Victor Guillemin e Alan Pollack

Topologia differenziale

Traduzione italiana con errata integrati

Capitoli I–IV, appendici e apparati

Con un capitolo aggiuntivo di soluzioni

Nota editoriale

Traduzione della scansione fornita di *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974. Sono inclusi prefazione, nota allo studente, tavola dei simboli, quattro capitoli, due appendici, bibliografia e indice analitico. Gli errata forniti, identificati dall'intestazione *MATH 4220/6220 Fall 2011*, sono integrati nei punti pertinenti.

Le ulteriori correzioni e precisazioni matematiche sono segnalate separatamente in note e nel registro editoriale. Il capitolo finale delle soluzioni è un'aggiunta redatta per questa edizione: non fa parte del testo degli autori e non è un manuale ufficiale di soluzioni.

I rinvii alle pagine del testo, dell'indice e della bibliografia conservano la paginazione originale, indicata nel corpo della traduzione. La paginazione del presente PDF è autonoma. Le figure sono riprodotte dalla scansione con didascalie italiane; le scritte interne alle immagini restano prevalentemente in inglese. Le annotazioni manoscritte della scansione non fanno parte della traduzione.

Indice

Prefazione **iii**

Una parola franca allo studente **v**

Tavola dei simboli **vi**

Capitolo I. Varietà e applicazioni lisce **1**

§1. Definizioni 1
§2. Derivate e spazi tangenti 7
§3. Il teorema della funzione inversa e le immersioni 12
§4. Sommersioni 18
§5. Trasversalità 25
§6. Omotopia e stabilità 31
§7. Il teorema di Sard e le funzioni di Morse 36
§8. Embedding di varietà nello spazio euclideo 44

Capitolo II. Trasversalità e intersezione **51**

§1. Varietà con bordo 51
§2. Varietà unidimensionali e alcune conseguenze 57
§3. Trasversalità 60
§4. Teoria dell'intersezione modulo 2 66
§5. Numeri di avvolgimento e separazione di Jordan–Brouwer 72
§6. Il teorema di Borsuk–Ulam 77

Capitolo III. Teoria dell'intersezione orientata **79**

§1. Motivazione 79
§2. Orientazione 80
§3. Numero d'intersezione orientato 88
§4. Teoria dei punti fissi di Lefschetz 95
§5. Campi vettoriali e teorema di Poincaré–Hopf 103
§6. Il teorema del grado di Hopf 109
§7. Caratteristica di Eulero e triangolazioni 113

Capitolo IV. Integrazione sulle varietà **115**

§1. Introduzione 115
§2. Algebra esterna 117
§3. Forme differenziali 123
§4. Integrazione sulle varietà 125
§5. Derivata esterna 131
§6. Coomologia mediante forme 134
§7. Il teorema di Stokes 137

§8. Integrazione e applicazioni 140
§9. Il teorema di Gauss–Bonnet 144

Appendice 1. Misura nulla e teorema di Sard **149**

Appendice 2. Classificazione delle varietà compatte unidimensionali **153**

Bibliografia **156**

Indice analitico **159**

Registro delle correzioni e delle scelte editoriali **165**
Capitolo II: errata e interventi ulteriori 168
Registro delle correzioni: capitolo III 169
Capitolo IV: errata e interventi ulteriori 171
Appendici e apparati: interventi ulteriori 173

Capitolo finale. Soluzioni degli esercizi **174**
Soluzioni degli esercizi del capitolo I 174
Soluzioni del capitolo II 185
Soluzioni del capitolo III 193
Soluzioni del capitolo IV 203
Soluzioni dei problemi e degli esercizi delle appendici 213

Prefazione

Pagina ix dell'originale

L'intento di questo libro è offrire un approccio elementare e intuitivo alla topologia differenziale. Gli argomenti trattati vengono oggi generalmente discussi nei corsi avanzati di topologia algebrica, come conseguenze dei grandi apparati costituiti dai funtori di omologia e coomologia. Per esempio, il teorema di Borsuk–Ulam scaturisce dalla struttura moltiplicativa dell'anello di coomologia dello spazio proiettivo; il teorema di Lefschetz deriva dalla dualità di Poincaré e dal teorema di Künneth; il teorema di separazione di Jordan–Brouwer segue dalla dualità di Alexander; e così via. Abbiamo due obiezioni a questo approccio basato sui grandi apparati: nasconde l'elegante contenuto intuitivo della materia e dà allo studente l'impressione che soltanto le grandi macchine possano fare matematica. Abbiamo cercato di fare dei risultati appena citati e di altri simili, come il teorema di Gauss–Bonnet, il teorema del grado e il teorema di Hopf sui campi vettoriali, il tema principale del libro, anziché un assortimento di esempi interessanti. Nel farlo abbiamo abbandonato del tutto la topologia algebrica. Il nostro punto di vista è che questi teoremi appartengano a un ambito molto più geometrico della topologia, la teoria delle intersezioni. Naturalmente, la teoria delle intersezioni, sviluppata correttamente, richiede un proprio apparato: il teorema di trasversalità. Dobbiamo confessare di sentirci esposti all'accusa di avere sostituito una macchina con un'altra. Forse: *chacun à son goût*. Ci sembra che gli argomenti di trasversalità possano essere visualizzati dallo studente, cosa che non riteniamo si possa onestamente dire del funtore di omologia singolare.

Pagina x dell'originale

Il libro è adatto a un corso del primo anno di studi universitari avanzati, svolto con un ritmo disteso. Abbiamo anche tenuto con successo un corso basato sul libro per studenti del terzo e quarto anno universitario. Per questi ultimi suggeriamo di omettere alcuni argomenti, per esempio la discussione della teoria di de Rham, e di porre l'accento sulla teoria delle intersezioni modulo 2, presentando alcuni temi del capitolo III modulo 2 anziché con le orientazioni. (Il lettore noterà, incidentalmente, che la sezione sulla teoria di de Rham è completamente indipendente dal resto del libro. Abbiamo evitato di usarla persino nella dimostrazione della formula del grado nel capitolo IV, §8. Dimostriamo questa formula mediante il teorema di Stokes, anziché mediante la teoria della classe di coomologia di grado massimo, come nella trattazione usuale.)

Il libro è diviso in quattro capitoli. Il capitolo I contiene la teoria elementare delle varietà e delle applicazioni lisce. Definiamo le varietà come sottoinsiemi di spazi euclidei. Ciò ha il vantaggio di farle apparire come oggetti già familiari allo studente che abbia studiato il calcolo in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: sono semplicemente curve e superfici generalizzate a dimensioni superiori. Evitiamo inoltre di confondere fin dall'inizio lo studente con l'apparato astratto di carte e atlanti. L'obiezione più seria al lavorare nello spazio euclideo è che ciò oscura la differenza fra le proprietà intrinseche della varietà e le proprietà del suo embedding. Ci siamo sforzati di rendere lo studente consapevole di questa distinzione, ma non abbiamo esitato a usare lo spazio ambiente per rendere più comprensibili le dimostrazioni. (Si veda, per esempio, l'uso del teorema dell'intorno tubolare nel capitolo II, §3.) Per dare coesione al materiale elementare, abbiamo cercato di mettere in risalto il carattere «stabile» e «generico» delle nostre definizioni; lasciamo al giudizio del lettore se ciò riesca a rendere più gradevoli i fondamenti.

Le ultime due sezioni del capitolo I riguardano il teorema di Sard e alcune applicazioni. L'uso più importante che facciamo di Sard è nella dimostrazione del teorema di trasversalità nel capitolo II; prima, però, lo usiamo per dedurre l'esistenza di funzioni di Morse e stabilire il teorema di embedding di Whitney. (A proposito, può sembrare inutile dimostrare il teorema di embedding, dato che le nostre varietà si trovano già nello spazio euclideo. Riteniamo semplicemente di aver spostato l'accento: esiste una varietà di dimensione k così patologica che non se ne possa trovare

una copia diffeomorfa in uno spazio euclideo di dimensione prefissata N? Risposta: no, purché $N \geq 2k + 1$.)

Il capitolo II comincia introducendo le varietà con bordo. Classifichiamo le varietà unidimensionali e presentiamo la dimostrazione di Hirsch del teorema del punto fisso di Brouwer. Deriviamo poi il teorema di trasversalità, da cui segue che le intersezioni trasversali sono generiche. La trasversalità ci permette di definire numeri d'intersezione, e la classificazione delle varietà unidimensionali mostra che essi sono invarianti per omotopia. Inizialmente sviluppiamo la teoria delle intersezioni modulo 2, affinché lo studente possa familiarizzare con la topologia senza preoccuparsi delle orientazioni. Inoltre, la teoria modulo 2 è l'ambiente naturale per gli ultimi due teoremi del capitolo:

Pagina xi dell'originale

il teorema di separazione di Jordan–Brouwer e il teorema di Borsuk–Ulam. In ciascuno degli ultimi tre capitoli abbiamo incluso una sezione in cui lo studente dimostra personalmente teoremi importanti, con una guida dettagliata del testo. Il teorema di separazione di Jordan–Brouwer è il primo di questi. Abbiamo constatato che i nostri studenti hanno accolto con entusiasmo questa scelta, ricavando una vera soddisfazione dall'applicare le tecniche apprese per estendere significativamente la teoria.

Nel capitolo III ricostruiamo la teoria delle intersezioni includendo le orientazioni. La caratteristica di Eulero viene definita come numero di autointersezione, e si dimostra che si annulla nelle dimensioni dispari. Si dimostra poi una forma elementare del teorema del punto fisso di Lefschetz e se ne illustra l'uso ricavando informalmente le caratteristiche di Eulero delle superfici compatte. Tradotto nel linguaggio dei campi vettoriali, Lefschetz implica il teorema degli indici di Poincaré–Hopf. In una sezione di esercizi che usa gli strumenti delle discussioni precedenti, lo studente dimostra il teorema del grado di Hopf e ricava un viceversa del teorema degli indici. Infine, mettiamo in relazione la caratteristica di Eulero differenziale e quella combinatoria.

Il capitolo IV riguarda le forme e l'integrazione. Il risultato centrale è il teorema di Stokes, trattato essenzialmente come fa M. Spivak in *Calculus on Manifolds*. Stokes viene usato per dimostrare un teorema elementare, ma a nostro parere assai sottovalutato: la formula del grado che mette in relazione integrazione e applicazioni. Infine, da questa formula ricaviamo il teorema di Gauss–Bonnet per ipersuperfici nello spazio euclideo. Il capitolo IV include anche una sezione di esercizi in cui lo studente può costruire la coomologia di de Rham e dimostrarne l'invarianza per omotopia. Benché altri problemi colleghino la coomologia all'integrazione e alla teoria delle intersezioni, l'argomento è trattato essenzialmente come un'interessante digressione rispetto alla discussione principale. (In particolare, la coomologia non viene richiamata altrove nel testo.)

L'ispirazione originaria per questo libro è stata il bellissimo *Topology from the Differential Viewpoint* di J. Milnor. Benché nella forma attuale il nostro libro comprenda più argomenti di quello di Milnor, il nostro debito nei suoi confronti rimane evidente.

Siamo debitori a Dan Quillen e John Mather dell'elegante formulazione del teorema di trasversalità data nel capitolo II, §3. Ringraziamo inoltre Jim King, Isadore Singer, Frank Warner e Mike Cowan per le preziose osservazioni critiche; Dennis Sullivan, Shlomo Sternberg e Jim Munkres per le molte conversazioni utili; e Rena Themistocles e Phyllis Ruby per aver trasformato scarabocchi illeggibili in un manoscritto dattiloscritto. In particolare, siamo debitori a Barret O'Neill di un'inestimabile e dettagliata revisione della prima stesura.

Cambridge, Massachusetts

Victor Guillemin
Alan Pollack

Una parola franca allo studente

Pagina xiii dell'originale

Questo libro è scritto per studenti di matematica che abbiano seguito un anno di analisi e un semestre di algebra lineare. La preparazione in analisi dovrebbe comprendere una certa familiarità con i concetti topologici fondamentali nello spazio euclideo: apertura, connessione, compattezza e così via. Prendiamo in prestito dall'analisi due teoremi che alcuni lettori potrebbero non aver studiato: il teorema della funzione inversa, usato in tutto il testo, e la formula del cambiamento di variabili per gli integrali multipli, necessaria soltanto nel capitolo IV. Un ottimo riferimento per questi risultati è Spivak [2], rispettivamente alle pagine 34 e 67.

Gli esercizi non sono soltanto indispensabili per capire il materiale: il testo vi fa liberamente riferimento. Quelli ritenuti particolarmente fondamentali, inclusi quelli richiamati più avanti, sono indicati con asterischi (*). (In particolare, gli asterischi non sono segnali per avvertire lo studente che il problema è difficile.)

Ecco alcuni termini usati, ma non definiti, nel testo.

Per applicazioni $f : X \to Y$ fra due insiemi: *iniettiva* significa che punti distinti hanno immagini distinte; *suriettiva* significa che l'immagine è tutto Y; *biiettiva* significa iniettiva e suriettiva.

Una famiglia di insiemi $\{U_\alpha\}$ *ricopre* un insieme X se $X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Un *ricoprimento aperto* di X è una famiglia di aperti $\{U_\alpha\}$ che ricopre X. Un ricoprimento $\{V_\beta\}$ è un *raffinamento* di un altro, $\{U_\alpha\}$, se ogni V_β è contenuto in almeno un U_α. Per il *secondo assioma di numerabilità*, ogni ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ in $\mathbb{R}^n$ ha un raffinamento numerabile. (*Dimostrazione:* considerate la

Pagina xiv dell'originale

famiglia di tutte le palle aperte contenute in qualche U_α, con raggio razionale e centro avente soltanto coordinate razionali.)

Se $X \subset \mathbb{R}^n$, un sottoinsieme V di X è *aperto relativo* in X se si può scrivere come intersezione di X con un aperto di $\mathbb{R}^n$: $V = \widehat{V} \cap X$, con $\widehat{V}$ aperto in $\mathbb{R}^n$. Se $Z \subset X$, possiamo anche parlare di ricoprimenti aperti di Z in X, intendendo ricoprimenti di Z mediante aperti relativi di X. Ogni ricoprimento di questo tipo si può scrivere come intersezione di X con un ricoprimento di Z mediante aperti di $\mathbb{R}^n$. Poiché il secondo assioma di numerabilità vale in $\mathbb{R}^n$, ogni ricoprimento aperto di Z relativo a X ha un raffinamento numerabile. (Dati gli U_α relativamente aperti in X, scrivete $U_\alpha = \widehat{U}_\alpha \cap X$. Sia poi $\widehat{V}_\beta$ un raffinamento numerabile di $\{\widehat{U}_\alpha\}$ in $\mathbb{R}^n$, e definite $V_\beta = \widehat{V}_\beta \cap X$.)

Tavola dei simboli

I numeri rinviano alle pagine dell'originale, indicate nel testo tradotto. Si conserva l'ordine della tavola originale (pp. xv–xvi).

Simbolo	**Significato**	**Pagina**
dim	dimensione	4
S^n	n-sfera	4
$\|\ \|$	valore assoluto, norma	4
$\times$	prodotto	4, 7
Δ	diagonale	7
grafico( )	grafico di un'applicazione	7
df_x	derivata di f in x	8
$T_x(X)$	spazio tangente a X in x	9
$f^{-1}(\ )$	controimmagine mediante f	21, 27
$O(n)$	gruppo ortogonale	22
$\pitchfork$	è trasversale a	28
$\sim$	è omotopa a	33
$T(X)$	fibrato tangente	50
df	applicazione derivata fra fibrati tangenti	50
H^k	semispazio superiore in $\mathbb{R}^k$	57
∂	bordo	57
Int	interno	57
$H_x(X)$	semispazio superiore in $T_x(X)$	63
$\vec{n}$	vettore normale	64, 106
Y^ϵ	ϵ-intorno	69
$N(Y)$	fibrato normale di Y in $\mathbb{R}^n$	71
$N(Z;Y)$	fibrato normale relativo di Z in Y	76
$\#$	numero di punti	77
I_2	numero d'intersezione modulo 2	78, 79
$\deg_2$	grado modulo 2	80
W_2	numero di avvolgimento modulo 2	86, 88
n_x	vettore normale in x	98
$-X$	X con orientazione opposta	99
X_0, X_1	componenti del bordo di $I \times X$	99
I	numero d'intersezione orientato	107, 112, 113
deg	grado di un'applicazione	108
χ	caratteristica di Eulero	116
L	numero globale di Lefschetz	119
L_x	numero locale di Lefschetz	121
$\vec{v}$	campo vettoriale	132
ind	indice di un campo vettoriale	133, 134
$\phi^*\vec{v}$	pullback di un campo vettoriale	134
grad	gradiente	140, 177
W	numero di avvolgimento	144
arg	argomento	151
V^p	prodotto cartesiano di p copie di V	153
$\mathcal{T}^p$	spazio dei p-tensori	154
$\otimes$	prodotto tensoriale	154
det	determinante	154
ϕ_I	vettori di base per i p-tensori	154
S_p	gruppo delle permutazioni di $\{1, \ldots, p\}$	155

Simbolo	Significato	Pagina
$(-1)^\pi$	segno della permutazione π	155
T^π	tensore T permutato mediante π	155
Alt	operatore di alternazione	155
Λ^p	spazio dei p-tensori alternanti	156
$\wedge$	prodotto esterno	156
Λ	algebra dei tensori alternanti	159
A^*	pullback di un tensore	159
$f^*\omega$	pullback di una forma	163
dx_I	elementi di base per le p-forme	163
$\int_X$	integrale su X	167
$\oint$	integrale di linea	172
$d\omega$	derivata esterna	174
$\sim$	è coomologa a	179
$H^p(X)$	p-esimo gruppo di coomologia	179
$f^\#$	applicazione indotta in coomologia	179
P	operatore P	179
$d\arg$	forma argomento	188, 192
$d\theta$	forma angolare	192
ν_X	forma volume	194
J_f	jacobiano di f	195
$\kappa(x)$	curvatura in x	195
$S(a,b)$	parallelepipedo rettangolo	202

Capitolo I. Varietà e applicazioni lisce

§1. Definizioni

Pagina 1 dell'originale

Con l'aiuto di pochi strumenti del calcolo infinitesimale elementare si possono sviluppare intuitivamente intuizioni profonde e di grande bellezza sulla struttura e sulle proprietà di molti spazi geometrici. Poiché il calcolo infinitesimale si fonda sulla geometria locale dello spazio euclideo, esso si adatta nel modo più naturale a spazi che localmente «hanno lo stesso aspetto» di uno spazio euclideo. Chiamiamo questi oggetti *varietà*: spazi nei quali ciò che circonda ciascun punto è «proprio come» una piccola porzione di spazio euclideo.

Gli esempi più familiari di varietà sono superfici lisce come la sfera o il toro (la superficie di una ciambella), nelle quali ogni punto appartiene a un piccolo disco curvo che può essere appiattito dolcemente in un disco del piano (Figura 1-1). Una vecchia conoscenza che non soddisfa i requisiti per essere una varietà è il cono. Tutti i punti tranne uno hanno un intorno di tipo euclideo, ma nessun intorno del vertice ha l'aspetto di una semplice porzione del piano. (Si veda la Figura 1-2.)

Per tradurre la nostra idea in una definizione matematica, dobbiamo precisare il criterio secondo cui due spazi sono «uguali». Lo facciamo in termini di applicazioni. Un'applicazione f da un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ si dice *liscia* se possiede derivate parziali continue di ogni ordine. Tuttavia, quando il dominio di f non è aperto, in generale non si può parlare di derivate parziali. (Perché?) Adattiamo quindi il caso degli aperti a spazi più generali.

Pagina 2 dell'originale

Un'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^m$, definita su un sottoinsieme arbitrario X di $\mathbb{R}^n$, si dice *liscia* se può essere estesa localmente a un'applicazione liscia su un aperto; ossia, se attorno a ciascun punto $x \in X$ esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e un'applicazione liscia $F : U \to \mathbb{R}^m$ tali che F coincida con f su $U \cap X$ (Figura 1-3).

Il termine sintetico *locale*, che si riferisce al comportamento soltanto in un intorno di un punto, è molto comodo. Ricordiamo che i sottoinsiemi aperti di X (nella topologia relativa) sono esattamente quelli che si possono scrivere nella forma $U \cap X$, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

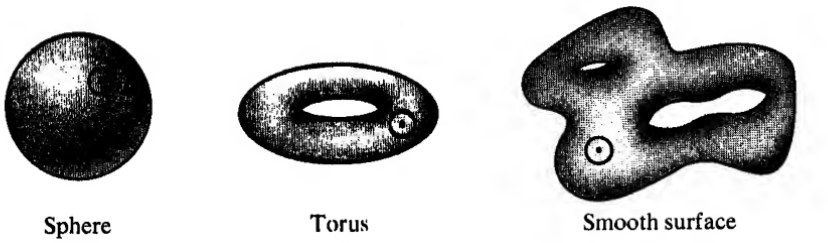


Figura 1-1. Sfera; toro; superficie liscia.



Figura 1-2. Cono.

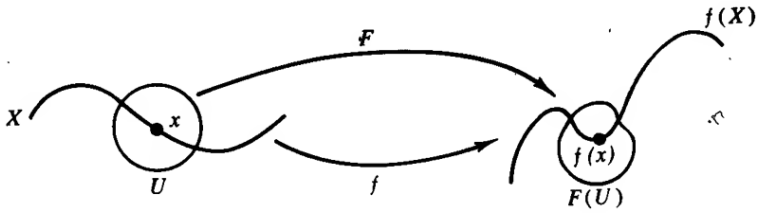


Figura 1-3. Estensione locale di f a un'applicazione F.

Pagina 3 dell'originale

La liscezza è dunque una proprietà locale: $f : X \to \mathbb{R}^m$ è liscia se è liscia in un intorno di ciascun punto di X. (Al termine «locale» si contrappone il termine *globale*, che si riferisce all'intero spazio X considerato come un unico oggetto.)

Un'applicazione liscia $f : X \to Y$ fra sottoinsiemi di due spazi euclidei è un *diffeomorfismo* se è iniettiva e suriettiva e se anche l'applicazione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è liscia. X e Y si dicono *diffeomorfi* se esiste una tale applicazione. Secondo il nostro punto di vista, due insiemi diffeomorfi sono intrinsecamente equivalenti. Si possono considerare come due copie di un unico spazio astratto, eventualmente collocate in modo diverso negli spazi euclidei che le contengono. Ben presto svilupperete un'intuizione sufficiente a riconoscere facilmente molti spazi come diffeomorfi. Potete cominciare riflettendo su alcuni esempi illustrati nella Figura 1-4.

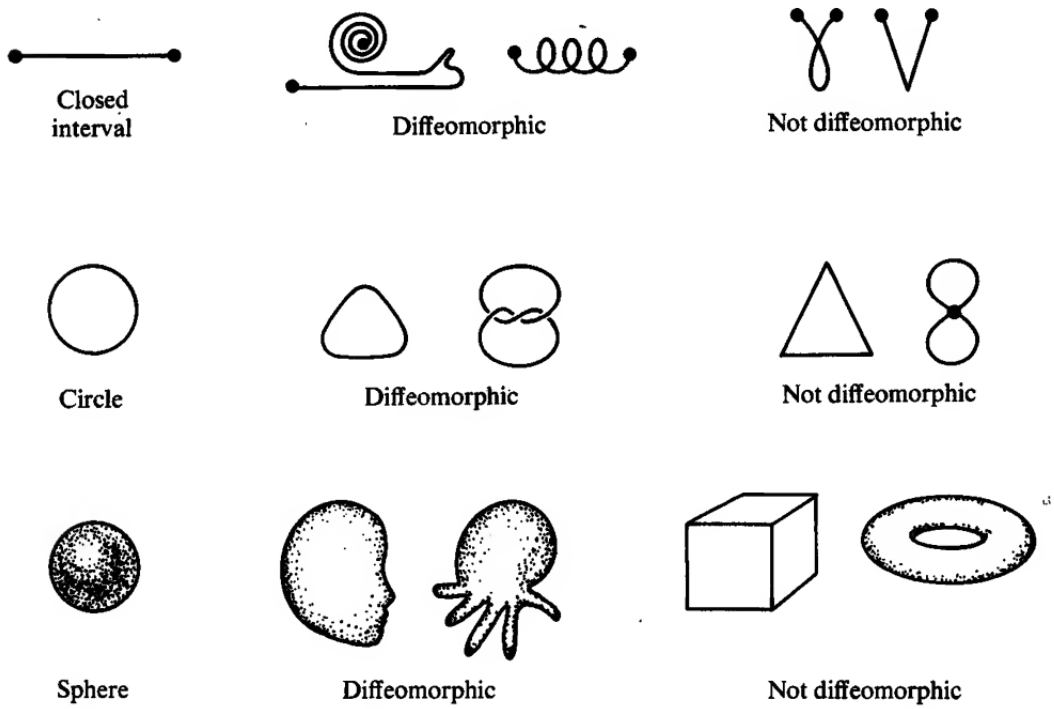


Figura 1-4. Intervallo chiuso; circonferenza; sfera. In ciascuna riga: esempi diffeomorfi (al centro) e non diffeomorfi (a destra).

Una volta individuata la nozione appropriata di equivalenza, possiamo definire le varietà. Supponiamo che X sia un sottoinsieme di uno spazio euclideo ambiente $\mathbb{R}^N$, di dimensione sufficientemente grande. Allora X è una *varietà di dimensione* k se è localmente diffeomorfa a $\mathbb{R}^k$, nel senso che ogni punto x possiede un intorno V in X diffeomorfo a un aperto U di $\mathbb{R}^k$. Un diffeomorfismo $\phi : U \to V$ si chiama *parametrizzazione* dell'intorno V. (Ricordiamo che V deve poter essere scritto come $V' \cap X$ per un opportuno aperto $V' \subset \mathbb{R}^N$.) Il diffeomorfismo inverso $\phi^{-1} : V \to U$ si chiama *sistema di coordinate* su V.

Pagina 4 dell'originale

Se scriviamo l'applicazione ϕ^{-1} in coordinate come $\phi^{-1} = (x_1, \ldots, x_k)$, le k funzioni lisce $x_1, \ldots, x_k$ su V si chiamano *funzioni coordinate*. (Si tende a essere un po' imprecisi, chiamando $x_1, \ldots, x_k$ «coordinate locali» su V e scrivendo un generico punto di V come $(x_1, \ldots, x_k)$. Ciò che accade realmente è che la k-upla di funzioni coordinate $(x_1, \ldots, x_k)$ viene usata per identificare implicitamente V con U, e un punto $v \in V$ viene identificato con le sue coordinate $(x_1(v), \ldots, x_k(v)) \in U$. Ma, dopotutto, incontriamo già simili ambiguità quando parliamo di coordinate nello spazio euclideo.) La dimensione k di X si indica spesso con $\dim X$.

Come esempio, mostriamo che la circonferenza

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

è una varietà unidimensionale. Supponiamo dapprima che (x, y) appartenga alla semicirconferenza superiore, dove $y > 0$. Allora $\phi_1(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$ manda biiettivamente l'intervallo aperto $W = (-1, 1)$ sulla semicirconferenza superiore (Figura 1-5). La sua inversa $(x, y) \mapsto x$, definita sulla semicirconferenza superiore, è certamente liscia, poiché si estende a un'applicazione liscia da tutto $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^1$. Pertanto ϕ_1 è una parametrizzazione. Una parametrizzazione della semicirconferenza inferiore, dove $y < 0$, è definita analogamente da $\phi_2(x) = (x, -\sqrt{1 - x^2})$. Queste due applicazioni forniscono parametrizzazioni locali di S^1 attorno a ogni punto, tranne i due punti sull'asse $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Per coprire questi punti, usiamo $\phi_3(y) = (\sqrt{1 - y^2}, y)$ e $\phi_4(y) = (-\sqrt{1 - y^2}, y)$, che mandano W rispettivamente sulla semicirconferenza destra e su quella sinistra. Abbiamo così

mostrato che la circonferenza è una varietà unidimensionale ricoprendola con quattro parametrizzazioni. Non è difficile farlo con due sole. (Sapete mostrare che l'intera circonferenza non può essere parametrizzata da una sola applicazione?) Usate questo argomento per mostrare, più in generale, che la *n-sfera* in $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\},$$

è una varietà di dimensione n. (Qui $|x|$ indica la norma usuale $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$.)

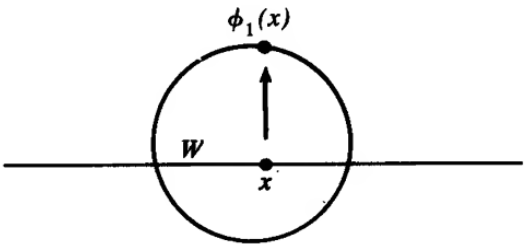


Figura 1-5. La parametrizzazione ϕ_1 della semicirconferenza superiore.

Un metodo utile per costruire nuove varietà a partire da varietà note è il prodotto cartesiano. Supponiamo che X e Y siano varietà contenute rispettivamente in $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$, cosicché $X \times Y$ sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M = \mathbb{R}^{N+M}$. Se $\dim X = k$ e $x \in X$, possiamo trovare un aperto $W \subset \mathbb{R}^k$ e una parametrizzazione locale $\phi : W \to X$ attorno a x. Analogamente, se $\dim Y = l$ e $y \in Y$, esistono un aperto $U \subset \mathbb{R}^l$ e una parametrizzazione locale $\psi : U \to Y$ attorno a y.

Pagina 5 dell'originale

Definiamo l'applicazione $\phi \times \psi : W \times U \to X \times Y$ mediante la formula

$$(\phi \times \psi)(w, u) = (\phi(w), \psi(u)).$$

Naturalmente $W \times U$ è un aperto di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$, ed è facile verificare che $\phi \times \psi$ è una parametrizzazione locale di $X \times Y$ attorno a (x, y). (Verificate attentamente questo punto, controllando in particolare che $(\phi \times \psi)^{-1}$ sia un'applicazione liscia sull'insieme, non necessariamente aperto, $X \times Y \subset \mathbb{R}^{M+N}$.[1]) Poiché questa applicazione è una parametrizzazione locale attorno a un punto arbitrario $(x, y) \in X \times Y$, abbiamo dimostrato:

Teorema. *Se X e Y sono varietà, anche $X \times Y$ lo è, e*

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Introduciamo qui un altro termine utile. Se X e Z sono entrambe varietà in $\mathbb{R}^N$ e $Z \subset X$, allora Z è una *sottovarietà* di X. In particolare, X stessa è una sottovarietà di $\mathbb{R}^N$. Ogni aperto di X è una sottovarietà di X.

Avvertiamo il lettore che gli autori, per pigrizia, ometteranno spesso l'aggettivo «liscia» quando parleranno di applicazioni; tuttavia, la liscezza sarà quasi sempre sottintesa.

Esercizi

1. Se $k < l$, possiamo considerare $\mathbb{R}^k$ come il sottoinsieme $\{(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)\}$ di $\mathbb{R}^l$. Mostrate che le funzioni lisce su $\mathbb{R}^k$, considerato come sottoinsieme di $\mathbb{R}^l$, sono le stesse della definizione usuale.

[1] *Precisazione del traduttore.* Qui l'inversa è definita sull'immagine $\phi(W) \times \psi(U)$, che è un aperto relativo di $X \times Y$, non necessariamente su tutto $X \times Y$. La formulazione abbreviata è dell'originale; questa precisazione non proviene dagli errata allegati.

***2.** Supponiamo che X sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ e che Z sia un sottoinsieme di X. Mostrate che la restrizione a Z di qualsiasi applicazione liscia su X è un'applicazione liscia su Z.

***3.** Siano $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, $Z \subset \mathbb{R}^L$ sottoinsiemi arbitrari, e siano $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ applicazioni lisce. Allora la composta $g \circ f : X \to Z$ è liscia. Se f e g sono diffeomorfismi, anche $g \circ f$ lo è.

4. (a) Sia B_a la palla aperta $\{x : |x| < a\}$ in $\mathbb{R}^k$. ($|x|^2 = \sum x_i^2$.) Mostrate che l'applicazione

$$x \longmapsto \frac{ax}{\sqrt{a^2 - |x|^2}}$$

è un diffeomorfismo di B_a su $\mathbb{R}^k$. [*Suggerimento:* calcolatene direttamente l'inversa.]

(b) Supponiamo che X sia una varietà di dimensione k. Mostrate che ogni punto di X ha un intorno diffeomorfo a tutto $\mathbb{R}^k$. Si possono quindi sempre scegliere parametrizzazioni locali che abbiano come dominio tutto $\mathbb{R}^k$.

Pagina 6 dell'originale

***5.** Mostrate che ogni sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^N$ di dimensione k è una varietà diffeomorfa a $\mathbb{R}^k$, e che tutte le applicazioni lineari su V sono lisce. Se $\phi : \mathbb{R}^k \to V$ è un isomorfismo lineare, le corrispondenti funzioni coordinate sono funzionali lineari su V, detti *coordinate lineari*.

6. Un'applicazione liscia e biiettiva fra varietà non è necessariamente un diffeomorfismo. Mostrate infatti che $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$, ne è un esempio.

7. Dimostrate che l'unione dei due assi coordinati in $\mathbb{R}^2$ non è una varietà. [*Suggerimento:* che cosa accade a un intorno di 0 quando si rimuove 0?]

8. Dimostrate che l'iperboloide in $\mathbb{R}^3$ definito da $x^2 + y^2 - z^2 = a$ è una varietà se $a > 0$. Perché $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ non definisce una varietà?

9. Esibite esplicitamente parametrizzazioni sufficienti a ricoprire $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$.

10. «Il» toro è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^3$ a distanza b dalla circonferenza di raggio a nel piano xy, dove $0 < b < a$. Dimostrate che questi tori sono tutti diffeomorfi a $S^1 \times S^1$. Disegnate anche i casi $b = a$ e $b > a$; perché questi non sono varietà?

11. Mostrate che non si può parametrizzare la k-sfera S^k con una sola parametrizzazione. [*Suggerimento:* S^k è compatta.]

***12.** La *proiezione stereografica* è un'applicazione π dalla sfera privata di un punto $S^2 - \{N\}$ su $\mathbb{R}^2$, dove N è il polo nord $(0, 0, 1)$. Per ogni $p \in S^2 - \{N\}$, si definisce $\pi(p)$ come il punto in cui la retta passante per N e p interseca il piano xy (Figura 1-6). Dimostrate che $\pi : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ è un diffeomorfismo. (Per farlo, scrivete esplicitamente π in coordinate e ricavate π^{-1}.)

Osservate che, se p è vicino a N, allora $|\pi(p)|$ è grande. Quindi π ci permette di pensare a S^2 come a una copia di $\mathbb{R}^2$ compattificata mediante l'aggiunta di un punto «all'infinito».

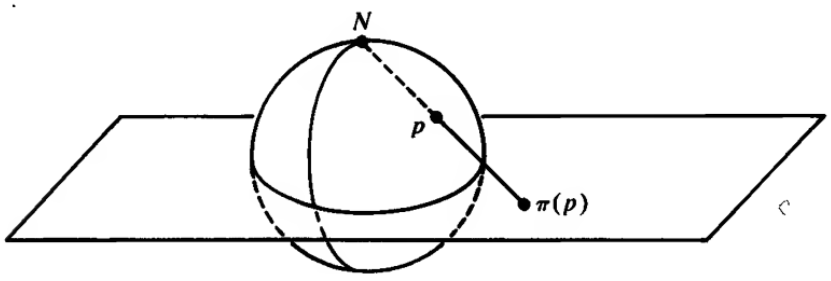


Figura 1-6. Proiezione stereografica dal polo nord N.

Pagina 7 dell'originale

Poiché possiamo definire la proiezione stereografica usando il polo sud al posto del polo nord, S^2 può essere ricoperta da due parametrizzazioni locali.

***13.** Generalizzando la proiezione stereografica, definite un diffeomorfismo $S^k - \{N\} \to \mathbb{R}^k$.

***14.** Se $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ sono applicazioni lisce, definite un'*applicazione prodotto* $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ ponendo

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Mostrate che $f \times g$ è liscia.

15. Mostrate che l'applicazione di proiezione $X \times Y \to X$, che manda (x, y) in x, è liscia.

***16.** La *diagonale* Δ in $X \times X$ è l'insieme dei punti della forma (x, x). Mostrate che Δ è diffeomorfa a X; quindi Δ è una varietà se X lo è.

***17.** Il *grafico* di un'applicazione $f : X \to Y$ è il sottoinsieme di $X \times Y$ definito da

$$\text{grafico}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Definite $F : X \to \text{grafico}(f)$ ponendo $F(x) = (x, f(x))$. Mostrate che, se f è liscia, F è un diffeomorfismo; pertanto grafico(f) è una varietà se X lo è. (Osservate che $\Delta = \text{grafico(identità)}$.)

***18.** (a) Una funzione $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ estremamente utile è

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0, \\ 0 & x \le 0. \end{cases}$$

Dimostrate che f è liscia.

(b) Mostrate che $g(x) = f(x-a)f(b-x)$ è una funzione liscia, positiva su (a, b) e nulla altrove. (Qui $a < b$.) Allora

$$h(x) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt}$$

è una funzione liscia che soddisfa $h(x) = 0$ per $x < a$, $h(x) = 1$ per $x > b$ e $0 < h(x) < 1$ per $x \in (a, b)$.

(c) Costruite ora una funzione liscia su $\mathbb{R}^k$ che sia uguale a 1 sulla palla di raggio a, nulla all'esterno della palla di raggio b e strettamente compresa fra 0 e 1 nei punti intermedi. (Qui $0 < a < b$.)

§2. Derivate e spazi tangenti

Pagina 8 dell'originale

Cominciamo ricordando alcuni fatti del calcolo infinitesimale. Supponiamo che f sia un'applicazione liscia da un aperto di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e che x sia un punto qualsiasi del suo dominio. Allora, per ogni vettore $h \in \mathbb{R}^n$, la derivata di f nella direzione h, calcolata nel punto x, è definita dal consueto limite

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Fissato x, definiamo un'applicazione $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associando a ogni vettore $h \in \mathbb{R}^n$ la derivata direzionale $df_x(h) \in \mathbb{R}^m$. Osservate che questa applicazione, che chiamiamo *derivata di f in x*, è definita su tutto $\mathbb{R}^n$, anche se f non lo è necessariamente. Nei corsi di calcolo infinitesimale si dimostra che l'applicazione derivata $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare. (Si veda, per esempio, Spivak [2].) Essendo un'applicazione lineare, df_x può essere rappresentata da una matrice rispetto alle basi canoniche. Infatti, se scriviamo f nella forma $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_m(y))$, questa matrice è proprio la matrice jacobiana di f in x:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Ma, sebbene la derivata di f si possa esprimere mediante le sue $m \times n$ derivate parziali, è molto più naturale ed elegante pensare a df_x come a un'applicazione lineare, $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

La naturalezza della definizione si manifesta, fra l'altro, nella semplicità della regola della catena. Supponiamo che $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ siano aperti e che $f : U \to V$ e $g : V \to \mathbb{R}^l$ siano applicazioni lisce. La regola della catena afferma allora che, per ogni $x \in U$,

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Quindi, se abbiamo una successione

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, dashed, "g \circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^l, \end{tikzcd}$$

otteniamo un diagramma commutativo di applicazioni derivate:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "df_x"] \arrow[rr, bend right, dashed, "d(g \circ f)_x"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg_{f(x)}"] & \mathbb{R}^l. \end{tikzcd}$$

Pagina 9 dell'originale

(Un diagramma di applicazioni è *commutativo* se due successioni qualsiasi di applicazioni che partono dallo stesso insieme e arrivano allo stesso insieme danno la stessa applicazione composta.)

Osservate che, se $f : U \to \mathbb{R}^m$ è essa stessa un'applicazione lineare L, allora $df_x = L$ per ogni $x \in U$. In particolare, la derivata dell'applicazione di inclusione di U in $\mathbb{R}^n$, in un punto qualsiasi $x \in U$, è la trasformazione identica di $\mathbb{R}^n$.

La derivata di un'applicazione ne è la migliore approssimazione lineare. Possiamo quindi usare le derivate per individuare lo spazio lineare che meglio approssima una varietà X nel punto x.

Supponiamo che X sia contenuta in $\mathbb{R}^N$ e che $\phi : U \to X$ sia una parametrizzazione locale attorno a x, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^k$; per comodità, supponiamo che $\phi(0) = x$. La migliore approssimazione lineare di $\phi : U \to X$ in 0 è l'applicazione

$$u \longmapsto \phi(0) + d\phi_0(u) = x + d\phi_0(u).$$

Definiamo lo *spazio tangente* a X in x come l'immagine dell'applicazione $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$. Lo spazio tangente, che indichiamo con $T_x(X)$, è dunque un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$ il cui traslato $x + T_x(X)$ è lo spazio affine passante per x che meglio approssima X (Figura 1-7).[2] Secondo questa definizione, un *vettore tangente* a $X \subset \mathbb{R}^N$ in $x \in X$ è un punto v di $\mathbb{R}^N$ che appartiene al sottospazio vettoriale $T_x(X)$ di $\mathbb{R}^N$. Tuttavia, è naturale rappresentare geometricamente v come la freccia che va da x a $x + v$.

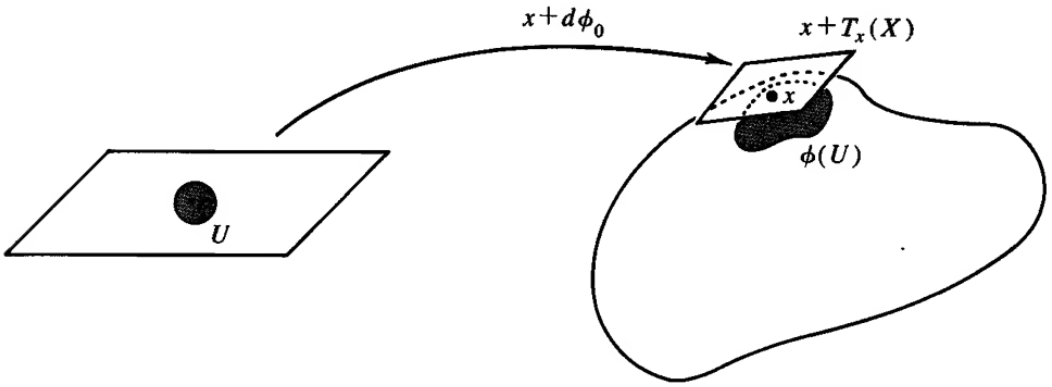


Figura 1-7. La parametrizzazione locale e l'approssimazione mediante lo spazio affine $x + T_x(X)$.

Prima di procedere, dobbiamo risolvere un'ambiguità nella definizione di $T_x(X)$: una diversa scelta della parametrizzazione locale produrrà lo stesso spazio tangente? Supponiamo che $\psi : V \to X$ sia un'altra scelta, anch'essa con $\psi(0) = x$. Restringendo sia U sia V, possiamo supporre che $\phi(U) = \psi(V)$. Allora l'applicazione $h = \psi^{-1} \circ \phi : U \to V$ è un diffeomorfismo. Scriviamo $\phi = \psi \circ h$ e deriviamo:

$$d\phi_0 = d\psi_0 \circ dh_0.$$

Questa relazione implica che l'immagine di $d\phi_0$ è contenuta nell'immagine di $d\psi_0$. L'inclusione opposta si ottiene scambiando i ruoli di ϕ e ψ; dunque $d\phi_0(\mathbb{R}^k) = d\psi_0(\mathbb{R}^k)$ e $T_x(X)$ è ben definito. (Per un altro punto di vista sugli spazi tangenti, si veda l'esercizio 12 di questa sezione.)

La dimensione dello spazio vettoriale $T_x(X)$ è, come ci si aspetta, la dimensione k di X. Per dimostrarlo, usiamo la liscezza dell'inversa ϕ^{-1}.

Pagina 10 dell'originale

Scegliamo un aperto W di $\mathbb{R}^N$ e un'applicazione liscia $\Phi' : W \to \mathbb{R}^k$ che estenda ϕ^{-1}.[3] Allora $\Phi' \circ \phi$ è l'applicazione identica di U, perciò la regola della catena implica che la composizione delle trasformazioni lineari

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{d\phi_0} T_x(X) \xrightarrow{d\Phi'_x} \mathbb{R}^k$$

è l'applicazione identica di $\mathbb{R}^k$. Ne segue che $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \to T_x(X)$ è un isomorfismo, e quindi $\dim T_x(X) = k$.

[2] *Precisazione del traduttore.* L'espressione «approssimazione lineare» segue l'originale; più precisamente, $u \mapsto x + d\phi_0(u)$ è un'approssimazione affine al primo ordine. Lo spazio vettoriale tangente è $T_x(X)$, mentre $x + T_x(X)$ è il suo traslato affine.

[3] *Precisazione del traduttore.* L'originale introduce l'aperto W ma scrive $\Phi' : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$. La liscezza di ϕ^{-1} garantisce un'estensione locale su un aperto W attorno a x; restringendo U, si può supporre $\phi(U) \subset W$. Qui il dominio è reso esplicito come W. Questa precisazione non proviene dagli errata allegati.

Possiamo ora costruire la migliore approssimazione lineare di un'applicazione liscia $f : X \to Y$ fra varietà arbitrarie in un punto x. Se $f(x) = y$, questa derivata deve essere una trasformazione lineare fra spazi tangenti, $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$. Richiediamo due proprietà alla nostra definizione generalizzata di derivata. In primo luogo, per le applicazioni nello spazio euclideo, vogliamo che la nuova derivata coincida con quella usuale. In secondo luogo, esigiamo la regola della catena. È facile convincersi che esiste una sola definizione possibile con questi requisiti. Supponiamo che $\phi : U \to X$ parametrizzi X attorno a x e che $\psi : V \to Y$ parametrizzi Y attorno a y, dove $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ e, per esempio, $\phi(0) = x$, $\psi(0) = y$. Se U è abbastanza piccolo, possiamo disegnare il seguente quadrato commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow[h=\psi^{-1}\circ f\circ\phi]{} & V \end{array}$$

Sappiamo quali devono essere $d\phi_0$, $d\psi_0$ e dh_0, e la regola della catena impone che, passando alle derivate, il diagramma precedente si trasformi in un quadrato commutativo di trasformazioni lineari:

$$\begin{array}{ccc} T_x(X) & \dashrightarrow^{df_x} & T_y(Y) \\ {\scriptstyle d\phi_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d\psi_0} \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow[dh_0]{} & \mathbb{R}^l \end{array}$$

Poiché $d\phi_0$ è un isomorfismo, esiste una sola definizione accettabile di df_x, ossia

$$df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ (d\phi_0)^{-1}.$$

Naturalmente, per poter usare questa definizione di df_x, dobbiamo verificare che essa non dipenda dalle particolari parametrizzazioni ϕ e ψ utilizzate. Questa verifica è del tutto analoga a quella con cui abbiamo stabilito che la definizione di $T_x(X)$ non dipende dalla parametrizzazione.

