 192
teorema di monodromia, 22, 191
teorema di Montel, 21, 187
teorema di parametrizzazione locale, 174
teorema di preparazione di Weierstrass, 150
teorema di prolungamento di Lewy, 110
teorema di prolungamento di Riemann, 34, 188
teorema di Puiseux, 175
teorema di Radó, 76
teorema di Rothstein, 27
teorema di Rouché, 190
teorema di Severi, 101, 120
teorema di Stokes, 200
teorema di Tonelli, 207
teorema di unicità di Cartan, 31
teorema fondamentale dei polinomi simmetrici, 153
teorema fondamentale dell'algebra, 190
teorema generale di Stokes, 200
triangolo di Hartogs, 42

UFD, 162, 204

varietà, 163
varietà analitica complessa, 163
varietà complessa, 163
varietà di Segre, 178
varietà differenziabile, 194
    complessa, 165
varietà differenziabile complessa, 165
varietà locale, 163
vettore, 46
vettore tangente, 46
vettori antiolomorfi, 53
vettori olomorfi, 53

Elenco delle notazioni

Simbolo	Significato	Pagine
i	$\sqrt{-1}$	4
$\Re z$	parte reale	5
$\Im z$	parte immaginaria	5
$\mathbb{C}$	numeri complessi	4
$\mathbb{R}$	numeri reali	4
$\mathbb{Z}$	numeri interi	4
$\mathbb{N}$	numeri naturali $\{1, 2, 3, \ldots\}$	4
$\bar{z}$	complesso coniugato	5
$\lvert z\rvert$	modulo	5
$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$	operatori di Wirtinger	6, 11
$\mathbb{D}$	disco unitario	7
∇^2	laplaciano	7
$\Delta_\rho(a)$	disco, polidisco	8, 10
$\equiv$	identicamente uguale, uguale in ogni punto	7, 182
dz, dz_j	$dz = dx + i\,dy$, $dz_j = dx_j + i\,dy_j$	7, 12
$d\bar{z}$, $d\bar{z}_j$	$d\bar{z} = dx - i\,dy$, $d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$	12
$\lVert f\rVert_K$	norma dell'estremo superiore su K	9
$\langle z, w\rangle$	prodotto scalare euclideo	10
$\lVert z\rVert$	norma euclidea	10
$B_\rho(a)$	palla	10
$\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_n$	palla unitaria	11
$\mathbb{N}_0$	interi non negativi $\{0, 1, 2, \ldots\}$	15
z^α	$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}$	15
$\lvert\alpha\rvert$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$	15
$\alpha!$	$\alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$	15
$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial z^\alpha}$	$\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial z_2^{\alpha_2}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}$	15
$\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$	serie di potenze in notazione multiindice	15
dz	$dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n$	15
$\mathcal{O}(U)$	anello delle funzioni olomorfe su U	22
$f \circ g$	composizione, $p \mapsto f\big(g(p)\big)$	24, 182
Df, $Df(a)$	matrice jacobiana o differenziale (in a)	25, 48, 54
$D_{\mathbb{R}} f$, $D_{\mathbb{R}} f(a)$	matrice jacobiana reale o differenziale reale (in a)	25, 48
$D_{\mathbb{C}} f$, $D_{\mathbb{C}} f(a)$	complessificazione del differenziale reale	53
f^{-1}	funzione inversa	27