Pagina 11 dell'originale

Scrivete voi stessi il calcolo, per essere sicuri di aver capito.

La nostra estensione della derivata alle applicazioni fra varietà arbitrarie soddisfa davvero la regola della catena, come volevamo? (Deve proprio farlo, poiché abbiamo mostrato che è l'unica possibilità.) Sia $g : Y \to Z$ un'altra applicazione liscia, e sia $\eta : W \to Z$ una parametrizzazione di Z attorno a $z = g(y)$. Qui $W \subset \mathbb{R}^m$ e $\eta(0) = z$. Dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y & \xrightarrow{\quad g \quad} & Z \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\eta} \\ U & \xrightarrow[h=\psi^{-1}\circ f\circ\phi]{} & V & \xrightarrow[j=\eta^{-1}\circ g\circ\psi]{} & W \end{array}$$

ricaviamo il quadrato

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad g\circ f \quad} & Z \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\eta} \\ U & \xrightarrow[j\circ h]{} & W \end{array}$$

Quindi, per definizione,

$$d(g \circ f)_x = d\eta_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}.$$

Per la regola della catena relativa alle applicazioni fra sottoinsiemi aperti di spazi euclidei, $d(j \circ h)_0 = dj_0 \circ dh_0$. Pertanto

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_x &= \big(d\eta_0 \circ dj_0 \circ (d\psi_0)^{-1}\big) \circ \big(d\psi_0 \circ dh_0 \circ (d\phi_0)^{-1}\big) \\ &= dg_y \circ df_x. \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la seguente

Regola della catena. *Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sono applicazioni lisce fra varietà, allora*

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Esercizi

***1.** Per una sottovarietà X di Y, sia $i : X \to Y$ l'applicazione di inclusione. Verificate che di_x è l'applicazione di inclusione di $T_x(X)$ in $T_x(Y)$.

***2.** Se U è un sottoinsieme aperto della varietà X, verificate che

$$T_x(U) = T_x(X) \qquad \text{per } x \in U.$$

Pagina 12 dell'originale

3. Sia V un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$. Mostrate che $T_x(V) = V$ se $x \in V$.

4. Supponete che $f : X \to Y$ sia un diffeomorfismo, e dimostrate che in ogni punto x la sua derivata df_x è un isomorfismo fra spazi tangenti.

5. Dimostrate che $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^l$ non sono diffeomorfi se $k \neq l$.

6. Lo spazio tangente a S^1 in un punto (a, b) è un sottospazio unidimensionale di $\mathbb{R}^2$. Calcolate esplicitamente questo sottospazio in termini di a e b. [La risposta è ovviamente lo spazio generato da $(-b, a)$, ma dimostratelo.]

7. Analogamente, esibite una base di $T_p(S^2)$ in un punto arbitrario $p = (a, b, c)$.

8. Qual è lo spazio tangente all'iperboloide definito da $x^2 + y^2 - z^2 = a$ nel punto $(\sqrt{a}, 0, 0)$, dove $a > 0$?

9. (a) Mostrate che, per varietà arbitrarie X e Y,

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \times T_y(Y).$$

(b) Sia $f : X \times Y \to X$ l'applicazione di proiezione $(x, y) \mapsto x$. Mostrate che

$$df_{(x,y)} : T_x(X) \times T_y(Y) \longrightarrow T_x(X)$$

è l'analoga proiezione $(v, w) \mapsto v$.

(c) Fissando un qualunque $y \in Y$ si ottiene un'applicazione iniettiva $f : X \to X \times Y$ ponendo $f(x) = (x, y)$. Mostrate che $df_x(v) = (v, 0)$.

(d) Siano $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ applicazioni lisce arbitrarie. Dimostrate che

$$d(f \times g)_{(x,y)} = df_x \times dg_y.$$

10. (a) Sia $f : X \to X \times X$ l'applicazione $f(x) = (x, x)$. Verificate che $df_x(v) = (v, v)$.

(b) Se Δ è la diagonale di $X \times X$, mostrate che il suo spazio tangente $T_{(x,x)}(\Delta)$ è la diagonale di $T_x(X) \times T_x(X)$.

11. (a) Supponiamo che $f : X \to Y$ sia un'applicazione liscia e sia $F : X \to X \times Y$ definita da $F(x) = (x, f(x))$. Mostrate che

$$dF_x(v) = (v, df_x(v)).$$

(b) Dimostrate che lo spazio tangente a grafico(f) nel punto $(x, f(x))$ è il grafico di $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$.

12. Una *curva* in una varietà X è un'applicazione liscia $t \mapsto c(t)$ da un intervallo di $\mathbb{R}^1$ in X. Il *vettore velocità* della curva c all'istante t_0, indicato semplicemente con $\frac{dc}{dt}(t_0)$,

Pagina 13 dell'originale

è definito come il vettore $dc_{t_0}(1) \in T_{x_0}(X)$, dove $x_0 = c(t_0)$ e $dc_{t_0} : \mathbb{R}^1 \to T_{x_0}(X)$. Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^k$ e $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_k(t))$ in coordinate, verificate che

$$\frac{dc}{dt}(t_0) = (c_1'(t_0), \ldots, c_k'(t_0)).$$

Dimostrate che ogni vettore di $T_x(X)$ è il vettore velocità di una qualche curva in X, e viceversa. [*Suggerimento:* è facile se $X = \mathbb{R}^k$. Ora usate una parametrizzazione.]

§3. Il teorema della funzione inversa e le immersioni

Pagina 13 dell'originale

Prima di cominciare davvero a discutere la topologia delle varietà, dobbiamo studiare il comportamento locale delle applicazioni lisce. Forse la ragione migliore per lavorare sempre con applicazioni lisce (anziché con applicazioni continue, come nella topologia non differenziale) è che spesso il comportamento locale è interamente determinato, a meno di diffeomorfismo, dalla derivata. Chiarire questa osservazione è l'obiettivo principale del primo capitolo.

Se X e Y sono varietà lisce della stessa dimensione, il comportamento più semplice che un'applicazione liscia $f : X \to Y$ possa avere attorno a un punto x consiste nel mandare diffeomorficamente un intorno di x su un intorno di $y = f(x)$. In tal caso diciamo che f è un *diffeomorfismo locale in* x. Una condizione necessaria perché f sia un diffeomorfismo locale in x è che la sua derivata $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ sia un isomorfismo. (Si veda l'esercizio 4 del §2.) Il fatto che questa condizione lineare sia anche sufficiente è la chiave per comprendere l'osservazione precedente.

Teorema della funzione inversa. Supponiamo che $f : X \to Y$ sia un'applicazione liscia la cui derivata df_x nel punto x sia un isomorfismo. Allora f è un diffeomorfismo locale in x.

Il teorema della funzione inversa è un risultato davvero notevole e prezioso. La derivata df_x è semplicemente una singola applicazione lineare, che possiamo rappresentare mediante una matrice di numeri. Questa applicazione lineare è non singolare precisamente quando il determinante della sua matrice è diverso da zero. Il teorema della funzione inversa ci dice dunque che la questione, apparentemente assai delicata, se f mandi diffeomorficamente un intorno di x su un intorno di y si riduce al banale controllo che un solo numero, il determinante di df_x, sia diverso da zero!

Probabilmente avete già visto una dimostrazione del teorema della funzione inversa nel caso particolare in cui X e Y sono aperti di spazi euclidei. Potete trovarne una in qualsiasi testo di calcolo in più variabili, per esempio Spivak [2]. Usando parametrizzazioni locali, dovreste riuscire facilmente a trasferire il risultato euclideo al caso delle varietà.

Pagina 14 dell'originale

Ricordate che il teorema della funzione inversa è un risultato puramente locale: ci informa soltanto sul comportamento di f vicino al punto x. Anche se df_x è non singolare per ogni $x \in X$, non si può concludere che f sia globalmente un diffeomorfismo fra gli spazi X e Y. Una tale applicazione è però un diffeomorfismo locale in ogni punto $x \in X$, e si chiamerà quindi semplicemente *diffeomorfismo locale*. Un esempio tipico di diffeomorfismo locale che non è un diffeomorfismo globale è l'applicazione $f : \mathbb{R}^1 \to S^1$ definita da $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

Possiamo riformulare in modo suggestivo il teorema della funzione inversa usando coordinate locali: se df_x è un isomorfismo, si possono scegliere coordinate locali attorno a x e a y nelle quali f appare come l'identità, $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k)$. In un linguaggio più sofisticato, esistono parametrizzazioni locali $\phi : U \to X$, $\psi : U \to Y$ con lo stesso dominio aperto in $\mathbb{R}^k$, tali che il diagramma seguente sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow[\text{identità}]{} & U \end{array}$$

In generale diremo che due applicazioni $f : X \to Y$ e $f' : X' \to Y'$ sono *equivalenti* se esistono

diffeomorfismi α e β che completano un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\beta} \\ X' & \xrightarrow[f']{} & Y' \end{array}$$

(Un'altra espressione con lo stesso significato è: «f e f' sono uguali a meno di diffeomorfismo».) Con questa terminologia, il teorema della funzione inversa afferma che, se df_x è un isomorfismo, allora f è localmente equivalente all'identità in x. Un'applicazione lineare è evidentemente equivalente all'identità se e solo se è un isomorfismo. Un'ulteriore versione del teorema afferma quindi che f è localmente equivalente all'identità precisamente quando lo è df_x.

Naturalmente, per applicare il teorema della funzione inversa, le dimensioni di X e Y devono essere uguali. Qual è il miglior comportamento locale che può avere un'applicazione quando $\dim X < \dim Y$? Dal punto di vista differenziale, il meglio che possiamo richiedere è che $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ sia iniettiva. In tal caso f si dice un'*immersione in* x. Se f è un'immersione in ogni punto, si chiama semplicemente *immersione*. L'*immersione canonica* è l'applicazione di inclusione standard di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^l$, per $l \geq k$, che manda $(a_1, \ldots, a_k)$ in $(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$. In effetti, a meno di diffeomorfismo, questa è localmente l'unica immersione.

Pagina 15 dell'originale

Teorema locale delle immersioni. Supponiamo che $f : X \to Y$ sia un'immersione in x, e sia $y = f(x)$. Allora esistono coordinate locali attorno a x e a y tali che

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

In altre parole, vicino a x l'applicazione f è localmente equivalente all'immersione canonica.

Dimostrazione. Cominciamo scegliendo parametrizzazioni locali arbitrarie che diano un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow[g]{} & V \end{array} \qquad \phi(0) = x, \quad \psi(0) = y.$$

Cerchiamo ora di ampliare g in modo da poter applicare il teorema della funzione inversa. Poiché $dg_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ è iniettiva, con un cambiamento di base in $\mathbb{R}^l$ possiamo supporre che la sua matrice $l \times k$ sia

$$\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove I_k è la matrice identità $k \times k$. Definiamo ora $G : U \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$ mediante

$$G(x, z) = g(x) + (0, z).$$

G manda un aperto di $\mathbb{R}^l$ in $\mathbb{R}^l$, e la matrice di dG_0 è I_l. Il teorema della funzione inversa implica dunque che G è un diffeomorfismo locale di $\mathbb{R}^l$ in 0. Osservate che abbiamo definito G in modo che $g = G \circ (\text{immersione canonica})$. Poiché ψ e G sono diffeomorfismi locali in 0, anche $\psi \circ G$ lo è; possiamo quindi usare $\psi \circ G$ come parametrizzazione locale di Y attorno a y. Inoltre, restringendo sufficientemente U e V, il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi\circ G} \\ U & \xrightarrow[\text{immersione canonica}]{} & V \end{array}$$

□

Un utile corollario è evidente: se f è un'immersione in x, allora è un'immersione in un intorno di x.

È importante riconoscere che la condizione di immersione ha natura strettamente locale. Per esempio, quando X e Y hanno la stessa dimensione, le immersioni coincidono con i diffeomorfismi locali.

Pagina 16 dell'originale

I diffeomorfismi veri e propri devono invece soddisfare sia una condizione differenziale locale sia una condizione topologica globale: devono essere diffeomorfismi locali e devono essere iniettivi e suriettivi. Per imporre a un'immersione proprietà globali desiderabili, dobbiamo quindi aggiungere condizioni topologiche ai dati differenziali locali.

Di particolare interesse è l'immagine di un'immersione. L'immagine dell'immersione canonica $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ è l'esempio più semplice che si possa immaginare di sottovarietà. Tuttavia, l'immagine di un'immersione arbitraria $f : X \to Y$ non è necessariamente una sottovarietà di Y. Vediamo perché. Dal teorema locale delle immersioni è evidente che f manda qualsiasi intorno sufficientemente piccolo W di un punto arbitrario x diffeomorficamente sulla propria immagine $f(W)$ in Y. Ogni punto dell'immagine di f appartiene dunque a un sottoinsieme parametrizzabile di $f(X)$. Non è questa la definizione di varietà? Non proprio. Perché $f(X)$ sia una varietà, i punti devono possedere *intorni* parametrizzabili, mentre i sottoinsiemi $f(W)$ non sono necessariamente aperti in $f(X) \subset Y$.

Considerate, per esempio, un'applicazione che torce la circonferenza fino a darle la forma di un otto (Figura 1-8). Questa è un'immersione di S^1 in $\mathbb{R}^2$, ma la sua immagine non è una varietà. Qui, naturalmente, il problema nasce dal fatto che l'immersione non è iniettiva; tuttavia, anche l'immagine di un'immersione iniettiva può non essere una varietà. Per esempio, la stessa figura a otto si può ottenere come immagine dell'immersione iniettiva di $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^2$ mostrata nella Figura 1-9.

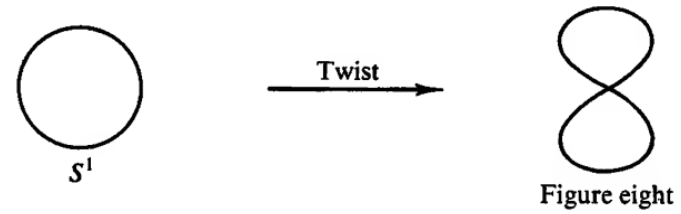


Figura 1-8. La circonferenza viene torta in una figura a otto.

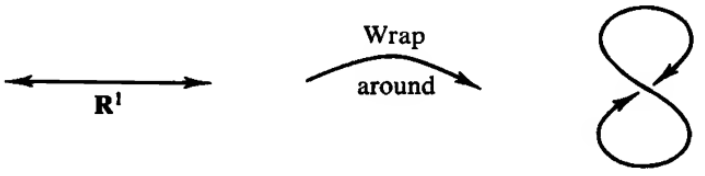


Figura 1-9. La retta viene avvolta sulla figura a otto.

Si possono citare esempi molto più anomali. Sia $g : \mathbb{R}^1 \to S^1$ il diffeomorfismo locale $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Definiamo $G : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ mediante $G(x, y) = (g(x), g(y))$. G è un diffeomorfismo locale del piano sul toro. In effetti, osservando G sul quadrato unitario fondamentale, possiamo interpretarlo come una costruzione del toro ottenuta incollando fra loro i lati opposti del quadrato (Figura 1-10).

Pagina 17 dell'originale

Definiamo ora un'applicazione di $\mathbb{R}^1$ nel toro restringendo G a una retta di $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine e avente coefficiente angolare irrazionale. Poiché G è un diffeomorfismo locale, questa è

un'immersione che avvolge $\mathbb{R}^1$ attorno al toro (Figura 1-11). Inoltre, l'irrazionalità del coefficiente angolare implica che l'immersione è iniettiva e che la sua immagine è un sottoinsieme denso del toro!

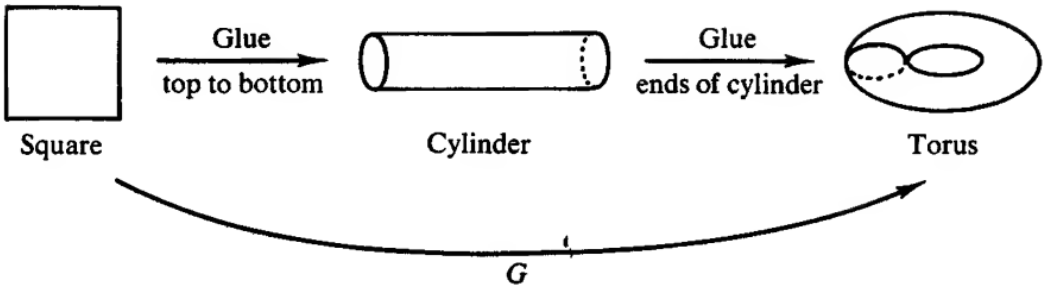


Figura 1-10. Quadrato, cilindro, toro: si incollano prima il lato superiore e quello inferiore, poi le estremità del cilindro.

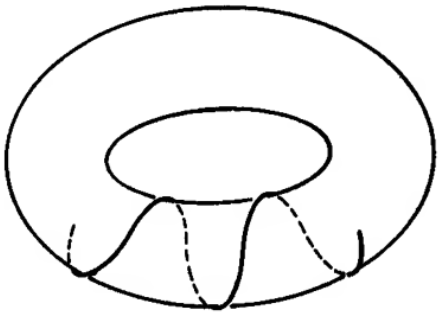


Figura 1-11. L'immersione di una retta di coefficiente angolare irrazionale nel toro.

Queste patologie significano forse che non possiamo sperare di trarre conclusioni globali dal nostro teorema di classificazione locale delle immersioni? Osservate che le due immersioni iniettive si comportano in modo strano perché mandano troppi punti «vicini all'infinito» in $\mathbb{R}^1$ in piccole regioni dell'immagine. Forse vietare questo comportamento renderà le immersioni sufficientemente controllabili. L'analogo topologico generale dei punti «vicini all'infinito» è l'esterno di un sottoinsieme compatto dello spazio considerato, pensando al compatto come a un insieme molto grande. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *propria* se la controimmagine di ogni compatto di Y è compatta in X. Intuitivamente, un'applicazione propria manda punti «vicini all'infinito» in X in punti «vicini all'infinito» in Y. Un'immersione iniettiva e propria si chiama *embedding.*[4] Avendo aggiunto vincoli topologici globali appropriati alla condizione locale di immersione, possiamo ora dimostrare una ragionevole estensione globale del teorema locale delle immersioni.

Teorema. Un embedding $f : X \to Y$ manda X diffeomorficamente su una sottovarietà di Y.

Dimostrazione. Abbiamo visto che, per dimostrare che $f(X)$ è una varietà, basta mostrare che l'immagine di ogni aperto W di X è un sottoinsieme aperto di $f(X)$. Se $f(W)$ non è aperto in $f(X)$, esiste una successione di punti $y_i \in f(X)$ che non appartengono a $f(W)$ ma convergono a un punto $y \in f(W)$. Poiché l'insieme $\{y, y_1, y_2, \ldots\}$ è compatto,

Pagina 18 dell'originale

la sua controimmagine in X deve essere compatta. Ogni punto y_i ha esattamente una controimmagine x_i in X, e y ha esattamente una controimmagine x, che deve appartenere a W. Poiché $\{x, x_1, x_2, \ldots\}$ è compatto, passando a una sottosuccessione possiamo supporre che x_i converga a

[4] *Nota terminologica.* Si mantiene il termine inglese *embedding* per distinguerlo da *immersion.* Gli autori includono la proprietà di essere propria nella definizione: tale convenzione è conservata in tutta la traduzione.

un punto $z \in X$. Allora $f(x_i) \to f(z)$; pertanto, poiché $f(x_i) \to f(x)$, l'iniettività di f implica $z = x$. Ora W è aperto; quindi, da $x_i \to x$ concludiamo che $x_i \in W$ per i sufficientemente grande. Ciò contraddice l'ipotesi $y_i \notin f(W)$. Dunque $f(X)$ è effettivamente una varietà. È ora immediato verificare che $f : X \to f(X)$ è un diffeomorfismo, perché sappiamo ormai che f è un diffeomorfismo locale da X in $f(X)$. Poiché è biiettiva, l'inversa $f^{-1} : f(X) \to X$ è ben definita come applicazione fra insiemi. Ma sappiamo già che f^{-1} è localmente liscia. □

Naturalmente, se X stessa è una varietà compatta, ogni applicazione $f : X \to Y$ è propria. Quindi, per varietà compatte, gli embedding sono semplicemente le immersioni iniettive.

Esercizi

1. Sia A un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ e sia $b \in \mathbb{R}^n$. Mostrate che $x \mapsto Ax+b$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ se e solo se A è non singolare.

***2.** Supponiamo che Z sia una sottovarietà di dimensione l di X e che $z \in Z$. Mostrate che esiste un sistema di coordinate locali $\{x_1, \ldots, x_k\}$, definito in un intorno U di z in X, tale che $Z \cap U$ sia definito dalle equazioni $x_{l+1} = 0, \ldots, x_k = 0$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ un diffeomorfismo locale. Dimostrate che l'immagine di f è un intervallo aperto e che, in effetti, f manda $\mathbb{R}^1$ diffeomorficamente su questo intervallo.

4. In contrasto con l'esercizio 3, costruite un diffeomorfismo locale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che non sia un diffeomorfismo sulla propria immagine. [*Suggerimento:* partite dal nostro esempio $\mathbb{R}^1 \to S^1$.]

5. Dimostrate che un diffeomorfismo locale $f : X \to Y$ è in realtà un diffeomorfismo di X su un aperto di Y, purché f sia iniettiva.

6. (a) Se f e g sono immersioni, mostrate che $f \times g$ lo è.

(b) Se f e g sono immersioni, mostrate che $g \circ f$ lo è.

(c) Se f è un'immersione, mostrate che la sua restrizione a qualsiasi sottovarietà del dominio è un'immersione.

(d) Se $\dim X = \dim Y$, mostrate che le immersioni $f : X \to Y$ coincidono con i diffeomorfismi locali.

7. (a) Verificate che $g : \mathbb{R}^1 \to S^1$, $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, è effettivamente un diffeomorfismo locale.

Pagina 19 dell'originale

(b) Dall'esercizio 6 segue che $G : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $G = g \times g$, è un diffeomorfismo locale. Inoltre, se L è una retta di $\mathbb{R}^2$, la restrizione $G : L \to S^1 \times S^1$ è un'immersione. Dimostrate che, se L ha coefficiente angolare irrazionale, G è iniettiva su L.

8. Verificate che l'applicazione

$$\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \longmapsto \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$$

è un embedding. Dimostrate che la sua immagine è uno dei due rami dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$.

9. (a) Siano $x_1, \ldots, x_N$ le funzioni coordinate canoniche su $\mathbb{R}^N$, e sia X una sottovarietà di dimensione k di $\mathbb{R}^N$. Dimostrate che ogni punto $x \in X$ possiede un intorno sul quale le restrizioni di alcune k funzioni coordinate $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ formano un sistema di coordinate locali. [*Suggerimento:* siano $e_1, \ldots, e_N$ i vettori della base usuale di $\mathbb{R}^N$. Come lemma di algebra lineare, dimostrate

che, per una scelta opportuna di $i_1, \ldots, i_k$, la proiezione di $T_x(X)$ sul sottospazio generato da $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ è biiettiva. Mostrate che ciò implica che $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ definisce un diffeomorfismo locale di X in $\mathbb{R}^k$ nel punto x.]

(b) Per semplicità, supponiamo che $x_1, \ldots, x_k$ formino un sistema di coordinate locali in un intorno V di x in X. Dimostrate che esistono funzioni lisce $g_{k+1}, \ldots, g_N$ su un aperto U di $\mathbb{R}^k$ tali che si possa scegliere V come l'insieme

$$\{(a_1, \ldots, a_k, g_{k+1}(a), \ldots, g_N(a)) \in \mathbb{R}^N : a = (a_1, \ldots, a_k) \in U\}.$$

Ossia, se definiamo $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ mediante $g = (g_{k+1}, \ldots, g_N)$, allora V coincide con il grafico di g. Quindi ogni varietà si può esprimere localmente come un grafico.

10. *Generalizzazione del teorema della funzione inversa.* Sia $f : X \to Y$ un'applicazione liscia iniettiva su una sottovarietà compatta Z di X. Supponiamo che, per ogni $x \in Z$,

$$df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$$

sia un isomorfismo. Allora f manda Z diffeomorficamente su $f(Z)$. (Perché?) Dimostrate che f manda, in effetti, un intorno aperto di Z in X diffeomorficamente su un intorno aperto di $f(Z)$ in Y. Osservate che, se Z è un solo punto, si ritrova il teorema della funzione inversa. [*Suggerimento:* dimostrate che, per l'esercizio 5, basta mostrare che f è iniettiva in un intorno di Z. Se non lo fosse, costruite successioni $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ in X, entrambe convergenti a un punto $z \in Z$, con $a_i \neq b_i$ ma $f(a_i) = f(b_i)$. Mostrate che ciò contraddice la non singolarità di df_z.]

§4. Sommersioni

Pagina 20 dell'originale

Continuiamo la nostra analisi locale con il caso dimensionale che sarà per noi più importante, $\dim X \geq \dim Y$. Se $f : X \to Y$ manda x in y, la condizione più forte che possiamo imporre alla sua derivata $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ è la suriettività. Se df_x è suriettiva, f si dice una *sommersione in* x. Un'applicazione che è una sommersione in ogni punto si chiama semplicemente *sommersione*.

La *sommersione canonica* è la proiezione standard di $\mathbb{R}^k$ su $\mathbb{R}^l$, per $k \geq l$, che manda $(a_1, \ldots, a_k)$ in $(a_1, \ldots, a_l)$. Come nel caso delle immersioni, ogni sommersione è localmente canonica, a meno di diffeomorfismo.

Teorema locale delle sommersioni. Supponiamo che $f : X \to Y$ sia una sommersione in x, e sia $y = f(x)$. Allora esistono coordinate locali attorno a x e a y tali che $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$. Ossia, vicino a x l'applicazione f è localmente equivalente alla sommersione canonica.

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga alla classificazione locale delle immersioni. Dato un qualsiasi diagramma di parametrizzazioni locali

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow[\ g\ ]{} & V \end{array} \qquad \phi(0) = x, \quad \psi(0) = y,$$

cerchiamo di modificare g e di applicare il teorema della funzione inversa. Poiché $dg_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ è suriettiva, con un cambiamento lineare di coordinate in $\mathbb{R}^k$ possiamo supporre che la sua matrice $l \times k$ sia $(I_l \mid 0)$. Definiamo ora $G : U \to \mathbb{R}^k$ mediante

$$G(a) = (g(a), a_{l+1}, \ldots, a_k),$$

dove $a = (a_1, \ldots, a_k)$. La matrice di dG_0 è allora I_k, perciò G è un diffeomorfismo locale in 0. Esiste quindi G^{-1} come diffeomorfismo da un intorno aperto U' di 0 in U. Per costruzione, $g = (\text{sommersione canonica}) \circ G$, dunque $g \circ G^{-1}$ è la sommersione canonica. Il quadrato seguente è allora commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \\ {\scriptstyle\phi\circ G^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U' & \xrightarrow[\text{sommersione canonica}]{} & V \end{array}$$

□

Un corollario evidente, che vale la pena osservare, è che, se f è una sommersione in x, allora è una sommersione in un intero intorno di x.

Pagina 21 dell'originale

Una delle conseguenze più preziose del teorema di classificazione locale riguarda la natura geometrica delle soluzioni di equazioni fra funzioni. Se y è un punto di Y e $f : X \to Y$, le soluzioni dell'equazione $f(x) = y$ costituiscono un sottoinsieme di X chiamato *controimmagine di* y, indicato con $f^{-1}(y)$. Per applicazioni generali, l'insieme $f^{-1}(y)$ può non essere affatto ragionevole come oggetto geometrico. Supponiamo però che f sia una sommersione in un punto $x \in f^{-1}(y)$. Scegliamo coordinate locali attorno a x e a y tali che

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l),$$

e che y corrisponda a $(0,\dots,0)$. Vicino a x, quindi, $f^{-1}(y)$ è semplicemente l'insieme dei punti $(0,\dots,0,x_{l+1},\dots,x_k)$. Più precisamente, sia V l'intorno di x sul quale è definito il sistema di coordinate $(x_1,\dots,x_k)$. Allora $f^{-1}(y)\cap V$ è l'insieme dei punti in cui $x_1=0,\dots,x_l=0$. Le funzioni $x_{l+1},\dots,x_k$ formano pertanto un sistema di coordinate sull'insieme $f^{-1}(y)\cap V$, che è un aperto relativo di $f^{-1}(y)$. (Si veda la Figura 1-12.)

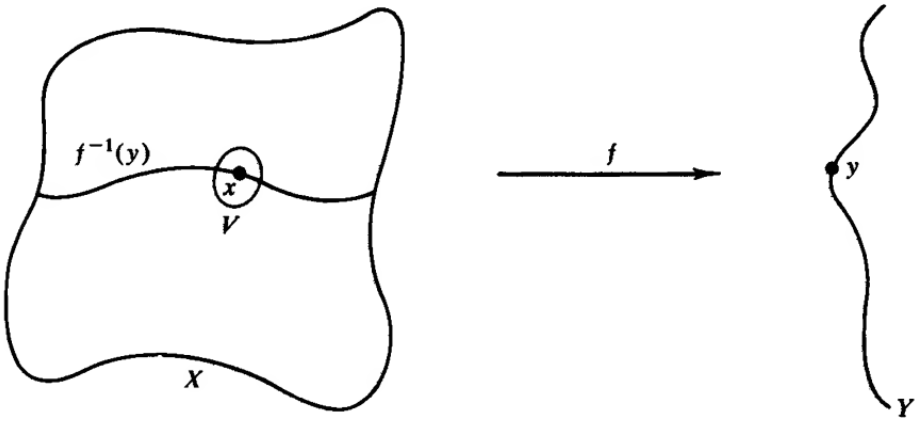


Figura 1-12. La controimmagine di y vicino a un punto in cui f è una sommersione.

Siamo così condotti a un'altra definizione. Per un'applicazione liscia fra varietà $f: X\to Y$, un punto $y\in Y$ si dice un *valore regolare* di f se $df_x: T_x(X)\to T_y(Y)$ è suriettiva in ogni punto x tale che $f(x)=y$. L'argomento appena dato dimostra il seguente

Teorema della controimmagine. Se y è un valore regolare di $f: X\to Y$, la controimmagine $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà di X, con $\dim f^{-1}(y)=\dim X-\dim Y$.

Un punto $y\in Y$ che non sia un valore regolare di f si chiama *valore critico*. L'insieme delle soluzioni $\{x: f(x)=y\}$ può essere piuttosto complicato quando y è un valore critico.

Occorre notare un assurdo cavillo nella definizione di valore regolare. Ogni punto $y\in Y$ che non appartiene all'immagine di f è automaticamente un valore regolare. Questa è, in effetti, una rigorosa conseguenza logica della definizione; ma, se simili sciocchezze vi infastidiscono, consideratela semplicemente una definizione speciale.

Pagina 22 dell'originale

In effetti, talvolta vorremo trovare un punto che non appartiene a un'immagine $f(X)$, e le informazioni sui valori regolari saranno utili.

Per sottolinearla, ripetiamo la definizione di valore regolare in ciascun caso dimensionale. Quando $\dim X>\dim Y$, la regolarità di un valore y significa che f è una sommersione in ogni punto $x\in f^{-1}(y)$. Quando $\dim X=\dim Y$, significa che f è un diffeomorfismo locale in ogni punto della controimmagine. Infine, se $\dim X<\dim Y$, ogni punto di $f(X)$ è un valore critico, e i valori regolari sono quelli mai raggiunti da f. Il caso $\dim X=\dim Y$ è particolarmente importante: vi raccomandiamo di svolgere l'esercizio 7 per sviluppare l'intuizione.

Quanto è più semplice costruire sottovarietà con il teorema della controimmagine che costruire laboriosamente parametrizzazioni locali! Per esempio, considerate $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=|x|^2=x_1^2+\cdots+x_k^2.$$

La derivata df_a nel punto $a=(a_1,\dots,a_k)$ ha matrice $(2a_1,\dots,2a_k)$. Quindi $df_a:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ è suriettiva salvo quando $f(a)=0$, e ogni numero reale non nullo è un valore regolare di f. In particolare, dimostriamo senza sforzo che la sfera $S^{k-1}=f^{-1}(1)$ è una varietà di dimensione $k-1$.

Un'applicazione più potente del teorema è fornita dal *gruppo ortogonale* $O(n)$, il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ che conservano le distanze. Lo spazio $M(n)$ di tutte le matrici $n \times n$ è una varietà: disponendo le entrate lungo un'unica riga, non è altro che $\mathbb{R}^{n^2}$. $O(n)$ è il gruppo delle matrici che soddisfano $AA^t = I$, dove A^t è la trasposta di A e I è la matrice identità. Mostreremo ora che $O(n)$ è una varietà. Osserviamo anzitutto che, per ogni matrice A, la matrice AA^t è simmetrica, perché coincide con la propria trasposta. Lo spazio vettoriale $S(n)$ di tutte le matrici simmetriche $n \times n$ è evidentemente una sottovarietà di $M(n)$ diffeomorfa a $\mathbb{R}^k$, con $k = n(n+1)/2$, e l'applicazione $f : M(n) \to S(n)$ definita da $f(A) = AA^t$ è liscia. Poiché $O(n) = f^{-1}(I)$, per stabilire che il gruppo ortogonale è una varietà basta mostrare che I è un valore regolare di f. Calcoliamo dunque la derivata di f in una matrice A. Per definizione,

$$\begin{aligned} df_A(B) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(A+sB) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(A+sB)(A+sB)^t - AA^t}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2BB^t - AA^t}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} (BA^t + AB^t + sBB^t) \\ &= BA^t + AB^t. \end{aligned}$$

Pagina 23 dell'originale

L'applicazione $df_A : T_A M(n) \to T_{f(A)} S(n)$ è suriettiva quando A appartiene a $f^{-1}(I) = O(n)$? Per le identificazioni di $M(n)$ e $S(n)$ con spazi euclidei, abbiamo $T_A M(n) = M(n)$ e $T_{f(A)} S(n) = S(n)$. La matrice I è un valore regolare di f se e solo se $df_A : M(n) \to S(n)$ è suriettiva per ogni $A \in O(n)$. Ossia, per ogni $C \in S(n)$ deve esistere $B \in M(n)$ che risolva $df_A(B) = C$, cioè $BA^t + AB^t = C$. Poiché C è simmetrica, possiamo scrivere $C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t$ e osservare che possiamo risolvere in B l'equazione $BA^t = \frac{1}{2}C$. Dato che $A^tA = I$, moltiplicando a destra per A si ottiene $B = \frac{1}{2}CA$. Allora, in effetti,

$$\begin{aligned} df_A(B) &= (\tfrac{1}{2}CA)A^t + A(\tfrac{1}{2}CA)^t \\ &= \tfrac{1}{2}C(AA^t) + \tfrac{1}{2}(AA^t)C^t = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C^t = C. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato la matrice B desiderata. Dunque f è una sommersione in ogni $A \in f^{-1}(I)$ e I è un valore regolare di f. Pertanto $O(n)$ è una sottovarietà di $M(n)$; inoltre,

$$\dim O(n) = \dim M(n) - \dim S(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Osservate che $O(n)$ è un gruppo oltre che una varietà. Come esercizio, mostrate che le operazioni del gruppo sono lisce nel senso seguente: l'applicazione di moltiplicazione $O(n) \times O(n) \to O(n)$ definita da $(A, B) \mapsto AB$ e l'applicazione di inversione $O(n) \to O(n)$ definita da $A \mapsto A^{-1}$ sono entrambe applicazioni lisce fra varietà. [*Suggerimento:* qui $A^{-1} = A^t$.] Un gruppo che è una varietà e le cui operazioni di gruppo sono lisce si chiama *gruppo di Lie*.

Consideriamo ora alcune varianti del materiale precedente che saranno utili nella prossima sezione. Ecco un problema di tipo pratico: supponiamo che $g_1, \ldots, g_l$ siano funzioni lisce a valori reali su una varietà X di dimensione $k \geq l$. In quali condizioni l'insieme Z dei loro zeri comuni è un oggetto geometrico ragionevole? Possiamo rispondere facilmente considerando l'applicazione

$$g = (g_1, \ldots, g_l) : X \longrightarrow \mathbb{R}^l.$$

Poiché $Z = g^{-1}(0)$, l'insieme Z è una sottovarietà di X se 0 è un valore regolare di g.

Possiamo riformulare la condizione di regolarità di 0 direttamente in termini delle funzioni g_i. Poiché ogni g_i è un'applicazione liscia di X in $\mathbb{R}$, la sua derivata in x è un'applicazione

lineare $d(g_i)_x : T_x(X) \to \mathbb{R}$; ossia, $d(g_i)_x$ è un funzionale lineare sullo spazio vettoriale $T_x(X)$. Inoltre, potete verificare rapidamente che $dg_x : T_x(X) \to \mathbb{R}^l$ è suriettiva se e solo se gli l funzionali $d(g_1)_x, \ldots, d(g_l)_x$ sono linearmente indipendenti su $T_x(X)$. Esprimiamo questa condizione dicendo che le l funzioni $g_1, \ldots, g_l$ sono *indipendenti in* x. Possiamo ora «tradurre» il teorema della controimmagine in questo linguaggio:

Proposizione. Se le funzioni lisce a valori reali $g_1, \ldots, g_l$ su X sono indipendenti in ogni punto in cui si annullano tutte, l'insieme Z degli zeri comuni è una sottovarietà di X di dimensione $\dim X - l$.

Pagina 24 dell'originale

È comodo definire qui la *codimensione* di una sottovarietà arbitraria Z di X mediante $\operatorname{codim} Z = \dim X - \dim Z$. (Osservate che essa dipende non soltanto da Z, ma anche dalla varietà ambiente X.) Quindi l funzioni indipendenti su X definiscono una sottovarietà di codimensione l come insieme degli zeri comuni. Storicamente, lo studio degli insiemi degli zeri di famiglie di funzioni ha avuto notevole interesse matematico. La geometria algebrica classica, per esempio, studia la natura degli insiemi definiti nello spazio euclideo dall'annullarsi di polinomi.

È vero il viceversa della proposizione precedente? Ossia, ogni sottovarietà Z di X può essere definita dall'annullarsi di funzioni indipendenti? Vedremo che la risposta è negativa (esercizio 20, capitolo II, §3). Possiamo però ottenere due utili viceversa parziali:

Viceversa parziale 1. Se y è un valore regolare di un'applicazione liscia $f : X \to Y$, la sottovarietà controimmagine $f^{-1}(y)$ può essere definita dall'annullarsi di funzioni indipendenti.

Dimostrazione. Basta scegliere un diffeomorfismo h fra un intorno W di y e un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^l$, con $h(y) = 0$. Ponete ora $g = h \circ f$ e verificate che 0 è un valore regolare di g. Le funzioni coordinate $g_1, \ldots, g_l$ sono quindi quelle cercate.[5]

Viceversa parziale 2. Ogni sottovarietà di X è localmente definita dall'annullarsi di funzioni indipendenti.

Dimostrazione. Più precisamente, sia Z una sottovarietà di codimensione l e sia z un punto qualsiasi di Z. Affermiamo che esistono l funzioni indipendenti $g_1, \ldots, g_l$, definite in un intorno aperto W di z in X, tali che $Z \cap W$ sia il loro insieme di annullamento comune. (Stiamo qui enunciando il viceversa della proposizione per la sottovarietà $Z \cap W$ nella varietà W.) Ciò segue immediatamente dal teorema locale delle immersioni per l'inclusione di $Z \cap W$ in W; in effetti, è proprio l'esercizio 2 della sezione precedente.

In particolare, prendendo come X uno spazio euclideo arbitrario, osserviamo che ogni varietà è localmente definibile mediante una famiglia di funzioni indipendenti nello spazio euclideo. (Ancora una volta, però, non è vero che tutte le varietà si possano definire *globalmente* in questo modo. Ne vedremo più avanti il motivo.)

È utile osservare la seguente

Proposizione. Sia Z la controimmagine di un valore regolare $y \in Y$ per l'applicazione liscia $f : X \to Y$. Allora il nucleo della derivata $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ in ogni punto $x \in Z$ è precisamente lo spazio tangente a Z, $T_x(Z)$.

Dimostrazione. Poiché f è costante su Z, la derivata df_x è nulla su $T_x(Z)$. Ma $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ è suriettiva, quindi la dimensione del suo nucleo deve essere

$$\dim T_x(X) - \dim T_y(Y) = \dim X - \dim Y = \dim Z.$$

[5] *Precisazione del traduttore.* La composizione $h \circ f$ e le funzioni che ne risultano sono qui definite sull'intorno aperto $f^{-1}(W)$ della fibra, non necessariamente su tutto X. È questo il dominio usato nella dimostrazione dell'originale.

Pagina 25 dell'originale

Dunque $T_x(Z)$ è un sottospazio del nucleo con la stessa dimensione dell'intero nucleo; pertanto deve coincidere con esso. □

Esercizi

***1.** Se $f : X \to Y$ è una sommersione e U è un aperto di X, mostrate che $f(U)$ è aperto in Y.

***2.** (a) Se X è compatta e Y è connessa, mostrate che ogni sommersione $f : X \to Y$ è suriettiva.

(b) Mostrate che non esistono sommersioni da varietà compatte in spazi euclidei.[6]

3. Mostrate che la curva $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ è un embedding di $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^3$. Trovate due funzioni indipendenti che definiscano globalmente l'immagine. Le vostre funzioni sono indipendenti su tutto $\mathbb{R}^3$ o soltanto in un intorno aperto dell'immagine?

4. Dimostrate la seguente estensione del viceversa parziale 2. Supponiamo che $Z \subset X \subset Y$ siano varietà e che $z \in Z$. Allora esistono funzioni indipendenti $g_1, \ldots, g_l$ in un intorno W di z in Y tali che

$$Z \cap W = \{y \in W : g_1(y) = 0, \ldots, g_l(y) = 0\},$$
$$X \cap W = \{y \in W : g_1(y) = 0, \ldots, g_m(y) = 0\},$$

dove $l - m$ è la codimensione di Z in X.

5. Verificate che 0 è l'unico valore critico dell'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ definita da

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Dimostrate che, se a e b sono entrambi positivi oppure entrambi negativi, $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ sono diffeomorfe. [*Suggerimento:* considerate la moltiplicazione scalare per $\sqrt{b/a}$ su $\mathbb{R}^3$.] Esaminate mediante figure il cambiamento catastrofico della topologia di $f^{-1}(c)$ quando c attraversa il valore critico.

6. Più in generale, sia p un polinomio omogeneo in k variabili. L'omogeneità di grado m significa

$$p(tx_1, \ldots, tx_k) = t^m p(x_1, \ldots, x_k).$$

Dimostrate che l'insieme dei punti x tali che $p(x) = a$ è una sottovarietà di dimensione $k - 1$ di $\mathbb{R}^k$, purché $a \neq 0$. Mostrate che le varietà ottenute con $a > 0$ sono tutte diffeomorfe, e altrettanto vale per quelle con $a < 0$.

Pagina 26 dell'originale

[*Suggerimento:* usate l'identità di Eulero per i polinomi omogenei

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = m\, p$$

per dimostrare che 0 è l'unico valore critico possibile di p.][7]

[6] *Precisazione del traduttore.* Nell'esercizio 2 si intende $X \neq \varnothing$; in (b) lo spazio euclideo di arrivo deve avere dimensione positiva. Senza queste convenzioni implicite, gli enunciati ammettono eccezioni immediate.

[7] *Precisazione del traduttore.* Si intende $m > 0$. Per un polinomio costante non nullo, omogeneo di grado 0, l'enunciato non vale. La sostituzione di «unico valore critico» con «unico valore critico possibile» proviene invece dagli errata allegati.

***7.** (*Teorema della pila di dischi.*) Supponiamo che y sia un valore regolare di $f : X \to Y$, dove X è compatta e ha la stessa dimensione di Y. Mostrate che $f^{-1}(y)$ è un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Dimostrate che esiste un intorno U di y in Y tale che $f^{-1}(U)$ sia un'unione disgiunta $V_1 \cup \cdots \cup V_N$, dove V_i è un intorno aperto di x_i e f manda ciascun V_i diffeomorficamente su U. [*Suggerimento:* scegliete intorni disgiunti W_i degli x_i che siano mandati diffeomorficamente sulle rispettive immagini. Mostrate che $f(X - \bigcup W_i)$ è compatto e non contiene y.] Si veda la Figura 1-13.

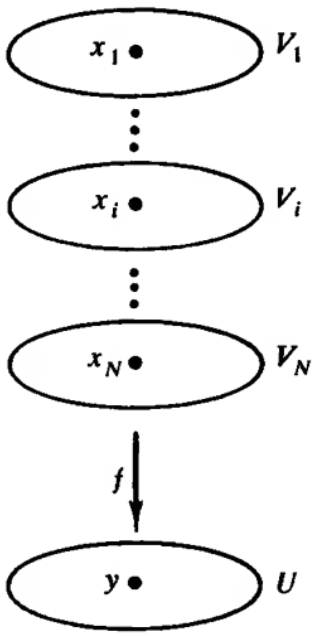


Figura 1-13. Il teorema della pila di dischi (*Stack of Records Theorem*).

8. Sia

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

un polinomio a coefficienti complessi, e considerate la corrispondente applicazione $z \mapsto p(z)$ del piano complesso $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dimostrate che è una sommersione tranne che in un numero finito di punti.

9. Mostrate che il gruppo ortogonale $O(n)$ è compatto. [*Suggerimento:* mostrate che, se $A = (a_{ij})$ è ortogonale, allora $\sum_j a_{ij}^2 = 1$ per ogni i.]

Pagina 27 dell'originale

10. Verificate che lo spazio tangente a $O(n)$ nella matrice identità I è lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche $n \times n$, ossia delle matrici A tali che $A^t = -A$.

11. (a) Le matrici $n \times n$ con determinante $+1$ formano un gruppo indicato con $SL(n)$. Dimostrate che $SL(n)$ è una sottovarietà di $M(n)$, e quindi un gruppo di Lie. [*Suggerimento:* dimostrate che 0 è l'unico valore critico di $\det : M(n) \to \mathbb{R}$. In effetti, se $\det(A) \neq 0$, mostrate che det è già una sommersione quando viene ristretto all'insieme $\{tA : t > 0\}$. *Osservazione:* si tratta in realtà di un caso particolare dell'esercizio 6.][8]

(b) Verificate che lo spazio tangente a $SL(n)$ nella matrice identità consiste di tutte le matrici di traccia nulla.

[8] *Precisazione del traduttore.* Per $n = 1$ il determinante è l'identità su $\mathbb{R}$ e non ha valori critici: anche qui, uniformemente in $n \geq 1$, la conclusione corretta è che 0 è l'unico valore critico *possibile*. Il riferimento all'esercizio 6 è la correzione degli errata.

12. Dimostrate che l'insieme di tutte le matrici 2×2 di rango 1 è una sottovarietà tridimensionale di $\mathbb{R}^4 = M(2)$. [*Suggerimento:* mostrate che la funzione determinante è una sommersione sulla varietà delle matrici 2×2 non nulle $M(2) - \{0\}$.]

13. Dimostrate che l'insieme delle matrici $m \times n$ di rango r è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{mn}$ di codimensione $(m - r)(n - r)$. [*Suggerimento:* supponete, per semplicità, che una matrice $m \times n$ A abbia la forma

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

dove la matrice B, di dimensione $r \times r$, è non singolare (le righe inferiori sono $m-r$). Moltiplicate a destra per la matrice non singolare

$$\begin{pmatrix} I & -B^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

per dimostrare che rango$(A) = r$ se e solo se $E - DB^{-1}C = 0$.]

§5. Trasversalità

Pagina 27 dell'originale

Abbiamo osservato che le soluzioni di un'equazione $f(x) = y$ formano una varietà liscia, purché y sia un valore regolare dell'applicazione $f : X \to Y$. Consideriamo ora insiemi di punti di X i cui valori mediante f siano vincolati, non necessariamente a essere costanti, ma a soddisfare una condizione liscia arbitraria. Supponiamo dunque che Z sia una sottovarietà di Y ed esaminiamo l'insieme delle soluzioni della relazione $f(x) \in Z$. Quando possiamo assicurarci che questo insieme di soluzioni, la controimmagine $f^{-1}(Z)$, sia un oggetto geometrico trattabile? Questa domanda ci condurrà a definire una nuova proprietà differenziale, un'estensione della nozione di regolarità, che diventerà il tema principale del libro.

Pagina 28 dell'originale

Che $f^{-1}(Z)$ sia una varietà è una questione locale. Ossia, è una varietà se e solo se ogni punto $x \in f^{-1}(Z)$ possiede un intorno U in X tale che $f^{-1}(Z) \cap U$ sia una varietà. Questa osservazione ci permette di ridurre lo studio della relazione $f(x) \in Z$ al caso più semplice, già esaminato, in cui Z è un singolo punto. Infatti, se $y = f(x)$, possiamo scrivere Z, in un intorno di y, come l'insieme degli zeri di una famiglia di funzioni indipendenti $g_1, \ldots, g_l$, dove l è la codimensione di Z in Y. Vicino a x, quindi, la controimmagine $f^{-1}(Z)$ è l'insieme degli zeri delle funzioni $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$. Indichiamo con g la sommersione $(g_1, \ldots, g_l)$ definita attorno a y (Figura 1-14). All'applicazione $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$ possiamo ora applicare i risultati già ottenuti: $(g \circ f)^{-1}(0)$ è certamente una varietà quando 0 è un valore regolare di $g \circ f$.

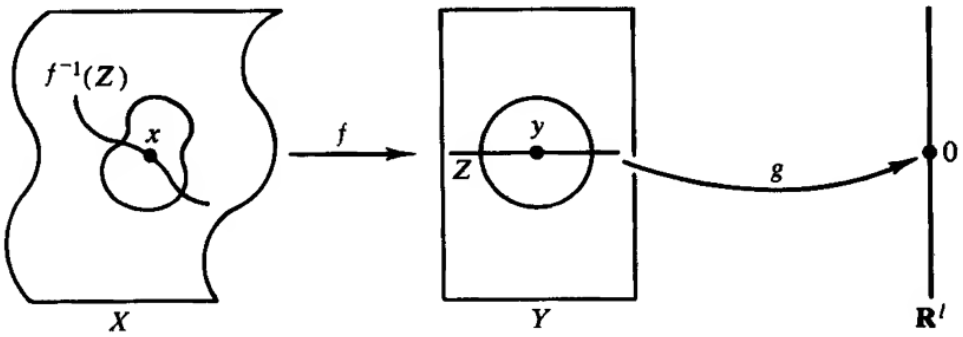


Figura 1-14. Riduzione locale della controimmagine di una sottovarietà alla controimmagine di 0.

Benché l'applicazione g sia piuttosto arbitraria, la condizione che 0 sia un valore regolare di $g \circ f$ si può facilmente riformulare usando soltanto f e Z. Poiché

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x,$$

l'applicazione lineare $d(g \circ f)_x : T_x(X) \to \mathbb{R}^l$ è suriettiva se e solo se dg_y manda l'immagine di df_x su tutto $\mathbb{R}^l$. Ma $dg_y : T_y(Y) \to \mathbb{R}^l$ è una trasformazione lineare suriettiva il cui nucleo è il sottospazio $T_y(Z)$. Quindi dg_y manda un sottospazio di $T_y(Y)$ su tutto $\mathbb{R}^l$ precisamente quando quel sottospazio, insieme con $T_y(Z)$, genera tutto $T_y(Y)$. Concludiamo che $g \circ f$ è una sommersione nel punto $x \in f^{-1}(Z)$ se e solo se

$$\boxed{\mathrm{Im}(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y).}$$

La nostra indagine ci ha condotti inevitabilmente a questa equazione. L'applicazione f si dice *trasversale* alla sottovarietà Z, in simboli $f \pitchfork Z$, se l'equazione vale in ogni punto x della controimmagine di Z. Abbiamo dimostrato il seguente

Teorema. Se l'applicazione liscia $f : X \to Y$ è trasversale a una sottovarietà $Z \subset Y$, la controimmagine $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di X. Inoltre, la codimensione di $f^{-1}(Z)$ in X è uguale alla codimensione di Z in Y.

Pagina 29 dell'originale

Quanto all'affermazione sulla codimensione, osservate che abbiamo scritto localmente $f^{-1}(Z)$ come insieme degli zeri di l funzioni indipendenti $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$. Pertanto la codimensione di $f^{-1}(Z)$ in X è l, che avevamo definito proprio come la codimensione di Z in Y.

Quando Z è un solo punto y, il suo spazio tangente è il sottospazio nullo di $T_y(Y)$. Dunque f è trasversale a y se $df_x[T_x(X)] = T_y(Y)$ per ogni $x \in f^{-1}(y)$, ossia se y è un valore regolare di f. La trasversalità include quindi la nozione di regolarità come caso particolare.

Come esempio molto semplice, considerate $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(t) = (0, t)$, e sia Z l'asse x in $\mathbb{R}^2$ (Figura 1-15). L'applicazione $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(t) = (t, t^2)$, invece, non è trasversale a Z (Figura 1-16).

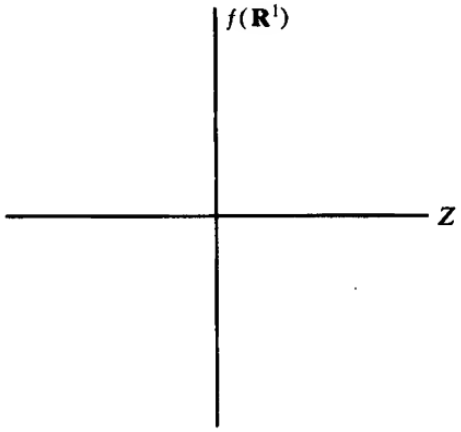


Figura 1-15. L'immagine di $f(t) = (0, t)$ è trasversale all'asse x.

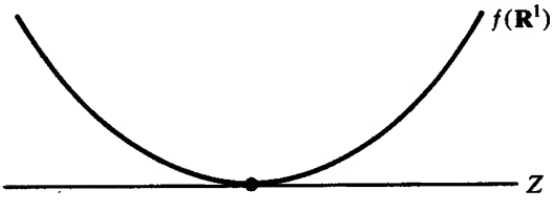


Figura 1-16. La parabola è tangente all'asse x: manca la trasversalità.

La situazione particolare più importante e più facile da visualizzare riguarda la trasversalità dell'applicazione di inclusione i di una sottovarietà $X \subset Y$ rispetto a un'altra sottovarietà $Z \subset Y$. Dire che un punto $x \in X$ appartiene alla controimmagine $i^{-1}(Z)$ significa semplicemente che appartiene all'intersezione $X \cap Z$. Inoltre, la derivata $di_x : T_x(X) \to T_x(Y)$ è semplicemente l'inclusione di $T_x(X)$ in $T_x(Y)$. Quindi $i \pitchfork Z$ se e solo se, per ogni $x \in X \cap Z$,

$$T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y).$$

Osservate che questa equazione è simmetrica in X e Z.

Pagina 30 dell'originale

Quando vale, diremo che le due sottovarietà X e Z sono *trasversali*, e scriveremo $X \pitchfork Z$. Il teorema precedente si specializza nel seguente:

Teorema. L'intersezione di due sottovarietà trasversali di Y è ancora una sottovarietà. Inoltre,

$$\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z.$$

L'additività della codimensione, che si ricava con un calcolo aritmetico immediato dall'affermazione sulla codimensione del teorema precedente, è del tutto naturale. Attorno a un punto $x \in X \cap Z$, la sottovarietà X è definita in Y dall'annullarsi di $k = \operatorname{codim} X$ funzioni indipendenti, e Z da $l = \operatorname{codim} Z$ funzioni indipendenti. Quindi $X \cap Z$ è localmente l'insieme di annullamento della famiglia complessiva di $k + l$ funzioni: che queste funzioni siano tutte insieme indipendenti è esattamente la condizione di trasversalità.

Bisogna ricordare che la trasversalità di X e Z dipende anche dallo spazio ambiente Y. Per esempio, i due assi coordinati si intersecano trasversalmente in $\mathbb{R}^2$, ma non quando sono considerati sottovarietà di $\mathbb{R}^3$. In generale, se la somma delle dimensioni di X e Z è minore della dimensione di Y, essi possono essere trasversali soltanto non intersecandosi affatto. Per esempio, se X e Y sono curve in $\mathbb{R}^3$, allora $X \pitchfork Y$ implica che $X \cap Y$ è vuota. Alcuni esempi sono mostrati nelle Figure 1-17–1-19. In ciascun caso, esaminate l'intersezione tenendo presente il teorema.

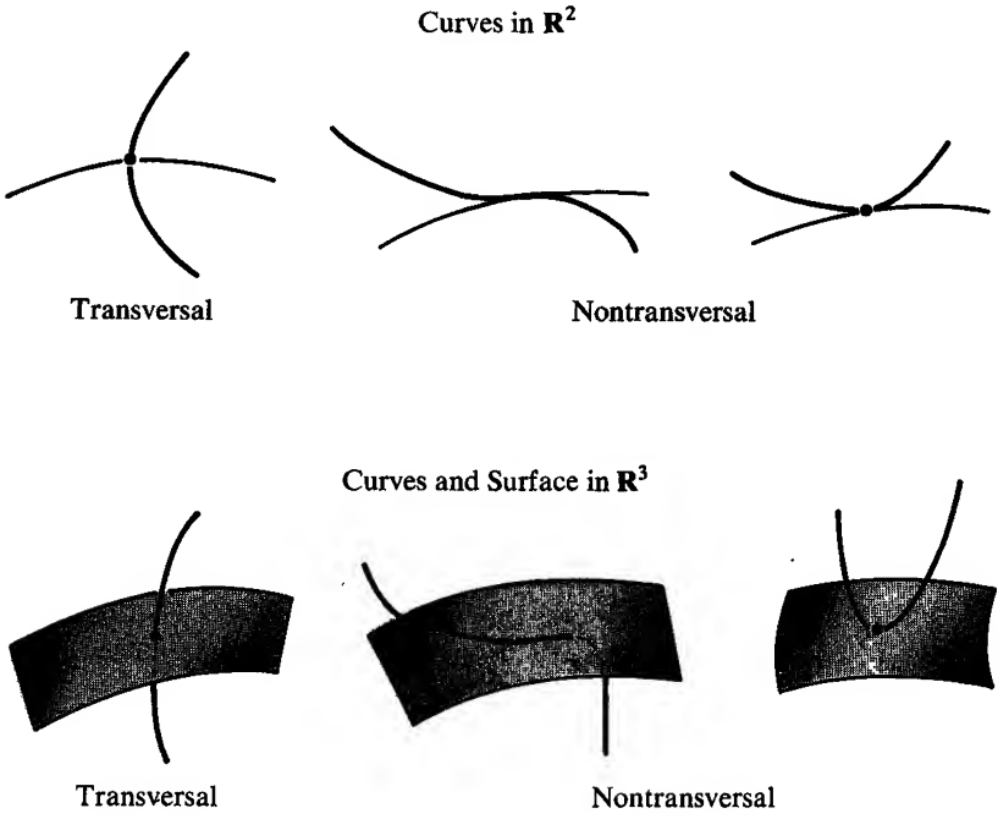


Figura 1-17. Curve in $\mathbb{R}^2$ e curve con una superficie in $\mathbb{R}^3$: a sinistra intersezioni trasversali, negli altri casi non trasversali.

Pagina 31 dell'originale

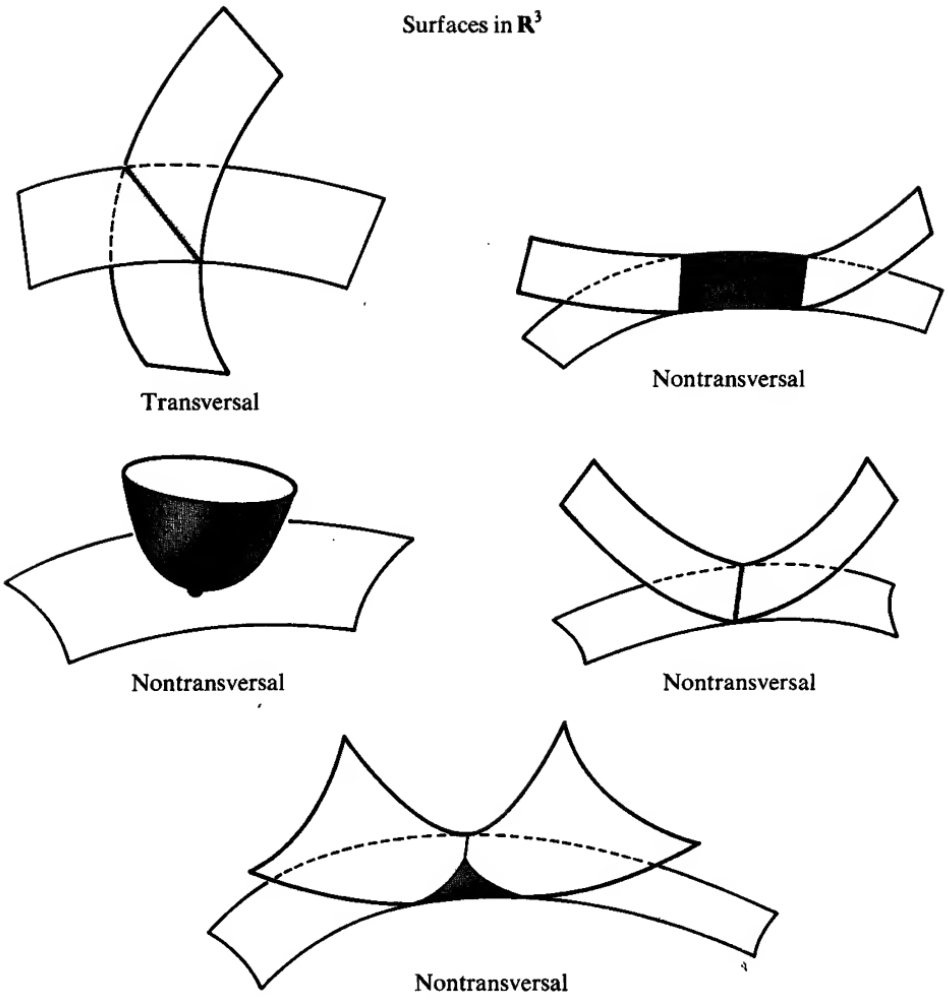


Figura 1-18. Superfici in $\mathbb{R}^3$: il primo esempio in alto a sinistra è trasversale; gli altri non lo sono.

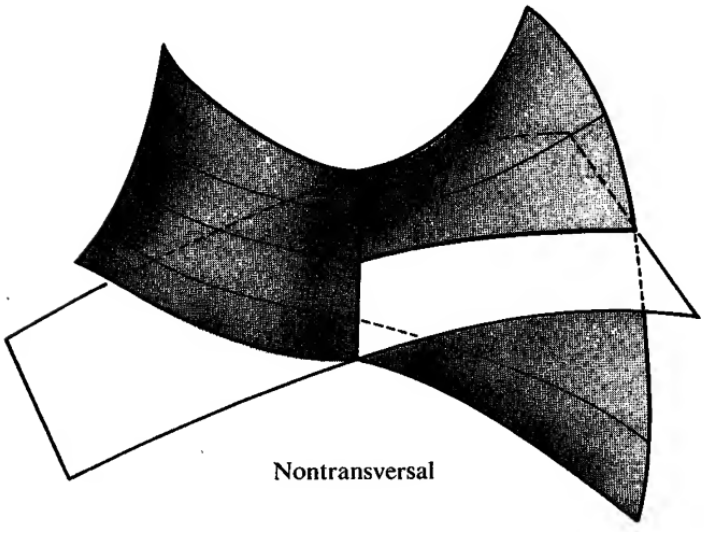


Figura 1-19. Un'ulteriore intersezione non trasversale.

Pagina 32 dell'originale

La trasversalità sarà fondamentale per la teoria topologica dei capitoli successivi: dedicate quindi fin d'ora un po' di tempo a sviluppare la vostra intuizione. Il procedimento migliore consiste

probabilmente nel disegnare alcune decine di figure di varietà che si intersecano nello spazio a due e a tre dimensioni. Scoprirete che le intersezioni trasversali sono piuttosto ordinarie, ma molto affidabili e nette. Guardate invece quanto possano essere bizzarre le intersezioni non trasversali, ed esaminate le vostre costruzioni per capire precisamente dove viene meno la trasversalità. Vi abbiamo dato un punto di partenza con una serie di esempi semplici ma tipici.

Esercizi

1. (a) Supponiamo che $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sia un'applicazione lineare e che V sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Verificate che $A \pitchfork V$ significa semplicemente $A(\mathbb{R}^k) + V = \mathbb{R}^n$.

(b) Se V e W sono sottospazi lineari di $\mathbb{R}^n$, allora $V \pitchfork W$ significa semplicemente $V + W = \mathbb{R}^n$.

2. Quali dei seguenti spazi lineari si intersecano trasversalmente?

(a) Il piano xy e l'asse z in $\mathbb{R}^3$.

(b) Il piano xy e il piano generato da $\{(3, 2, 0), (0, 4, -1)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Il piano generato da $\{(1, 0, 0), (2, 1, 0)\}$ e l'asse y in $\mathbb{R}^3$.

(d) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ in $\mathbb{R}^n$. (Dipende da k, l, n.)

(e) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ e $\mathbb{R}^l \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$. (Dipende da k, l, n.)

(f) $V \times \{0\}$ e la diagonale in $V \times V$.

(g) Le matrici simmetriche ($A^t = A$) e antisimmetriche ($A^t = -A$) in $M(n)$.

3. Siano V_1, V_2, V_3 sottospazi lineari di $\mathbb{R}^n$. Si dice che hanno «intersezione normale» se $V_i \pitchfork (V_j \cap V_k)$ ogni volta che $i \neq j$ e $i \neq k$. Dimostrate che ciò accade se e solo se

$$\operatorname{codim}(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2 + \operatorname{codim} V_3.$$

***4.** Siano X e Z sottovarietà trasversali di Y. Dimostrate che, se $y \in X \cap Z$,

$$T_y(X \cap Z) = T_y(X) \cap T_y(Z).$$

(«Lo spazio tangente all'intersezione è l'intersezione degli spazi tangenti.»)

***5.** Più in generale, sia $f : X \to Y$ un'applicazione trasversale a una sottovarietà Z di Y. Allora $W = f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di X. Dimostrate che $T_x(W)$ è la controimmagine di $T_{f(x)}(Z)$ mediante l'applicazione lineare $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$.

Pagina 33 dell'originale

(«Lo spazio tangente alla controimmagine di Z è la controimmagine dello spazio tangente a Z.») (Perché questo implica l'esercizio 4?)

6. Supponiamo che X e Z non si intersechino trasversalmente in Y. Può $X \cap Z$ essere comunque una varietà? In tal caso, la sua codimensione deve ancora essere $\operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$? (Può esserlo?) Rispondete con dei disegni.

***7.** Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una successione di applicazioni lisce fra varietà, e supponiamo che g sia trasversale a una sottovarietà W di Z. Mostrate che $f \pitchfork g^{-1}(W)$ se e solo se $g \circ f \pitchfork W$.

8. Per quali valori di a l'iperboloide definito da $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ interseca trasversalmente la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a$? Che aspetto ha l'intersezione per i diversi valori di a?

9. Sia V uno spazio vettoriale e sia Δ la diagonale di $V \times V$. Per un'applicazione lineare $A : V \to V$, considerate il grafico $W = \{(v, Av) : v \in V\}$. Mostrate che $W \pitchfork \Delta$ se e solo se $+1$ non è un autovalore di A.

10. Sia $f : X \to X$ un'applicazione con un punto fisso x, ossia $f(x) = x$. Se $+1$ non è un autovalore di $df_x : T_x(X) \to T_x(X)$, allora x si chiama *punto fisso di Lefschetz* di f. Si dice che f è un'*applicazione di Lefschetz* se tutti i suoi punti fissi sono di Lefschetz. Dimostrate che, se X è compatta e f è di Lefschetz, allora f ha soltanto un numero finito di punti fissi.

11. Un teorema di analisi afferma che ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^k$ è l'insieme degli zeri di una funzione liscia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Usate questo teorema per mostrare che, se C è un qualsiasi sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^k$, esiste una sottovarietà X di $\mathbb{R}^{k+1}$ tale che $X \cap \mathbb{R}^k = C$. [Qui consideriamo $\mathbb{R}^k$ come sottovarietà di $\mathbb{R}^{k+1}$ mediante l'inclusione usuale $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto (a_1, \ldots, a_k, 0)$.] Poiché gli insiemi chiusi possono essere estremamente bizzarri, ciò mostra quanto possano essere irregolari le intersezioni non trasversali.

§6. Omotopia e stabilità

Pagina 33 dell'originale

Moltissime proprietà di un'applicazione non cambiano se l'applicazione viene deformata in modo liscio. Intuitivamente, un'applicazione liscia $f_1 : X \to Y$ è una deformazione di un'altra $f_0 : X \to Y$ se esse possono essere congiunte mediante una famiglia di applicazioni $f_t : X \to Y$ che varia in modo liscio. (Si veda la Figura 1-20.) La definizione precisa è uno dei concetti fondamentali della topologia. Indichiamo con I l'intervallo unitario $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f_0 e f_1 sono *omotope*, in simboli $f_0 \sim f_1$, se esiste un'applicazione liscia $F : X \times I \to Y$ tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$. F si chiama un'*omotopia* fra f_0 e f_1.

Pagina 34 dell'originale

L'omotopia è una relazione di equivalenza fra le applicazioni lisce da X a Y (si veda l'esercizio 1), e la classe di equivalenza a cui appartiene un'applicazione si chiama la sua *classe di omotopia*. Per recuperare la famiglia che varia in modo liscio e congiunge f_0 a f_1, basta definire $f_t : X \to Y$ mediante $f_t(x) = F(x, t)$.

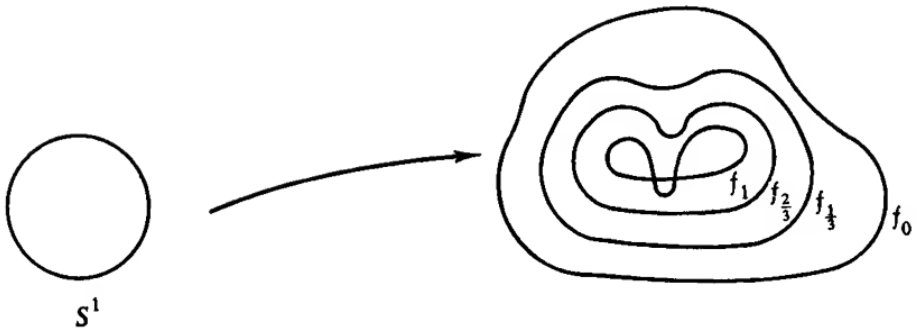


Figura 1-20. Una famiglia di applicazioni della circonferenza che varia in modo liscio.

Nel mondo reale delle percezioni sensoriali e delle misurazioni fisiche, nessuna quantità continua o relazione funzionale è mai determinata perfettamente. Le sole proprietà di un'applicazione che abbiano significato fisico sono quindi quelle che rimangono valide quando l'applicazione viene leggermente deformata. Queste sono *proprietà stabili*, e la collezione delle applicazioni che possiedono una determinata proprietà stabile si può chiamare una *classe stabile di applicazioni*. Precisamente, una proprietà è stabile se, ogni volta che $f_0 : X \to Y$ la possiede e $f_t : X \to Y$ è un'omotopia di f_0, esiste $\varepsilon > 0$ tale che ogni f_t con $t < \varepsilon$ possieda anch'essa la proprietà.

Considerate, per esempio, curve nel piano, cioè applicazioni lisce di $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^2$. La proprietà di passare per l'origine non è stabile: una piccola perturbazione può deformare immediatamente una tale curva in modo che eviti 0 (Figura 1-21). Neppure la proprietà di intersecare l'asse x è stabile (Figura 1-22). L'intersezione trasversale con l'asse x, invece, è una proprietà stabile, come potete vedere facilmente (Figura 1-23).



Figura 1-21. Una piccola deformazione può evitare un punto.

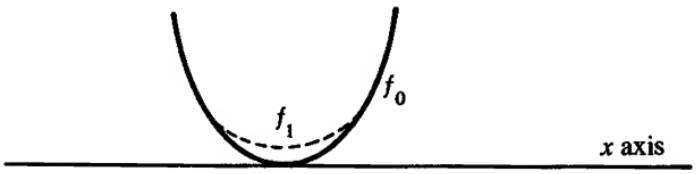


Figura 1-22. Un'intersezione tangente con l'asse x può scomparire.

Pagina 35 dell'originale

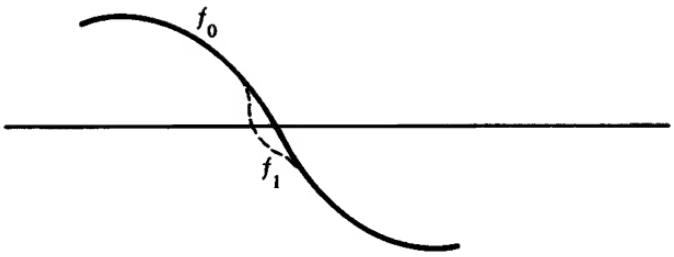


Figura 1-23. Un attraversamento trasversale persiste sotto piccole deformazioni.

Questa situazione è del tutto generale. La condizione ingenua, puramente insiemistica, di intersecarsi è raramente stabile, e perciò non ha significato nel mondo fisico. La trasversalità, nozione che a prima vista sembra formalmente astratta e poco intuitiva, è tutto ciò di cui possiamo realmente fare esperienza.

Dimostriamo che tutte le proprietà differenziali delle applicazioni $X \to Y$ discusse finora sono stabili, purché X sia compatta.

Teorema di stabilità. Le seguenti classi di applicazioni lisce da una varietà compatta X in una varietà Y sono classi stabili:

(a) diffeomorfismi locali;

(b) immersioni;

(c) sommersioni;

(d) applicazioni trasversali a una qualsiasi sottovarietà chiusa fissata $Z \subset Y$;

(e) embedding;

(f) diffeomorfismi.

La nozione di stabilità aiuta a comprendere la trasversalità. Per esempio, perché due curve in $\mathbb{R}^3$ non possono mai intersecarsi trasversalmente, se non evitando del tutto di intersecarsi? La risposta formale è $1+1<3$, ma esiste una ragione più geometrica. Con una piccola deformazione di una delle due curve si possono separare completamente e immediatamente: la loro intersezione non è stabile (Figura 1-24).

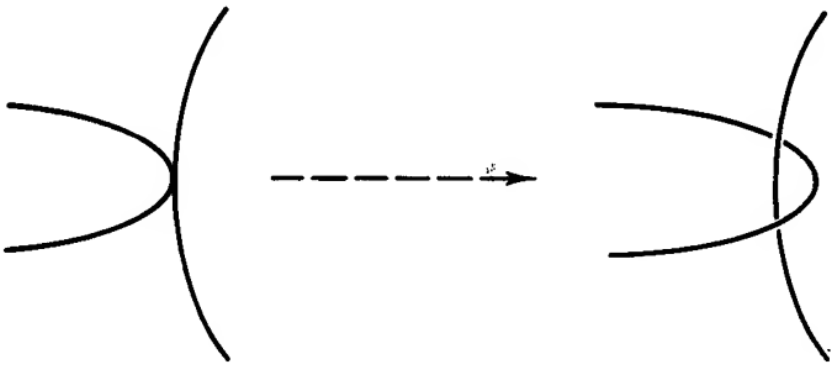


Figura 1-24. Due curve nello spazio possono essere separate da una piccola deformazione.

Lo stesso principio spiega la vera ragione di tutte le esclusioni dimensionali automatiche nella definizione di trasversalità. Se $\dim X + \dim Z < \dim Y$ e

Pagina 36 dell'originale

$f : X \to Y$ incontra Z, si può perturbare f in modo da separarla immediatamente da Z. Quindi nessuna applicazione f può intersecare stabilmente Z.

Inoltre, anche altre intersezioni non trasversali, in dimensioni non escluse aritmeticamente, si possono comprendere dallo stesso punto di vista, come illustrano i disegni della Figura 1-25.

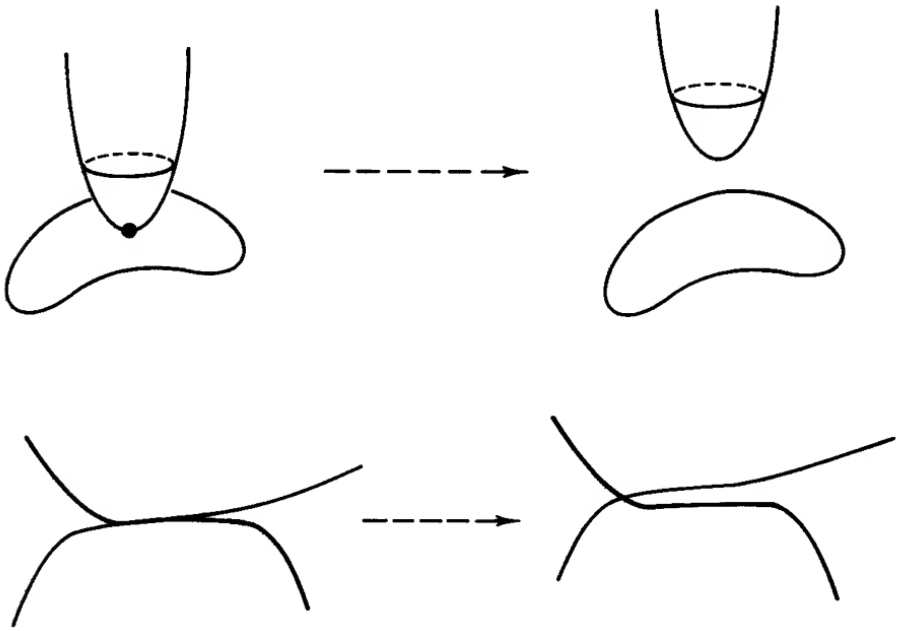


Figura 1-25. Deformazioni di intersezioni non trasversali.

Dimostrazione del teorema di stabilità. La stabilità delle prime quattro classi si dimostra allo stesso modo. I diffeomorfismi locali sono semplicemente le immersioni nel caso particolare $\dim X = \dim Y$, quindi cominciamo dalla classe (b). Se f_t è un'omotopia dell'immersione f_0, dobbiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $d(f_t)_x$ sia iniettiva per tutti i punti $(x, t) \in X \times [0, \varepsilon) \subset X \times I$. La compattezza di X implica che ogni intorno aperto di $X \times \{0\}$ in $X \times I$ contiene $X \times [0, \varepsilon]$ per ε sufficientemente piccolo. Basta quindi dimostrare che ogni punto $(x_0, 0)$ possiede un intorno U in $X \times I$ tale che $d(f_t)_x$ sia iniettiva per $(x, t) \in U$. Poiché l'affermazione è locale, basta dimostrarla quando X è un aperto di $\mathbb{R}^k$ e Y è un aperto di $\mathbb{R}^l$. L'iniettività di $d(f_0)_{x_0}$ implica che la sua

matrice jacobiana $l \times k$

$$\left(\frac{\partial (f_0)_i}{\partial x_j}(x_0)\right)$$

contiene una sottomatrice $k \times k$ con determinante non nullo. Ma ogni derivata parziale

$$\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x),$$

Pagina 37 dell'originale

come funzione su $X \times I$, è continua. Poiché anche la funzione determinante è continua, quella stessa sottomatrice $k \times k$ deve essere non singolare per tutti i punti (x, t) in un intorno di $(x_0, 0)$, come affermato.

La dimostrazione per la classe (c) è praticamente identica. Per (d), ricordate che la trasversalità rispetto a Z si può tradurre localmente in una condizione di sommersione, quindi la dimostrazione è molto simile.

Per (e), ormai basta mostrare che, se f_0 è iniettiva, anche f_t lo è per t sufficientemente piccolo. Questa dimostrazione è imparentata con l'esercizio 10 del §3. Definiamo un'applicazione liscia $G : X \times I \to Y \times I$ mediante $G(x, t) = (f_t(x), t)$. Se (e) fosse falso, esisterebbero una successione $t_i \to 0$ e punti distinti $x_i, y_i \in X$ tali che $G(x_i, t_i) = G(y_i, t_i)$. Poiché X è compatta, possiamo passare a una sottosuccessione in modo da avere $x_i \to x_0$, $y_i \to y_0$. Allora

$$G(x_0, 0) = \lim G(x_i, t_i) = \lim G(y_i, t_i) = G(y_0, 0).$$

Ma $G(x_0, 0) = (f_0(x_0), 0)$ e $G(y_0, 0) = (f_0(y_0), 0)$; dunque, se f_0 è iniettiva, deve essere $x_0 = y_0$.[9] Ora, localmente, possiamo lavorare nello spazio euclideo. La matrice di $dG_{(x_0,0)}$ è semplicemente

$$\left(\begin{array}{c|c} d(f_0)_{x_0} & \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{array} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & 1 \end{array}\right),$$

dove i numeri a_j non ci interessano. Poiché $d(f_0)_{x_0}$ è iniettiva, la sua matrice deve avere k righe indipendenti. La matrice di $dG_{(x_0,0)}$ ha quindi $k + 1$ righe indipendenti, perciò $dG_{(x_0,0)}$ è un'applicazione lineare iniettiva. Di conseguenza, G è un'immersione attorno a $(x_0, 0)$ e deve quindi essere iniettiva in un suo intorno. Ma, per i sufficientemente grande, sia (x_i, t_i) sia (y_i, t_i) appartengono a questo intorno: una contraddizione.

Infine, lasciamo (f) all'esercizio 8. □

Esercizi

***1.** Supponiamo che $f_0, f_1 : X \to Y$ siano omotope. Mostrate che esiste un'omotopia $\widetilde{F} : X \times I \to Y$ tale che $\widetilde{F}(x, t) = f_0(x)$ per ogni $t \in [0, \frac{1}{4}]$ e $\widetilde{F}(x, t) = f_1(x)$ per ogni $t \in [\frac{3}{4}, 1]$. [*Suggerimento:* trovate una funzione liscia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\rho(t) = 0$ se $t \leq \frac{1}{4}$ e $\rho(t) = 1$ se $t \geq \frac{3}{4}$. Sia ora F un'omotopia qualsiasi e ponete $\widetilde{F}(x, t) = F(x, \rho(t))$.]

***2.** Dimostrate che l'omotopia è una relazione di equivalenza: se $f \sim g$ e $g \sim h$, allora $f \sim h$. [*Suggerimento:* per congiungere le omotopie serve l'esercizio 1. Perché?]

[9] *Precisazione del traduttore.* Qui sono esplicitate le seconde componenti nulle, omesse nella formula stampata dell'originale.

Pagina 38 dell'originale

***3.** Mostrate che ogni varietà connessa X è *connessa per archi*: dati due punti qualsiasi $x_0, x_1 \in X$, esiste una curva liscia $f : I \to X$ con $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$. [*Suggerimento:* usate l'esercizio 2 per mostrare che la relazione «x_0 e x_1 si possono congiungere mediante una curva liscia» è una relazione di equivalenza su X, e verificate che le classi di equivalenza sono aperte.]

4. Una varietà X è *contraibile* se la sua applicazione identica è omotopa a un'applicazione costante $X \to \{x\}$, dove x è un punto di X. Verificate che, se X è contraibile, tutte le applicazioni di una varietà arbitraria Y in X sono omotope. (E viceversa.)

5. Mostrate che $\mathbb{R}^k$ è contraibile.

6. Una varietà X è *semplicemente connessa* se è connessa e se ogni applicazione della circonferenza S^1 in X è omotopa a una costante. Verificate che tutti gli spazi contraibili sono semplicemente connessi, ma convincetevi che il viceversa è falso. (Presto svilupperemo strumenti che permettono di dimostrarlo facilmente.)

***7.** Mostrate che l'*applicazione antipodale* $x \mapsto -x$ da S^k a S^k è omotopa all'identità se k è dispari. *Suggerimento:* cominciate da $k = 1$, usando le applicazioni lineari definite da

$$\begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}.$$

8. Dimostrate che i diffeomorfismi costituiscono una classe stabile di applicazioni fra varietà compatte; ossia, dimostrate la parte (f) del teorema di stabilità. [*Suggerimento:* riducetevi al caso connesso. Usate poi il fatto che i diffeomorfismi locali mandano aperti in aperti, insieme con la parte (e) del teorema.]

9. Dimostrate che il teorema di stabilità è falso per domini non compatti. Ecco un controesempio, ma trovatene altri per capire che cosa non funziona. Sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con $\rho(s) = 1$ per $|s| < 1$ e $\rho(s) = 0$ per $|s| > 2$. Definite $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $f_t(x) = x\rho(tx)$. Verificate che questo è un controesempio a tutte e sei le parti del teorema. [Per la parte (d), usate $Z = \{0\}$.]

***10.** Una *deformazione* di una sottovarietà Z in Y è un'omotopia liscia $i_t : Z \to Y$ in cui i_0 è l'inclusione $Z \hookrightarrow Y$ e ciascuna i_t è un embedding. Quindi $Z_t = i_t(Z)$ è una sottovarietà di Y che varia in modo liscio, con $Z_0 = Z$. Mostrate che, se Z è compatta, ogni omotopia i_t della sua inclusione è una deformazione per t piccolo. Date un controesempio nel caso non compatto (diverso dal caso banale $\dim Z = \dim Y$).

Pagina 39 dell'originale

11. Avremo bisogno di una generalizzazione diretta della nozione di omotopia. Supponiamo che $f_s : X \to Y$ sia una famiglia di applicazioni lisce, indicizzata da un parametro s che varia in un sottoinsieme S di uno spazio euclideo. Diciamo che $\{f_s\}$ è una *famiglia liscia di applicazioni* se l'applicazione $F : X \times S \to Y$ definita da $F(x, s) = f_s(x)$ è liscia. Verificate che il teorema di stabilità si generalizza immediatamente nel modo seguente: se f_{s_0} appartiene a una qualsiasi delle classi elencate, esiste $\varepsilon > 0$ tale che f_s appartenga alla stessa classe se $|s_0 - s| < \varepsilon$.

§7. Il teorema di Sard e le funzioni di Morse

Pagina 39 dell'originale

La controimmagine di un valore regolare dell'applicazione liscia $f : X \to Y$ è una sottovarietà ben fatta di X. Questo semplice fatto ci ha condotti a generalizzare la nozione di regolarità nella trasversalità, che speriamo ci aiuti a decifrare alcuni segreti della topologia delle varietà. Ma la condizione di regolarità sui valori di f è forte. Forse è così forte che i valori regolari compaiono troppo raramente perché il teorema della controimmagine sia di grande utilità. In realtà è vero esattamente il contrario, come garantisce il secondo teorema profondo che prendiamo in prestito dal calcolo avanzato.

Teorema di Sard. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione liscia qualsiasi fra varietà, quasi ogni punto di Y è un valore regolare di f.

L'enunciato può sembrare vago, ma rimedieremo subito. Dichiariamo anzitutto che un insieme arbitrario A in $\mathbb{R}^l$ ha *misura nulla* se può essere ricoperto da una quantità numerabile di parallelepipedi rettangoli con volume totale arbitrariamente piccolo. Naturalmente, un parallelepipedo rettangolo in $\mathbb{R}^l$ è semplicemente un prodotto cartesiano di l intervalli di $\mathbb{R}^1$, e il suo volume è il prodotto delle loro lunghezze. Quindi A ha misura nulla se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia numerabile $\{S_1, S_2, \ldots\}$ di parallelepipedi rettangoli in $\mathbb{R}^l$ tale che $A \subset \bigcup_i S_i$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(S_i) < \varepsilon.$$

Il concetto di misura nulla si estende alle varietà mediante parametrizzazioni locali. Un sottoinsieme arbitrario $C \subset Y$ ha misura nulla se, per ogni parametrizzazione locale ψ di Y, la controimmagine $\psi^{-1}(C)$ ha misura nulla nello spazio euclideo. In realtà non occorre verificare la condizione per ogni parametrizzazione: non è difficile mostrare che, se $A \subset \mathbb{R}^l$ ha misura nulla e $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ è liscia, allora $g(A)$ ha misura nulla. (La dimostrazione è nell'Appendice A.) Ne segue che C ha misura nulla purché sia ricoperto dalle immagini di una famiglia di parametrizzazioni locali ψ_α per le quali ciascun $\psi_\alpha^{-1}(C)$ abbia misura nulla.

Pagina 40 dell'originale

L'affermazione del teorema di Sard secondo cui «quasi ogni punto» di Y è un valore regolare di f significa che i punti che non sono valori regolari costituiscono un insieme di misura nulla. Poiché il complementare dei valori regolari è l'insieme dei valori critici, il teorema si può riformulare così:

Teorema di Sard (riformulazione). L'insieme dei valori critici di un'applicazione liscia fra varietà $f : X \to Y$ ha misura nulla.

La dimostrazione del teorema di Sard è stata relegata all'Appendice A, perché ha un carattere nettamente diverso dalle questioni topologiche a cui il teorema sarà applicato.

Non sorprende che nessun parallelepipedo rettangolo di volume positivo in $\mathbb{R}^l$ abbia misura nulla, e quindi nessuno possa essere contenuto in un insieme di misura nulla. (Anche una dimostrazione di questa osservazione si trova nell'Appendice A.) Di conseguenza, nessun insieme di misura nulla in una varietà Y può contenere un aperto non vuoto. Osserviamo dunque il seguente corollario:

Corollario. I valori regolari di qualsiasi applicazione liscia $f : X \to Y$ sono densi in Y. Anzi, date applicazioni lisce $f_i : X_i \to Y$ in quantità numerabile, i punti di Y che sono simultaneamente valori regolari di tutte le f_i sono densi.

La seconda affermazione è vera perché l'unione di una famiglia numerabile $\{C_1, C_2, \ldots\}$ di insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla. Dato $\varepsilon > 0$, scegliete per ciascun i una successione

di parallelepipedi rettangoli $\{S_1^i, S_2^i, \ldots\}$ che ricoprano C_i e tali che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(S_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

La famiglia numerabile $\{S_j^i\}$ ricopre allora $\bigcup_i C_i$ e ha volume totale minore di

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Per il corollario, basta prendere come C_i l'insieme dei valori critici di f_i.[10]

Introduciamo due nuovi termini per concetti già definiti. Se $f : X \to Y$ è liscia, un punto $x \in X$ è un *punto regolare* di f se $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ è suriettiva; si dice anche che f è *regolare in* x, il che significa dunque «f è una sommersione in x». Se df_x non è suriettiva, x è un *punto critico* di f. Questi termini sono comodi e del tutto standard, ma purtroppo si confondono facilmente con i termini collegati «valore regolare» e «valore critico». Attenzione: teneteli distinti! I valori regolari e critici appartengono a Y; i punti regolari e critici appartengono a X. [Osservate: y è un valore regolare se ogni $x \in f^{-1}(y)$ è un punto regolare; y è un valore critico se anche uno solo degli $x \in f^{-1}(y)$ è un punto critico.]

Pagina 41 dell'originale

In particolare, ricordate che il teorema di Sard afferma che l'insieme dei valori critici di $f : X \to Y$ ha misura nulla in Y, non che l'insieme dei punti critici abbia misura nulla in X. Come semplice promemoria, esaminate un'applicazione costante di X in Y: se $\dim Y > 0$, l'insieme dei punti critici è tutto X, e dunque certamente non ha misura nulla.

Illustriamo l'uso del teorema di Sard con un'applicazione tipica, l'ultima parte della nostra discussione sul comportamento locale ottimale delle applicazioni. Consideriamo qui soltanto funzioni lisce su una varietà X, ossia applicazioni $f : X \to \mathbb{R}$. In un punto $x \in X$, o f è regolare oppure $df_x = 0$. Se è regolare, possiamo scegliere un sistema di coordinate attorno a x nel quale f sia semplicemente la prima funzione coordinata. Conosciamo quindi davvero tutto del comportamento locale di f nei punti regolari, almeno a meno di diffeomorfismo. Ma che cosa possiamo dire nei punti critici? Considerazioni topologiche costringono spesso le applicazioni ad avere punti critici. Per esempio, se X è compatta, ogni funzione su X deve avere un massimo e un minimo. Ma, se $f(x)$ è un valore estremo, f non può evidentemente essere una funzione coordinata vicino a x, perciò df_x deve essere zero. Quindi sui domini compatti ogni funzione ha almeno due punti critici, salvo il caso $X = \{\text{un punto}\}$.

Esiste almeno una «forma migliore» per le funzioni attorno ai punti critici. Lavoriamo dapprima in $\mathbb{R}^k$, supponendo che f abbia un punto critico in x. Probabilmente ricordate dal calcolo infinitesimale che, quando $df_x = 0$, ossia quando tutte le derivate parziali $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_k$ si annullano in x, esistono criteri piuttosto semplici per determinare se f abbia un massimo, un minimo o una sella in x. Questi criteri coinvolgono le derivate seconde di f e forniscono informazioni conclusive purché la *matrice hessiana* delle derivate parziali seconde

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

sia non singolare in x. Se l'hessiana è non singolare nel punto critico x, si dice che x è un *punto critico non degenere* di f.

[10] *Correzione del traduttore.* Qui l'originale stampa «critical points»; occorre «critical values», poiché C_i è un sottoinsieme dello spazio di arrivo Y.

I punti critici non degeneri sono ragionevoli almeno in un senso: sono isolati dagli altri punti critici di f. Per vederlo, definite $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mediante

$$g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

Allora $df_x = 0$ se e solo se $g(x) = 0$. Inoltre, nella rappresentazione matriciale standard, la derivata dg_x non è altro che l'hessiana di f in x. Quindi, se x è non degenere, non solo $g(x) = 0$, ma g manda anche un intorno di x diffeomorficamente su un intorno di 0. Pertanto g non può annullarsi in altri punti di questo intorno, e f non vi ha altri punti critici.