Simbolo	Significato	Pagine
$f^{-1}(S)$	controimmagine di un insieme, $\{q : f(q) \in S\}$	27
$\subset\subset$	sottoinsieme compatto o relativamente compatto	27
S^{2n-1}	sfera unitaria in $\mathbb{C}^n$, $S^{2n-1} = \partial\mathbb{B}_n$	28
C^k	differenziabile k volte con derivate continue	5, 45
C^∞	infinitamente differenziabile	5, 45
C^ω	analitica reale	91
$T_p\mathbb{R}^n$, T_pM	spazio tangente	46
$T\mathbb{R}^n$, TM	fibrato tangente	47
$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\vert_p$	vettore tangente	46
∇r	gradiente di r	49
$O(\ell)$	notazione di Landau (O grande)	50
$\mathbb{C}T_p\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}T_pM$	spazio tangente complessificato	53
$T_p^{(1,0)}\mathbb{R}^n$, $T_p^{(1,0)}M$	vettori tangenti olomorfi	53
$T_p^{(0,1)}\mathbb{R}^n$, $T_p^{(0,1)}M$	vettori tangenti antiolomorfi	53
$\mathcal{L}(X_p, X_p)$	forma di Levi	56
v^*, A^*	trasposta coniugata	57
$P_r(\theta)$	nucleo di Poisson del disco unitario	68
$f * g$	convoluzione	74
dV, $dV(w)$	misura di volume, forma di volume euclidea	74, 139
dA, $dA(w)$	forma di area, $dA = dx \wedge dy$	114
$d\psi$	derivata esterna	116, 199
$\partial\psi$	parte olomorfa della derivata esterna	116, 122
$\bar\partial\psi$	parte antiolomorfa della derivata esterna	116, 122
$\widehat{K}$, $\widehat{K}_{\mathcal{F}}$	inviluppo di K rispetto a $\mathcal{F}$	78
$\mathrm{dist}(x, y)$	distanza fra due punti, fra due insiemi o fra un punto e un insieme	83
$\widehat{K}_U$	inviluppo olomorfo di K	86
δ_j^k	delta di Kronecker, $\delta_j^j = 1$ e $\delta_j^k = 0$ se $j \neq k$	12
$[v]^2$	$v_1^2 + \cdots + v_n^2$	103
$\widehat{dx_j}$	1-forma omessa, $dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge dx_3 = dx_1 \wedge dx_3$	139
$A^2(U)$	spazio di Bergman, $\mathcal{O}(U) \cap L^2(U)$	142
$L^2(U)$	funzioni a quadrato integrabile	142
$\Vert f\Vert_{A^2(U)}$, $\Vert f\Vert_{L^2(U)}$	norma in L^2	142
$\langle f, g\rangle$	prodotto scalare in L^2	142
$H^2(\partial U)$	spazio di Hardy	146
(f, p)	germe di f in p	148

Simbolo	Significato	Pagine
(A, p)	germe di un insieme A in p	149
${}_n\mathcal{O}_p$, $\mathcal{O}_p$	anello dei germi di funzioni olomorfe in p	148
$\operatorname{ord}_a f$	ordine di annullamento di f in a	150
$\mathcal{O}(U)[z_n]$	polinomi in z_n a coefficienti in $\mathcal{O}(U)$	150
$\mathcal{O}_0[z_n]$	polinomi in z_n a coefficienti in $\mathcal{O}_0$	150
Z_f	insieme degli zeri di f, ossia $f^{-1}(0)$	149, 163
(f), $(f_1, \ldots, f_n)$	ideale generato da f o da $f_1, \ldots, f_n$	161, 203
$I_p(X)$	ideale dei germi in p che si annullano su X	163
$V_p(I)$	insieme degli zeri comuni dei germi di I	163
X_{reg}	punti regolari di X	165
X_{sing}	punti singolari di X	165
$\dim_p X$	dimensione di X in p	166
$\dim X$	dimensione di X	166
U^*	coniugato di un dominio	143, 178
$\Sigma_q(U, r)$, Σ_q	varietà di Segre in q	178
$K_U(z, \bar{\zeta})$	nucleo di Bergman di U	143
$S_U(z, \bar{\zeta})$	nucleo di Szegő di U	146
$\int_\gamma f(z)\, dz$	integrale lungo un cammino	183
Γ_f	grafico di f	165
$\omega \wedge \eta$	prodotto esterno di forme differenziali	197
$\langle \omega, v \rangle$	accoppiamento fra forma e vettore (valore di ω su v)	12, 196
∂X	frontiera topologica di X, oppure bordo di una varietà	182, 194
$f\colon X \to Y$	funzione da X a Y	182
$x \mapsto F(x)$	funzione di x	182
$f\|_S$	restrizione di f a S	182
$A \setminus B$	differenza insiemistica	182
$\overline{S}$	chiusura topologica di S	182
X^c	complementare di X	182
S°	interno di S	182
$X \stackrel{\text{def}}{=} Y$	si pone X uguale a Y per definizione	182
$H^{(p,q)}(U)$	gruppi di coomologia di Dolbeault	122