Pagina 42 dell'originale

Il comportamento locale di una funzione in un punto critico non degenere è completamente determinato, a meno di diffeomorfismo, da un teorema chiamato *lemma di Morse*. Questo teorema di «forma canonica» è analogo nello spirito ai teoremi di classificazione locale delle immersioni e delle sommersioni: specifica esplicitamente la funzione f, in un opportuno sistema di coordinate, mediante la matrice hessiana delle derivate seconde nel punto critico.

Lemma di Morse. Supponiamo che $a \in \mathbb{R}^k$ sia un punto critico non degenere della funzione f e che

$$(h_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$$

sia l'hessiana di f in a. Allora esiste un sistema di coordinate locali $(x_1, \ldots, x_k)$ attorno ad a tale che

$$f = f(a) + \sum_{i,j} h_{ij} x_i x_j$$

vicino ad a.

Quindi ogni funzione vicino a un punto critico non degenere è localmente equivalente a un polinomio quadratico i cui coefficienti costituiscono l'hessiana. Evidentemente il lemma di Morse, che non dimostreremo né useremo, è molto più forte dell'affermazione che l'hessiana determina se f abbia un massimo o un minimo in a. (Si veda l'esercizio 11.)

Il concetto di non degenerazione ha senso sulle varietà tramite parametrizzazioni locali. Supponiamo che $f : X \to \mathbb{R}$ abbia un punto critico in x e che ϕ sia una parametrizzazione locale che manda l'origine in x. Allora 0 è un punto critico di $f \circ \phi$, poiché $d(f \circ \phi)_0 = df_x \circ d\phi_0 = 0$. Diremo che x è non degenere per f se 0 è non degenere per $f \circ \phi$. La difficoltà di queste definizioni locali è che bisogna sempre dimostrare l'irrilevanza della scelta della parametrizzazione. In questo caso, se ϕ_1 e ϕ_2 sono due scelte, allora $f \circ \phi_1 = (f \circ \phi_2) \circ \psi$, dove $\psi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$. Dobbiamo quindi dimostrare il seguente

Lemma. Supponiamo che f sia una funzione su $\mathbb{R}^k$ con un punto critico non degenere in 0 e che ψ sia un diffeomorfismo con $\psi(0) = 0$. Allora anche $f \circ \psi$ ha un punto critico non degenere in 0.

Dimostrazione. Basta calcolare usando la forma esplicita della regola della catena in $\mathbb{R}^k$. Poniamo $f' = f \circ \psi$, e siano H e H' le hessiane in 0 rispettivamente di f e di f'. Dobbiamo mostrare che $\det(H) \neq 0$ implica $\det(H') \neq 0$. La regola della catena afferma che

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(x) = \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(\psi(x)) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}(x).$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(0) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}(0) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_j}(0) + \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(0) \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}(0).$$

Pagina 43 dell'originale

Poiché 0 è un punto critico di f, ciascun termine della seconda somma è nullo. Nella notazione del prodotto matriciale, dunque, $H' = (d\psi_0)^t H (d\psi_0)$, dove t indica la trasposta. Ora $\det(d\psi_0) \neq 0$, perché ψ è un diffeomorfismo, e $\det((d\psi_0)^t) = \det(d\psi_0)$. La moltiplicatività del determinante mostra quindi che $\det(H') \neq 0$ se $\det(H) \neq 0$. □

Benché la verifica che la non degenerazione è definita sulle varietà sia stata poco elegante, il concetto ha grande valore. Vi sono diverse ragioni, strettamente collegate, della sua importanza. In primo luogo, il lemma di Morse descrive completamente il comportamento delle funzioni nei punti non degeneri, rendendo possibili costruzioni dettagliate. In secondo luogo, le funzioni i cui punti critici sono tutti non degeneri, chiamate *funzioni di Morse*, rivelano molto della topologia delle varietà su cui sono definite. Potremo illustrare questo meraviglioso argomento soltanto in due casi relativamente elementari (nell'Appendice A, da leggere insieme al secondo capitolo, e in un esercizio del capitolo III, §5). Ma Marston Morse ha realizzato un delizioso film [4] che descrive intuitivamente il caso bidimensionale. Un altro ottimo riferimento è il libro *Morse Theory* [3] di John Milnor: prima o poi vorrete certamente leggerlo, ma vi raccomandiamo in particolare di leggere presto l'introduzione informale nelle prime tre pagine. (Milnor presenta anche una semplice dimostrazione del lemma di Morse.)

Una terza ragione dell'importanza della non degenerazione è che essa rappresenta la situazione comune: la presenza di punti critici degeneri è davvero rara. Dedurremo infatti da Sard che, in un senso ragionevole, la grandissima maggioranza delle funzioni è costituita da funzioni di Morse. Supponiamo che la varietà X sia contenuta in $\mathbb{R}^N$, e siano $x_1, \ldots, x_N$ le funzioni coordinate usuali su $\mathbb{R}^N$. Se f è una funzione su X e $a = (a_1, \ldots, a_N)$ è una N-upla di numeri, definiamo una nuova funzione su X mediante

$$f_a = f + a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N.$$

Il risultato a cui alludiamo è il seguente:

Teorema. Qualunque sia la funzione $f : X \to \mathbb{R}$, per quasi ogni $a \in \mathbb{R}^N$ la funzione f_a è una funzione di Morse su X.

Come prima, «quasi ogni» significa che i valori a per cui l'affermazione è falsa costituiscono soltanto un insieme di misura nulla.

Dimostriamo prima il risultato in $\mathbb{R}^k$.

Lemma. Sia f una funzione liscia su un aperto U di $\mathbb{R}^k$. Per quasi tutte le k-uple $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, la funzione

$$f_a = f + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$$

è una funzione di Morse su U.

Pagina 44 dell'originale

Dimostrazione. Usiamo ancora $g : U \to \mathbb{R}^k$ definita da

$$g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

La derivata di f_a in un punto p è rappresentata in coordinate da

$$(df_a)_p = \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f_a}{\partial x_k}(p)\right) = g(p) + a.$$

Quindi p è un punto critico di f_a se e solo se $g(p) = -a$. Inoltre, poiché f_a e f hanno le stesse derivate seconde, l'hessiana di f_a in p è la matrice $(dg)_p$. Supponiamo ora che $-a$ sia un valore regolare di g. Allora, ogni volta che $g(p) = -a$, la matrice $(dg)_p$ è non singolare. Di conseguenza, ogni punto critico di f_a è non degenere. Ma Sard implica che $-a$ è un valore regolare di g per quasi ogni $a \in \mathbb{R}^k$. □

Dimostrazione del teorema. Supponiamo che x sia un punto qualsiasi di X e che $x_1, \ldots, x_N$ siano le funzioni coordinate canoniche su $\mathbb{R}^N$. Le restrizioni a X di alcune k di esse, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, costituiscono un sistema di coordinate in un intorno di x. Era un esercizio, ma eccone una dimostrazione. Se $\phi_1, \ldots, \phi_N$ è la base canonica dei funzionali lineari su $\mathbb{R}^N$, alcune k di queste, $\phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_k}$, sono linearmente indipendenti quando vengono ristrette al sottospazio vettoriale $T_x(X)$. Poiché la derivata della funzione coordinata $x_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è semplicemente il funzionale lineare $\phi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, la derivata in x della restrizione di x_i a X è la restrizione di ϕ_i a $T_x(X)$. L'indipendenza lineare di $\phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_k}$ su $T_x(X)$ implica quindi che $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) : X \to \mathbb{R}^k$ è un diffeomorfismo locale in x.

Possiamo pertanto ricoprire X con aperti U_α tali che, su ciascuno, alcune k delle funzioni $x_1, \ldots, x_N$ formino un sistema di coordinate. Inoltre, per il secondo assioma di numerabilità (si veda la nota introduttiva allo studente), possiamo supporre che gli U_α siano soltanto in quantità numerabile.

Sia ora U_α uno di questi insiemi e, per comodità, supponiamo che $(x_1, \ldots, x_k)$ sia un sistema di coordinate su U_α. Per ogni $(N-k)$-upla $c = (c_{k+1}, \ldots, c_N)$ considerate la funzione

$$f_{(0,c)} = f + c_{k+1}x_{k+1} + \cdots + c_N x_N.$$

Il lemma implica che, per quasi ogni $b \in \mathbb{R}^k$, la funzione

$$f_{(b,c)} = f_{(0,c)} + b_1 x_1 + \cdots + b_k x_k$$

è di Morse su U_α. Sia ora S_α l'insieme dei punti $a \in \mathbb{R}^N$ tali che f_a non è di Morse su U_α. Abbiamo appena mostrato che ogni «sezione orizzontale» $S_\alpha \cap (\mathbb{R}^k \times \{c\})$ ha misura nulla, considerata come sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$.

Pagina 45 dell'originale

Dovrebbe apparirvi plausibile che ogni sottoinsieme ragionevole di $\mathbb{R}^N$ le cui sezioni orizzontali hanno tutte misura nulla in $\mathbb{R}^k$ debba avere esso stesso misura nulla in $\mathbb{R}^N$: è una forma del «teorema di Fubini», dimostrata nell'Appendice A. Ammettendola per il momento, concludiamo che ogni S_α ha misura nulla in $\mathbb{R}^N$.

Evidentemente una funzione ha un punto critico degenere su X se e solo se ne ha uno in qualche U_α. Quindi l'insieme delle N-uple a per cui f_a non è di Morse su X è l'unione degli S_α. Poiché un'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla, abbiamo concluso. □

Esercizi

1. Mostrate che $\mathbb{R}^k$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^l$, per $k < l$.

2. Sia A un sottoinsieme di misura nulla di $\mathbb{R}^k$. Mostrate che $A \times \mathbb{R}^l$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^{k+l}$. (Ciò implica l'esercizio 1. Come?)

3. Supponiamo che Z sia una sottovarietà di X con $\dim Z < \dim X$. Dimostrate che Z ha misura nulla in X, senza usare Sard!

4. Dimostrate che i numeri razionali hanno misura nulla in $\mathbb{R}^1$, pur essendo densi.

5. Esibite un'applicazione liscia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui insieme di valori critici sia denso. [*Suggerimento:* disponete i razionali in una successione $r_0, r_1, \ldots$. Costruite ora una funzione liscia su $[i, i+1]$ che sia nulla vicino agli estremi e che abbia r_i come valore critico (Figura 1-26).]



Figura 1-26. Una funzione nulla vicino agli estremi, con un tratto costante di valore r_i.

***6.** Dimostrate che la sfera S^k è semplicemente connessa se $k > 1$. [*Suggerimento:* se $f : S^1 \to S^k$ e $k > 1$, Sard fornisce un punto $p \notin f(S^1)$. Usate ora la proiezione stereografica.]

7. Quando $\dim X < \dim Y$, Sard afferma che l'immagine di ogni applicazione liscia $f : X \to Y$ ha misura nulla in Y. Dimostrate voi stessi questo «mini-Sard», assumendo che, se A ha misura nulla in $\mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ è liscia,

Pagina 46 dell'originale

allora anche $g(A)$ ha misura nulla. [*Suggerimento:* riducetevi al caso di un'applicazione f da un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^l$. Considerate $F : U \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$ definita da $F(x,t) = f(x)$.]

8. Analizzate il comportamento critico all'origine delle funzioni seguenti. Il punto critico è non degenere? È isolato? È un massimo o un minimo locale?

(a) $f(x,y) = x^2 + 4y^3$;
(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$;
(c) $f(x,y) = x^2 + y^4$;
(d) $f(x,y) = x^2 + 11xy + y^2/2 + x^6$;
(e) $f(x,y) = 10xy + y^2 + 75y^3$.

9. Dimostrate il lemma di Morse in $\mathbb{R}^1$. [*Suggerimento:* usate questo lemma di calcolo elementare: per ogni funzione f su $\mathbb{R}$ e ogni punto $a \in \mathbb{R}$ esiste un'altra funzione g tale che

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 g(x).$$

Il risultato è dimostrato a pagina 135 dell'originale.]

10. Supponiamo che $f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ in $\mathbb{R}^k$. Verificate che la sua matrice hessiana è $H = A + A^t$, dove $A = (a_{ij})$.[11] Considerando $\mathbb{R}^k$ come lo spazio vettoriale dei vettori colonna, H agisce come applicazione lineare per moltiplicazione a sinistra, come al solito. Mostrate che, se $Hv = 0$, f è

[11] *Correzione del traduttore.* L'originale indica $H = (a_{ij})$, incompatibile con la definizione di hessiana per la forma quadratica scritta. La formula corretta è $H = A + A^t$; se A è simmetrica, $H = 2A$. Il resto dell'esercizio rimane valido con questa correzione, non presente negli errata allegati.

critica lungo tutta la retta passante per v e 0. Quindi l'origine è un punto critico isolato se e solo se H è non singolare.

11. Usando il lemma di Morse, dimostrate che, se a è un punto critico non degenere di f, esiste un sistema di coordinate locali $(x_1, \ldots, x_n)$ attorno ad a tale che

$$f = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2, \qquad \varepsilon_i = \pm 1.$$

[*Suggerimento:* diagonalizzate (h_{ij}).]

12. Dimostrate che la funzione f dell'esercizio 11 ha un massimo in a se tutti gli ε_i sono negativi e un minimo se sono tutti positivi. Mostrate che, se non si verifica nessuno dei due casi, a non è né un massimo né un minimo.

13. Mostrate che la funzione determinante su $M(n)$ è di Morse se $n = 2$, ma non se $n > 2$.

14. Mostrate che la «funzione altezza» $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_k$ sulla sfera S^{k-1} è una funzione di Morse con due punti critici, i poli. Osservate che un polo è un massimo e l'altro un minimo.

Pagina 47 dell'originale

15. Sia X una sottovarietà di $\mathbb{R}^N$. Dimostrate che esiste un'applicazione lineare $l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la cui restrizione a X sia una funzione di Morse. (L'esercizio 14 è un caso particolare.)

16. Sia f una funzione liscia su un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$. Per ogni $x \in U$, sia $H(x)$ la matrice hessiana di f, sia che x sia critico, sia che non lo sia. Dimostrate che f è di Morse se e solo se

$$\det(H)^2 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 > 0 \qquad \text{su } U.$$

17. Supponiamo che f_t sia una famiglia omotopica di funzioni su $\mathbb{R}^k$. Mostrate che, se f_0 è di Morse in un intorno di un compatto K, anche ogni f_t lo è per t sufficientemente piccolo. [*Suggerimento:* mostrate che la somma dell'esercizio 16 è limitata inferiormente da una costante positiva in un intorno di K, purché t sia piccolo.]

18. (*Stabilità delle funzioni di Morse.*) Sia f una funzione di Morse sulla varietà compatta X, e sia f_t una famiglia omotopica di funzioni con $f_0 = f$. Mostrate che ciascuna f_t è di Morse per t sufficientemente piccolo. [*Suggerimento:* esercizio 17.]

19. Sia X una varietà compatta. Dimostrate che esistono funzioni di Morse su X che assumono valori distinti in punti critici distinti. [*Suggerimento:* sia f di Morse e siano $x_1, \ldots, x_N$ i suoi punti critici. Sia ρ_i una funzione liscia su X, uguale a uno in un piccolo intorno di x_i e nulla fuori di un intorno leggermente più grande. Scegliete numeri $a_1, \ldots, a_N$ tali che

$$f(x_i) + a_i \neq f(x_j) + a_j \qquad \text{se } i \neq j.$$

Dimostrate che, se gli a_i sono sufficientemente piccoli,

$$f + \sum_{i=1}^{N} a_i \rho_i$$

ha gli stessi punti critici di f ed è persino arbitrariamente vicina a f.]

20. (a) Supponiamo che X sia una varietà compatta in $\mathbb{R}^N$ e che f sia una funzione su X. Mostrate che le N-uple $(a_1, \ldots, a_N)$ per cui

$$f_a = f + a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N$$

è una funzione di Morse costituiscono un aperto.

(b) Eliminate l'ipotesi di compattezza di X e mostrate che $\{a : f_a$ è di Morse$\}$ è un'intersezione numerabile di aperti. [*Suggerimento:* usate (a) e il secondo assioma di numerabilità.]

(c) L'insieme $\{a : f_a$ non è di Morse$\}$ è quindi un'unione numerabile di chiusi. Mostrate che ciò basta a giustificare l'uso di Fubini nella nostra dimostrazione dell'esistenza delle funzioni di Morse. (Si veda l'Appendice A.)

Pagina 48 dell'originale

21. Sia $\phi : X \to \mathbb{R}^N$ un'immersione. Mostrate che, per «quasi ogni» $a_1, \ldots, a_N$, la funzione $a_1\phi_1 + \cdots + a_N\phi_N$ è di Morse su X, dove $\phi_1, \ldots, \phi_N$ sono le funzioni coordinate di ϕ. [*Suggerimento:* mostrate che la dimostrazione data dell'esistenza di funzioni di Morse richiede soltanto che X sia immersa in $\mathbb{R}^N$, non che vi sia un embedding.]

22. Ecco un'applicazione della teoria di Morse all'elettrostatica. Siano $x_1, \ldots, x_4$ punti in posizione generale in $\mathbb{R}^3$, cioè non tutti contenuti in un piano. Siano $q_1, \ldots, q_4$ cariche elettriche collocate in questi punti. La funzione potenziale del campo elettrico risultante è

$$V_q = \frac{q_1}{r_1} + \cdots + \frac{q_4}{r_4},$$

dove $r_i = |x - x_i|$. I punti critici di V_q si chiamano *punti di equilibrio* del campo elettrico, e un punto di equilibrio è *non degenere* se lo è il punto critico. Dimostrate che, per «quasi ogni» q, i punti di equilibrio di V_q sono non degeneri e in numero finito. [*Suggerimento:* mostrate che l'applicazione $\mathbb{R}^3 - \{x_1, \ldots, x_4\} \to \mathbb{R}^4$ con coordinate r_1, r_2, r_3, r_4 è un'immersione e applicate l'esercizio 21.]

§8. Embedding di varietà nello spazio euclideo

Pagina 48 dell'originale

La seconda applicazione che daremo del teorema di Sard è una dimostrazione del teorema di embedding di Whitney. Una varietà X di dimensione k è stata definita come un sottoinsieme di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^N$, che può essere enorme rispetto a X. Questo spazio euclideo ambiente è piuttosto arbitrario quando consideriamo X come un oggetto astratto. Per esempio, se $M > N$, lo spazio $\mathbb{R}^N$ si incorpora naturalmente in $\mathbb{R}^M$, perciò avremmo potuto costruire la stessa varietà X in $\mathbb{R}^M$. Whitney si domandò quanto grande debba essere N perché $\mathbb{R}^N$ contenga una copia diffeomorfa di ogni varietà di dimensione k. La sua risposta preliminare fu che $N = 2k + 1$ è sufficiente: è il risultato che dimostreremo. Dopo un lavoro considerevole, Whitney migliorò il risultato di un'unità, stabilendo che ogni varietà di dimensione k ammette in realtà un embedding in $\mathbb{R}^{2k}$.

Un modo di interpretare il teorema di Whitney è come un limite alla possibile complessità delle varietà. Ogni varietà definibile in $\mathbb{R}^N$ può essere definita anche in $\mathbb{R}^{N+1}$; ma forse lo spazio aggiuntivo per le torsioni in $\mathbb{R}^{N+1}$ permette di costruirvi varietà che non possono esistere nello spazio più piccolo $\mathbb{R}^N$. (In effetti, non è evidente a priori che un unico spazio euclideo sia abbastanza grande da contenere tutte le varietà di una dimensione fissata.) Un esempio classico è la bottiglia di Klein, una superficie che si può costruire in $\mathbb{R}^4$ congiungendo

Pagina 49 dell'originale

fra loro le estremità circolari di un cilindro, ma con orientazioni opposte. (Quando si identificano le estremità con la stessa orientazione, la varietà risultante è semplicemente il toro.) In $\mathbb{R}^3$ esiste un'immersione della bottiglia di Klein, ma l'autointersezione è inevitabile: non c'è abbastanza spazio per le torsioni per ottenere un embedding (Figura 1-27). (Per immaginare un embedding in $\mathbb{R}^4$, rappresentate la quarta dimensione con l'intensità del colore rosso e lasciate che la bottiglia del disegno arrossisca mentre attraversa se stessa.)

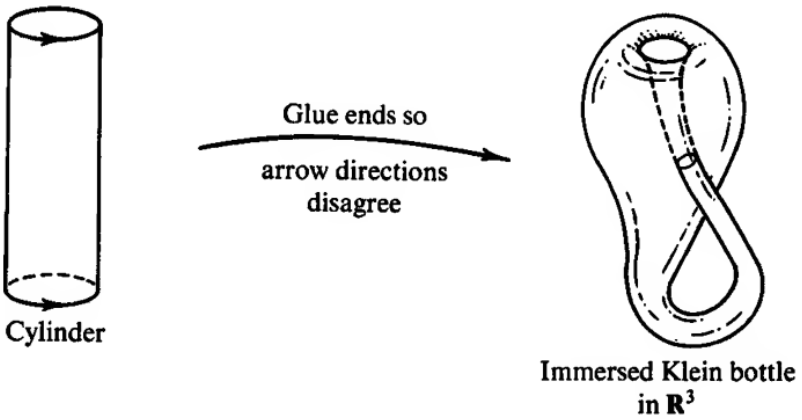


Figura 1-27. Dal cilindro alla bottiglia di Klein: si incollano le estremità con versi discordi delle frecce. A destra, un'immersione in $\mathbb{R}^3$.

Il teorema di Whitney implica che, oltre il doppio della dimensione k delle varietà da costruire, lo spazio aggiuntivo per le torsioni negli enormi spazi euclidei è superfluo: tutto si può fare in $\mathbb{R}^{2k}$. La bottiglia di Klein mostra che il risultato di Whitney è ottimale, perché è una varietà di dimensione $k = 2$ che non ammette embedding in uno spazio di dimensione $3 = 2k - 1$. (La circonferenza è un altro esempio.)

Perché $N = 2k+1$? A nostro avviso, la ragione geometrica per cui lo spazio di dimensione $2k+1$ può accogliere tutte le varietà di dimensione k è una proprietà fondamentale della trasversalità che dimostreremo nel prossimo capitolo. Precisamente: se X e Z sono sottovarietà di Y e

$\dim X + \dim Z < \dim Y$, si possono separare X e Z deformando una delle due di una quantità arbitrariamente piccola (esercizio 6, capitolo II, §3). Per il momento, pensate informalmente a una varietà come a un intricato impianto idraulico, costruito congiungendo tubi di dimensione k e altri raccordi standard, come semisfere di dimensione k, secondo una prescrizione combinatoria. Supponiamo di seguire le istruzioni per assemblare i pezzi in $\mathbb{R}^N$. Piegando i tubi, può accadere che passino gli uni attraverso gli altri, come la bottiglia di Klein immersa in $\mathbb{R}^3$. Ma, una volta completati i collegamenti, possiamo tornare a eliminare le autointersezioni. Purché $N \geq 2k+1$, una minuscola deformazione delle parti che si intersecano produrrà una varietà conforme alla prescrizione. (Questa tecnica non spiega il risultato ottimale di Whitney, $N = 2k$. Per esempio, curve che si intersecano possono essere separate con deformazioni locali in $\mathbb{R}^3$, ma non in $\mathbb{R}^2$.) Si veda la Figura 1-28.

Pagina 50 dell'originale

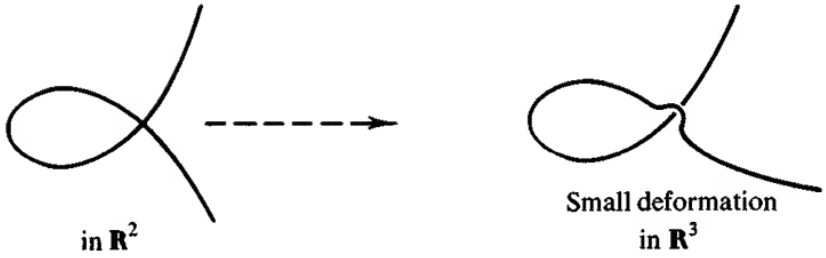


Figura 1-28. Un'intersezione in $\mathbb{R}^2$ eliminata da una piccola deformazione in $\mathbb{R}^3$.

Modellare una dimostrazione accettabile sull'argomento euristico precedente sarebbe piuttosto difficile. Fortunatamente, una dimostrazione diretta, benché meno visiva, si può ricavare dal teorema di Sard.

Un oggetto utile per dimostrare il teorema di Whitney è il *fibrato tangente* di una varietà X in $\mathbb{R}^N$. Gli spazi tangenti a X nei vari punti sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^N$ che in generale si sovrappongono. Il fibrato tangente $T(X)$ è un artificio per separarli. Precisamente, $T(X)$ è il sottoinsieme di $X \times \mathbb{R}^N$ definito da

$$T(X) = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^N : v \in T_x(X)\}.$$

$T(X)$ contiene una copia naturale X_0 di X, costituita dai punti $(x, 0)$. Nella direzione perpendicolare a X_0 contiene copie di ogni spazio tangente $T_x(X)$, incorporate come insiemi $\{(x, v) : v \in T_x(X),\ x \text{ fissato}\}$.

Ogni applicazione liscia $f : X \to Y$ induce un'*applicazione derivata globale* $df : T(X) \to T(Y)$, definita da $df(x, v) = (f(x), df_x(v))$. Osservate che $T(X)$ è un sottoinsieme di uno spazio euclideo: se $X \subset \mathbb{R}^N$, allora $T(X) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Pertanto, se $Y \subset \mathbb{R}^M$, l'applicazione df manda un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2N}$ in $\mathbb{R}^{2M}$. Affermiamo che df è liscia. Infatti, poiché $f : X \to \mathbb{R}^M$ è liscia, attorno a ogni punto si estende a un'applicazione liscia $F : U \to \mathbb{R}^M$, con U aperto in $\mathbb{R}^N$. Allora $dF : T(U) \to \mathbb{R}^{2M}$ estende localmente df. Ma $T(U)$ è tutto $U \times \mathbb{R}^N$, un aperto di $\mathbb{R}^{2N}$, e su questo aperto dF è evidentemente definita da una formula liscia. Ciò mostra che $df : T(X) \to \mathbb{R}^{2M}$ si estende localmente a un'applicazione liscia su un aperto di $\mathbb{R}^{2N}$, e quindi è liscia.

La regola della catena afferma che, per applicazioni lisce $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, la composta $dg \circ df : T(X) \to T(Z)$ coincide con $d(g \circ f)$. Di conseguenza, se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo, anche $df : T(X) \to T(Y)$ lo è: la regola della catena implica che $d(f^{-1}) \circ df$ è l'identità di $T(X)$ e che $df \circ d(f^{-1})$ è l'identità di $T(Y)$. Quindi varietà diffeomorfe hanno fibrati tangenti diffeomorfi. Ne segue che $T(X)$ è un oggetto intrinsecamente associato a X: non dipende dallo spazio euclideo ambiente.

Osservate che, se W è un aperto di X, e dunque una varietà, $T(W)$ è il sottoinsieme $T(X) \cap (W \times \mathbb{R}^N)$ di $T(X)$. Poiché $W \times \mathbb{R}^N$ è aperto in $X \times \mathbb{R}^N$, $T(W)$ è aperto nella topologia di $T(X)$. Supponiamo ora che W sia l'immagine di una

Pagina 51 dell'originale

parametrizzazione locale $\phi : U \to W$, con U aperto in $\mathbb{R}^k$. Allora $d\phi : T(U) \to T(W)$ è un diffeomorfismo. Ma $T(U) = U \times \mathbb{R}^k$ è un aperto di $\mathbb{R}^{2k}$, quindi $d\phi$ parametrizza l'aperto $T(W)$ di $T(X)$. Poiché ogni punto di $T(X)$ appartiene a un intorno di questo tipo, abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione. Il fibrato tangente di una varietà è un'altra varietà, e $\dim T(X) = 2 \dim X$.

Dimostriamo ora una versione del risultato di Whitney.

Teorema. Ogni varietà di dimensione k ammette un'immersione iniettiva in $\mathbb{R}^{2k+1}$.

Dimostrazione. In effetti, se $X \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione k e $N > 2k+1$, costruiremo una proiezione lineare $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2k+1}$ la cui restrizione a X sia un'immersione iniettiva. Procedendo per induzione, dimostriamo che, se $f : X \to \mathbb{R}^M$ è un'immersione iniettiva con $M > 2k+1$, esiste un vettore unitario $a \in \mathbb{R}^M$ tale che la composizione di f con la proiezione sul complemento ortogonale di a sia ancora un'immersione iniettiva. Il complemento $H = \{b \in \mathbb{R}^M : b \perp a\}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $M-1$, quindi isomorfo a $\mathbb{R}^{M-1}$; otteniamo così un'immersione iniettiva in $\mathbb{R}^{M-1}$.

Definiamo $h : X \times X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ mediante $h(x, y, t) = t[f(x) - f(y)]$. Definiamo anche $g : T(X) \to \mathbb{R}^M$ mediante $g(x, v) = df_x(v)$. Poiché $M > 2k+1$, il teorema di Sard implica l'esistenza di un punto $a \in \mathbb{R}^M$ che non appartiene a nessuna delle due immagini; osservate che $a \neq 0$, poiché 0 appartiene a entrambe.

Sia π la proiezione di $\mathbb{R}^M$ sul complemento ortogonale H di a. Certamente $\pi \circ f : X \to H$ è iniettiva. Supponiamo infatti che $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y)$. Dalla definizione di π segue che $f(x) - f(y) = ta$ per uno scalare t. Se $x \neq y$, allora $t \neq 0$, perché f è iniettiva. Ma allora $h(x, y, 1/t) = a$, contraddicendo la scelta di a.

Analogamente, $\pi \circ f : X \to H$ è un'immersione. Supponiamo infatti che v sia un vettore non nullo di $T_x(X)$ con $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$. Poiché π è lineare, la regola della catena dà $d(\pi \circ f)_x = \pi \circ df_x$. Quindi $\pi \circ df_x(v) = 0$ e $df_x(v) = ta$ per uno scalare t. Poiché f è un'immersione, $t \neq 0$. Dunque $g(x, \frac{1}{t}v) = a$, contraddicendo ancora la scelta di a. □

Per le varietà compatte, le immersioni iniettive coincidono con gli embedding: abbiamo quindi appena dimostrato il teorema di embedding nel caso compatto. In generale, dobbiamo modificare l'immersione per renderla propria, un problema topologico anziché differenziale. La situazione è tipica della topologia differenziale: molto spesso i concetti differenziali fondamentali si sviluppano nel modo più naturale e intuitivo per le varietà compatte, per poi estenderli a varietà arbitrarie mediante espedienti tecnici. Per evitare che questi tecnicismi vi distolgano ora

Pagina 52 dell'originale

dallo sviluppo concettuale principale della materia, potete scegliere di saltare per il momento il resto della sezione. Più avanti potrete tornare ad apprendere la tecnica, che ci servirà ancora.

L'espediente fondamentale per queste generalizzazioni è il teorema seguente.

Teorema. Sia X un sottoinsieme arbitrario di $\mathbb{R}^N$. Per ogni ricoprimento di X mediante aperti relativi $\{U_\alpha\}$ esiste una successione di funzioni lisce $\{\theta_i\}$ su X, detta *partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto* $\{U_\alpha\}$, con le proprietà seguenti:

(a) $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$ per ogni $x \in X$ e ogni i.

(b) Ogni $x \in X$ possiede un intorno sul quale tutte le funzioni θ_i, tranne un numero finito, sono identicamente nulle.

(c) Ciascuna θ_i è identicamente nulla al di fuori di un chiuso contenuto in uno degli U_α.

(d) Per ogni $x \in X$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$. (Per (b), la somma è sempre finita.)

Dimostrazione. Ogni U_α si può scrivere $X \cap W_\alpha$ per un aperto W_α dello spazio euclideo ambiente $\mathbb{R}^N$. Poniamo $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$ e sia $\{K_j\}$ una successione crescente di compatti che esaurisce W. Ossia,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = W, \qquad K_j \subset \mathrm{Int}(K_{j+1}).$$

(Per esempio, ponete $K_j = \{z \in W : |z| \leq j,\ \mathrm{dist}(z, \mathbb{R}^N - W) \geq 1/j\}$.)[12] La famiglia di tutte le palle aperte di $\mathbb{R}^N$ la cui chiusura sia contenuta in almeno un W_α è un ricoprimento aperto di W. Sceglietene un numero finito che ricopra K_2. Per la costruzione di funzioni lisce di troncamento dell'esercizio 18(c) del §1, per ogni palla scelta possiamo trovare una funzione liscia non negativa su $\mathbb{R}^N$ identicamente uguale a uno sulla palla e nulla fuori di un chiuso contenuto in uno dei W_α.[13] Chiamiamo queste funzioni $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$. (Si veda la Figura 1-29.)

Continuiamo a costruire una successione di funzioni per induzione. Per ogni $j \geq 3$, il compatto $K_j - \mathrm{Int}(K_{j-1})$ è contenuto nell'aperto $W - K_{j-2}$. La famiglia di tutte le palle aperte abbastanza piccole da avere la chiusura contenuta sia in $W - K_{j-2}$ sia in un W_α ricopre $K_j - \mathrm{Int}(K_{j-1})$. Estraete un sottoricoprimento finito e aggiungete alla successione $\{\eta_i\}$ una funzione per ogni palla: essa deve essere uguale a uno sulla palla e nulla fuori di un chiuso contenuto sia in $W - K_{j-2}$ sia in uno dei W_α.

Per costruzione, per ogni j soltanto un numero finito di funzioni η_i non si annulla su K_j. Poiché ogni punto di W appartiene all'interno di qualche K_j, la somma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j$$

Pagina 53 dell'originale

è in realtà finita in un intorno di ogni punto di W. Inoltre, almeno un termine è non nullo in ogni punto di W. Pertanto

$$\frac{\eta_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j}$$

è una funzione liscia ben definita. Prendendo θ_i come sua restrizione a X, abbiamo concluso. □

[12] *Correzione del traduttore.* Nell'esempio stampato compare $|z| < j$; qui si usa $|z| \leq j$ per garantire che K_j sia compatto.

[13] *Nota sui rinvii.* La scansione rinvia all'esercizio 9 del §1; gli errata indicano «esercizio 15». Nella scansione fornita la costruzione richiesta è nell'esercizio 18(c) del §1. Il §8, esercizio 15, è invece un'applicazione delle partizioni dell'unità. Il rinvio è quindi adeguato alla costruzione effettivamente presente.

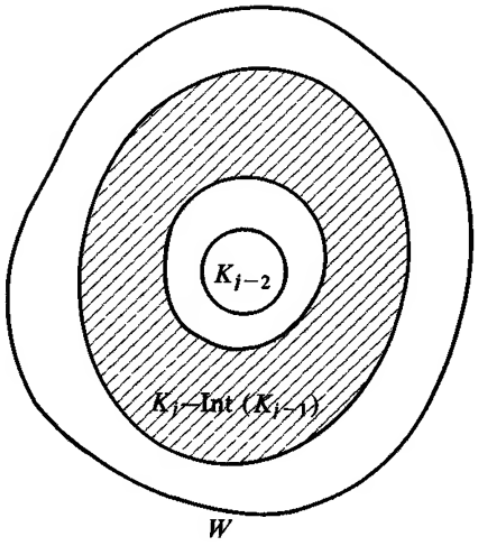


Figura 1-29. Gli strati compatti usati nella costruzione della partizione dell'unità.

Corollario. Su ogni varietà X esiste un'applicazione propria $\rho : X \to \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\{U_\alpha\}$ la famiglia degli aperti di X che hanno chiusura compatta e sia θ_i una partizione dell'unità subordinata. Allora

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i\theta_i$$

è una funzione liscia ben definita. Se $\rho(x) \leq j$, almeno una delle prime j funzioni $\theta_1, \ldots, \theta_j$ deve essere non nulla in x. Quindi $\rho^{-1}([-j, j])$ è contenuto in

$$\bigcup_{i=1}^{j} \{x : \theta_i(x) \neq 0\},$$

un insieme con chiusura compatta. Ma ogni compatto di $\mathbb{R}$ è contenuto in qualche intervallo $[-j, j]$. □

Teorema di Whitney. Ogni varietà di dimensione k ammette un embedding in $\mathbb{R}^{2k+1}$.

Dimostrazione. Cominciamo con un'immersione iniettiva di X in $\mathbb{R}^{2k+1}$. Componendola con un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^{2k+1}$ sulla sua palla unitaria, per esempio $z \mapsto z/\sqrt{1+|z|^2}$,[14]

Pagina 54 dell'originale

otteniamo un'immersione iniettiva $f : X \to \mathbb{R}^{2k+1}$ tale che $|f(x)| < 1$ per ogni $x \in X$. Sia $\rho : X \to \mathbb{R}$ la funzione propria costruita sopra, e definiamo una nuova immersione iniettiva $F : X \to \mathbb{R}^{2k+2}$ mediante $F(x) = (f(x), \rho(x))$. Torniamo ora a $\mathbb{R}^{2k+1}$, come nel teorema precedente, componendo F con una proiezione ortogonale $\pi : \mathbb{R}^{2k+2} \to H$, dove H è lo spazio lineare perpendicolare a un opportuno vettore unitario $a \in \mathbb{R}^{2k+2}$.

Ricordate che $\pi \circ F : X \to H$ è ancora un'immersione iniettiva per quasi ogni $a \in S^{2k+1}$; possiamo dunque scegliere a diverso da entrambi i poli della sfera. Ma ora si vede facilmente che $\pi \circ F$ è propria. Infatti, dato un limite c, affermiamo che esiste un altro numero d tale che l'insieme dei punti $x \in X$ con $|\pi \circ F(x)| \leq c$ sia contenuto nell'insieme in cui $|\rho(x)| \leq d$. Poiché ρ

[14] *Correzione del traduttore.* L'originale stampa $z/(1+|z|^2)$, che non è iniettivo. La radice quadrata al denominatore dà il diffeomorfismo richiesto sulla palla unitaria.

è propria, quest'ultimo è un compatto di X. L'affermazione implica quindi che la controimmagine mediante $\pi \circ F$ di ogni palla chiusa di H è compatta in X, mostrando che $\pi \circ F$ è propria.

Se l'affermazione fosse falsa, esisterebbe una successione $\{x_i\}$ in X con $|\pi \circ F(x_i)| \leq c$ ma $\rho(x_i) \to \infty$. Ricordate che, per definizione, per ogni $z \in \mathbb{R}^{2k+2}$ il vettore $\pi(z)$ è l'unico punto di H per cui $z - \pi(z)$ è un multiplo di a. Quindi $F(x_i) - \pi \circ F(x_i)$ è un multiplo di a per ogni i, e lo è anche

$$w_i = \frac{1}{\rho(x_i)}[F(x_i) - \pi \circ F(x_i)].$$

Consideriamo che cosa accade per $i \to \infty$:

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1\right) \longrightarrow (0, \ldots, 0, 1),$$

perché $|f(x_i)| < 1$ per ogni i. Il quoziente $\pi \circ F(x_i)/\rho(x_i)$ ha norma al più $c/\rho(x_i)$, perciò tende a zero. Quindi $w_i \to (0, \ldots, 0, 1)$. Ma ogni w_i è un multiplo di a, dunque lo è anche il limite. Ne concludiamo che a deve essere il polo nord o il polo sud di S^{2k+1}: una contraddizione. Ciò dimostra l'affermazione e il teorema. □

Esercizi

1. Mostrate che $T(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

2. Sia g una funzione liscia ovunque positiva su X. Verificate che l'applicazione di moltiplicazione $T(X) \to T(X)$, $(x, v) \mapsto (x, g(x)v)$, è liscia.

Pagina 55 dell'originale

3. Mostrate che $T(X \times Y)$ è diffeomorfo a $T(X) \times T(Y)$.

4. Mostrate che il fibrato tangente di S^1 è diffeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}^1$.

5. Dimostrate che la proiezione $p : T(X) \to X$, $p(x, v) = x$, è una sommersione.

***6.** Un *campo vettoriale* $\vec{v}$ su una varietà X in $\mathbb{R}^N$ è un'applicazione liscia $\vec{v} : X \to \mathbb{R}^N$ tale che $\vec{v}(x)$ sia sempre tangente a X in x. Verificate che la definizione seguente, che non menziona esplicitamente lo spazio ambiente $\mathbb{R}^N$, è equivalente: un campo vettoriale su X è una *sezione* di $T(X)$, ossia un'applicazione liscia $\vec{v} : X \to T(X)$ tale che $p \circ \vec{v}$ sia l'identità di X. (p è quella dell'esercizio 5.)

***7.** Un punto $x \in X$ è uno *zero* del campo vettoriale $\vec{v}$ se $\vec{v}(x) = 0$. Mostrate che, se k è dispari, esiste un campo vettoriale su S^k privo di zeri. [*Suggerimento:* per $k = 1$, usate $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$.] Il fatto che non esistano campi vettoriali mai nulli sulle sfere di dimensione pari è un risultato topologico piuttosto profondo. Ne vedremo il motivo nel capitolo III.

***8.** Dimostrate che, se S^k possiede un campo vettoriale mai nullo, la sua applicazione antipodale è omotopa all'identità. (Confrontate il §6, esercizio 7.) [*Suggerimento:* mostrate che potete supporre $|\vec{v}(x)| = 1$ ovunque. Ruotate ora x fino a $-x$ nella direzione indicata da $\vec{v}(x)$.]

9. Sia $S(X)$ l'insieme dei punti $(x, v) \in T(X)$ con $|v| = 1$. Dimostrate che $S(X)$ è una sottovarietà di dimensione $2k - 1$ di $T(X)$; si chiama il *fibrato in sfere* di X. [*Suggerimento:* considerate $(x, v) \mapsto |v|^2$.]

10. *Teorema di immersione di Whitney.* Dimostrate che ogni varietà X di dimensione k può essere immersa in $\mathbb{R}^{2k}$.

11. Mostrate che, se X è una varietà compatta di dimensione k, esiste un'applicazione $X \to \mathbb{R}^{2k-1}$ che è un'immersione tranne che in un numero finito di punti di X. A tal fine mostrate che, se $f : X \to \mathbb{R}^{2k}$ è un'immersione e a è un valore regolare dell'applicazione $F : T(X) \to \mathbb{R}^{2k}$, $F(x, v) = df_x(v)$, allora $F^{-1}(a)$ è un insieme finito. Mostrate che $\pi \circ f$ è un'immersione fuori dall'insieme

$$\{x \in X : F(x, v) = a \text{ per qualche } v\},$$

dove π è una proiezione ortogonale perpendicolare ad a. I punti eccezionali di questo insieme si chiamano *cross-cap*. [*Suggerimento:* mostrate anzitutto che $F^{-1}(a)$ è contenuto in un sottoinsieme compatto $\{(x, v) : |v| \leq \text{costante}\}$ di $T(X)$. Infatti, se $F(x_i, v_i) = a$ e $|v_i| \to \infty$, scegliete una sottosuccessione tale che $x_i \to x$ e $v_i/|v_i| \to w$. Mostrate ora che $df_x(w) = 0$. Usate poi la dimostrazione del teorema della pila di dischi (p. 26, §4, esercizio 7) per mostrare che $F^{-1}(a)$ è effettivamente finito.]

Pagina 56 dell'originale

12. Whitney ha mostrato[15] che, per applicazioni di varietà bidimensionali in $\mathbb{R}^3$, un cross-cap tipico ha la forma dell'applicazione $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2)$. Verificate che è un'immersione tranne che nell'origine. Che aspetto ha la sua immagine?

13. Un ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}$ di una varietà X si dice *localmente finito* se ogni punto di X possiede un intorno che interseca soltanto un numero finito degli insiemi V_α. Mostrate che ogni ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ ammette un raffinamento localmente finito $\{V_\alpha\}$. [*Suggerimento:* partizione dell'unità.]

***14.** *Il teorema della funzione inversa, rivisitato.* Usate una tecnica basata sulle partizioni dell'unità per dimostrare una versione non compatta dell'esercizio 10 del §3. Supponete che la derivata di $f : X \to Y$ sia un isomorfismo ogni volta che x appartiene alla sottovarietà $Z \subset X$, e che f mandi Z diffeomorficamente su $f(Z)$. Dimostrate che f manda un intorno di Z diffeomorficamente su un intorno di $f(Z)$. [*Schema:* trovate inverse locali $g_i : U_i \to X$, dove $\{U_i\}$ è una famiglia localmente finita di aperti di Y che ricopre $f(Z)$. Definite

$$W = \{y \in \textstyle\bigcup_i U_i : g_i(y) = g_j(y) \text{ ogni volta che } y \in U_i \cap U_j\}.$$

Le applicazioni g_i si «incollano» per definire un'inversa liscia $g : W \to X$. Concludete dimostrando che W contiene un intorno aperto di $f(Z)$: qui serve la finitezza locale.]

15. *Teorema di Urysohn liscio.* Se A e B sono sottoinsiemi chiusi disgiunti di una varietà X, dimostrate che esiste una funzione liscia ϕ su X tale che $0 \leq \phi \leq 1$, con $\phi = 0$ su A e $\phi = 1$ su B. [*Suggerimento:* partizione dell'unità.]

[15] H. Whitney, «The General Type of Singularity of a Set of $2n-1$ Functions of n Variables», *Duke Math. Journal*, 10 (1943), 161–172.

Capitolo II. Trasversalità e intersezione

§1. Varietà con bordo

Pagina 57 dell'originale

Ampliamo ora la classe degli oggetti geometrici studiati, permettendo alle varietà di possedere un bordo. Vogliamo considerare, per esempio, la palla unitaria chiusa in $\mathbb{R}^n$, il cui bordo è S^{n-1}, oppure la superficie cilindrica compatta $S^1 \times [0,1]$ in $\mathbb{R}^3$, delimitata da due copie della circonferenza (Figura 2-1). Questi spazi non sono varietà nel senso precedente, perché gli intorni dei punti del bordo non sono diffeomorfi ad aperti di uno spazio euclideo (si veda l'esercizio 1). L'esempio più semplice è il *semispazio superiore* H^k di $\mathbb{R}^k$, formato dai punti la cui ultima coordinata è non negativa. Il suo bordo è $\mathbb{R}^{k-1}$, con l'inclusione usuale in $\mathbb{R}^k$. Per la sua semplicità, scegliamo H^k come modello (Figura 2-2).

Definizione. Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^N$ è una *varietà di dimensione k con bordo* se ogni suo punto possiede un intorno diffeomorfo a un aperto del semispazio H^k. Come prima, un tale diffeomorfismo si chiama *parametrizzazione locale* di X. Il *bordo* di X, indicato con ∂X, è formato dai punti che appartengono all'immagine del bordo di H^k mediante qualche parametrizzazione locale. Il suo complementare è l'*interno* di X: $\mathrm{Int}(X) = X - \partial X$.

Non confondete il bordo e l'interno così definiti con la frontiera e l'interno topologici di X come sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$.

Pagina 58 dell'originale

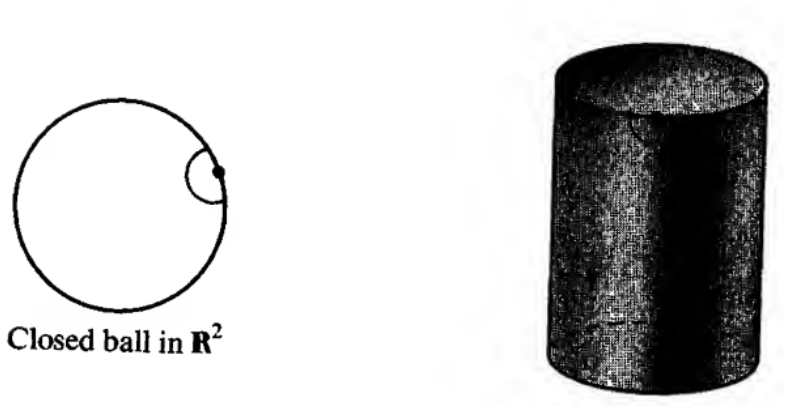


Figura 2-1. La palla chiusa nel piano e la superficie cilindrica sono varietà con bordo.

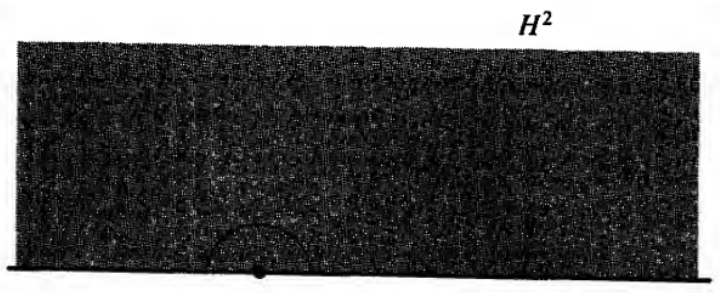


Figura 2-2. Il semispazio superiore H^2.

Sebbene le nozioni spesso coincidano quando $\dim X = N$, certamente non coincidono quando $\dim X < N$. Useremo sempre questi termini nel senso delle varietà. Osservate che anche le varietà definite in precedenza sono «varietà con bordo», benché il loro bordo sia vuoto. Continueremo

a riservare a esse il termine non qualificato «varietà»; talvolta, per sottolinearlo, le chiameremo «senza bordo».

Purtroppo il prodotto di due varietà con bordo non è, in generale, una varietà con bordo, come mostra il quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Vale però la proposizione seguente.

Proposizione. Il prodotto di una varietà senza bordo X e di una varietà con bordo Y è una varietà con bordo. Inoltre,

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y, \qquad \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Dimostrazione. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset H^l$ sono aperti, allora

$$U \times V \subset \mathbb{R}^k \times H^l = H^{k+l}$$

è aperto. Se $\phi : U \to X$ e $\psi : V \to Y$ sono parametrizzazioni locali, lo è anche $\phi \times \psi : U \times V \to X \times Y$. □

L'applicazione più importante di questa osservazione sarà al dominio $X \times I$ delle omotopie, quando X è una varietà senza bordo.

Pagina 59 dell'originale

Gli spazi tangenti e le derivate si definiscono anche per le varietà con bordo. Supponiamo dapprima che g sia un'applicazione liscia da un aperto U di H^k in $\mathbb{R}^l$. Se u è interno a U, la derivata dg_u è già definita. Se $u \in \partial U$, la liscezza di g significa che essa si può estendere a un'applicazione liscia $\widetilde{g}$ definita in un intorno aperto di u in $\mathbb{R}^k$; poniamo $dg_u = d\widetilde{g}_u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$. Dobbiamo verificare che un'altra estensione locale $\widehat{g}$ dia la stessa derivata. Sia u_i una successione di punti di $\mathrm{Int}(U)$ convergente a u. Poiché le due estensioni coincidono con g nell'interno,

$$d\widetilde{g}_{u_i} = d\widehat{g}_{u_i}.$$

Passando al limite e usando la continuità delle derivate otteniamo $d\widetilde{g}_u = d\widehat{g}_u$. Ricordate: anche nei punti del bordo la derivata è un'applicazione lineare definita su *tutto* $\mathbb{R}^k$.

È immediato verificare che la derivazione di applicazioni lisce definite su semispazi soddisfa ancora la regola della catena. Possiamo quindi estenderla alle varietà con bordo esattamente come nel caso senza bordo. Se $X \subset \mathbb{R}^N$ ha dimensione k, definiamo lo spazio tangente $T_x(X)$ come l'immagine della derivata di una qualunque parametrizzazione locale attorno a x. Verificate che è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^N$ di dimensione k, anche se x è sul bordo, e che non dipende dalla parametrizzazione. Verificate inoltre che, per un'applicazione liscia $f : X \to Y$ fra varietà con bordo, si può definire come prima una trasformazione lineare

$$df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y),$$

e che resta valida la regola della catena.

L'interno di una varietà con bordo è automaticamente una varietà senza bordo della stessa dimensione: ciascun punto interno appartiene all'immagine di una parametrizzazione il cui dominio è contenuto in $\mathrm{Int}(H^k)$ ed è quindi aperto in $\mathbb{R}^k$. Più interessante è il risultato seguente.

Proposizione. Se X è una varietà di dimensione k con bordo, ∂X è una varietà senza bordo di dimensione $k-1$.

Dimostrazione. Il punto essenziale è mostrare che un punto che appartiene al bordo rispetto a un sistema di coordinate vi appartiene rispetto a qualunque altro. Sia $\phi : U \to V$ una parametrizzazione, con U aperto in H^k e V aperto in X. Basta mostrare che $\phi(\partial U) = \partial V$: allora ϕ

si restringe a un diffeomorfismo fra $\partial U = U \cap \partial H^k$, aperto di $\mathbb{R}^{k-1}$, e $\partial V = \partial X \cap V$. Per definizione $\phi(\partial U) \subset \partial V$. Se $\psi : W \to V$ è un'altra parametrizzazione, dobbiamo dunque mostrare $\phi(\partial U) \supset \psi(\partial W)$, ossia $\partial U \supset \phi^{-1} \circ \psi(\partial W)$. Poniamo $g = \phi^{-1} \circ \psi$ e supponiamo che un punto

Pagina 60 dell'originale

$w \in \partial W$ sia mandato in un punto interno $u = g(w)$ di U. L'applicazione g è un diffeomorfismo di W sull'aperto $g(W)$ di U; la regola della catena implica che $d(g^{-1})_u$ è biiettiva. Poiché u è interno, $g(W)$ contiene un intorno di u aperto in $\mathbb{R}^k$. Il teorema della funzione inversa, applicato a g^{-1} su tale intorno, implica che la sua immagine contiene un intorno di w aperto in $\mathbb{R}^k$, in contraddizione con $w \in \partial W$. □

Se $x \in \partial X$, lo spazio $T_x(\partial X)$ è un sottospazio di codimensione uno di $T_x(X)$ (Figura 2-3). Per ogni applicazione liscia f definita su X, indichiamo con ∂f la sua restrizione a ∂X. La derivata $d(\partial f)_x$ è la restrizione di df_x a $T_x(\partial X)$.

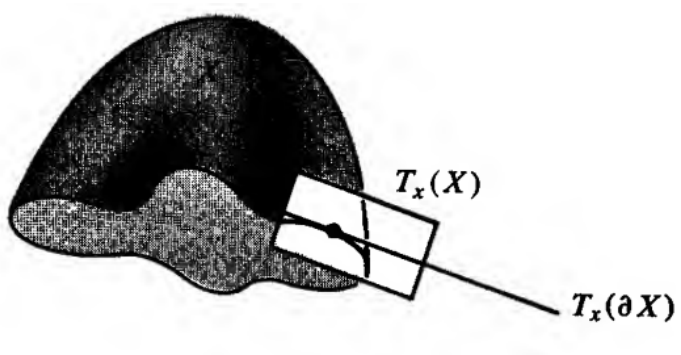


Figura 2-3. Spazio tangente alla varietà e spazio tangente al suo bordo.

Tutte le definizioni formulate mediante le derivate conservano letteralmente senso per varietà con bordo. Per estendere i teoremi fondamentali del primo capitolo, tuttavia, occorrono condizioni aggiuntive. Vorremmo garantire che, se $f : X \to Y$ incontra una sottovarietà Z di Y, la controimmagine $f^{-1}(Z)$ sia una varietà con bordo e che $\partial[f^{-1}(Z)] = f^{-1}(Z) \cap \partial X$. La sola trasversalità di f non basta: per $f : H^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_2$, e $Z = \{0\}$, si ha $f^{-1}(Z) = \partial H^2$. La condizione giusta richiede trasversalità anche sul bordo.

Teorema. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione liscia da una varietà con bordo in una varietà senza bordo. Supponiamo che f e ∂f siano entrambe trasversali a una sottovarietà senza bordo Z di Y. Allora $f^{-1}(Z)$ è una varietà con bordo,

$$\partial[f^{-1}(Z)] = f^{-1}(Z) \cap \partial X,$$

e la sua codimensione in X è uguale alla codimensione di Z in Y.

Pagina 61 dell'originale

Dimostrazione. La restrizione di f a $\mathrm{Int}(X)$ è trasversale a Z: il teorema già dimostrato assicura che $f^{-1}(Z) \cap \mathrm{Int}(X)$ è una varietà senza bordo della codimensione giusta. Resta da studiare un intorno di $x \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Come al solito riduciamo Z a un punto, scegliendo una sommersione ϕ da un intorno di $f(x)$ in $\mathbb{R}^l$, con $l = \mathrm{codim}\, Z$, tale che localmente $Z = \phi^{-1}(0)$. La composizione $\phi \circ f$ è definita vicino a x e lì $f^{-1}(Z) = (\phi \circ f)^{-1}(0)$. Scegliamo una parametrizzazione $h : U \to X$, con U aperto di H^k, e poniamo $g = \phi \circ f \circ h$. Poiché h è un diffeomorfismo sulla propria immagine, basta provare che $g^{-1}(0)$ è una varietà con bordo vicino a $u = h^{-1}(x) \in \partial U$.

La condizione di trasversalità

$$df_x(T_x(X)) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$$

significa che x è un punto regolare di $\phi \circ f$, ossia che u è un punto regolare di g. Estendiamo g a una funzione liscia $\widetilde{g}$ in un intorno di u in $\mathbb{R}^k$. Poiché $d\widetilde{g}_u = dg_u$, restringendo l'intorno, $S = \widetilde{g}^{-1}(0)$ è una sottovarietà senza bordo di $\mathbb{R}^k$. Localmente $g^{-1}(0) = S \cap H^k$; dobbiamo dimostrare che questa intersezione è una varietà con bordo. Qui interviene l'ipotesi su ∂f.

Sia $\pi : S \to \mathbb{R}$ la restrizione dell'ultima coordinata. Allora

$$S \cap H^k = \{s \in S : \pi(s) \geq 0\}.$$

Affermiamo che 0 è un valore regolare di π. Altrimenti, per qualche $s \in S \cap \partial H^k$, $d\pi_s$ si annulla su $T_s(S)$; essendo l'ultima coordinata lineare, questo equivale a

$$T_s(S) \subset T_s(\partial H^k) = \mathbb{R}^{k-1}.$$

Ma $T_s(S) = \ker d\widetilde{g}_s = \ker dg_s$, mentre $d(\partial g)_s$ è la restrizione di $dg_s : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ a $\mathbb{R}^{k-1}$. I due nuclei coinciderebbero. Le ipotesi di trasversalità, restringendo ancora l'intorno, assicurano che entrambi i differenziali sono suriettivi.

Pagina 62 dell'originale

Per il teorema del rango i loro nuclei hanno invece dimensioni rispettivamente $k-l$ e $k-l-1$, una contraddizione. Dunque 0 è un valore regolare di π.[16] Il lemma seguente completa la dimostrazione.

Lemma. Sia S una varietà senza bordo e sia $\pi : S \to \mathbb{R}$ liscia, con 0 valore regolare. Il sottoinsieme $\{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$ è una varietà con bordo $\pi^{-1}(0)$.

Dimostrazione. L'insieme dove $\pi > 0$ è aperto in S e quindi è una sottovarietà della stessa dimensione. Se $\pi(s) = 0$, la regolarità implica che π è localmente equivalente alla sommersione canonica, per la quale l'affermazione è evidente. □

Il lemma ha anche interesse autonomo: scegliendo $S = \mathbb{R}^n$ e $\pi(s) = 1 - |s|^2$, dimostra che la palla unitaria chiusa è una varietà con bordo.

L'estensione del teorema di Sard è più diretta.

Teorema di Sard. Per ogni applicazione liscia $f : X \to Y$ da una varietà con bordo in una varietà senza bordo, quasi ogni punto di Y è un valore regolare sia di f sia di ∂f.

Dimostrazione. Se ∂f è regolare in $x \in \partial X$, lo è anche f, perché $d(\partial f)_x$ è la restrizione di df_x a $T_x(\partial X)$. Quindi un punto di Y che non è un valore regolare comune deve essere un valore critico di $f|_{\mathrm{Int}(X)}$ oppure di ∂f. Entrambi questi insiemi hanno misura nulla per Sard sulle varietà senza bordo; anche la loro unione ha misura nulla. □

Esercizi

1. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset H^k$ sono intorni di 0, dimostrate che non esiste un diffeomorfismo di V con U.

2. Dimostrate che, se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo di varietà con bordo, ∂f manda ∂X diffeomorficamente su ∂Y.

3. Mostrate che il quadrato $S = [0,1] \times [0,1]$ non è una varietà con bordo. [*Suggerimento:* se f manda un intorno del vertice s in H^2 e il bordo nel bordo, mostrate che due vettori indipendenti v_1, v_2 in $T_s(S)$ vengono mandati in vettori dipendenti $df_s(v_1), df_s(v_2)$.] Si veda la Figura 2-4.

Pagina 63 dell'originale

[16] L'originale conclude qui «di g»; il ragionamento richiede «di π». Sono inoltre integrati gli errata sui codomini $\mathbb{R}^l$ e sulle dimensioni dei nuclei.

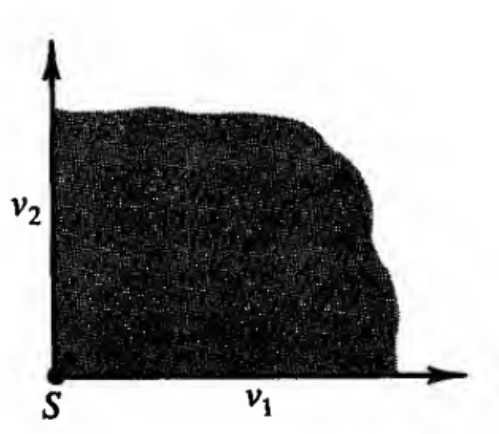


Figura 2-4. Le due direzioni indipendenti uscenti dal vertice del quadrato.

4. Mostrate che l'iperboloide solido $x^2 + y^2 - z^2 \leq a$ è una varietà con bordo ($a > 0$).

5. Per quali valori di a l'intersezione di $x^2 + y^2 - z^2 \leq a$ con la sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ è una varietà con bordo? Quale forma ha?

6. Vi sono due modi consueti di ottenere una varietà con bordo dal quadrato unitario incollando due lati opposti (Figura 2-5). Incollandoli direttamente si ottiene il cilindro; introducendo prima una mezza torsione si ottiene il nastro di Möbius chiuso. Verificate che il bordo del cilindro è formato da due copie di S^1, mentre quello del nastro di Möbius è una sola copia di S^1; quindi i due spazi non sono diffeomorfi. Che cosa accade introducendo n mezze torsioni prima di incollare?

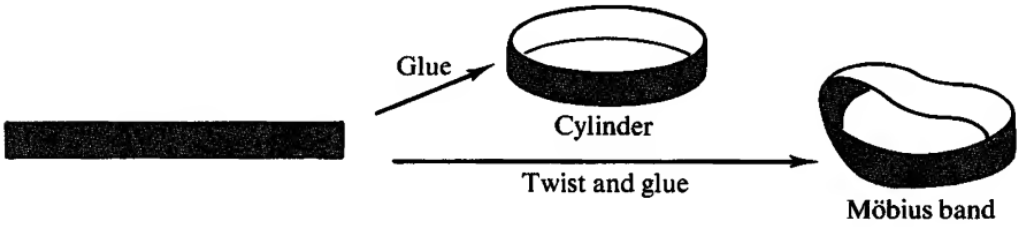


Figura 2-5. Incollamento del rettangolo: cilindro e nastro di Möbius.

***7.** Sia $x \in \partial X$. Sia $\phi : U \to X$ una parametrizzazione locale con $\phi(0) = x$ e U aperto di H^k. Allora $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \to T_x(X)$ è un isomorfismo. Definite il semispazio superiore $H_x(X) = d\phi_0(H^k)$ in $T_x(X)$. Dimostrate che non dipende dalla parametrizzazione.

***8.** Mostrate che in $T_x(X)$ vi sono esattamente due vettori unitari perpendicolari a $T_x(\partial X)$, uno dei quali appartiene a $H_x(X)$ e l'altro no. Il primo si chiama *normale unitaria interna* al bordo,

Pagina 64 dell'originale

l'altro *normale unitaria esterna*. Indicate quest'ultimo con $\vec{n}(x)$. Se $X \subset \mathbb{R}^N$, possiamo considerare $\vec{n}$ come un'applicazione $\partial X \to \mathbb{R}^N$. Dimostrate che è liscia. In particolare, qual è $\vec{n}(x)$ per $X = H^k$? Si veda la Figura 2-6.

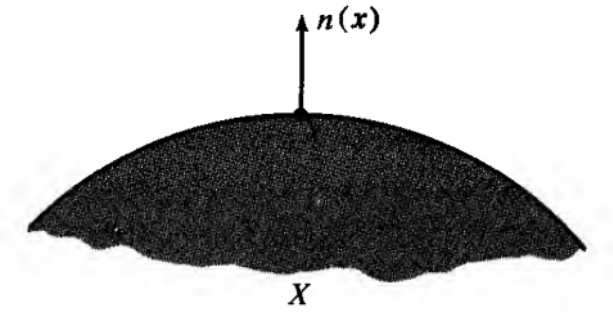


Figura 2-6. La normale unitaria esterna al bordo.

9. (a) Mostrate che ∂X è chiuso in X; in particolare è compatto se X è compatta. (b) Trovate esempi in cui ∂X è compatto ma X non lo è.

10. Per $x \in \partial X$, mostrate che esiste una funzione liscia non negativa f su un intorno aperto U di x tale che $f(z) = 0$ se e solo se $z \in \partial U$ e, per $z \in \partial U$,

$$df_z(\vec{n}(z)) < 0.$$

11. (*Viceversa del lemma di pagina 62.*) Mostrate che su ogni varietà con bordo X esiste una funzione liscia non negativa f, con 0 valore regolare, tale che $\partial X = f^{-1}(0)$. [*Suggerimento:* usate una partizione dell'unità per incollare le funzioni locali dell'esercizio 10. Che cosa garantisce la regolarità?]

§2. Varietà unidimensionali e alcune conseguenze

Pagina 64 dell'originale

A meno di diffeomorfismo, le sole varietà unidimensionali compatte e connesse con bordo sono l'intervallo chiuso e la circonferenza. È una di quelle affermazioni del tutto evidenti la cui dimostrazione risulta tecnicamente meno banale del previsto. L'idea è semplice: partendo da un punto, percorriamo la curva a velocità costante. Per compattezza, non possiamo continuare indefinitamente a visitare punti nuovi: o torniamo al punto di partenza, e la curva è una circonferenza, oppure incontriamo un punto del bordo, e si tratta di un intervallo. Una dimostrazione accurata si trova nell'appendice; per ora enunciamo soltanto il risultato.

Classificazione delle varietà unidimensionali. Ogni varietà unidimensionale compatta e connessa con bordo è diffeomorfa a $[0,1]$ oppure a S^1.

Pagina 65 dell'originale

Poiché ogni varietà unidimensionale compatta con bordo è l'unione disgiunta di un numero finito di componenti connesse, otteniamo un corollario immediato, dalle applicazioni sorprendentemente profonde.

Corollario. Il bordo di ogni varietà unidimensionale compatta con bordo è formato da un numero pari di punti. La prima applicazione è il teorema seguente.

Teorema. Se X è una varietà compatta con bordo non vuoto, non esiste un'applicazione liscia $g : X \to \partial X$ la cui restrizione $\partial g : \partial X \to \partial X$ sia l'identità. Non esiste cioè una *retrazione* di X sul proprio bordo.[17]

Dimostrazione. Supponiamo che g esista e scegliamo un valore regolare $z \in \partial X$, possibile per Sard. La controimmagine $g^{-1}(z)$ è una sottovarietà compatta con bordo; la sua codimensione in X è $\dim X - 1$, quindi ha dimensione uno. Ma, essendo ∂g l'identità,

$$\partial[g^{-1}(z)] = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\},$$

in contraddizione con il corollario. □

Possiamo ora dimostrare un famoso teorema di Brouwer, solitamente provato con gli strumenti sofisticati della topologia algebrica o con argomenti combinatori elaborati. La seguente dimostrazione mediante trasversalità è dovuta a M. Hirsch.

Teorema del punto fisso di Brouwer. Ogni applicazione liscia f della palla unitaria chiusa $B^n \subset \mathbb{R}^n$ in sé ha un punto fisso: $f(x) = x$ per qualche $x \in B^n$.

Dimostrazione. Supponiamo che f non abbia punti fissi e costruiamo una retrazione $g : B^n \to \partial B^n$. I punti distinti $f(x)$ e x determinano una retta. Sia $g(x)$ il punto dove la semiretta che parte da $f(x)$ e passa per x incontra il bordo (Figura 2-7). Se x è già sul bordo, $g(x) = x$.

[17] Si esplicita il caso di interesse $\partial X \neq \varnothing$. Se X è non vuota e il bordo è vuoto non esiste neppure un'applicazione $X \to \partial X$; per $X = \varnothing$ l'enunciato letterale richiede questa precisazione.

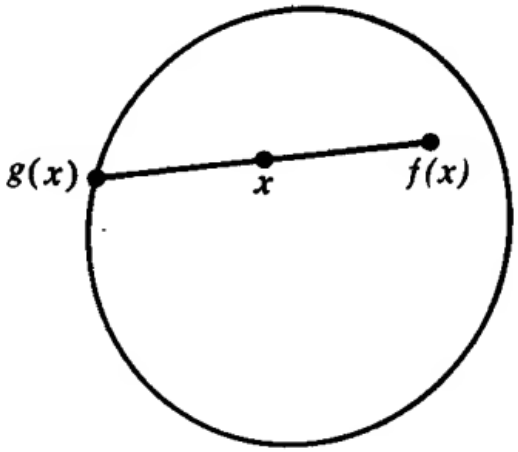


Figura 2-7. La semiretta da $f(x)$ attraverso x determina $g(x)$ sul bordo.

Pagina 66 dell'originale

Dunque $g : B^n \to S^{n-1}$ è l'identità su ∂B^n. Per contraddire il teorema precedente basta mostrarne la liscezza. Poiché x giace fra $f(x)$ e $g(x)$, possiamo scrivere

$$g(x) = tx + (1-t)f(x), \qquad t \geq 1.$$

Basta che t dipenda in modo liscio da x. Prendendo il prodotto scalare di entrambi i membri con sé stessi e usando $|g(x)| = 1$, otteniamo

$$t^2|x - f(x)|^2 + 2t\, f(x) \cdot [x - f(x)] + |f(x)|^2 - 1 = 0.$$

L'espressione può sembrare sgradevole, ma è un polinomio quadratico con un'unica radice positiva. L'altra radice è non positiva e corrisponde al punto del bordo incontrato nell'altra direzione. La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado esprime t mediante funzioni lisce di x.[18] □

Esercizi

1. Ogni sottovarietà unidimensionale compatta e connessa di $\mathbb{R}^3$ è diffeomorfa a una circonferenza. Ma la si può deformare in una circonferenza all'interno di $\mathbb{R}^3$? Fate dei disegni, oppure provate con uno spago.

2. Mostrate che il punto fisso nel teorema di Brouwer non è necessariamente interno.

3. Trovate applicazioni del toro solido in sé senza punti fissi. Dove viene meno la dimostrazione di Brouwer?

4. Dimostrate che il teorema di Brouwer è falso per la palla aperta $|x| < a$. [*Suggerimento:* si veda capitolo I, §1, esercizio 4.]

5. Dimostrate direttamente il teorema di Brouwer per applicazioni di $[0, 1]$ in sé, senza usare valori regolari.

6. Dimostrate il teorema di Brouwer per applicazioni continue $f : B^n \to B^n$. Usate il teorema di approssimazione di Weierstrass: per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'applicazione polinomiale $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $|f - p| < \epsilon$ su B^n. Un riferimento è Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, «The

[18] Se $f(x)$ è sul bordo, la seconda radice può essere 0; l'originale scrive $t < 0$. La radice positiva resta semplice: se $|f(x)| = 1$ e $x \neq f(x)$, allora $f(x) \cdot (x - f(x)) < 0$.

Stone-Weierstrass Theorem». [*Suggerimento:* mostrate prima che per ogni $\delta > 0$ potete scegliere p con $|f - p| < \delta$ e $p(B^n) \subset B^n$. Se f non ha punti fissi, $|f(x) - x| \geq c > 0$ su B^n.]

7. Come applicazione sorprendentemente concreta, dimostrate questo teorema di Frobenius: una matrice reale $n \times n$ i cui elementi siano tutti non negativi

Pagina 67 dell'originale

ha un autovalore reale non negativo. [*Suggerimento:* potete supporre A non singolare, altrimenti 0 è un autovalore. Indicate ancora con A l'applicazione lineare associata e considerate $v \mapsto Av/|Av|$ su S^{n-1}. Mostrate che manda in sé il «primo quadrante»

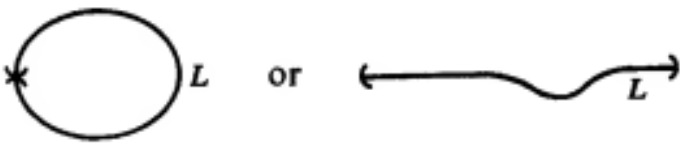
$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} : x_i \geq 0 \text{ per ogni } i\}.$$

Non è difficile, anche se non vi chiediamo di farlo, dimostrare che Q è omeomorfo a B^{n-1}, cioè che esiste una biiezione continua con inversa continua. Usate ora l'esercizio 6.] Si veda la Figura 2-8.



Figura 2-8. Il primo ottante della sfera.

8. Supponete $\dim X = 1$ e sia $L \subset X$ diffeomorfo a un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Dimostrate che $\overline{L} - L$ contiene al più due punti. Questo fatto serve per classificare le varietà unidimensionali. [*Suggerimento:* dato $g : (a, b) \simeq L$, sia $p \in \overline{L} - L$. Prendete un sottoinsieme chiuso J di X diffeomorfo a $[0, 1]$, con 1 corrispondente a p e 0 a qualche $g(t) \in L$. Mostrate che J contiene $g((a, t))$ oppure $g((t, b))$, usando un argomento di apertura e chiusura nell'intervallo pertinente.[19]]



[19]Nel suggerimento originale gli intervalli sono incoerenti: l'insieme è scritto con $s \in (a, t)$ ma viene dichiarato aperto e chiuso in (a, b). La soluzione finale fornisce un argomento locale completo.

§3. Trasversalità

Pagina 67 dell'originale

Abbiamo dimostrato che la trasversalità è stabile sotto piccole perturbazioni, almeno per applicazioni con dominio compatto. Dal teorema di Sard dedurremo ora il fatto, più sottile e utile, che è una proprietà *generica*: ogni applicazione liscia $f : X \to Y$, per quanto singolare sia il suo comportamento rispetto a una sottovarietà Z di Y, può essere

Pagina 68 dell'originale

deformata di una quantità arbitrariamente piccola in un'applicazione trasversale a Z. Fisicamente, la stabilità significa che le applicazioni trasversali sono effettivamente osservabili; la genericità significa che sono le sole osservabili. In questo senso, quasi tutte le applicazioni sono trasversali (Figura 2-9).

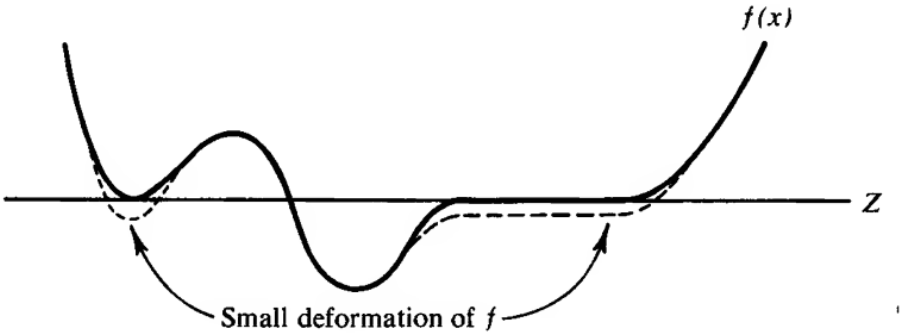


Figura 2-9. Una piccola deformazione rende trasversali le intersezioni con Z.

La chiave è considerare famiglie di applicazioni. Sia $f_s : X \to Y$ una famiglia indicizzata da $s \in S$. Come per le omotopie, consideriamo $F : X \times S \to Y$, $F(x, s) = f_s(x)$. Per esprimere una dipendenza liscia, supponiamo che S sia una varietà e F liscia. Il risultato centrale è il seguente.

Teorema di trasversalità. Sia $F : X \times S \to Y$ un'applicazione liscia di varietà, delle quali solo X può avere bordo, e sia Z una sottovarietà senza bordo di Y. Se F e ∂F sono trasversali a Z, allora, per quasi ogni $s \in S$, anche f_s e ∂f_s sono trasversali a Z.

Dimostrazione. $W = F^{-1}(Z)$ è una sottovarietà con bordo di $X \times S$, con $\partial W = W \cap \partial(X \times S)$. Sia $\pi : X \times S \to S$ la proiezione. Mostriamo che, se s è un valore regolare di $\pi|_W$, allora $f_s \pitchfork Z$, e che, se è regolare per $\partial\pi : \partial W \to S$, allora $\partial f_s \pitchfork Z$. Sard assicura che quasi ogni s è regolare per entrambe.

Supponiamo $f_s(x) = z \in Z$. Poiché $F \pitchfork Z$,

$$dF_{(x,s)}(T_{(x,s)}(X \times S)) + T_z(Z) = T_z(Y).$$

Dato $a \in T_z(Y)$, esiste quindi $b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ con $dF_{(x,s)}(b) - a \in T_z(Z)$. Cerchiamo $v \in T_x(X)$ con $d(f_s)_x(v) - a \in T_z(Z)$. Ora

$$T_{(x,s)}(X \times S) = T_x(X) \times T_s(S),$$

Pagina 69 dell'originale

quindi $b = (w, e)$. Se $e = 0$ avremmo già concluso, perché $dF_{(x,s)}(w, 0) = d(f_s)_x(w)$. Possiamo eliminare e usando la proiezione: $d\pi_{(x,s)}$ è la proiezione sul secondo fattore, e la sua suriettività su $T_{(x,s)}W$ fornisce un vettore $(u, e) \in T_{(x,s)}W$. Poiché $F(W) \subset Z$, si ha $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z(Z)$. Basta dunque prendere $v = w - u$, perché

$$d(f_s)_x(v) - a = [dF_{(x,s)}(w, e) - a] - dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z(Z).$$

Lo stesso argomento su ∂X, applicato a $\partial F : (\partial X) \times S \to Y$, prova la seconda affermazione. □

Il teorema implica subito la genericità quando $Y = \mathbb{R}^M$. Data $f : X \to \mathbb{R}^M$, prendiamo come S una palla aperta in $\mathbb{R}^M$ e poniamo $F(x, s) = f(x) + s$. Per x fissato questa è una traslazione della palla, dunque una sommersione. Pertanto F e ∂F sono sommersioni e quindi trasversali a ogni sottovarietà Z. Per quasi ogni s, $f_s(x) = f(x) + s$ è trasversale a Z: basta aggiungere un vettore arbitrariamente piccolo.

Per una varietà bersaglio senza bordo qualunque, seguiamo la stessa strada. Includiamo Y in uno spazio euclideo e perturbiamo f come applicazione a valori in quest'ultimo. Occorre poi proiettare le applicazioni perturbate su Y. Dobbiamo perciò studiare la geometria di Y rispetto allo spazio ambiente; il caso compatto è il più chiaro.

Teorema dell'ϵ-intorno. Sia $Y \subset \mathbb{R}^M$ compatta e senza bordo, e sia Y^ϵ l'aperto dei punti a distanza minore di $\epsilon > 0$ da Y. Per ϵ sufficientemente piccolo ogni $w \in Y^\epsilon$ ha un unico punto più vicino in Y, denotato $\pi(w)$, e $\pi : Y^\epsilon \to Y$ è una sommersione. Se Y non è compatta, esiste ancora una sommersione $\pi : Y^\epsilon \to Y$ che è l'identità su Y, ma ϵ deve poter variare come funzione liscia positiva su Y,

Pagina 70 dell'originale

e si definisce

$$Y^\epsilon = \{w \in \mathbb{R}^M : |w - y| < \epsilon(y) \text{ per qualche } y \in Y\}.$$

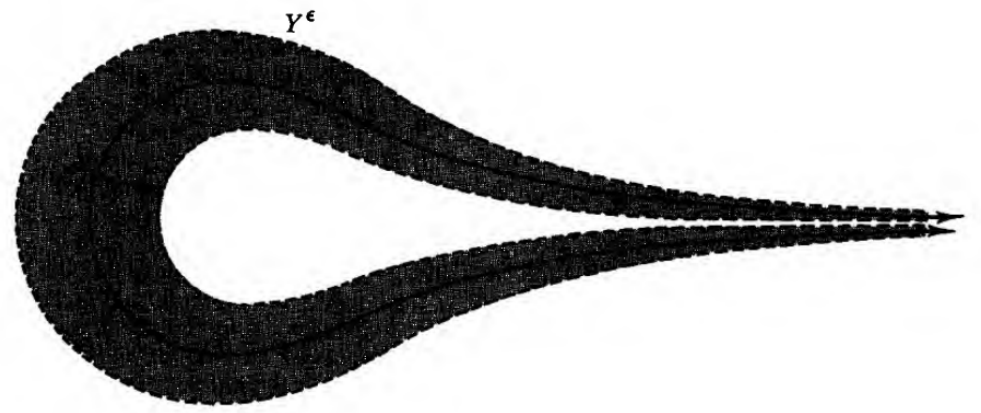


Figura 2-10. Un intorno di spessore variabile di una varietà non compatta.

Rimandiamo momentaneamente la dimostrazione.

Corollario. Data $f : X \to Y$ liscia, con Y senza bordo, esistono una palla aperta S in uno spazio euclideo e un'applicazione liscia $F : X \times S \to Y$ tali che $F(x, 0) = f(x)$ e, per ogni x fissato, $s \mapsto F(x, s)$ sia una sommersione. In particolare, F e ∂F sono sommersioni.

Dimostrazione. Prendiamo la palla unitaria S in $\mathbb{R}^M$ e definiamo

$$F(x, s) = \pi[f(x) + \epsilon(f(x))s].$$

Poiché π è l'identità su Y, $F(x, 0) = f(x)$. Per x fissato, $s \mapsto f(x) + \epsilon(f(x))s$ è una sommersione $S \to Y^\epsilon$; componendola con π otteniamo ancora una sommersione. Le restrizioni alle sottovarietà $\{x\} \times S$ sono sommersioni, quindi lo sono anche F e ∂F. □

La genericità segue immediatamente nella forma che ci occorrerà.

Teorema di omotopia trasversale. Per ogni applicazione liscia $f : X \to Y$ e ogni sottovarietà senza bordo Z della varietà senza bordo Y, esiste $g : X \to Y$ liscia e omotopa a f, tale che $g \pitchfork Z$ e $\partial g \pitchfork Z$.

Pagina 71 dell'originale

Dimostrazione. Per quasi ogni parametro s nella famiglia del corollario, f_s e ∂f_s sono trasversali a Z. L'omotopia $(x,t) \mapsto F(x,ts)$ collega f a f_s. □

Per dimostrare il teorema dell'ϵ-intorno introduciamo una costruzione analoga al fibrato tangente. Lo *spazio normale* $N_y(Y)$ è il complemento ortogonale di $T_y(Y)$ in $\mathbb{R}^M$. Il *fibrato normale* è

$$N(Y) = \{(y,v) \in Y \times \mathbb{R}^M : v \in N_y(Y)\}.$$

Diversamente dal fibrato tangente, esso dipende dall'inclusione specifica nello spazio ambiente. La proiezione naturale è $\sigma(y,v) = y$.

Ricordiamo un fatto di algebra lineare. La trasposta di $A : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^k$ è l'applicazione $A^t : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^M$ caratterizzata da $Av \cdot w = v \cdot A^t w$; la sua matrice è la trasposta della matrice di A. Se A è suriettiva, A^t è un isomorfismo di $\mathbb{R}^k$ sul complemento ortogonale di $\ker A$. Infatti, $A^t w = 0$ implica $Av \cdot w = 0$ per ogni v, quindi $w = 0$; inoltre, se $Av = 0$, $v \cdot A^t w = 0$. L'immagine di A^t è quindi contenuta in $(\ker A)^\perp$ ed entrambi gli spazi hanno dimensione k.

Proposizione. Se $Y \subset \mathbb{R}^M$, il fibrato $N(Y)$ è una varietà di dimensione M e $\sigma : N(Y) \to Y$ è una sommersione.

Dimostrazione. Definiamo localmente Y mediante equazioni. Scegliamo un aperto $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^M$ e una sommersione $\phi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k$, $k = \operatorname{codim} Y$, con $U = Y \cap \widetilde{U} = \phi^{-1}(0)$. L'insieme $N(U)$ è aperto in $N(Y)$. Il differenziale $d\phi_y$ è suriettivo e ha nucleo $T_y(Y)$, dunque $d\phi_y^t$ identifica $\mathbb{R}^k$ con $N_y(Y)$. L'applicazione

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to N(U), \qquad \psi(y,v) = (y, d\phi_y^t v),$$

è biiettiva; è facile verificare che è un embedding in $\widetilde{U} \times \mathbb{R}^M$. Pertanto $N(U)$ è una varietà di dimensione $\dim Y + k = M$. Questi intorni ricoprono $N(Y)$. Inoltre $\sigma \circ \psi$ è la proiezione sul primo fattore e quindi σ è una sommersione. □

Dimostrazione del teorema dell'ϵ-intorno. Poniamo $h : N(Y) \to \mathbb{R}^M$, $h(y,v) = y + v$. È regolare in ogni $(y,0)$:

Pagina 72 dell'originale

le due sottovarietà complementari $Y \times \{0\}$ e $\{y\} \times N_y(Y)$ hanno spazi tangenti mandati da $dh_{(y,0)}$ rispettivamente su $T_y(Y)$ e $N_y(Y)$, la cui somma è $\mathbb{R}^M$. Inoltre h restringe un diffeomorfismo $Y \times \{0\} \to Y$. Per l'esercizio 14 del capitolo I, §8, h è un diffeomorfismo da un intorno della sezione nulla su un intorno di Y in $\mathbb{R}^M$. Ogni tale intorno contiene qualche Y^ϵ (esercizio 1; per Y compatta è evidente). Allora $\pi = \sigma \circ h^{-1} : Y^\epsilon \to Y$ è la sommersione cercata. La caratterizzazione mediante il punto più vicino nel caso compatto, che non useremo, è oggetto dell'esercizio 3. □

Occorre una forma più forte del teorema di omotopia trasversale. Diciamo che f è *trasversale a Z su $C \subset X$* se

$$df_x(T_x(X)) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$$

per ogni $x \in C \cap f^{-1}(Z)$.

Teorema di estensione. Siano Z una sottovarietà chiusa di Y, entrambe senza bordo, e C un chiuso di X. Sia $f : X \to Y$ liscia, con $f \pitchfork Z$ su C e $\partial f \pitchfork Z$ su $C \cap \partial X$. Esiste $g : X \to Y$ liscia e omotopa a f, con $g \pitchfork Z$, $\partial g \pitchfork Z$ e $g = f$ su un intorno di C.

Lemma. Se U è un intorno aperto di un chiuso C in X, esiste $\gamma : X \to [0,1]$ liscia, identicamente uno fuori da U e zero su un intorno di C.

Dimostrazione. Scegliete un chiuso $C' \subset U$ che contenga C nel proprio interno e una partizione dell'unità subordinata a $\{U, X - C'\}$. La dimostrazione del teorema delle partizioni dell'unità vale anche con bordo. Basta sommare le funzioni subordinate a $X - C'$. □

Dimostrazione del teorema. La trasversalità vale in un intorno di C. Infatti, se $x \in C$ e $f(x) \notin Z$, l'aperto $X - f^{-1}(Z)$ è un intorno dove la condizione è automatica, perché Z è chiusa. Se $f(x) \in Z$, una sommersione locale ϕ definisce Z come $\phi^{-1}(0)$; la trasversalità equivale alla regolarità di $\phi \circ f$, che persiste in un intorno. Applicando lo stesso argomento a ∂f, scegliamo un intorno aperto U di C dove valgano entrambe le condizioni pertinenti.[20]

Pagina 73 dell'originale

Scegliamo γ come nel lemma e poniamo $\tau = \gamma^2$. Allora $d\tau_x = 2\gamma(x)d\gamma_x$ si annulla dove $\tau(x) = 0$. Modifichiamo la famiglia precedente ponendo

$$G(x, s) = F(x, \tau(x)s).$$

Se $\tau(x) \neq 0$, la derivata rispetto a s è suriettiva, quindi G è regolare. Se $\tau(x) = 0$, poniamo $m(x, s) = (x, \tau(x)s)$; allora

$$dm_{(x,s)}(v, w) = (v, \tau(x)w + d\tau_x(v)s).$$

Per la regola della catena,

$$dG_{(x,s)}(v, w) = dF_{(x,0)}(v, 0) = df_x(v).$$

In questo caso $x \in U$, dove $f \pitchfork Z$, e quindi $G \pitchfork Z$. Lo stesso argomento dimostra $\partial G \pitchfork Z$. Il teorema di trasversalità fornisce s tale che $g(x) = G(x, s)$ e ∂g siano trasversali. Come prima, g è omotopa a f; dove $\tau = 0$, e quindi in un intorno di C, coincide con f. □

Poiché ∂X è chiuso in X, otteniamo il caso particolare seguente (con Z chiusa come nel teorema).

Corollario. Se $\partial f : \partial X \to Y$ è trasversale a Z, esiste $g : X \to Y$ omotopa a f, con $\partial g = \partial f$ e $g \pitchfork Z$. In altri termini, se $h : \partial X \to Y$ è trasversale a Z e si estende a un'applicazione su tutto X, si estende anche a un'applicazione trasversale a Z su tutto X.

Pagina 74 dell'originale

Esercizi

1. (*Per il teorema dell'ϵ-intorno.*) Mostrate che ogni intorno $\widetilde{U}$ di Y in $\mathbb{R}^M$ contiene qualche Y^ϵ; se Y è compatta, ϵ può essere costante. [*Suggerimento:* ricoprite Y con aperti U_α e scegliete $\epsilon_\alpha > 0$ con $U_\alpha^{\epsilon_\alpha} \subset \widetilde{U}$. Per una partizione dell'unità subordinata $\{\theta_i\}$, verificate che funziona $\epsilon = \sum_i \theta_i \epsilon_i$.]

2. Sia $Y \subset \mathbb{R}^M$ una sottovarietà compatta e $w \in \mathbb{R}^M$. Mostrate che esiste un punto $y \in Y$ più vicino a w, non necessariamente unico, e che $w - y \in N_y(Y)$. [*Suggerimento:* per una curva c su Y con $c(0) = y$, $|w - c(t)|^2$ ha un minimo in 0. Usate I, §2, esercizio 12.]

3. Usate l'esercizio 2 per la caratterizzazione geometrica di $\pi : Y^\epsilon \to Y$ nel caso compatto. Supponete che $h : N(Y) \to \mathbb{R}^M$ mandi diffeomorficamente un intorno della sezione nulla su Y^ϵ, con ϵ costante. Mostrate che, restringendo opportunamente ϵ, $\pi(w)$ è l'unico punto più vicino a w.

[20] L'originale conclude qui «un intorno U di X»: va letto «di C». Si rende esplicita anche la corrispondente condizione sul bordo.

4. (*Lemma di posizione generale.*) Se $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ sono sottovarietà, mostrate che per quasi ogni $a \in \mathbb{R}^N$ la traslata $X + a$ interseca Y trasversalmente.

***5.** Sia $X \subset Y$ una sottovarietà compatta che incontra $Z \subset Y$, con $\dim X + \dim Z < \dim Y$. Mostrate che si può allontanare X da Z con una deformazione arbitrariamente piccola: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $X_t = i_t(X)$, con $X_1 \cap Z = \varnothing$ e $|x - i_1(x)| < \epsilon$ per ogni $x \in X$. Occorre I, §6, esercizio 11, per garantire che X_t resti una varietà.

6. Rafforzate l'esercizio 5: se Z è chiusa in Y e $U \subset X$ è aperto e contiene $X \cap Z$, si può scegliere la deformazione costante fuori da U (Figura 2-11).

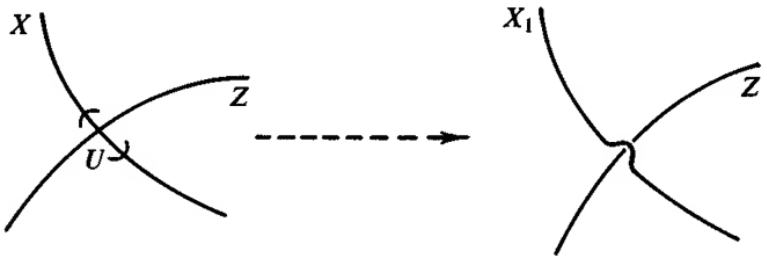


Figura 2-11. La deformazione può essere localizzata vicino all'intersezione.

Pagina 75 dell'originale

***7.** Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una sottovarietà. Mostrate che «quasi ogni» sottospazio *affine* V di dimensione fissata l interseca X trasversalmente. [*Suggerimento:* sia $S \subset (\mathbb{R}^N)^l$ l'aperto delle l-uple di vettori indipendenti. L'applicazione

$$\mathbb{R}^l \times S \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad (t, v, a) \mapsto \sum_{i=1}^{l} t_i v_i + a$$

è una sommersione.]

8. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liscia, $n > 1$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto e $\epsilon > 0$. Mostrate che esiste $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con df'_x mai nullo e $|f - f'| < \epsilon$ su K. Mostrate che è falso per $n = 1$. [*Suggerimento:* se $M(n)$ è lo spazio delle matrici $n \times n$, $F(x, A) = df_x + A$ è una sommersione $\mathbb{R}^n \times M(n) \to M(n)$. Scegliete A con $F_A \pitchfork \{0\}$. Dove si usa $n > 1$?]

9. Sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ liscia e $f_a(x) = f(x) + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$. Dimostrate che per quasi ogni $a \in \mathbb{R}^k$, f_a è di Morse. [*Suggerimento:* l'applicazione $(x, a) \mapsto (\partial f/\partial x_1 + a_1, \ldots, \partial f/\partial x_k + a_k)$ è una sommersione e quindi è trasversale a $\{0\}$.]

10. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie. I valori critici di $h : N(X) \to \mathbb{R}^n$, $h(x, v) = x + v$, si chiamano *punti focali*. Trovateli per la parabola $y = x^2$. [*Risposta:* una curva con cuspide in $(0, \frac{1}{2})$.]

11. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ unidimensionale e $p \in X$. Scegliete coordinate ortonormali con $p = 0$, asse x tangente e asse y normale. Mostrate che localmente X è il grafico $y = f(x)$, con $f(0) = f'(0) = 0$. La quantità $\kappa(p) = f''(0)$ è la *curvatura* con segno. Se $\kappa(p) \neq 0$, mostrate che sulla normale c'è un punto focale alla distanza orientata $1/\kappa(p)$ da p. [*Suggerimento:* la normale vicino a p è generata da $(-f'(x), 1)$; calcolate h.]

Pagina 76 dell'originale

***12.** Se $Z \subset Y \subset \mathbb{R}^M$, definite

$$N(Z; Y) = \{(z, v) : z \in Z,\ v \in T_z(Y),\ v \perp T_z(Z)\}.$$

Dimostrate che è una varietà della stessa dimensione di Y. [*Suggerimento:* scegliete funzioni indipendenti $g_1, \dots, g_l$ su un intorno $\widetilde{U}$ in $\mathbb{R}^M$, con $U = Z \cap \widetilde{U} = \{g_1 = \cdots = g_l = 0\}$ e $Y \cap \widetilde{U} = \{g_{k+1} = \cdots = g_l = 0\}$ (I, §4, esercizio 4). Restringete la parametrizzazione $U \times \mathbb{R}^l \to N(Z; \mathbb{R}^M)$ a $U \times \mathbb{R}^k$ e proiettate ortogonalmente su $T_z(Y)$.]

13. Considerate $S^{k-1} \subset S^k$ mediante $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0)$. Mostrate che il complemento ortogonale di $T_p(S^{k-1})$ in $T_p(S^k)$ è generato da $(0, \dots, 0, 1)$ e che $N(S^{k-1}; S^k)$ è diffeomorfo a $S^{k-1} \times \mathbb{R}$.

14. Dimostrate che $\sigma : N(Z;Y) \to Z$, $\sigma(z, v) = z$, è una sommersione. Descrivete la fibra $\sigma^{-1}(z)$, indicata con $N_z(Z;Y)$.

15. Mostrate che $z \mapsto (z, 0)$ è un embedding di Z in $N(Z;Y)$.

***16.** *Teorema dell'intorno tubolare.* Dimostrate che esiste un diffeomorfismo da un intorno aperto di Z in $N(Z;Y)$ su un intorno aperto di Z in Y. [*Suggerimento:* sia $\pi : Y^\epsilon \to Y$ come sopra e $h(z, v) = z + v$. Allora $W = h^{-1}(Y^\epsilon)$ è un intorno aperto della sezione nulla; la composizione $W \xrightarrow{h} Y^\epsilon \xrightarrow{\pi} Y$ è l'identità su Z. Usate I, §8, esercizio 14.]

17. Per la diagonale $\Delta \subset X \times X$, mostrate che il complemento ortogonale di $T_{(x,x)}\Delta$ è $\{(v, -v) : v \in T_x X\}$ (I, §2, esercizio 10).

***18.** Mostrate che $(x, v) \mapsto ((x, x), (v, -v))$ è un diffeomorfismo $T(X) \to N(\Delta; X \times X)$. Deducete dal teorema tubolare un diffeomorfismo di un intorno di $X \times \{0\}$ in $T(X)$ con un intorno di Δ in $X \times X$, che estenda $x \mapsto (x, x)$.

***19.** Se Z ha codimensione k in Y, il fibrato normale si dice *banale* se esiste un diffeomorfismo

Pagina 77 dell'originale

$\Phi : N(Z;Y) \to Z \times \mathbb{R}^k$ che su ogni fibra restringa un isomorfismo lineare $N_z(Z;Y) \to \{z\} \times \mathbb{R}^k$. Dimostrate che il fibrato è sempre *localmente banale*: ogni punto di Z ha un intorno V in Z per cui $N(V;Y)$ è banale.

***20.** Dimostrate che $N(Z;Y)$ è banale se e solo se Z è definita, su un aperto $U \subset Y$, da k funzioni globali indipendenti:

$$Z = \{y \in U : g_1(y) = \cdots = g_k(y) = 0\}.$$

[*Suggerimento:* nel fibrato banale le coordinate della fibra definiscono la sezione nulla; trasferitele con il teorema tubolare. Viceversa, per una sommersione $g : U \to \mathbb{R}^k$ con $g^{-1}(0) = Z$, la trasposta $dg_z^t : \mathbb{R}^k \to T_z Y$ identifica $\mathbb{R}^k$ con $(T_z Z)^\perp$ in $T_z Y$; ponete $\Phi^{-1}(z, a) = (z, dg_z^t a)$.]

§4. Teoria dell'intersezione modulo 2

Pagina 77 dell'originale

La sezione precedente era tecnica e piuttosto difficile; speriamo ora di mostrarvi che ne valeva la pena. Useremo la trasversalità e gli altri risultati del §3 per costruire un semplice invariante intuitivo delle intersezioni, dal quale ricaveremo numerose conseguenze geometriche.

Due sottovarietà $X, Z \subset Y$ hanno *dimensioni complementari* se $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Se $X \pitchfork Z$, l'intersezione è allora una varietà di dimensione zero. Qui lavoriamo senza bordo. Se inoltre entrambe sono chiuse e almeno una, diciamo X, è compatta, $X \cap Z$ è finito. Possiamo provvisoriamente chiamare $\#(X \cap Z)$ il loro «numero d'intersezione» (Figura 2-12). Come estenderlo a una Z chiusa arbitraria di dimensione complementare?

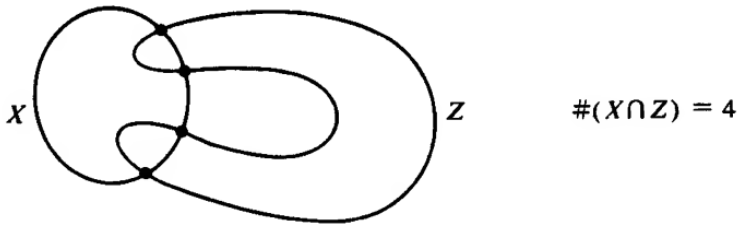


Figura 2-12. Quattro punti d'intersezione trasversale.

Pagina 78 dell'originale

Senza trasversalità l'intersezione può essere un insieme confuso e inutilizzabile. Possiamo però deformare leggermente X per renderla trasversale a Z, e usare il numero d'intersezione dopo questa operazione. Il problema è che deformazioni diverse possono dare numeri diversi (Figura 2-13). Fortunatamente, come vedremo, questi numeri hanno tutti la stessa parità. È quindi possibile definire un numero d'intersezione *modulo 2*.

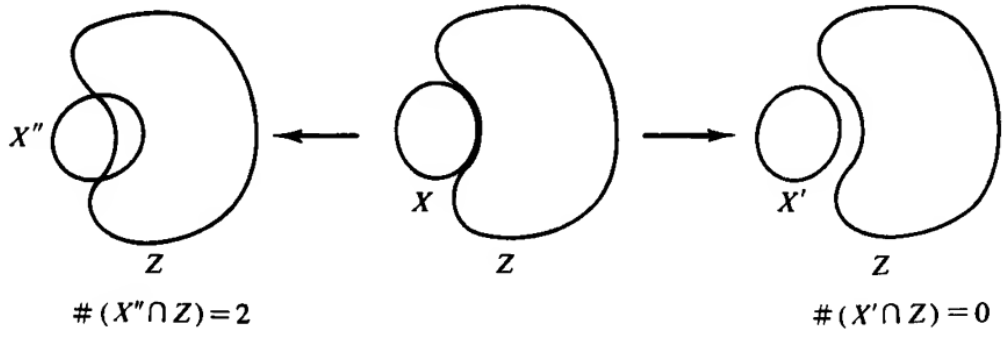


Figura 2-13. Due perturbazioni producono rispettivamente due e zero intersezioni.

Occorre precisare cosa significa deformare X. Invece di deformare insiemi arbitrari, consideriamo X come varietà astratta e deformiamo per omotopia l'embedding di inclusione $i : X \to Y$. Poiché gli embedding formano una classe stabile, una piccola omotopia dà ancora embedding, le cui immagini sono copie diffeomorfe di X vicine all'originale.

Siamo così condotti a una situazione più generale. Sia X una varietà compatta, non necessariamente contenuta in Y, e $f : X \to Y$ liscia e trasversale alla sottovarietà chiusa Z, con dimensioni complementari. Allora $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà chiusa di dimensione zero di X, quindi è finita. Definiamo

$$I_2(f, Z) = \#f^{-1}(Z) \pmod 2.$$

Per un'applicazione liscia arbitraria g, scegliamo f omotopa a g e trasversale a Z, e poniamo $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$. La scelta non influisce sul risultato grazie al teorema seguente.

Teorema. Se $f_0, f_1 : X \to Y$ sono omotope ed entrambe trasversali a Z, allora $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.

Dimostrazione. Sia $F : X \times I \to Y$ un'omotopia. Per il teorema di estensione possiamo supporre $F \pitchfork Z$, mantenendo le applicazioni agli estremi.

Pagina 79 dell'originale

Poiché ∂F coincide con f_0 e f_1 sulle due componenti del bordo, anch'essa è trasversale. Pertanto $F^{-1}(Z)$ è una varietà unidimensionale compatta con bordo

$$\partial[F^{-1}(Z)] = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \ \cup \ f_1^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Il bordo ha un numero pari di punti, dunque le due controimmagini hanno la stessa parità. □

Poiché l'omotopia è una relazione d'equivalenza, segue immediatamente:

Corollario. Applicazioni omotope $g_0, g_1 : X \to Y$ hanno lo stesso numero d'intersezione modulo 2 con Z.

Torniamo al caso iniziale. Per $X \subset Y$ compatta e $Z \subset Y$ chiusa di dimensione complementare, definiamo $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$. Se $X \pitchfork Z$, questo è $\#(X \cap Z)$ modulo 2. Se è non nullo, nessuna deformazione di X può separarla completamente da Z. Sul toro $S^1 \times S^1$, per esempio, le circonferenze $S^1 \times \{1\}$ e $\{1\} \times S^1$ hanno numero d'intersezione non nullo (Figura 2-14).

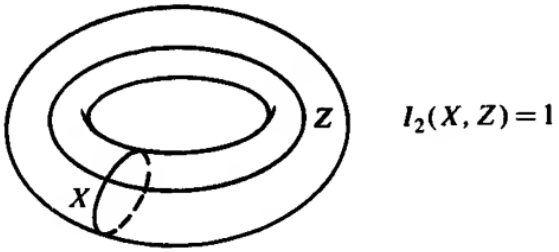


Figura 2-14. Le due circonferenze fondamentali del toro hanno $I_2(X, Z) = 1$.

Quando $\dim X = \frac{1}{2} \dim Y$, possiamo considerare il *numero di autointersezione* $I_2(X, X)$. Un esempio istruttivo è la circonferenza centrale nel nastro di Möbius aperto. Costruite un modello incollando una striscia di carta dopo una mezza torsione e verificate che

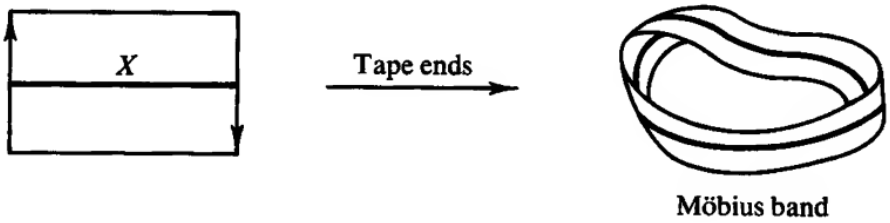


Figura 2-15. La circonferenza centrale del nastro di Möbius.

Pagina 80 dell'originale

$I_2(X, X) = 1$. Convincetevi che nessuna deformazione può separare completamente la curva dalla sua posizione iniziale.

Se X è il bordo di una varietà compatta W in Y, invece, $I_2(X, Z) = 0$. Intuitivamente, quando l'intersezione è trasversale, Z deve uscire da W tante volte quante vi entra, e quindi incontra X un numero pari di volte (Figura 2-16).

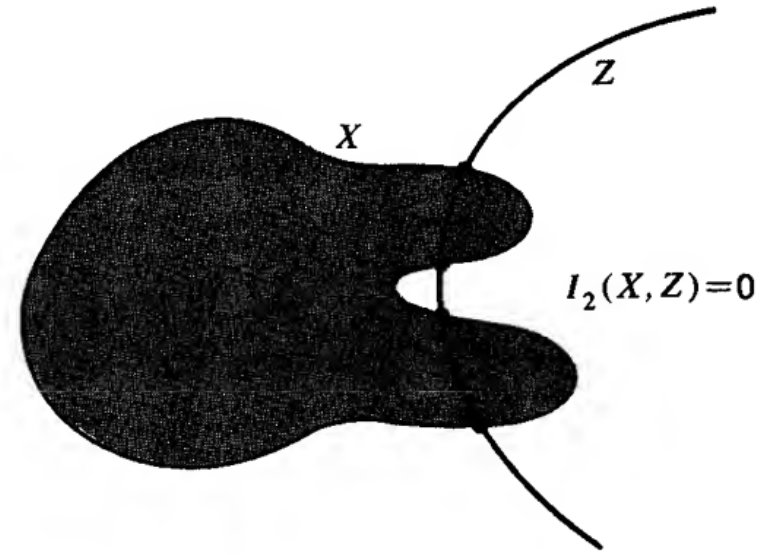


Figura 2-16. Entrate e uscite attraverso il bordo hanno parità complessiva nulla.

Teorema del bordo. Supponiamo $X = \partial W$, con W compatta, e sia $g : X \to Y$ liscia. Se g si estende a tutto W, allora $I_2(g, Z) = 0$ per ogni sottovarietà chiusa $Z \subset Y$ di dimensione complementare a X.

Dimostrazione. Sia $G : W \to Y$ un'estensione. Il teorema di omotopia trasversale fornisce F omotopa a G, con $F \pitchfork Z$ e $f = \partial F \pitchfork Z$. Allora $f \sim g$ e $I_2(g, Z) = \#f^{-1}(Z) \bmod 2$. Ma $F^{-1}(Z)$ è una varietà unidimensionale compatta il cui bordo è $f^{-1}(Z)$, che ha quindi cardinalità pari. □

La teoria dà un interessante invariante omotopico delle applicazioni fra varietà della stessa dimensione.

Teorema. Se X è compatta, Y connessa, $\dim X = \dim Y$ e $f : X \to Y$ è liscia, il valore $I_2(f, \{y\})$ è indipendente da $y \in Y$. Si chiama *grado modulo 2* di f e si indica con $\deg_2(f)$. Le ipotesi di compattezza del dominio e connessione del codominio sono sempre sottintese quando scriviamo $\deg_2$; le varietà sono senza bordo.

Pagina 81 dell'originale

Dimostrazione. Fissato y, perturbiamo omotopicamente f affinché sia trasversale a $\{y\}$. Per il teorema della pila di dischi (I, §4, esercizio 7) esiste un intorno U di y con controimmagine unione disgiunta di aperti $V_1, \ldots, V_n$, ciascuno mandato diffeomorficamente su U. Dunque $I_2(f, \{z\}) = n \bmod 2$ per ogni $z \in U$. La funzione $y \mapsto I_2(f, \{y\})$ è localmente costante e, per connessione, costante. □

Per calcolare il grado basta scegliere un valore regolare e contare i punti della controimmagine modulo 2. L'applicazione $z \mapsto z^n$ della circonferenza in sé, che la percorre n volte, ha grado modulo 2 uguale alla parità di n.

Teorema. Applicazioni omotope hanno lo stesso grado modulo 2.

Teorema. Se $X = \partial W$, con W compatta, e $f : X \to Y$ si estende a W, allora $\deg_2(f) = 0$.

Applichiamo queste osservazioni al problema degli zeri. Sia $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ liscia e sia W una regione compatta liscia del piano, cioè una varietà bidimensionale con bordo. Esiste $z \in W$ con $p(z) = 0$? Supponiamo che p non si annulli su ∂W, così che $p/|p| : \partial W \to S^1$ sia definita e liscia. Se non vi sono zeri neppure dentro W, questa applicazione si estende a tutto W; pertanto:

Proposizione. Se il grado modulo 2 di $p/|p| : \partial W \to S^1$ è non nullo, p ha uno zero nell'interno di W. È notevole che il semplice conteggio delle volte in cui $p(z)$ punta in una data direzione, mentre z percorre il bordo, permetta di dedurre l'esistenza di uno zero all'interno! Per mostrare insieme potenza e limiti della teoria, dimostriamo metà del teorema fondamentale dell'algebra. Sia

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

un polinomio complesso monico e poniamo

$$p_t(z) = tp(z) + (1-t)z^m = z^m + t(a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m).$$

Pagina 82 dell'originale

Per un disco chiuso W di raggio sufficientemente grande nessun p_t si annulla sul bordo, poiché

$$\frac{p_t(z)}{z^m} = 1 + t\left(\frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_m}{z^m}\right)$$

e la parentesi tende a zero all'infinito, uniformemente per $0 \le t \le 1$. L'omotopia $p_t/|p_t|$ è quindi definita su ∂W. Il grado modulo 2 di $p/|p|$ coincide con quello di $z^m/|z^m|$, ossia con $m \bmod 2$. Otteniamo:

Metà del teorema fondamentale dell'algebra. Ogni polinomio complesso di grado dispari ha una radice. Il risultato viene ottenuto senza difficoltà, ma rivela il limite della teoria modulo 2: si perde troppa informazione. Il grado modulo 2 non distingue z^2 da una costante e non prova la metà pari del teorema. Nel prossimo capitolo raffineremo il metodo per ottenere una teoria assai più potente. Tuttavia, i metodi elementari già sviluppati danno ancora risultati profondi con poco sforzo, come mostrano le due sezioni seguenti.

Esercizi

1. Dimostrate che esiste $z \in \mathbb{C}$ con

$$z^7 + \cos(|z|^2)(1 + 93z^4) = 0.$$

(Per carità, non cercate di calcolarlo!)

2. Siano $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ lisce, con X compatta, e $g \pitchfork W$, dove W è una sottovarietà chiusa di Z. Verificate

$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(g \circ f, W).$$

Usate I, §5, esercizio 7. Verificate anche che, se uno dei due numeri è definito, lo è l'altro.

3. Se X, Z sono compatte e $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$ lisce, con dimensioni complementari, definiamo

Pagina 83 dell'originale

$I_2(f, g) = I_2(f \times g, \Delta)$, dove Δ è la diagonale di $Y \times Y$. (a) Mostrate l'invarianza per omotopie di ciascuna applicazione. (b) Mostrate $I_2(f, g) = I_2(g, f)$ usando l'esercizio 2 e il diffeomorfismo $(a, b) \mapsto (b, a)$. (c) Se $Z \subset Y$ e i è l'inclusione, mostrate $I_2(f, i) = I_2(f, Z)$. (d) Deducete $I_2(X, Z) = I_2(Z, X)$ per sottovarietà compatte. È immediato quando sono trasversali: perché abbiamo adottato questa via?

***4.** Se $f : X \to Y$ è omotopa a una costante, mostrate $I_2(f, Z) = 0$ per ogni Z chiusa di dimensione complementare, tranne eventualmente quando $\dim X = 0$. [*Suggerimento:* se

$\dim Z < \dim Y$, spostate il valore della costante fuori da Z. Se X è un punto, per quali Z il numero è non nullo?]

***5.** Mostrate che la teoria dell'intersezione è banale nelle varietà contraibili: se Y è contraibile, $\dim X > 0$, X è compatta e Z è chiusa e di dimensione complementare, allora $I_2(f, Z) = 0$ per ogni $f : X \to Y$. In particolare, questo vale nello spazio euclideo.[21]

***6.** Mostrate che nessuna varietà compatta senza bordo, salvo lo spazio con un solo punto, è contraibile. [*Suggerimento:* applicate l'esercizio 5 all'identità.]

***7.** Mostrate che S^1 non è semplicemente connessa. [*Suggerimento:* considerate l'identità.]

***8.** (a) Data $f : S^1 \to S^1$ liscia, mostrate che esiste $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liscia con

$$f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t)), \qquad g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi q$$

per qualche intero q. [*Suggerimento:* definite prima g su $[0, 2\pi]$, poi prolungatela con la relazione indicata.] (b) Dimostrate $\deg_2(f) = q \bmod 2$.

9. (*Sulle sfere gli unici numeri d'intersezione interessanti sono i gradi.*) Se $f : X \to S^k$ è liscia, X compatta e $0 < \dim X < k$,

Pagina 84 dell'originale

mostrate $I_2(f, Z) = 0$ per ogni $Z \subset S^k$ chiusa di dimensione complementare. [*Suggerimento:* Sard fornisce $p \notin f(X) \cup Z$. Usate la proiezione stereografica e l'esercizio 5.]

10. Dimostrate che S^2 e il toro non sono diffeomorfi.

11. Mostrate che $\deg_2(f) \neq 0$ implica che f è suriettiva. Ricordate le ipotesi implicite nella definizione di grado.

12. Se Y non è compatta, mostrate che $\deg_2(f) = 0$ per ogni $f : X \to Y$ con X compatta.

13. Quando $f \pitchfork Z$, le dimensioni sono complementari e $f^{-1}(Z)$ è finita, possiamo comunque contare la sua cardinalità modulo 2. Trovate esempi che mostrino: (a) il conteggio non è invariante per omotopia se Z non è chiusa; (b) non è invariante se X non è compatta; (c) il teorema del bordo può fallire senza chiusura di Z; (d) può fallire senza compattezza di X; (e) può fallire senza compattezza di W, anche quando $X = \partial W$ è compatta e Z è chiusa. [*Suggerimento:* considerate il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}_+$.]

***14.** Due sottovarietà compatte $X, Z \subset Y$ sono *cobordanti* se esiste una varietà compatta con bordo $W \subset Y \times I$ con $\partial W = X \times \{0\} \cup Z \times \{1\}$. Mostrate che una deformazione di X in Z implica che sono cobordanti. L'esempio dei «pantaloni» mostra che il viceversa è falso (Figura 2-17).

[21] Gli errata richiedono $\dim X > 0$: senza tale ipotesi rimane un'eccezione in dimensione zero.

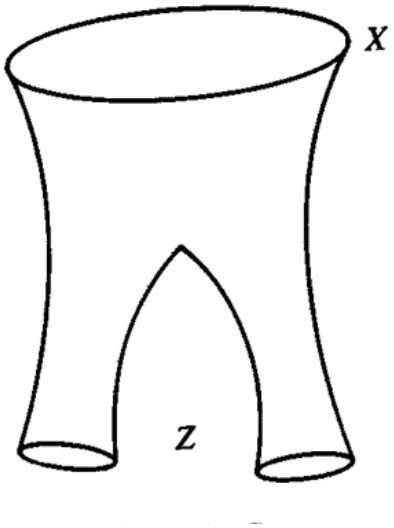


Figura 2-17. Un cobordismo fra una circonferenza e due circonferenze.

Pagina 85 dell'originale

***15.** Se X, Z sono cobordanti in Y, mostrate che $I_2(X, C) = I_2(Z, C)$ per ogni sottovarietà *chiusa* $C \subset Y$ di dimensione complementare. [*Suggerimento:* applicate il teorema del bordo alla proiezione $W \to Y$.]

16. Dimostrate direttamente che $\deg_2(f)$ è ben definito usando il teorema del bordo. [*Suggerimento:* rendete f trasversale a $\{y_0, y_1\}$; scegliete $c : I \to Y$ con estremi y_0, y_1 e ponete $F = f \times c : X \times I \to Y \times Y$. Considerate, dopo una perturbazione relativa al bordo, $F^{-1}(\Delta)$.]

17. Deducete dal teorema del bordo il teorema di non esistenza di retrazioni del §2.

18. Sia $X \subset Y$ compatta, di dimensione positiva, con $\dim X = \frac{1}{2}\dim Y$. Se X è definibile globalmente mediante funzioni indipendenti, mostrate $I_2(X, X) = 0$. [*Suggerimento:* per §3, esercizio 20, il fibrato normale è $X \times \mathbb{R}^k$. La sezione $X \times \{a\}$, con $a \neq 0$, non incontra la sezione nulla. Usate il teorema tubolare.][22]

19. Mostrate che la circonferenza centrale del nastro di Möbius aperto ha $I_2(X, X) = 1$. [*Suggerimento:* incollando con torsione i lati della Figura 2-18, X' diventa una deformazione di X.]

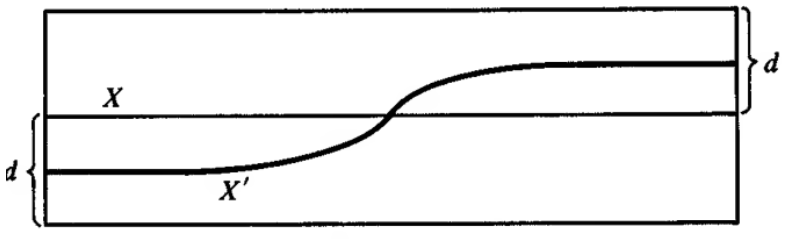


Figura 2-18. Una perturbazione della curva centrale ha una sola intersezione trasversale.

Corollario agli esercizi 18 e 19. La circonferenza centrale del nastro di Möbius non è definibile mediante una funzione indipendente.

[22] Si esplicita la dimensione positiva: per $X = Y$ costituiti da un solo punto l'enunciato originale è falso.

§5. Numeri di avvolgimento e teorema di separazione di Jordan–Brouwer

Pagina 85 dell'originale

Il teorema classico della curva di Jordan afferma che ogni curva semplice chiusa nel piano lo divide in due parti: l'«interno» e l'«esterno». Se sembra troppo evidente, mettete alla prova la vostra intuizione con la Figura 2-19.

Questa sezione è una spedizione da condurre in autonomia, con fucile e macchina fotografica, nella giungla di simili esempi, e in n dimensioni!

Pagina 86 dell'originale

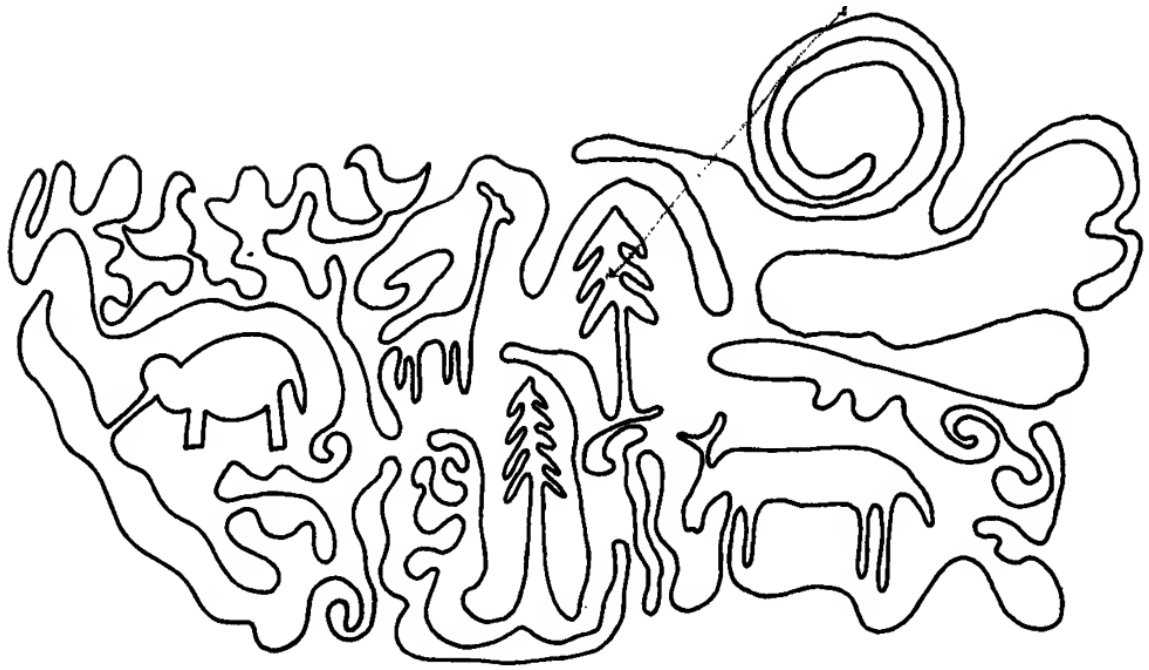


Figura 2-19. Una curva semplice chiusa il cui interno è poco evidente a prima vista.

Partiamo da una varietà compatta e connessa X e da $f : X \to \mathbb{R}^n$ liscia, con $\dim X = n - 1$. Potrebbe, in particolare, essere l'inclusione di un'ipersuperficie: in generale, un'*ipersuperficie* è una sottovarietà di codimensione uno. Per studiare come f avvolge X nello spazio, prendiamo $z \notin f(X)$ e consideriamo il versore

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|},$$

che indica la direzione da z a $f(x)$. La teoria dell'intersezione dice che $u : X \to S^{n-1}$ assume quasi ogni direzione lo stesso numero di volte modulo 2, ossia $\deg_2(u)$ volte. Definiamo perciò il *numero di avvolgimento modulo 2* di f attorno a z come

$$W_2(f, z) = \deg_2(u).$$

23

[23] In questa sezione si assume $n \geq 2$, affinché S^{n-1} sia connessa e il grado sia definito come nel §4. Il teorema di separazione per $n = 1$ si verifica direttamente per un punto della retta.

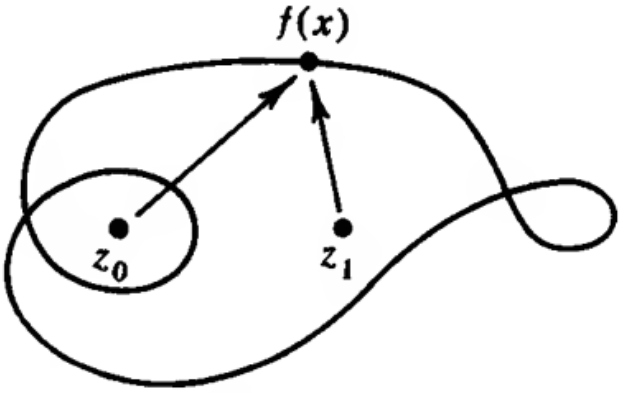


Figura 2-20. Le direzioni da due punti esterni all'immagine della curva.

Useremo fra poco questa nozione per generalizzare il teorema di Jordan. Prima, alcuni esercizi costruiscono un risultato preliminare; la prova introduce una tecnica particolarmente semplice ed elegante, che ritornerà in seguito.

Pagina 87 dell'originale

I suggerimenti sono raccolti alla fine, ma può essere piacevole ricomporre la dimostrazione da soli.

Teorema. Sia $X = \partial D$, con D una varietà compatta con bordo, e sia $F : D \to \mathbb{R}^n$ un'estensione liscia di f. Se z è un valore regolare di F che non appartiene a $f(X)$, allora $F^{-1}(z)$ è finita e

$$W_2(f, z) = \#F^{-1}(z) \pmod 2.$$

In altre parole, f avvolge il bordo attorno a z tante volte quante F assume il valore z, modulo 2 (Figura 2-21).

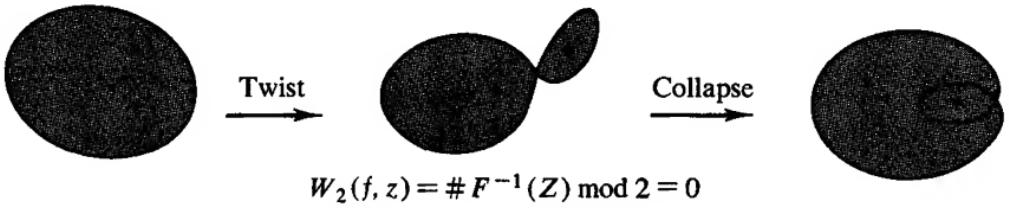


Figura 2-21. Avvolgimento del bordo e conteggio delle controimmagini all'interno.

Ecco gli esercizi che costruiscono la dimostrazione.

1. Se F non assume il valore z, mostrate $W_2(f, z) = 0$.

2. Sia $F^{-1}(z) = \{y_1, \ldots, y_l\}$. Scegliete attorno a ogni y_i una palla chiusa B_i, immagine di una palla euclidea mediante una parametrizzazione di D, con le palle disgiunte fra loro e da X. Se $f_i = F|_{\partial B_i}$, dimostrate

$$W_2(f, z) = \sum_{i=1}^{l} W_2(f_i, z) \pmod 2.$$

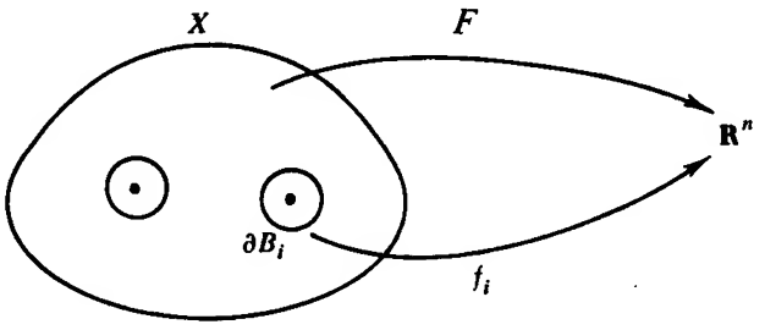


Figura 2-22. Si rimuovono piccole palle attorno alle controimmagini di z.

3. Usate la regolarità di z per scegliere le palle con $W_2(f_i, z) = 1$, completando la dimostrazione.

Supponiamo ora che X sia effettivamente un'ipersuperficie compatta e connessa di $\mathbb{R}^n$. Se separa lo spazio in un interno e un esterno,

Pagina 88 dell'originale

dovrebbe essere il bordo di una varietà compatta di dimensione n: la chiusura del suo interno. Il teorema appena dimostrato direbbe allora che $W_2(X, z)$ vale uno dentro e zero fuori; qui $W_2(X, z)$ denota l'avvolgimento dell'inclusione. Gli esercizi seguenti rovesciano questo ragionamento per dimostrare la separazione.

4. Sia $z \in \mathbb{R}^n - X$. Mostrate che, per ogni $x \in X$ e ogni suo intorno U in $\mathbb{R}^n$, esiste un punto di U collegabile a z da una curva che non incontra X (Figura 2-23).

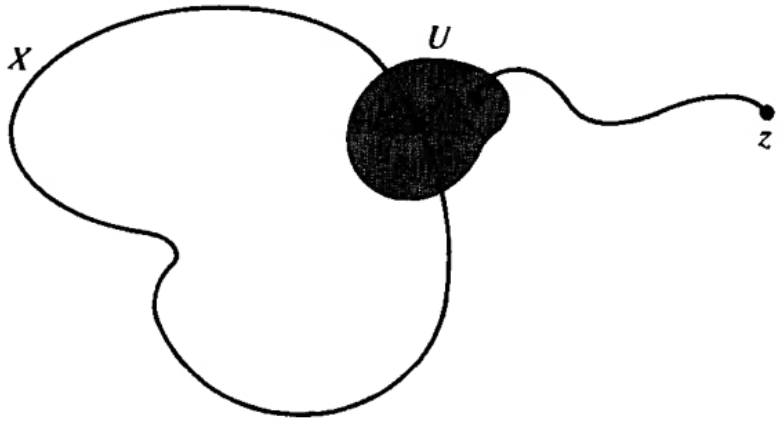


Figura 2-23. Una componente del complementare si avvicina a ogni punto di X.

5. Mostrate che $\mathbb{R}^n - X$ ha al più due componenti connesse.

6. Se z_0, z_1 appartengono alla stessa componente, mostrate $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.

7. Per $z \notin X$ e $v \in S^{n-1}$, considerate la semiretta $r = \{z + tv : t \geq 0\}$. Mostrate che $r \pitchfork X$ se e solo se v è un valore regolare dell'applicazione delle direzioni $u : X \to S^{n-1}$. Quasi ogni semiretta uscente da z è quindi trasversale a X.

8. Sia r una semiretta uscente da z_0, trasversale a X, che incontra X in un insieme non vuoto, necessariamente finito. Se $z_1 \in r - X$ e fra z_0 e z_1 vi sono l intersezioni, verificate

$$W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \pmod 2.$$

9. Concludete che $\mathbb{R}^n - X$ ha esattamente due componenti,

$$D_0 = \{z : W_2(X, z) = 0\}, \qquad D_1 = \{z : W_2(X, z) = 1\}.$$

Pagina 89 dell'originale

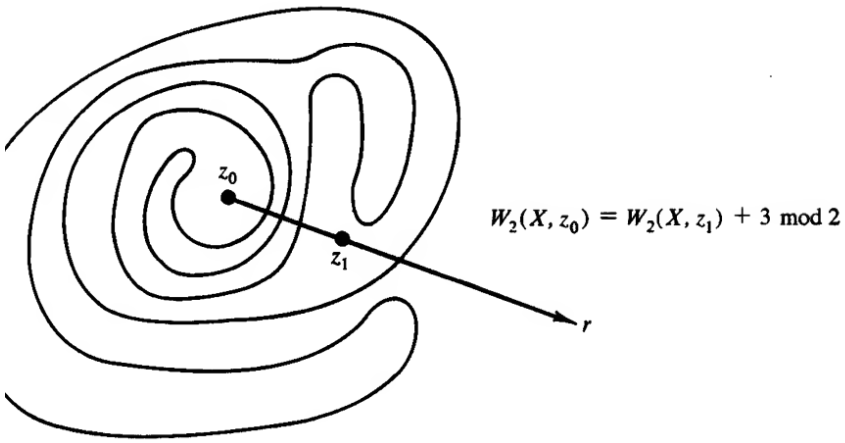


Figura 2-24. Spostando il punto base oltre tre intersezioni cambia la parità.

10. Mostrate che $W_2(X, z) = 0$ per $|z|$ sufficientemente grande.

11. Combinate questi risultati per dimostrare il teorema seguente.

Teorema di separazione di Jordan–Brouwer. Il complementare di un'ipersuperficie compatta e connessa $X \subset \mathbb{R}^n$ consiste di due aperti connessi: l'*esterno* D_0 e l'*interno* D_1. Inoltre $\overline{D}_1$ è una varietà compatta con bordo $\partial\overline{D}_1 = X$. Abbiamo anche ottenuto un procedimento semplice per decidere se un punto sia interno o esterno.

12. Data una semiretta da $z \notin X$ trasversale a X, mostrate che z è interno se e solo se essa incontra X in un numero dispari di punti (Figura 2-25).

Suggerimenti, numerati come gli esercizi

1. Se u si estende a D, il suo grado modulo 2 è zero.

2. Applicate 1 a $D' = D - \bigcup_i \mathrm{Int}(B_i)$.

3. Se f_i manda ∂B_i diffeomorficamente su una sfera centrata in z, l'applicazione delle direzioni è biiettiva. Potete scegliere queste palle perché F è un diffeomorfismo locale in ogni y_i.

4. Mostrate che i punti x per i quali l'affermazione vale formano un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso di X. La chiusura è facile. Per l'apertura usate

Pagina 90 dell'originale

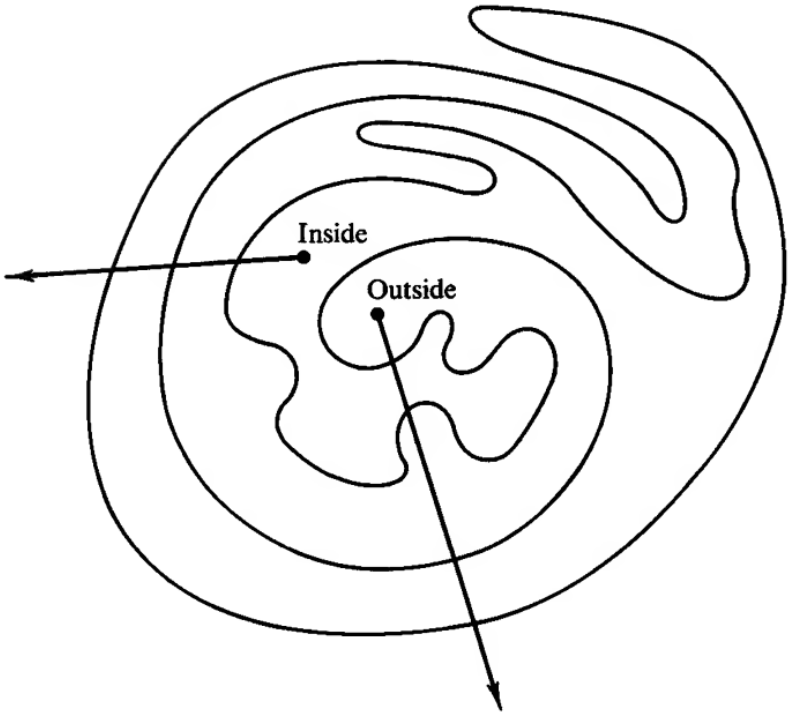


Figura 2-25. Il criterio della semiretta: intersezioni dispari dall'interno, pari dall'esterno.

coordinate che rendano X localmente un pezzo di $\mathbb{R}^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$. Per la non vacuità, considerate il segmento da z a un punto più vicino di X.

5. Prendete un piccolo intorno coordinato B per cui $B - X$ abbia due componenti e scegliete z_0, z_1 su lati opposti. Ogni punto del complementare si collega ad almeno uno dei due senza incontrare X. Non abbiamo ancora escluso che i due siano collegabili fra loro!

6. Lungo una curva z_t nel complementare,

$$u_t(x) = \frac{x - z_t}{|x - z_t|}$$

è un'omotopia, per cui i gradi agli estremi coincidono.

7. Calcolate direttamente oppure usate I, §5, esercizio 7. L'applicazione $g : \mathbb{R}^n - \{z\} \to S^{n-1}$, $g(y) = (y - z)/|y - z|$, composta con l'inclusione è u; dunque $u \pitchfork \{v\}$ equivale a $X \pitchfork g^{-1}(v)$.

8. La direzione v è un valore regolare sia di u_0 sia di u_1, e $\#u_0^{-1}(v) = \#u_1^{-1}(v) + l$.

9. Occorre prima produrre una semiretta trasversale che incontri effettivamente X, usando che X è un'ipersuperficie compatta.[24] L'esercizio 8 dà allora punti in entrambe le classi; usate 5 e 6.

10. Per compattezza, se $|z|$ è grande, $u(X)$ giace in un piccolo intorno di $-z/|z|$ sulla sfera.[25]

Pagina 91 dell'originale

11. Per 10, $\overline{D}_1$ è compatta e $\overline{D}_1 = D_1 \cup X$. Per parametrizzarla vicino a $x \in X$, scegliete un diffeomorfismo $\psi : B \to \mathbb{R}^n$ su un intorno di x, con B palla attorno a 0 e $\psi(B \cap \mathbb{R}^{n-1}) = X \cap \psi(B)$. Usate 4 e 6 per stabilire che i due semiballi aperti stanno in componenti opposte. La restrizione a uno dei semiballi chiusi è una parametrizzazione locale di $\overline{D}_1$.[26]

12. Combinate gli esercizi 8 e 10.

[24] Precisazione richiesta dagli errata: Sard, da solo, non garantisce un'intersezione non vuota.

[25] L'originale scrive $z/|z|$: la definizione $u(x) = (x - z)/|x - z|$ richiede il segno meno.

[26] Si distingue qui il semiballo aperto dal suo bordo: l'originale include erroneamente i punti di X in D_1 o D_0. Gli errata correggono inoltre la compattezza di D_1 in quella di $\overline{D}_1$.

§6. Il teorema di Borsuk–Ulam

Pagina 91 dell'originale

Useremo i numeri di avvolgimento per provare un altro famoso teorema topologico. Eccone una formulazione.

Teorema di Borsuk–Ulam. Sia $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ liscia, mai nulla, e supponiamo

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{per ogni } x \in S^k.$$

Allora $W_2(f, 0) = 1$. Informalmente, un'applicazione simmetrica rispetto all'origine deve avvolgersi attorno a essa un numero dispari di volte.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $k \geq 1$. Il caso $k = 1$ è l'esercizio 2. Supponiamo vero il risultato per $k - 1$. Identifichiamo S^{k-1} con l'equatore di S^k mediante $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0)$. L'idea ricorda l'esercizio 12 del §5: calcoliamo $W_2(f, 0)$ contando quante volte f incontra una retta l per l'origine. Scegliendo l disgiunta dall'immagine dell'equatore, l'ipotesi induttiva mostra che l'equatore si avvolge attorno a l un numero dispari di volte; da questo ricaviamo il conteggio per f.

Sia $g = f|_{S^{k-1}}$. Per Sard scegliamo $a \in S^k$ valore regolare comune di

$$g/|g| : S^{k-1} \to S^k, \qquad f/|f| : S^k \to S^k.$$

Per simmetria anche $-a$ è regolare. Il confronto delle dimensioni implica che $g/|g|$ non assume né a né $-a$, quindi g non incontra $l = \mathbb{R}a$. La regolarità per $f/|f|$ equivale a $f \pitchfork l$, come potete verificare con I, §5, esercizio 7.

Pagina 92 dell'originale

Per definizione,

$$W_2(f, 0) = \deg_2(f/|f|) = \#(f/|f|)^{-1}(a) \pmod 2.$$

La simmetria dà lo stesso numero di controimmagini di a e $-a$, quindi

$$\#(f/|f|)^{-1}(a) = \tfrac{1}{2}\#f^{-1}(l).$$

Sia f_+ la restrizione all'emisfero superiore $S^k_+ = \{x \in S^k : x_{k+1} \geq 0\}$. Poiché nessuna controimmagine è sull'equatore e l'antipodale scambia i due emisferi,

$$\#f_+^{-1}(l) = \tfrac{1}{2}\#f^{-1}(l), \qquad W_2(f, 0) = \#f_+^{-1}(l) \pmod 2.$$

Il vantaggio è che S^k_+ ha bordo S^{k-1}, dove possiamo applicare l'induzione. Le dimensioni di $g : S^{k-1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ non sono però quelle giuste. Sia $V = l^\perp$ e $\pi : \mathbb{R}^{k+1} \to V$ la proiezione ortogonale. La composizione $\pi \circ g$ è dispari e mai nulla, perché g evita $l = \pi^{-1}(0)$. Identificando V con $\mathbb{R}^k$, l'induzione dà $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$. Poiché $f_+ \pitchfork l$, la composizione $\pi \circ f_+$ ha 0 come valore regolare. Il primo teorema del §5 implica

$$W_2(\pi \circ g, 0) = \#(\pi \circ f_+)^{-1}(0) = \#f_+^{-1}(l) \pmod 2.$$

Quindi $W_2(f, 0) = 1$. □

Dalla dimostrazione segue una semplice osservazione geometrica.

Teorema. Ogni applicazione liscia dispari $f : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ incontra ogni retta per l'origine.

Dimostrazione. Se evitasse una retta l, potremmo usare quella retta nella dimostrazione precedente e ottenere $W_2(f, 0) = \frac{1}{2}\#f^{-1}(l) = 0$, una contraddizione. □

Pagina 93 dell'originale

Ne seguono conseguenze sorprendenti.

Teorema. Qualunque insieme di k funzioni lisce dispari $f_1, \ldots, f_k$ su S^k ha uno zero comune.

Dimostrazione. Altrimenti $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x), 0)$ sarebbe dispari, mai nulla e non incontrerebbe l'asse x_{k+1}, contraddicendo il teorema precedente. □

Possiamo riformulare l'affermazione così:

Teorema. Per ogni k funzioni lisce $g_1, \ldots, g_k$ su S^k esiste $p \in S^k$ con $g_i(p) = g_i(-p)$ per ogni i.

Dimostrazione. Applicate il risultato precedente a $f_i(x) = g_i(x) - g_i(-x)$. □

Una formulazione meteorologica, per S^2, dice che in ogni istante esistono due punti antipodali della Terra con identiche temperatura e pressione. Un'altra immagine: se si sgonfia un palloncino e lo si posa sul pavimento, due punti antipodali finiscono sopra lo stesso punto del pavimento.

Esercizi

1. Mostrate che il teorema di Borsuk–Ulam equivale all'affermazione: se $f : S^k \to S^k$ manda punti antipodali in punti antipodali, allora $\deg_2(f) = 1$.

2. Dimostrate direttamente per $f : S^1 \to S^1$ dispari che $\deg_2(f) = 1$, usando §4, esercizio 8. [*Suggerimento:* per il sollevamento $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mostrate $g(s + \pi) = g(s) + \pi q$, con q dispari.]

3. Siano $p_1, \ldots, p_n$ polinomi reali omogenei in $n + 1$ variabili, tutti di grado dispari. Mostrate che si annullano simultaneamente lungo una retta passante per l'origine.

Capitolo III. Teoria dell'intersezione orientata

§1. Motivazione

Pagina 94 dell'originale

La teoria dell'intersezione modulo 2 non ha la finezza necessaria per distinguere fenomeni più sottili; un riesame attento suggerisce però un perfezionamento. Supponiamo che $f : X \to Y$ sia trasversale a una sottovarietà Z di dimensione complementare a quella di X, cioè $\dim X + \dim Z = \dim Y$, che le tre varietà siano senza bordo e che X sia compatta. Allora $f^{-1}(Z)$ è un insieme finito, la cui cardinalità abbiamo chiamato «numero d'intersezione provvisorio» di f con Z. Per rendere il numero d'intersezione invariante per omotopia, abbiamo scartato tutte le informazioni contenute nel numero provvisorio $\#f^{-1}(Z)$ tranne una: la sua parità.

Ricordiamo il ragionamento. Se $f_0, f_1 : X \to Y$ sono omotope ed entrambe trasversali a Z, esiste un'omotopia $F : X \times I \to Y$ anch'essa trasversale. Allora $F^{-1}(Z)$ è costituita da alcune circonferenze nell'interno di $X \times I$ e da alcune curve che congiungono a coppie i punti di

$$\partial F^{-1}(Z) = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \ \cup \ f_1^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Si veda la Figura 3-1. Benché $\#f_0^{-1}(Z)$ e $\#f_1^{-1}(Z)$ possano essere diversi, sono dunque entrambi pari oppure entrambi dispari: $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.

Guardiamo però più attentamente. Alcune curve congiungono punti situati alle estremità opposte del cilindro $X \times I$ e servono quindi a confrontare effettivamente $\#f_0^{-1}(Z)$ e $\#f_1^{-1}(Z)$;

Pagina 95 dell'originale

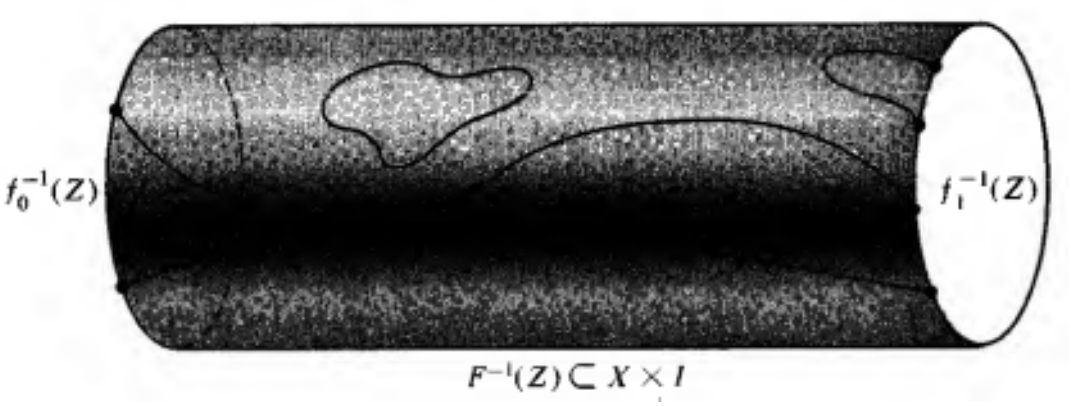


Figura 3-1. Le componenti della controimmagine trasversale di un'omotopia.

altre congiungono punti della stessa estremità. Per ricavare dai dati provvisori un invariante omotopico basta cancellare i contributi delle coppie così collegate nella stessa estremità.

La difficoltà consiste nel riconoscere in anticipo quali punti debbano essere eliminati. Disponendo della sola applicazione f, possiamo determinare quanti punti di $f^{-1}(Z)$ verranno congiunti da un'omotopia? E il fattore di cancellazione è lo stesso per ogni possibile omotopia? Come dimostreranno le sezioni successive, entrambe le risposte sono affermative. La tecnica aggiuntiva richiede soltanto un po' di algebra lineare elementare e consiste essenzialmente nel tenere conto di alcuni segni più e meno. Questo lavoro contabile richiede sempre attenzione e pazienza, ma i risultati compensano ampiamente il piccolo fastidio.

§2. Orientazione

Pagina 95 dell'originale

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ordinata. Per ogni altra base ordinata $\beta' = \{v'_1, \ldots, v'_k\}$ esiste un unico isomorfismo lineare $A : V \to V$ tale che $\beta' = A\beta$, dove $A\beta = \{Av_1, \ldots, Av_k\}$. Diremo che β e β' sono *orientate nello stesso modo* se $\det A > 0$. La regola del prodotto per i determinanti mostra che questa è una relazione di equivalenza, che divide le basi ordinate di V in due classi.

Un'*orientazione* di V consiste nella scelta arbitraria di assegnare il segno positivo agli elementi di una classe e quello negativo agli altri. Il segno assegnato a una base ordinata β si chiama la sua orientazione; la base è dunque orientata positivamente o negativamente secondo la classe cui appartiene. Esistono esattamente due orientazioni di V: per distinguerle basta specificare il segno di una sola base ordinata. L'orientazione standard dello spazio euclideo è quella per cui la base ordinata standard è positiva. L'ordine dei vettori è essenziale: scambiando

Pagina 96 dell'originale

due vettori di una base ordinata si ottiene una base con orientazione opposta.

Lo spazio vettoriale di dimensione zero richiede una definizione separata: la sua orientazione è semplicemente una scelta del segno $+1$ o -1, associato, se si vuole, alla «base vuota».

Se $A : V \to W$ è un isomorfismo, due basi ordinate β, β' di V nella stessa classe hanno immagini $A\beta, A\beta'$ nella stessa classe di W. Se V e W sono orientati, il segno di $A\beta$ è quindi sempre uguale a quello di β, oppure sempre opposto. Si dice che A *preserva*, rispettivamente *inverte*, l'orientazione.

Torniamo alle varietà. Un'orientazione di una varietà con bordo X è una scelta liscia di orientazioni di tutti gli spazi tangenti $T_x(X)$. La liscezza significa che intorno a ogni punto esiste una parametrizzazione locale $h : U \to X$ per cui $dh_u : \mathbb{R}^k \to T_{h(u)}(X)$ preserva l'orientazione per ogni $u \in U \subset H^k$, attribuendo a $\mathbb{R}^k$ l'orientazione standard. Un'applicazione come h, la cui derivata preserva l'orientazione in ogni punto, si dice semplicemente *applicazione che preserva l'orientazione*. Non tutte le varietà ammettono un'orientazione: l'esempio più noto è il nastro di Möbius. Costruitene un modello di carta e «dimostrate» con un disegno che non può avere un'orientazione liscia. Percorrendo un nastro trasparente e deponendovi monete con la testa in alto, si torna al punto di partenza trovando la croce in alto (Figura 3-2)!

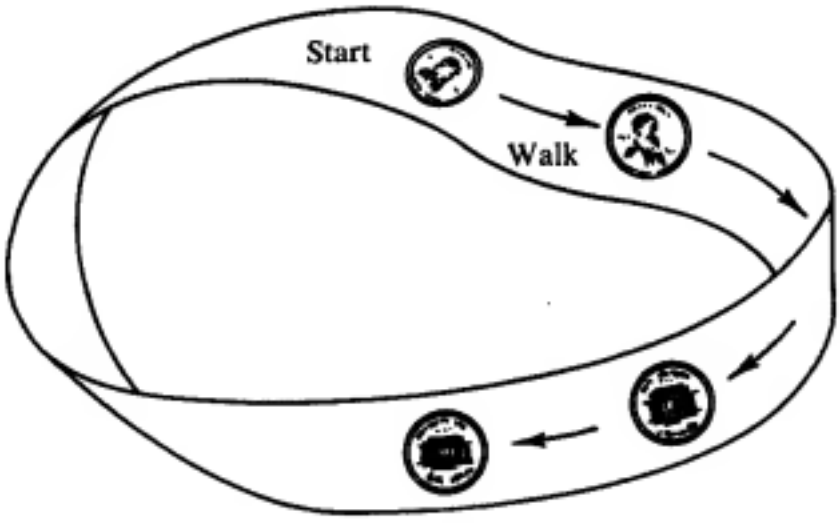


Figura 3-2. Un giro sul nastro di Möbius inverte l'orientazione locale.

Per una varietà di dimensione zero basta assegnare a ogni punto un *numero di orientazione* $+1$ o -1; non si pone alcun problema di liscezza.

Una varietà X è *orientabile* se può essere orientata. In tal caso ammette almeno due orientazioni distinte: data un'orientazione, basta

Pagina 97 dell'originale

invertire quella di ciascuno spazio tangente per ottenere l'*orientazione opposta*.

Proposizione. Una varietà con bordo connessa e orientabile ammette esattamente due orientazioni.

Dimostrazione. Gli insiemi in cui due orientazioni coincidono e in cui sono opposte sono entrambi aperti. Per connessione, le orientazioni sono quindi identiche oppure opposte ovunque. Siano infatti $h : U \to X$, $h' : U' \to X$ parametrizzazioni intorno a x che preservano rispettivamente le due orientazioni. Possiamo assumere $h(0) = h'(0) = x$ e $h(U) = h'(U')$. Se le orientazioni di $T_x(X)$ coincidono, $d(h^{-1} \circ h')_0$ ha determinante positivo. Per continuità, il determinante resta positivo vicino a 0, e dunque le due orientazioni coincidono vicino a x. Se invece sono opposte in x, il determinante è negativo in un intorno di 0 e le orientazioni sono opposte vicino a x. □

Una *varietà orientata* è una varietà dotata di una specifica orientazione liscia. Denotiamo con $-X$ la varietà ottenuta invertendo l'orientazione di X. Se X è connessa, le uniche due orientazioni della varietà sottostante sono quelle di X e $-X$.

Se X, Y sono orientate e almeno una è senza bordo, $X \times Y$ acquista un'*orientazione prodotto*. Per ogni (x, y),

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \times T_y(Y).$$

Per basi ordinate $\alpha = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_l\}$ dei due spazi, poniamo

$$(\alpha \times 0, 0 \times \beta) = \{(v_1, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_l)\},$$

e definiamo

$$\text{segno}(\alpha \times 0, 0 \times \beta) = \text{segno}(\alpha)\,\text{segno}(\beta).$$

Verificate che l'orientazione non dipenda dalle basi scelte.

Un'orientazione di X induce naturalmente un'*orientazione del bordo* ∂X. In $x \in \partial X$, $T_x(\partial X)$ ha codimensione uno in $T_x(X)$; vi sono esattamente due vettori unitari di $T_x(X)$ perpendicolari a $T_x(\partial X)$, uno diretto verso l'interno e uno verso l'esterno. Più precisamente, se $h : U \to X$, $U \subset H^k$, è una parametrizzazione locale con $h(0) = x$, l'isomorfismo $(dh_0)^{-1}$ manda una normale unitaria in H^k,

Pagina 98 dell'originale

la normale interna, e l'altra in $-H^k$, la normale esterna (Figura 3-3). L'indipendenza da h è stata verificata nell'esercizio II.1.7. Denotiamo con n_x la normale unitaria esterna. Il segno di una base ordinata $\beta = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ di $T_x(\partial X)$ è, per definizione, quello della base (n_x, β) di $T_x(X)$. È facile verificare che queste orientazioni variano in modo liscio e orientano quindi ∂X.

Per esempio, la palla chiusa $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ eredita l'orientazione standard. L'orientazione indotta su S^1 rende positivi i vettori diretti in senso antiorario (Figura 3-4).

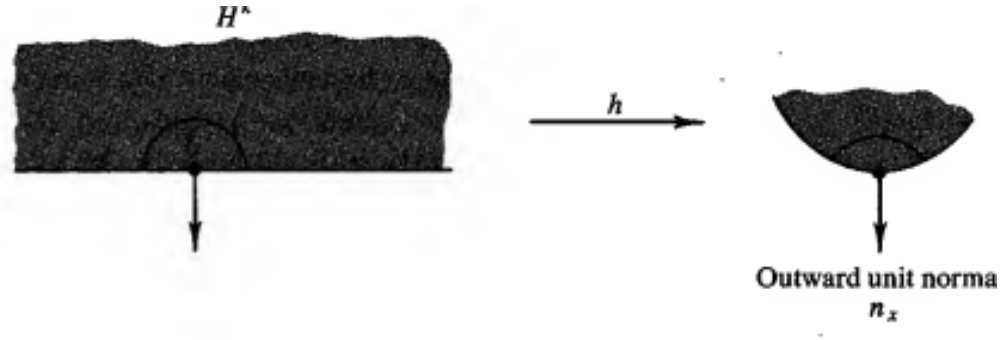


Figura 3-3. La normale unitaria esterna al bordo.

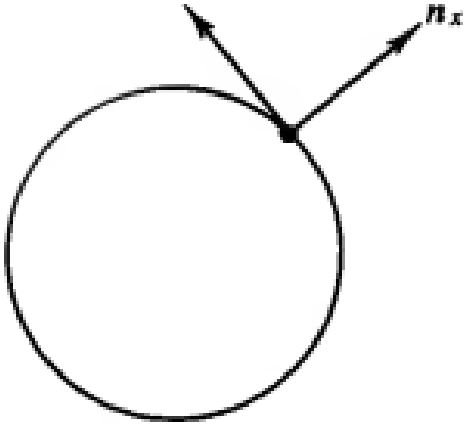


Figura 3-4. Orientazione antioraria del bordo del disco.

Un esempio particolarmente importante è lo spazio delle omotopie $X \times I$, o, per comodità, $I \times X$ (Figura 3-5). Per $t \in I$, la fetta $X_t = \{t\} \times X$ è naturalmente diffeomorfa a X; la orientiamo affinché

Pagina 99 dell'originale

$x \mapsto (t, x)$ preservi l'orientazione. Come insieme, $\partial(I \times X) = X_1 \cup X_0$; qual è però l'orientazione del bordo? Lungo X_1, la normale esterna è $n_{(1,x)} = (1, 0)$. Ogni base di $T_{(1,x)}(X_1)$ è $0 \times \beta$, con β base di $T_x(X)$. Per definizione,

$$\text{segno}(0 \times \beta) = \text{segno}(n_{(1,x)}, 0 \times \beta),$$

mentre l'orientazione prodotto dà

$$\text{segno}(1 \times 0, 0 \times \beta) = \text{segno}(1)\,\text{segno}(\beta) = \text{segno}(\beta).$$

Dunque su X_1 le due orientazioni coincidono. Lungo X_0 la normale esterna è $(-1, 0)$, perciò il segno di $0 \times \beta$ nell'orientazione del bordo è

$$\text{segno}(-1 \times 0, 0 \times \beta) = -\,\text{segno}(\beta).$$

L'orientazione del bordo su X_0 è quindi opposta a quella di X. Come varietà orientate, $\partial(I \times X) = X_1 \cup (-X_0)$, che scriveremo suggestivamente

$$\partial(I \times X) = X_1 - X_0.$$

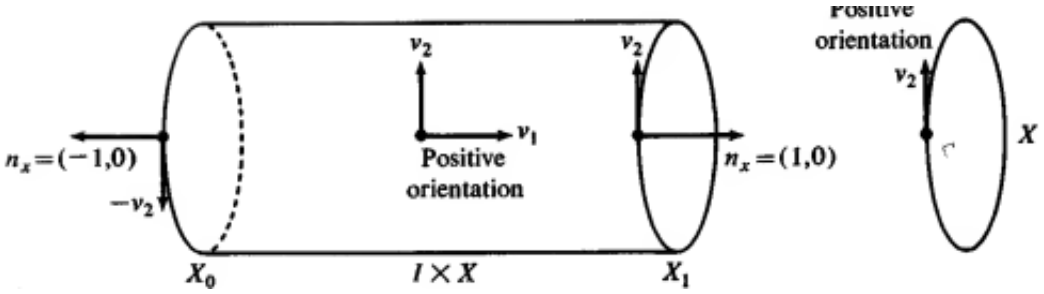


Figura 3-5. Le orientazioni indotte alle due estremità di $I \times X$.

Se $\dim X = 1$, il bordo ha dimensione zero e l'orientazione di $T_x(\partial X)$ è il segno della base $\{n_x\}$ di $T_x(X)$. Per $X = [0, 1]$ con l'orientazione standard, la normale esterna in 1 è 1, positiva; in 0 è -1, negativa. I numeri di orientazione dei punti del bordo sono dunque rispettivamente $+1$ e -1. Invertendo l'orientazione dell'intervallo si invertono entrambi i segni. In una varietà compatta orientata di dimensione uno, i punti del bordo sono collegati da copie diffeomorfe dell'intervallo, per il teorema di classificazione. Pertanto:

Pagina 100 dell'originale

Osservazione. La somma dei numeri di orientazione dei punti del bordo di una varietà compatta orientata di dimensione uno è zero. I numeri di orientazione sono dunque proprio lo strumento necessario per affinare la teoria dell'intersezione. Dobbiamo prima orientare le controimmagini trasversali.

Se $V = V_1 \oplus V_2$, l'orientazione di due qualunque di questi spazi induce un'*orientazione della somma diretta* sul terzo. Scelte basi ordinate β_1, β_2 dei due addendi e posta $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, imponiamo

$$\text{segno}(\beta) = \text{segno}(\beta_1)\,\text{segno}(\beta_2).$$

La prescrizione determina univocamente il segno di una base dello spazio non ancora orientato. Verificate l'indipendenza dalle basi scelte. L'ordine degli addendi è essenziale: (β_1, β_2) e (β_2, β_1) possono avere orientazioni opposte.

Sia ora $f : X \to Y$ liscia, con $f \pitchfork Z$ e $\partial f \pitchfork Z$, dove X, Y, Z sono orientate e le ultime due senza bordo. Definiamo un'*orientazione della controimmagine* sulla varietà con bordo $S = f^{-1}(Z)$. Se $f(x) = z$, $T_x(S)$ è la controimmagine di $T_z(Z)$ mediante $df_x : T_x(X) \to T_z(Y)$. Sia $N_x(S; X)$ il complemento ortogonale di $T_x(S)$ in $T_x(X)$. Poiché

$$N_x(S; X) \oplus T_x(S) = T_x(X),$$

basta orientare $N_x(S; X)$ per ottenere l'orientazione di $T_x(S)$. Dalla trasversalità

$$df_x T_x(X) + T_z(Z) = T_z(Y)$$

e dalla descrizione di $T_x(S)$ segue la somma diretta

$$df_x N_x(S; X) \oplus T_z(Z) = T_z(Y).$$

Le orientazioni di Z, Y orientano quindi $df_x N_x(S; X)$. Poiché $T_x(S)$ contiene tutto il nucleo di df_x, la restrizione di df_x a $N_x(S; X)$ è un isomorfismo sulla sua immagine; mediante esso orientiamo $N_x(S; X)$.

Abbiamo così orientato ogni $T_x(S)$. Lasciamo a voi la verifica della liscezza: la costruzione usa soltanto operazioni algebriche e l'applicazione df_x, che varia in modo liscio. Per familiarizzare con questa definizione occorre svolgere alcuni calcoli;

Pagina 101 dell'originale

gli esercizi contengono esempi. Riportiamo le due somme dirette che definiscono l'orientazione della controimmagine; l'ordine degli addendi conta!

$$\boxed{\begin{aligned} df_x N_x(S;X) \oplus T_z(Z) &= T_z(Y), \\ N_x(S;X) \oplus T_x(S) &= T_x(X), \end{aligned}} \qquad S = f^{-1}(Z).$$

L'uso del complemento ortogonale serve soltanto a rendere specifica la scelta. Se H è un qualsiasi complemento di $T_x(S)$ in $T_x(X)$, le formule

$$df_x H \oplus T_z(Z) = T_z(Y), \qquad H \oplus T_x(S) = T_x(X)$$

inducono la stessa orientazione su $T_x(S)$. La verifica algebrica è lasciata all'esercizio 28.

Dimostriamo una proprietà importante. Nelle ipotesi precedenti, solo X ha bordo. La varietà $\partial f^{-1}(Z)$ riceve due orientazioni: come controimmagine di Z sotto $\partial f : \partial X \to Y$ e come bordo di $f^{-1}(Z)$. Esse differiscono per il segno $(-1)^{\operatorname{codim} Z}$. La dimostrazione è un buon esercizio sulle definizioni; già comprendere l'enunciato è utile.

Proposizione. Come varietà orientate,

$$\partial[f^{-1}(Z)] = (-1)^{\operatorname{codim} Z}(\partial f)^{-1}(Z).$$

Dimostrazione. Poniamo ancora $S = f^{-1}(Z)$ e scegliamo in $T_x(\partial X)$ un complemento H di $T_x(\partial S)$:

$$H \oplus T_x(\partial S) = T_x(\partial X).$$

Si veda la Figura 3-6. Esso è anche complementare a $T_x(S)$ in $T_x(X)$: basta confrontare le dimensioni e usare

$$T_x(S) \cap T_x(\partial X) = T_x(\partial S).$$

Per l'esercizio 28 possiamo usare H per orientare sia S sia ∂S. Su $H \subset T_x(\partial X)$, df_x e $d(\partial f)_x$ coincidono; attribuiscono quindi a H la stessa orientazione, tramite $df_x H \oplus T_z(Z) = T_z(Y)$.

Pagina 102 dell'originale

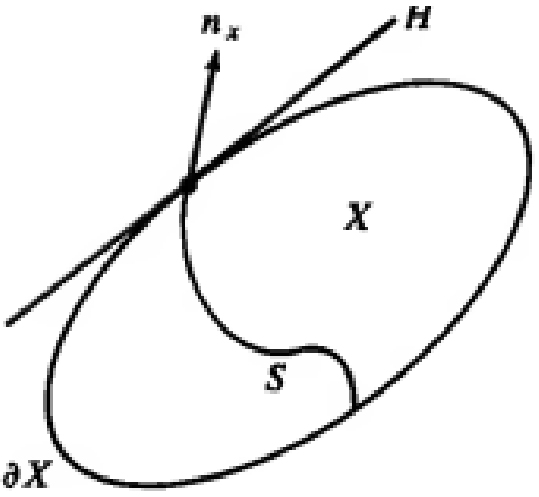


Figura 3-6. Un complemento tangente al bordo.

L'orientazione di S indotta da f è determinata da $H \oplus T_x(S) = T_x(X)$; quella di ∂S indotta da ∂f da $H \oplus T_x(\partial S) = T_x(\partial X)$.

Sia n_x la normale unitaria esterna al bordo di S, tangente a S, e orientiamo la retta $\mathbb{R}n_x$ rendendo positiva la base $\{n_x\}$. Essa può non essere perpendicolare a tutto $T_x(\partial X)$; tuttavia

$$\mathbb{R}n_x \oplus T_x(\partial X) = T_x(X)$$

come spazi orientati. Verificatelo osservando che n_x è diretto verso l'esterno e applicando l'esercizio 27. Sostituendo le formule delle orientazioni delle controimmagini si ottiene

$$H \oplus T_x(S) = \mathbb{R}n_x \oplus H \oplus T_x(\partial S).$$

Per portare n_x a destra di una base di H occorrono $l = \dim H$ trasposizioni. La somma a destra ha quindi $(-1)^l$ volte l'orientazione di $H \oplus \mathbb{R}n_x \oplus T_x(\partial S)$. Quando ∂S ha l'orientazione della controimmagine, $T_x(S)$ ha dunque $(-1)^l$ volte l'orientazione di $\mathbb{R}n_x \oplus T_x(\partial S)$. Quando invece ∂S ha l'orientazione del bordo, le due orientazioni coincidono per definizione. Le due orientazioni di ∂S differiscono pertanto per $(-1)^l$, e $l = \operatorname{codim} S = \operatorname{codim} Z$. □

Pagina 103 dell'originale

Esercizi

1. Dimostrate che la relazione «essere orientate nello stesso modo» è una relazione di equivalenza tra basi ordinate.

***2.** Sia $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ una base ordinata di V. Mostrate che: (a) sostituire v_i con cv_i dà una base con la stessa orientazione se $c > 0$, e con orientazione opposta se $c < 0$; (b) scambiare due elementi v_i, v_j, $i \neq j$, inverte l'orientazione; (c) sottrarre a un vettore una combinazione lineare degli altri preserva l'orientazione.

3. Una successione di applicazioni lineari

$$V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \xrightarrow{A_2} \cdots \xrightarrow{A_n} V_{n+1}$$

è *esatta* se $\operatorname{Im} A_i = \ker A_{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$.[27] L'esattezza di $0 \to U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W \to 0$ significa dunque che A è iniettiva, B è suriettiva e $\operatorname{Im} A = \ker B$. Una tale successione si chiama *successione esatta corta*. Mostrate come le orientazioni di due degli spazi determinino quella del terzo. [*Suggerimento:* procedete come nel caso particolare della somma diretta $V = U \oplus W$.]

***4.** Se $V = V_1 \oplus V_2$, dimostrate che l'orientazione della somma diretta $V_1 \oplus V_2$ è $(-1)^{(\dim V_1)(\dim V_2)}$ volte quella di $V_2 \oplus V_1$.

5. Dimostrate che le orientazioni del bordo sono lisce. Si veda II.1.7.

***6.** Orientate H^k mediante l'orientazione standard di $\mathbb{R}^k$. Identificando ∂H^k con $\mathbb{R}^{k-1}$, mostrate che l'orientazione del bordo coincide con quella standard esattamente quando k è pari. Simbolicamente, $\partial H^k = (-1)^k \mathbb{R}^{k-1}$.

7. Descrivete esplicitamente l'orientazione di $S^2 = \partial B^3$, esibendo in ogni punto (a, b, c) una base ordinata positiva dello spazio tangente.

Pagina 104 dell'originale

8. Sia $f : S^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$. Per $-1 < t < 1$, le controimmagini $f^{-1}(t)$ sono le circonferenze orizzontali all'altezza t. Determinatene le orientazioni, esibendo un vettore positivo in un punto generico.

[27] Corretto l'estremo n stampato nell'originale, dove A_{n+1} non è definita.

9. Dimostrate che l'orientazione del bordo di $S^k = \partial B^{k+1}$ coincide con quella della controimmagine di 1 sotto $g : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|^2$.

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liscia e sia $X = \{(x, f(x))\}$ il suo grafico. Determinate esplicitamente l'orientazione di X come controimmagine di 0 sotto

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = f(x) - y.$$

[*Suggerimento:* lo spazio tangente è generato da $v = (1, f'(x))$ e la direzione normale da $n = (-f'(x), 1)$. È positivo v oppure $-v$?]

11. Analogamente, per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liscia, determinate l'orientazione del grafico $S = \{(x, y, f(x, y))\}$ indotta da

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y, z) = z - f(x, y).$$

[*Suggerimento:* lo spazio tangente è generato da $v_1 = (1, 0, f_x)$ e $v_2 = (0, 1, f_y)$, mentre la normale è generata da $n = (-f_x, -f_y, 1)$. È positiva $\{v_1, v_2\}$ oppure $\{v_2, v_1\}$?][28]

12. Se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo di varietà con bordo connesse e orientate e df_x preserva l'orientazione in un punto, dimostrate che f la preserva ovunque.

***13.** Dimostrate che ogni ipersuperficie compatta dello spazio euclideo è orientabile. [*Suggerimento:* teorema di separazione di Jordan–Brouwer.]

***14.** Siano X, Z sottovarietà trasversali della varietà orientata Y, tutte orientate. Orientate $X \cap Z$ tramite l'inclusione $X \hookrightarrow Y$. Se

Pagina 105 dell'originale

$\dim X + \dim Z = \dim Y$, l'intersezione ha dimensione zero e

$$T_y(X) \oplus T_y(Z) = T_y(Y).$$

Verificate che il numero di orientazione di $y \in X \cap Z$ è $+1$ se le orientazioni di X e Z, sommate in quest'ordine, danno quella di Y, e -1 altrimenti.

15. Nelle stesse ipotesi di complementarità dimensionale, dimostrate

$$X \cap Z = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} Z \cap X.$$

16. Senza l'ipotesi di complementarità, dimostrate che

$$X \cap Z = (-1)^{(\operatorname{codim} X)(\operatorname{codim} Z)} Z \cap X.$$

Nel caso complementare, il prodotto delle codimensioni è uguale al prodotto delle dimensioni. [*Suggerimento:* confrontate le somme dirette dei complementi normali a $S = X \cap Z$ nei due fattori, seguite da $T_y(S)$; scambiando X, Z si scambiano i due complementi.]

17. Calcolate l'orientazione di $X \cap Z$ nei casi seguenti, esibendo basi positive. Orientate gli assi mediante i vettori standard, il piano xy mediante (e_1, e_2) e il piano yz mediante (e_2, e_3); orientate S^1, S^2 come bordi di B^2, B^3. (a) $X =$ asse x, $Z =$ asse y in $\mathbb{R}^2$; (b) $X = S^1$, $Z =$ asse y in $\mathbb{R}^2$; (c) $X =$ piano xy, $Z =$ asse z in $\mathbb{R}^3$; (d) $X = S^2$, $Z =$ piano yz in $\mathbb{R}^3$; (e) $X = S^1$ nel piano xy, $Z =$ piano yz in $\mathbb{R}^3$; (f) $X =$ piano xy, $Z =$ piano yz in $\mathbb{R}^3$; (g) $X = \{x^2 + y^2 - z^2 = a\}$, $a > 0$, con l'orientazione della controimmagine, $Z =$ piano xy in $\mathbb{R}^3$.

[28] Nell'originale le derivate del suggerimento sono indicate con F anziché con f; qui è corretta la funzione derivata.

Pagina 106 dell'originale

***18.** Sia Z un'ipersuperficie nella varietà orientata Y. Dimostrate l'equivalenza tra: (a) Z è orientabile; (b) lungo Z esiste un campo liscio di vettori normali *non nulli* in Y; (c) il fibrato normale $N(Z;Y)$ è banale; (d) Z è definibile globalmente mediante una funzione indipendente: esiste θ liscia in un intorno di Z con $\theta^{-1}(0) = Z$ e $d\theta \neq 0$ su Z. [*Suggerimento:* per (a)⇔(b), imitate l'orientazione del bordo; (b)⇔(c) è immediato; per (c)⇔(d), usate II.3.20.]

***19.** Sia Z un'ipersuperficie orientata di Y orientata e sia n un campo liscio di normali unitarie. Orientate $N_z(Z;Y)$ rendendo positivo $n(z)$. Mostrate che, se $N_z(Z;Y) \oplus T_z(Z)$ e $T_z(Y)$ hanno la stessa orientazione in un punto, coincidono su tutta la sua componente connessa. Vi è esattamente una scelta di n per cui coincidono ovunque: è il *campo normale unitario esterno*. Per superfici in $\mathbb{R}^3$ è la «regola della mano destra». Verificate che, per l'orientazione del bordo, coincide con la normale esterna usuale.

20. Dimostrate che il nastro di Möbius non è orientabile. [*Suggerimento:* la circonferenza centrale è orientabile; usate l'esercizio 18 e II.4.19.]

21. Dimostrate che il nastro di Möbius non può essere definito globalmente in $\mathbb{R}^3$ da una funzione indipendente.[29]

22. Dimostrate che entrambe le orientazioni di uno spazio vettoriale V inducono la stessa orientazione prodotto su $V \times V$.

23. Sia X una varietà orientabile *connessa*. Mostrate che l'orientazione prodotto su $X \times X$ è indipendente dall'orientazione scelta per X. Usate l'esercizio 22.

24. Se X non è orientabile, dimostrate che $X \times Y$ non è orientabile per ogni varietà Y non vuota. [*Suggerimento:* mostratelo prima per $Y = \mathbb{R}^l$; ogni Y contiene un aperto diffeomorfo a $\mathbb{R}^l$.]

25. Dimostrate che un intorno della diagonale $\Delta \subset X \times X$ ha un'orientazione naturale, anche quando X non è orientabile. Confrontate con gli esercizi 23 e 24

Pagina 107 dell'originale

e con il fatto che Δ è orientabile se e solo se lo è X. [*Suggerimento:* usate parametrizzazioni $\phi \times \phi : U \times U \to X \times X$ e applicate l'esercizio 23 a $U \times U$.]

26. Dimostrate che ogni varietà semplicemente connessa è orientabile. [*Suggerimento:* fissate un punto x e un'orientazione di $T_x(X)$. Per orientare $T_y(X)$ scegliete una catena di aperti $U_1, \dots, U_l$, diffeomorfi a palle aperte, con $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$, $x \in U_1$, $y \in U_l$. Orientateli successivamente e mostrate l'indipendenza dalla catena scelta.]

27. Nella definizione dell'orientazione del bordo la perpendicolarità non è necessaria: ogni vettore $h_x \in T_x(X)$ diretto verso l'esterno induce la stessa orientazione della normale unitaria n_x. [*Suggerimento:* $h_x = cn_x + v$, con $c > 0$ e $v \in T_x(\partial X)$. Si vedano II.1.7–8.]

28. Mostrate analogamente che l'ortogonalità non è necessaria per l'orientazione della controimmagine: qualsiasi complemento H con

$$H \oplus T_x(S) = T_x(X), \qquad df_x H \oplus T_z(Z) = T_z(Y)$$

induce la stessa orientazione ottenuta usando il complemento ortogonale.

[29] Per il nastro con bordo, si intende una funzione definente su un intorno del suo interno, oppure una definizione regolare compatibile con una condizione di bordo: il solo livello regolare in un aperto di $\mathbb{R}^3$ è sempre senza bordo. Questa precisazione risponde al rilievo degli errata.

§3. Numero d'intersezione orientato

Pagina 107 dell'originale

Possiamo ora ricostruire la teoria dell'intersezione. Le ipotesi sono quelle della teoria modulo 2: X, Y, Z sono senza bordo, X è compatta, Z è una sottovarietà chiusa di Y e $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Ora, però, lavoriamo esclusivamente con varietà orientate. Talvolta riassumeremo queste ipotesi dicendo che «$f : X \to Y$ e Z soddisfano le condizioni della teoria dell'intersezione».

Se $f \pitchfork Z$, la controimmagine $f^{-1}(Z)$ è un insieme finito di punti, ciascuno con un numero di orientazione ± 1. Il *numero d'intersezione* $I(f, Z)$ è la somma di questi numeri.

Pagina 108 dell'originale

Il segno in $x \in f^{-1}(Z)$ è facile da descrivere. Se $f(x) = z$, la trasversalità e la complementarità delle dimensioni danno

$$df_x T_x(X) \oplus T_z(Z) = T_z(Y).$$

Poiché df_x è un isomorfismo sulla propria immagine, questa eredita l'orientazione di X. Il contributo di x è $+1$ se le orientazioni dei due addendi, in quest'ordine, danno quella di Y, e -1 altrimenti.

L'osservazione sulle varietà unidimensionali è la chiave dell'invarianza per omotopia. Supponiamo dapprima che $X = \partial W$, con W compatta orientata, e che f si estenda a $F : W \to Y$. Per il teorema di estensione possiamo assumere $F \pitchfork Z$. Allora $F^{-1}(Z)$ è una varietà compatta orientata di dimensione uno e il suo bordo è, come insieme, $f^{-1}(Z)$. I numeri di orientazione del bordo differiscono tutti da quelli della controimmagine per lo stesso fattore $(-1)^{\operatorname{codim} Z}$; la loro somma è zero, e quindi anche $I(f, Z) = 0$.[30]

Proposizione. Se $X = \partial W$, con W compatta orientata, e $f : X \to Y$ si estende a W, allora $I(f, Z) = 0$. In particolare, se f_0, f_1 sono omotope e trasversali a Z, un'omotopia $F : I \times X \to Y$ soddisfa $I(\partial F, Z) = 0$. Poiché $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$ e ∂F coincide con f_i su X_i,

$$(\partial F)^{-1}(Z) = f_1^{-1}(Z) - f_0^{-1}(Z), \qquad I(\partial F, Z) = I(f_1, Z) - I(f_0, Z).$$

Proposizione. Applicazioni omotope hanno lo stesso numero d'intersezione. Finora l'affermazione riguarda applicazioni trasversali. Come nella teoria modulo 2, essa permette l'estensione ad applicazioni arbitrarie: per $g : X \to Y$, scegliamo f omotopa a g e trasversale a Z e definiamo $I(g, Z) = I(f, Z)$. La scelta non influisce sul risultato; entrambe le proposizioni precedenti valgono quindi senza l'ipotesi di trasversalità.

Quando Y è connessa e $\dim X = \dim Y$, il *grado* di $f : X \to Y$ è

Pagina 109 dell'originale

$\deg f = I(f, \{y\})$ per un qualsiasi $y \in Y$, orientato positivamente come punto. La dimostrazione dell'indipendenza da y data nella teoria modulo 2 vale anche qui; più avanti ne daremo una deduzione più generale. Per calcolare il grado basta scegliere un valore regolare y e contare i punti della controimmagine con segno $+1$ o -1, secondo che $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ preservi o inverta l'orientazione.

Essendo un numero d'intersezione, il grado è invariante per omotopia. Alcuni disegni aiutano a capire come i segni cancellino i contributi superflui. Per esempio, deformiamo una circonferenza nel piano e riproiettiamola su S^1 (Figura 3-7). Se la deformazione evita l'origine, l'applicazione ottenuta è omotopa all'identità e ha grado $+1$. Verificatelo sulle controimmagini di diversi valori regolari. Quali sono i valori critici?

[30] Esplicitato il fattore di segno della proposizione precedente, sottinteso nell'argomento dell'originale.

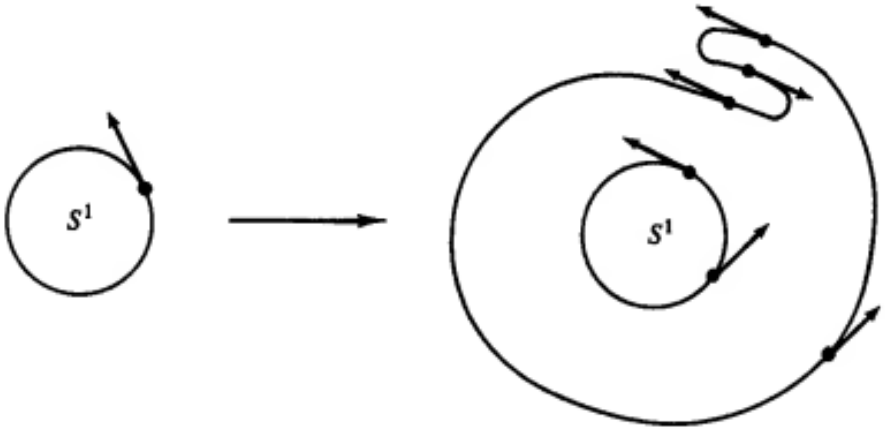


Figura 3-7. Una deformazione della circonferenza seguita dalla proiezione radiale.

Un'altra famiglia è data dalle restrizioni dei monomi complessi $z \mapsto z^m$. Per $m > 0$, la circonferenza è avvolta m volte su se stessa preservando l'orientazione; ogni punto ha m controimmagini regolari, tutte positive, quindi il grado è m. Potete verificarlo mediante le coordinate locali derivate da $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$. Per $m < 0$ l'applicazione inverte l'orientazione e ogni punto ha $|m|$ controimmagini: il grado è $-|m| = m$. Per $m = 0$ l'applicazione è costante e il grado è zero. La teoria modulo 2 fornisce invece soltanto m mod 2.

Pagina 110 dell'originale

Ne segue che la circonferenza ammette infinite classi di omotopia di applicazioni in sé: i monomi di esponenti diversi hanno gradi diversi. Questo non si poteva dedurre dalla sola teoria modulo 2.

Il teorema di estendibilità si specializza come segue.

Proposizione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione liscia tra varietà compatte orientate della stessa dimensione, con Y connessa, e sia $X = \partial W$, W compatta orientata. Se f si estende a W, allora $\deg f = 0$. Completiamo ora un argomento rimasto incompiuto. Per un polinomio complesso p di grado m, su una circonferenza S di raggio abbastanza grande r le applicazioni

$$\frac{p(z)}{|p(z)|}, \qquad \frac{z^m}{|z^m|} = \left(\frac{z}{r}\right)^m$$

sono omotope. La prima ha dunque grado m; se $m > 0$ non si estende al disco, e pertanto p deve annullarsi al suo interno.

Teorema fondamentale dell'algebra. Ogni polinomio complesso non costante ha una radice. Possiamo precisare il numero degli zeri. In ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ scriviamo $p(z) = (z - z_0)^l q(z)$, $q(z_0) \neq 0$. Allora $p(z_0) = 0$ se e solo se $l > 0$, e l si chiama *molteplicità* dello zero.

Proposizione. Sia $W \subset \mathbb{C}$ una regione compatta liscia il cui bordo non contiene zeri di p. Il numero degli zeri di p nell'interno di W, contati con molteplicità, è il grado di $p/|p| : \partial W \to S^1$.

Dimostrazione. Per regione compatta liscia intendiamo una sottovarietà compatta di dimensione due con bordo. Gli zeri $z_0, \ldots, z_n$ sono in numero finito. Attorno a ciascuno scegliamo un piccolo disco chiuso D_i, disgiunto dagli altri e da ∂W. La funzione $p/|p|$ è definita su

$$W' = W \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \operatorname{Int} D_i.$$

Pagina 111 dell'originale

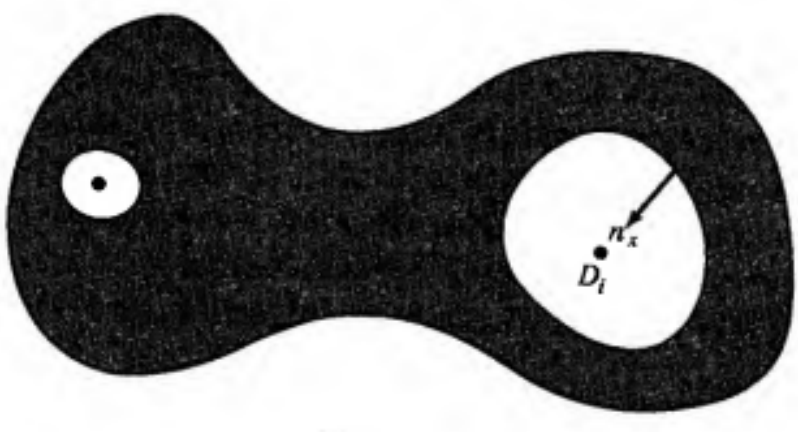


Figura 3-8. Il bordo dei fori ha orientazione opposta a quella dei dischi rimossi.

L'orientazione di ∂D_i come parte di $\partial W'$ è opposta a quella come bordo di D_i: la normale esterna per W' è interna per D_i. Quindi

$$\partial W' = \partial W - \bigcup_{i=0}^{n} \partial D_i.$$

Il grado sul bordo di W' è zero; il grado su ∂W è pertanto la somma dei gradi sulle circonferenze ∂D_i.

Mostriamo che il grado su ∂D_i è la molteplicità l di z_i. Scriviamo $p(z) = (z - z_i)^l q(z)$, con q non nulla in D_i. Se r è il raggio del disco, $g : S^1 \to \partial D_i$, $g(z) = z_i + rz$, preserva l'orientazione. Definiamo

$$h_t(z) = \frac{z^l q(z_i + trz)}{|q(z_i + trz)|}.$$

Il denominatore non si annulla. Per $t = 1$ si ha $h_1 = (p \circ g)/|p \circ g|$; per $t = 0$, $h_0(z) = cz^l$, con $c = q(z_i)/|q(z_i)|$. Dunque $\deg h_1 = \deg h_0 = l$. □

Pagina 112 dell'originale

Quando anche X è una sottovarietà di Y, definiamo $I(X, Z)$ come il numero d'intersezione della sua inclusione con Z. Se $X \pitchfork Z$, si contano i punti di $X \cap Z$ con segno positivo quando le orientazioni di X e Z, in quest'ordine, danno quella di Y, e negativo altrimenti (Figura 3-9).

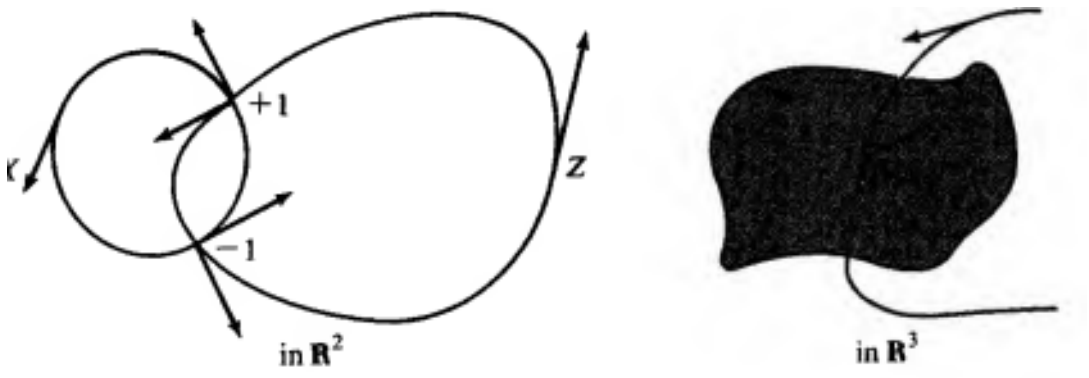


Figura 3-9. Contributi locali al numero d'intersezione orientato.

Comprendete bene il disegno e verificate l'importanza dell'ordine. Se X, Z sono entrambe compatte, $I(X, Z)$ e $I(Z, X)$ possono differire. Nella Figura 3-10 sono opposti. Calcolate direttamente la differenza nel caso trasversale, prima della trattazione generale.

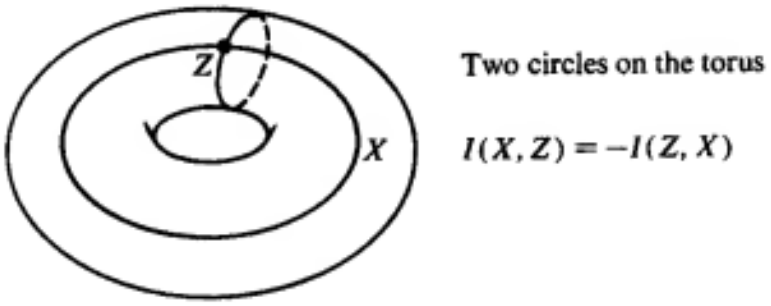


Figura 3-10. Due circonferenze sul toro: invertire l'ordine cambia il segno.

Sappiamo che $I(X, Z)$ non cambia deformando X. Per dimostrare l'invarianza anche rispetto a deformazioni di Z, introduciamo numeri d'intersezione per coppie di applicazioni $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$, senza supporre $Z \subset Y$. Se g è un'inclusione, dovremo ritrovare $I(f, Z)$. Sostituiamo l'ipotesi che Z sia chiusa con la compattezza di Z; essa può altrimenti essere una varietà arbitraria senza bordo,

Pagina 113 dell'originale

con $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Tutte le varietà sono orientate.

Le applicazioni f, g sono *trasversali*, $f \pitchfork g$, se

$$df_x T_x(X) + dg_z T_z(Z) = T_y(Y) \quad \text{ogni volta che } f(x) = y = g(z).$$

La complementarità dimensionale rende diretta la somma e iniettive entrambe le derivate. I due spazi immagine ereditano quindi orientazioni. Il *numero d'intersezione locale* in (x, z) è $+1$ se l'orientazione di $df_x T_x(X) \oplus dg_z T_z(Z)$ coincide con quella di $T_y(Y)$, e -1 altrimenti. Sommandoli su tutte le coppie con $f(x) = g(z)$ si ottiene $I(f, g)$. Per un'inclusione g, si ritrovano la trasversalità a Z e il numero $I(f, Z)$.

La somma è finita. Infatti, indicando con Δ la diagonale di $Y \times Y$, le coppie considerate sono $(f \times g)^{-1}(\Delta)$. Poiché $\dim(X \times Z) = \operatorname{codim} \Delta$, basta la trasversalità a Δ per avere una varietà compatta di dimensione zero. Il seguente lemma la garantisce e precisa i segni.

Lemma. Per sottospazi U, W di V, si ha $U \oplus W = V$ se e solo se $(U \times W) \oplus \Delta = V \times V$. Orientati U, W, attribuiamo a V l'orientazione della somma diretta e a Δ quella indotta dall'isomorfismo $v \mapsto (v, v)$. L'orientazione prodotto di $V \times V$ coincide con quella di $(U \times W) \oplus \Delta$ se e solo se $\dim W$ è pari.

Dimostrazione. Si ha $U \cap W = 0$ se e solo se $(U \times W) \cap \Delta = 0$, e

$$\dim U + \dim W = \dim V \iff \dim(U \times W) + \dim \Delta = \dim(V \times V).$$

Questo dimostra la prima affermazione. Per i segni, scegliamo basi positive $u_1, \ldots, u_k$ di U e $w_1, \ldots, w_l$ di W; la loro concatenazione è positiva in V.

Pagina 114 dell'originale

La base positiva della somma $(U \times W) \oplus \Delta$ è, in notazione per blocchi,

$$((u_i, 0)_i, (0, w_j)_j, (u_i, u_i)_i, (w_j, w_j)_j).$$

Sottraendo elementi della base ad altri, senza cambiare il segno, otteniamo

$$((u_i, 0)_i, (0, w_j)_j, (0, u_i)_i, (w_j, 0)_j).$$

Con kl trasposizioni spostiamo il terzo blocco prima del secondo; con altre $l(l+k)$ spostiamo l'ultimo blocco dopo il primo. Risulta la base

$$((u_i, 0)_i, (w_j, 0)_j, (0, u_i)_i, (0, w_j)_j),$$

positiva per l'orientazione prodotto. Il numero complessivo di trasposizioni è $kl+l(l+k) = 2kl+l^2$, pari esattamente quando l è pari. □

Ponendo $U = df_x T_x(X)$, $W = dg_z T_z(Z)$, $V = T_y(Y)$, otteniamo:

Proposizione. *$f \pitchfork g$ se e solo se $f \times g \pitchfork \Delta$, e in tal caso*

$$I(f, g) = (-1)^{\dim Z} I(f \times g, \Delta).$$

Per applicazioni arbitrarie, questa formula definisce $I(f, g)$.

Pagina 115 dell'originale

Proposizione. Se $f_0 \simeq f_1$ e $g_0 \simeq g_1$, allora $I(f_0, g_0) = I(f_1, g_1)$.

Dimostrazione. Le omotopie f_t, g_t danno l'omotopia $f_t \times g_t$. □

Corollario. Per l'inclusione $i : Z \hookrightarrow Y$, si ha $I(f, i) = I(f, Z)$.

Dimostrazione. È immediato nel caso trasversale; deformando f in una trasversale, nessuno dei due membri cambia. □

Corollario. Se $\dim X = \dim Y$ e Y è connessa, $I(f, \{y\})$ è indipendente da y; il grado è quindi ben definito.

Dimostrazione. Le inclusioni i_0, i_1 di due punti sono omotope; dunque

$$I(f, \{y_0\}) = I(f, i_0) = I(f, i_1) = I(f, \{y_1\}).$$ □

Proposizione. $I(f, g) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} I(g, f)$.

Dimostrazione. Nel caso trasversale si confrontano $df_x T_x(X) \oplus dg_z T_z(Z)$ e la somma in ordine inverso. Servono $(\dim X)(\dim Z)$ trasposizioni di vettori di base. Il caso generale segue per omotopia. □

Corollario. Per sottovarietà compatte X, Z di Y,

$$I(X, Z) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} I(Z, X).$$

Se $\dim Y = 2 \dim X$ e $\dim X$ è dispari, segue $I(X, X) = -I(X, X)$, quindi $I(X, X) = 0$ e anche $I_2(X, X) = 0$. Ciò fornisce un criterio di non orientabilità: in una varietà Y arbitraria possiamo calcolare l'autointersezione modulo 2 di una sottovarietà compatta orientabile di dimensione dispari e metà della dimensione di Y. Se è non nulla, Y non è orientabile. La circonferenza centrale del nastro di Möbius ne è un esempio.

Pagina 116 dell'originale

Per Y compatta orientata, la *caratteristica di Eulero* è il numero di autointersezione della diagonale in $Y \times Y$:

$$\chi(Y) = I(\Delta, \Delta).$$

È un invariante per diffeomorfismi con un ruolo fondamentale in molti problemi geometrici e topologici. Le prossime sezioni ne illustreranno il significato e daranno un'altra definizione, più elementare. L'esercizio 20 estende la definizione anche al caso non orientabile. Per ora deduciamo:

Proposizione. La caratteristica di Eulero di una varietà compatta orientata di dimensione dispari è zero.

Esercizi

Molti esercizi sulla teoria modulo 2 valgono anche qui: è utile rileggere II.4 tenendo conto delle orientazioni.

***1.** Per un diffeomorfismo di varietà compatte connesse orientate, verificate che il grado è $+1$ se preserva l'orientazione e -1 se la inverte.

2. (a) Calcolate il grado dell'antipodale $S^k \to S^k$, $x \mapsto -x$. (b) Dimostrate che è omotopa all'identità se e solo se k è dispari (I.6.7). (c) Dimostrate che S^k ammette un campo vettoriale senza zeri se e solo se k è dispari (I.8.7–8). (d) La teoria modulo 2 avrebbe potuto dimostrare (b) e (c)?

3. Per $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$, dimostrate che, se

$$r^m > |a_1| r^{m-1} + \cdots + |a_m|,$$

allora p ha uno zero in $\{|z| < r\}$.

4. Sia $f(z) = 1/z$ sulla circonferenza di raggio r in $\mathbb{C}$. (a) Calcolate $\deg(f/|f|)$.

Pagina 117 dell'originale

(b) Perché la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra non implica che $1/z = 0$ per qualche z?

5. Dove fallisce su $\mathbb{R}$ la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra? Perché non dimostra che ogni polinomio reale ha una radice reale?

6. Mostrate che $z^2 = e^{-|z|^2}$ per qualche $z \in \mathbb{C}$.

***7.** Dimostrate che $z \mapsto \bar{z}^{\,m}$ su S^1 ha grado $-m$. [*Suggerimento:* la coniugazione complessa è una riflessione che inverte l'orientazione.]

***8.** Per II.4.8, ogni $f : S^1 \to S^1$ ammette un sollevamento $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(\cos t, \sin t) = (\cos g(t), \sin g(t)), \quad g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi q, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Mostrate che $\deg f = q$.

***9.** Dimostrate che due applicazioni $S^1 \to S^1$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado. È un caso del teorema di Hopf che dimostreremo più avanti. [*Suggerimento:* se g_0, g_1 soddisfano $g_i(t + 2\pi) = g_i(t) + 2\pi q$, anche $g_s = s g_1 + (1 - s) g_0$ lo soddisfa.]

10. Per applicazioni $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ per cui i gradi sono definiti, dimostrate $\deg(g \circ f) = \deg f \, \deg g$.

11. Dimostrate che $f : S^1 \to S^1$ si estende al disco $B = \{|z| \le 1\}$ se e solo se $\deg f = 0$. [*Suggerimento:* se il grado è zero, usate l'esercizio 9 per estendere f all'anello $1/2 \le |z| \le 1$, rendendola costante sul bordo interno. Con I.6.1 rendetela costante in un intero intorno di quel bordo e prolungatela al resto del disco.]

12. Per $X \pitchfork Z$ compatte orientate, dimostrate direttamente

$$I(X, Z) = (-1)^{(\dim X)(\dim Z)} I(Z, X).$$

13. Dimostrate che la caratteristica di Eulero di un prodotto di varietà compatte orientate è il prodotto delle loro caratteristiche.

Pagina 118 dell'originale

***14.** Siano $W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$, con $f \pitchfork Z$. Se $f \circ g$ e Z soddisfano le condizioni della teoria dell'intersezione, mostrate che le soddisfano anche g e $f^{-1}(Z)$ e dimostrate

$$I(f \circ g, Z) = I(g, f^{-1}(Z)).$$

15. Siano $f : X \to Y$ e $Z \subset Y$ nelle ipotesi della teoria, con $f \pitchfork Z$ e $f^{-1}(Z) = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Mostrate che f è un'immersione in ciascun x_i, quindi manda un intorno U_i diffeomorficamente su una sottovarietà V_i con $V_i \cap Z = \{f(x_i)\}$ e $V_i \pitchfork Z$. Orientate V_i mediante il diffeomorfismo e verificate che $I(f, Z)$ è la somma dei contributi delle intersezioni $V_i \cap Z$. L'unione dei V_i può non essere una varietà, poiché gli $f(x_i)$ possono coincidere.

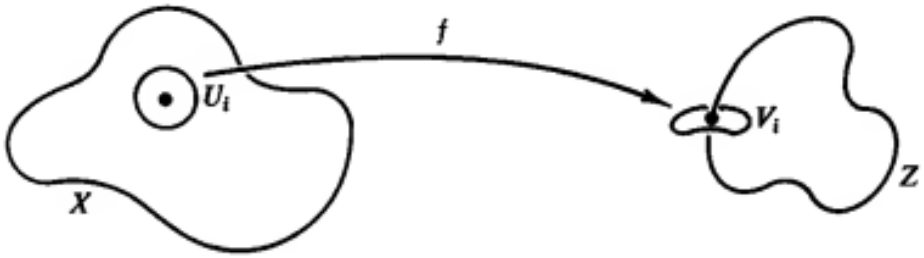


Figura 3-11. Il numero d'intersezione come somma di contributi delle immagini locali.

16. Per $Z \subset Y$ compatta, entrambe orientate, con $\dim Y = 2 \dim Z$, dimostrate $I(Z, Z) = I(Z \times Z, \Delta)$. [*Suggerimento:* per l'inclusione i,

$$I(Z, Z) = I(i, i) = (-1)^{\dim Z} I(i \times i, \Delta) = (-1)^{\dim Z} I(Z \times Z, \Delta).$$

Che cosa accade quando $\dim Z$ è dispari?]

***17.** Dimostrate che $\chi(X)$ è indipendente dall'orientazione di X. [*Suggerimento:* applicate l'esercizio 16 alla diagonale di $X \times X$ e usate III.2.23 componente per componente.]

18. Siano X, Z compatte di dimensioni complementari in Y. Supponete che un intorno aperto U di $X \cap Z$ e le varietà $U \cap X$, $U \cap Z$ siano orientati.

Pagina 119 dell'originale

Dimostrate che $I(X, Z)$ è ben definito e invariato per piccole deformazioni di X o di Z. [*Suggerimento:* rendete X trasversale a Z deformandola soltanto in U.]

19. Se $Z \subset Y$ è compatta, $\dim Y = 2 \dim Z$, e soltanto Y è orientata, dimostrate che $I(Z, Z)$ è ancora ben definito e invariato per piccole deformazioni. [*Suggerimento:* definite $I(Z, Z) = I(Z \times Z, \Delta)$; usate III.2.25 e l'esercizio 18. Nel caso orientabile la definizione coincide con quella precedente.]

20. Dedotene che la caratteristica di Eulero è ben definita anche per varietà non orientabili ed è ancora un invariante per diffeomorfismi. Usate nuovamente III.2.25.

§4. Teoria dei punti fissi di Lefschetz

Pagina 119 dell'originale

La teoria dell'intersezione permette di studiare i punti fissi di un'applicazione liscia $f : X \to X$ su una varietà compatta orientata, cioè le soluzioni di $f(x) = x$. La domanda più semplice riguarda il loro numero. Osserviamo che x è fisso esattamente quando $(x, f(x))$ appartiene all'intersezione del grafico di f con la diagonale $\Delta \subset X \times X$. Queste sottovarietà hanno dimensioni complementari e sono orientate mediante i loro diffeomorfismi con X. Il *numero globale di Lefschetz* è

$$L(f) = I(\Delta, \text{grafico}(f)).$$

Naturalmente f può avere infiniti punti fissi: l'identità è l'esempio estremo. Il senso in cui $L(f)$ misura i punti fissi è quindi sottile. Vedremo però che, quando essi sono finiti, $L(f)$ si calcola dal comportamento locale di f attorno a ciascuno.

Prima dell'analisi locale osserviamo alcune conseguenze immediate.

Teorema liscio del punto fisso di Lefschetz. Se $f : X \to X$ è liscia, X è compatta orientabile e $L(f) \neq 0$, allora f ha un punto fisso.[31]

Pagina 120 dell'originale

Dimostrazione. Se non vi sono punti fissi, diagonale e grafico sono disgiunti, dunque trasversali, e $L(f) = 0$. □

Il risultato diventerà più efficace man mano che sapremo calcolare $L(f)$; per ora potremmo perfino sospettare che sia sempre zero!

Proposizione. $L(f)$ è invariante per omotopia. La verifica segue subito dalla definizione come numero d'intersezione. Il grafico dell'identità è la diagonale, perciò $L(\text{id}) = I(\Delta, \Delta) = \chi(X)$.

Proposizione. Se f è omotopa all'identità, $L(f) = \chi(X)$. In particolare, se una tale f è priva di punti fissi, allora $\chi(X) = 0$. Le prime applicazioni da studiare sono quelle con grafico$(f) \pitchfork \Delta$, dette *applicazioni di Lefschetz*. Esse hanno un numero finito di punti fissi, ma il viceversa è falso. Essendo una condizione di trasversalità, è naturale che la soddisfino «quasi tutte» le applicazioni.

Proposizione. Ogni $f : X \to X$ è omotopa a un'applicazione di Lefschetz.

Dimostrazione. Il lemma fondamentale di II.3 dà una palla aperta S e $F : X \times S \to X$, con $F(x, 0) = f(x)$, tali che per ogni x l'applicazione $s \mapsto F(x, s)$ è una sommersione. Anche $G(x, s) = (x, F(x, s))$ è una sommersione in $X \times X$: la sua derivata contiene un vettore (v, w) per ogni $v \in T_x(X)$ e tutti i vettori $(0, w)$, per la suriettività nella variabile s. Quindi $G \pitchfork \Delta$. Per il teorema di trasversalità, per quasi ogni s, $x \mapsto (x, F(x, s))$ è trasversale alla diagonale. L'applicazione $F(\cdot, s)$ è dunque di Lefschetz e l'omotopia $F(x, ts)$ la collega a f. □

Che cosa significa questa condizione in un punto fisso x? Lo spazio tangente al grafico è il grafico di df_x, mentre quello della diagonale è la diagonale Δ_x di $T_x(X) \times T_x(X)$.

Pagina 121 dell'originale

La trasversalità equivale a

$$\text{grafico}(df_x) + \Delta_x = T_x(X) \times T_x(X).$$

[31] Il numero di Lefschetz e la caratteristica di Eulero sono invarianti topologici, definibili in termini dei soli aperti dello spazio. Dal nostro approccio risulta direttamente soltanto l'invarianza differenziale; per la trattazione topologica si veda Greenberg [12].

Poiché le dimensioni sono complementari, ciò equivale ad avere intersezione nulla, ossia a dire che df_x non ha punti fissi non nulli: 1 non è un suo autovalore.

Un punto fisso con questa proprietà si chiama *punto fisso di Lefschetz*. Un'applicazione è dunque di Lefschetz se e solo se tutti i suoi punti fissi lo sono. La condizione è l'analogo infinitesimale dell'isolamento del punto fisso; in I.5.10 avete già dimostrato che un punto fisso di Lefschetz è isolato.

Denotiamo con $L_x(f)$ il numero di orientazione di (x, x) in $\Delta \cap \text{grafico}(f)$, detto *numero locale di Lefschetz*. Per applicazioni di Lefschetz,

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

La condizione equivale all'invertibilità di $df_x - I$, il cui nucleo è l'insieme dei punti fissi di df_x. Il segno locale si legge proprio da questo isomorfismo.

Proposizione. In un punto fisso di Lefschetz,

$$L_x(f) = \text{segno}\det(df_x - I).$$

Dimostrazione. Poniamo $A = df_x$ e scegliamo una base positiva $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ di $T_x(X)$. Basi positive della diagonale e del grafico sono rispettivamente $((v_i, v_i))_i$ e $((v_i, Av_i))_i$. Il segno dell'intersezione è quello della loro concatenazione

Pagina 122 dell'originale

nell'orientazione prodotto. Sottraendo i primi vettori ai corrispondenti ultimi, e poi combinazioni degli ultimi ai primi, otteniamo senza cambiare orientazione

$$((v_i, 0)_i,\ (0, (A - I)v_i)_i).$$

Il suo segno è $\text{segno}(\beta)\,\text{segno}((A - I)\beta)$, cioè il segno di $\det(A - I)$. □

Per familiarizzarci con $L_x(f)$ consideriamo il caso bidimensionale. Localmente possiamo porre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$ e

$$f(x) = Ax + \epsilon(x), \qquad A = df_0, \quad \epsilon(x) = o(|x|).$$

Supponiamo che A abbia due autovettori reali indipendenti e scegliamo coordinate in cui $A = \text{diag}(a_1, a_2)$. Allora $L_0(f) = \text{segno}[(a_1 - 1)(a_2 - 1)]$. Assumiamo entrambi gli autovalori positivi.

Caso 1. $a_1, a_2 > 1$: il segno è $+1$ e localmente f è espansiva, con una *sorgente* nell'origine.

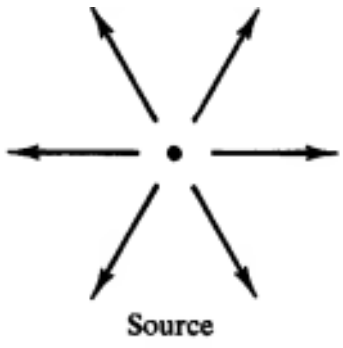


Figura 3-12. Una sorgente.

Pagina 123 dell'originale

Caso 2. $a_1, a_2 < 1$: il segno è ancora $+1$ e f è localmente contrattiva, con un *pozzo* nell'origine.

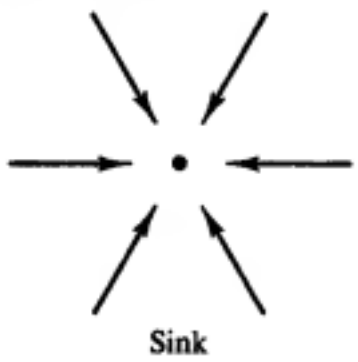


Figura 3-13. Un pozzo.

Caso 3. $a_1 < 1 < a_2$: il segno è -1 e l'origine è un *punto di sella*.

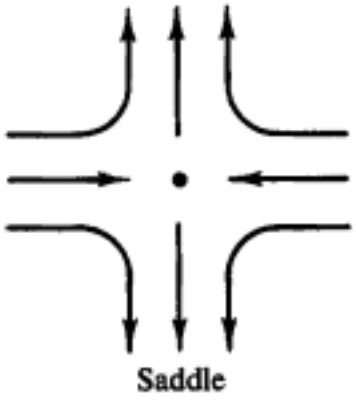


Figura 3-14. Una sella.

Il numero locale descrive dunque aspetti qualitativi del comportamento topologico vicino al punto fisso; nei casi precedenti si legge dal disegno. Per esempio, sia $f : S^2 \to S^2$ un'applicazione che sposta verso sud ogni punto diverso dai poli. Posto $\pi(x) = x/|x|$, un esempio è

$$f(x) = \pi(x + (0, 0, -1/2)).$$

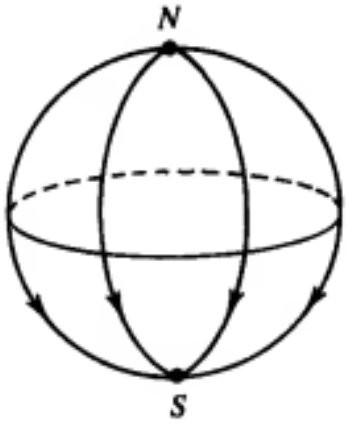


Figura 3-15. Un'applicazione della sfera con sorgente al polo nord e pozzo al polo sud.

Pagina 124 dell'originale

Essa è di Lefschetz, con una sorgente al nord e un pozzo al sud. Entrambi contribuiscono $+1$, quindi $L(f) = 2$. L'omotopia

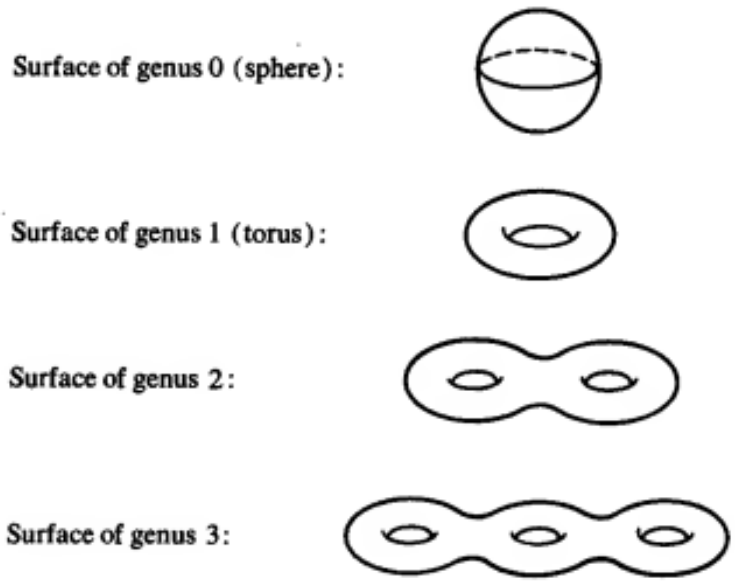
$$f_t(x) = \pi(x + (0, 0, -t/2))$$

la collega all'identità, perciò $L(f) = \chi(S^2)$.

Proposizione. $\chi(S^2) = 2$. La relazione tra caratteristica di Eulero e punti fissi funziona nei due sensi. Dopo aver calcolato la caratteristica, possiamo dedurre:

Corollario. Ogni applicazione di S^2 omotopa all'identità ha un punto fisso. In particolare l'antipodale non è omotopa all'identità. Con un po' di licenza poetica possiamo estendere il calcolo a tutte le superfici compatte orientate. Citiamo senza dimostrazione il seguente teorema; una prova classica è in Ahlfors–Sario [7], una mediante teoria di Morse in Gramain [6] o Wallace [5].

Classificazione delle varietà bidimensionali. Ogni varietà compatta, connessa, orientata e senza bordo di dimensione due è diffeomorfa a una superficie di genere $k \geq 0$: la sfera per $k = 0$, il toro per $k = 1$ e una sfera con k manici in generale.[32]



Superfici di genere zero, uno, due e tre (illustrazione non numerata dell'originale).

Pagina 125 dell'originale

[32] Esplicitata la connessione, necessaria all'enunciato. Una superficie compatta non connessa è un'unione disgiunta finita di tali superfici.



Figura 3-16. Una sorgente, un pozzo e due selle per ciascun manico.

«Costruiamo» un'applicazione di Lefschetz sulla superficie di genere k: disponiamola verticalmente e ricopriamola uniformemente di cioccolato caldo. Sia $f_t(x)$ la traiettoria del punto di cioccolato x al tempo t. Per $t = 0$ abbiamo l'identità; per $t > 0$ una sorgente in alto, un pozzo in basso e una sella in cima e in fondo a ogni foro. La Figura 3-16 illustra il genere quattro.

Proposizione. La superficie di genere k ammette un'applicazione di Lefschetz omotopa all'identità con una sorgente, un pozzo e $2k$ selle. La sua caratteristica di Eulero è quindi $2 - 2k$. Per $k > 1$ il numero è negativo: un risultato piuttosto sorprendente per un numero di autointersezione!

Pagina 126 dell'originale

Benché «quasi tutte» le applicazioni siano di Lefschetz, molti esempi comuni non lo sono: per esempio $z \mapsto z + z^m$ su $\mathbb{C}$, per $m > 1$. I punti fissi complicati si comportano però come aggregati di punti di Lefschetz, analoghi a particelle composte instabili che una piccola perturbazione scinde nei costituenti elementari. È questo il contenuto della prima proposizione della sezione. Per un punto fisso isolato basta perturbare localmente.

Proposizione di scissione. Sia U un intorno del punto fisso x che non contiene altri punti fissi di f. Esiste un'omotopia f_t di f tale che f_1 abbia soltanto punti fissi di Lefschetz in U e ogni

f_t coincida con f fuori da un compatto contenuto in U.

Dimostrazione. Consideriamo dapprima $f : U \to \mathbb{R}^k$, U aperto, con unico punto fisso 0. Scegliamo $\rho : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ liscia, uguale a uno in un intorno V dell'origine e nulla fuori da un compatto $K \subset U$. Cerchiamo una perturbazione

$$f_t(x) = f(x) - t\rho(x)a.$$

Su $K \setminus V$, $|f(x) - x| > c > 0$. Se $|a| < c/2$,

$$|f_t(x) - x| \geq |f(x) - x| - t\rho(x)|a| > c/2,$$

e fuori da K non vi sono nuovi punti fissi. Per Sard scegliamo a, piccolo quanto vogliamo, valore regolare di $x \mapsto f(x) - x$. Ogni punto fisso di f_1 è in V, dove $f_1 = f - a$, e soddisfa $f(x) - x = a$.

Pagina 127 dell'originale

Quindi $df_x - I$ è invertibile e il punto è di Lefschetz.[33] Per passare alle varietà scegliamo una carta ϕ con $\phi(0) = x$ e applichiamo il caso euclideo a $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$, restringendo gli intorni affinché sia definita. Trasportiamo poi l'omotopia e lasciamo f invariata fuori dalla carta. La regola della catena mostra che le derivate nei punti fissi corrispondenti sono coniugate, quindi la proprietà di Lefschetz è preservata. □

La scissione può produrre configurazioni e numeri diversi di punti elementari. Resta costante, però, la somma dei loro numeri locali di Lefschetz. Questi si comportano come cariche elettriche, e l'invarianza per omotopia come la conservazione della carica. Coppie di segno opposto possono annichilirsi o essere create insieme.

Dovremmo poter misurare la carica di una particella composta senza doverla scindere. Nello spazio euclideo i punti fissi di f sono gli zeri di $f - \mathrm{id}$, e sappiamo già misurarli. Se x è isolato e B è una piccola palla chiusa centrata in x senza altri punti fissi, definiamo

$$F : \partial B \to S^{k-1}, \qquad F(z) = \frac{f(z) - z}{|f(z) - z|}, \qquad L_x(f) = \deg F.$$

La scelta del raggio è irrilevante: per due palle concentriche $B' \subset B$, F è definita sull'anello $B \setminus \operatorname{Int} B'$, il cui bordo orientato è $\partial B - \partial B'$. L'estendibilità impone l'uguaglianza dei due gradi.

Pagina 128 dell'originale

Proposizione. In un punto fisso di Lefschetz le due definizioni di $L_x(f)$ coincidono.

Dimostrazione. Supponiamo $x = 0$ e scriviamo $f(z) = Az + \epsilon(z)$, $A = df_0$, $\epsilon(z) = o(|z|)$. L'invertibilità di $A - I$ dà $|(A - I)z| \geq c|z|$ per un $c > 0$. Scegliamo B abbastanza piccola perché $|\epsilon(z)| < c|z|/2$ per $z \neq 0$ in B. Posto $f_t(z) = Az + t\epsilon(z)$, si ha

$$|f_t(z) - z| \geq |(A - I)z| - t|\epsilon(z)| > c|z|/2.$$

Quindi $F_t(z) = (f_t(z) - z)/|f_t(z) - z|$ è un'omotopia su ∂B. Resta da calcolare il grado di $F_0(z) = (A - I)z/|(A - I)z|$. Usiamo il lemma algebrico che dimostrerete nell'esercizio 1.

Lemma. Ogni isomorfismo lineare E di $\mathbb{R}^k$ che preserva l'orientazione è collegato all'identità da un'omotopia attraverso isomorfismi lineari. Se inverte l'orientazione, è collegato alla riflessione $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Applicato a $E = A - I$, il lemma deforma F_0 nella proiezione radiale $z \mapsto z/r$ oppure in questa seguita dalla riflessione. I gradi sono rispettivamente $+1$ e -1, come richiesto. □

[33] Corretto il segno della perturbazione: con il + stampato nell'originale il valore regolare richiesto sarebbe $-a$, non a.

Pagina 129 dell'originale

La nuova definizione misura anche la «carica» di un punto composto.

Proposizione. Sia x un punto fisso isolato di f in $\mathbb{R}^k$ e sia B una palla chiusa che non ne contiene altri. Se f_1 coincide con f fuori da un compatto di $\operatorname{Int} B$ e ha soltanto punti fissi di Lefschetz in B, allora

$$L_x(f) = \sum_{\substack{z\in B\\ f_1(z)=z}} L_z(f_1).$$

Dimostrazione. Su ∂B le applicazioni normalizzate F e F_1 coincidono. Scegliamo piccole palle disgiunte B_i attorno ai punti fissi z_i di f_1, interne a B. La normalizzazione F_1 si estende a $B' = B \setminus \bigcup_i \operatorname{Int} B_i$, dunque ha grado zero su $\partial B' = \partial B - \bigcup_i \partial B_i$. Il suo grado su ∂B_i è $L_{z_i}(f_1)$, da cui la formula. □

Su una varietà definiamo $L_x(f)$ mediante coordinate: se $\phi(0) = x$, poniamo $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ e $L_x(f) = L_0(g)$. Per un punto di Lefschetz l'indipendenza dalle coordinate segue da

$$dg_0 - I = (d\phi_0)^{-1}(df_x - I)d\phi_0.$$

Le matrici hanno lo stesso determinante e quindi lo stesso segno.

Pagina 130 dell'originale

Per un punto isolato arbitrario scegliamo una perturbazione f_1 con soli punti di Lefschetz, sostenuta in un piccolo intorno contenuto in due carte assegnate. La proposizione precedente esprime il numero locale in entrambe le carte come la stessa somma dei numeri dei punti di f_1; questi sono già indipendenti dalle coordinate. La definizione è dunque ben posta.

Calcolo locale del numero di Lefschetz. Per un'applicazione liscia $f : X \to X$ su una varietà compatta, con un numero finito di punti fissi,

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f).$$

Dimostrazione. Perturbiamo localmente attorno a ciascun punto fisso per ottenere un'applicazione omotopa f_1 di Lefschetz. Per essa la formula è nota; $L(f_1) = L(f)$ e la somma locale non cambia per la proposizione precedente. □

Esercizi

1. Dimostrate il lemma di pagina 128 seguendo questa traccia. (a) Riducetevi al caso che preserva l'orientazione, componendo con una riflessione se necessario. (b) Un autovalore reale o complesso dà un sottospazio invariante V di dimensione uno o due. Scrivete $\mathbb{R}^k = V \oplus W$ e deformate E in un'applicazione che preservi entrambi gli addendi. In una base adatta,

Pagina 131 dell'originale

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad E_t = \begin{pmatrix} A & tB \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

(c) Per $k = 1$, costruite esplicitamente l'omotopia. (d) Per $k = 2$, se E ha soltanto autovalori non reali, mostrate che $tI + (1-t)E$ è sempre invertibile. (e) Procedete per induzione su k.

2. Per un'applicazione lineare $A : V \to V$, dimostrate l'equivalenza tra: (a) 0 è un punto fisso isolato; (b) $A - I$ è un isomorfismo; (c) 0 è un punto fisso di Lefschetz; (d) A è un'applicazione di Lefschetz.

3. Dimostrate l'equivalenza tra: (a) x è un punto fisso di Lefschetz di f; (b) 0 è un punto fisso di Lefschetz di df_x; (c) df_x è un'applicazione di Lefschetz.

4. Dimostrate che la classe delle applicazioni di Lefschetz di una varietà compatta in sé è stabile. [*Suggerimento:* la trasversalità è stabile.]

5. Dimostrate che la diagonale di $S^2 \times S^2$ non è definibile globalmente mediante due funzioni indipendenti, mentre le copie $S^2 \times \{a\}$ lo sono. Questo mostra che l'ostacolo non consiste soltanto nella non orientabilità. [*Suggerimento:* confrontate con II.4.18.]

6. Per $f(x) = 2x$ su $\mathbb{R}^k$, mostrate che $L_0(f) = 1$; per $f(x) = x/2$, mostrate che $L_0(f) = (-1)^k$.

7. Dimostrate $\chi(S^k) = 2$ per k pari e $\chi(S^k) = 0$ per k dispari. [*Suggerimento:* usate l'applicazione costruita per S^2 e l'esercizio 6.]

8. Usate l'esistenza di applicazioni di Lefschetz per dimostrare nuovamente $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Pagina 132 dell'originale

9. Mostrate che, senza compattezza, la somma dei numeri locali di un'applicazione con un numero finito di punti fissi non è invariante per omotopia. [*Suggerimento:* $\mathbb{R}^k$ è contraibile.]

10. (a) Per $m > 0$, mostrate che $z \mapsto z + z^m$ ha nell'origine numero locale m. (b) Per $c \neq 0$, mostrate che $z \mapsto z + z^m + c$ è di Lefschetz, con m punti fissi vicini a zero se c è piccolo. (c) Mostrate che $z \mapsto z + \bar{z}^m$ ha numero locale $-m$ nell'origine.

11. Mostrate che la caratteristica di Eulero di $O(n)$, $n \geq 2$, e più generalmente di ogni gruppo di Lie compatto di dimensione positiva, è zero. [*Suggerimento:* considerate la moltiplicazione a sinistra per un elemento diverso dall'identità nella componente dell'identità.][34]

[34] Esplicitata la dimensione positiva: un gruppo finito è una varietà di dimensione zero con caratteristica uguale al numero dei suoi elementi.

§5. Campi vettoriali e teorema di Poincaré–Hopf

Pagina 132 dell'originale

Un *campo vettoriale* su $X \subset \mathbb{R}^N$ è un'applicazione liscia $v : X \to \mathbb{R}^N$ con $v(x) \in T_x(X)$ per ogni x. Localmente il comportamento interessante si concentra presso gli zeri: se $v(x) \neq 0$, il campo è quasi costante in modulo e direzione vicino a x (Figura 3-17); presso uno zero può invece circolare, presentare una sorgente, un pozzo o una sella, avvolgersi a spirale verso il punto o allontanarsene, oppure formare configurazioni più complicate (Figura 3-18).

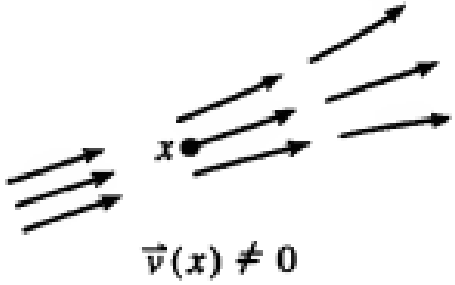


Figura 3-17. Un campo vicino a un punto in cui non si annulla.

Disegnate campi su diverse superfici compatte, fissando prima il comportamento presso gli zeri e interpolando poi in modo liscio. Scoprirete presto che la topologia limita le possibilità. Sulla sfera è facile ottenere due zeri, ciascuno del tipo sorgente, pozzo, spirale o circolazione; si può anche ottenere un solo zero del tipo (f).

Pagina 133 dell'originale

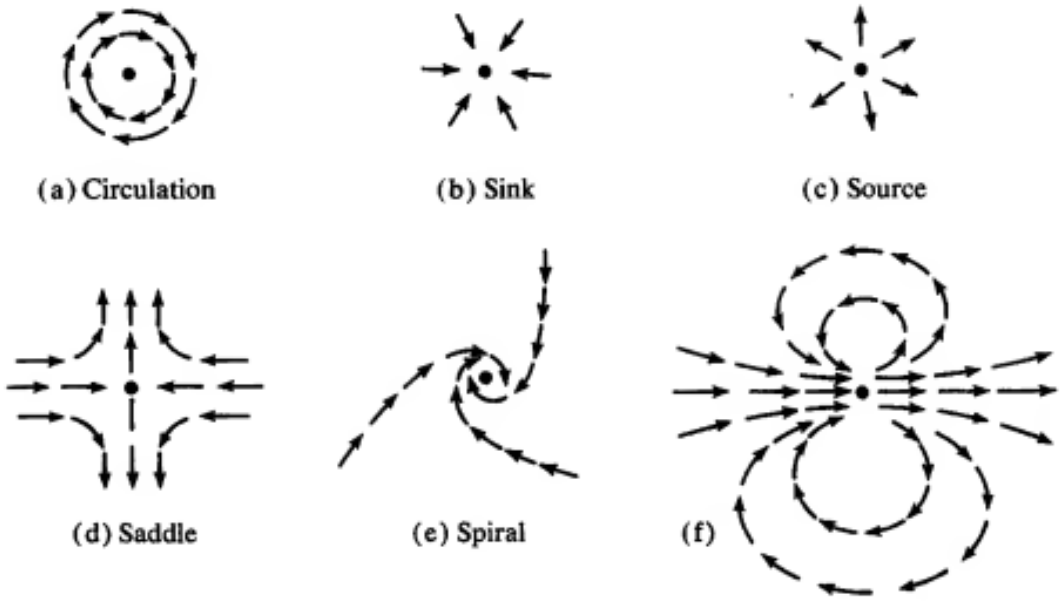


Figura 3-18. Configurazioni locali: circolazione, pozzo, sorgente, sella, spirale e uno zero di indice due.

Queste configurazioni non esistono sul toro; viceversa, una sella e una sorgente sono possibili sul toro ma non sulla sfera. Il toro ammette perfino un campo senza zeri, mentre la sfera no: se la testa fosse una ciambella, si potrebbero pettinare i capelli senza lasciare un punto calvo.

Per studiare il legame con la topologia quantifichiamo la variazione di direzione attorno agli zeri. Supponiamo dapprima v definito in $\mathbb{R}^k$ con zero isolato in 0. Su una piccola sfera S_ϵ che

racchiude soltanto quello zero, la direzione è data da $v(x)/|v(x)|$. L'*indice* è

$$\operatorname{ind}_0(v) = \deg\left(\frac{v}{|v|} : S_\epsilon \to S^{k-1}\right).$$

Il raggio non conta, poiché la normalizzazione si estende all'anello tra due sfere adatte. In dimensione due l'indice conta i giri completi del vettore percorrendo la circonferenza in senso antiorario, positivi se anche il vettore ruota in senso antiorario e negativi altrimenti. Calcolate gli indici della Figura 3-18: (a), (b), (c), (e) danno $+1$, (d) dà -1, (f) dà $+2$.

Su una varietà usiamo parametrizzazioni locali per leggere il campo come un campo euclideo. Occorre però dimostrare l'indipendenza dalla parametrizzazione.

Pagina 134 dell'originale

Se $\phi : U \to X$ è una parametrizzazione con $\phi(0) = x$, il *campo riportato* su U è

$$(\phi^* v)(u) = (d\phi_u)^{-1} v(\phi(u)).$$

Se x è uno zero isolato, definiamo $\operatorname{ind}_x(v) = \operatorname{ind}_0(\phi^* v)$. Più avanti un espediente ci eviterà una verifica diretta e laboriosa dell'indipendenza dalla carta.

Teorema dell'indice di Poincaré–Hopf. Per un campo vettoriale liscio su una varietà compatta orientata senza bordo, con un numero finito di zeri,

$$\sum_{v(x)=0} \operatorname{ind}_x(v) = \chi(X).$$

L'apparizione della caratteristica di Eulero è naturale alla luce del teorema di Lefschetz. Un campo non è soltanto una collezione statica di frecce: prescrive un moto. Le particelle seguono curve sempre tangenti al campo. L'esistenza matematica del flusso richiede equazioni differenziali, ma intuitivamente, facendo scorrere le particelle per un piccolo tempo t, otteniamo una trasformazione h_t i cui punti fissi sono gli zeri del campo. Il comportamento presso di essi è misurato dai numeri locali di Lefschetz. Riducendo il tempo a zero, h_t si deforma nell'identità; quindi $L(h_t) = \chi(X)$.

Seguiremo questa idea evitando le equazioni differenziali: basta un'approssimazione del flusso. La proprietà cruciale è la tangenza al tempo zero. Una famiglia liscia f_t, con $f_0 = \mathrm{id}$, è *tangente a v al tempo zero* se

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x)\Big|_{t=0} = v(x).$$

Il calcolo fondamentale è locale, quindi assumiamo che campo e applicazioni siano definiti in un intorno U dell'origine in $\mathbb{R}^k$.

Pagina 135 dell'originale

Proposizione. Supponiamo che, per $t > 0$ nell'intervallo considerato, f_t abbia in U soltanto il punto fisso 0 e che v si annulli soltanto in 0. Se la famiglia è tangente a v al tempo zero, allora[35]

$$L_0(f_t) = \operatorname{ind}_0(v), \qquad t > 0.$$

Basta una conseguenza del teorema fondamentale del calcolo.

Lemma. Se g è liscia, esiste r liscia tale che $g(t) = g(0) + tg'(0) + t^2 r(t)$.

Dimostrazione. Fissato t, poniamo $h(s) = g(ts)$. Integrando $h'(s) = tg'(ts)$ su $[0, 1]$ otteniamo

$$g(t) - g(0) = tq(t), \qquad q(t) = \int_0^1 g'(ts)\, ds.$$

[35] Precisato $t > 0$: per tempi negativi compare il fattore $(-1)^k$. L'originale scrive $t \neq 0$, ma la normalizzazione usata nella prova richiede il segno positivo.

La funzione q è liscia e $q(0) = g'(0)$. Applicando lo stesso argomento a q scriviamo $q(t) = q(0) + tr(t)$ e otteniamo la formula. □

Se g dipende in modo liscio da altre variabili, anche r lo fa, essendo definita da integrali.

Dimostrazione della proposizione. Applichiamo il lemma, coordinata per coordinata, a $t \mapsto f_t(x)$. La tangenza dà

Pagina 136 dell'originale

$$f_t(x) = x + tv(x) + t^2 r(t, x).$$

Sulla piccola sfera attorno a zero, per $t > 0$,

$$\frac{f_t(x) - x}{|f_t(x) - x|} = \frac{v(x) + tr(t, x)}{|v(x) + tr(t, x)|}.$$

A destra la famiglia si estende a $t = 0$, dove vale $v/|v|$; i denominatori sono non nulli per le ipotesi, anche a $t = 0$ sulla sfera. L'invarianza del grado dà la conclusione. □

Ne segue l'invarianza dell'indice per diffeomorfismi. Ogni campo euclideo ammette una famiglia adatta, per esempio $f_t(x) = x + tv(x)$. Se $\phi(0) = 0$ è un diffeomorfismo locale, la regola della catena mostra che $\phi^{-1} \circ f_t \circ \phi$ è tangente a $\phi^* v$. Per l'invarianza del numero locale di Lefschetz,

$$\mathrm{ind}_0(v) = L_0(f_t) = L_0(\phi^{-1} \circ f_t \circ \phi) = \mathrm{ind}_0(\phi^* v).$$

Per due parametrizzazioni ϕ_1, ϕ_2,

$$\phi_1^* v = (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)^* (\phi_2^* v),$$

quindi gli indici coincidono e la definizione sulle varietà è ben posta.

Pagina 137 dell'originale

Dimostrazione di Poincaré–Hopf. Costruiamo globalmente f_t tangente a v, con $f_0 = \mathrm{id}$ e, per $t > 0$ piccolo, punti fissi esattamente negli zeri di v. La proposizione darà allora la somma degli indici uguale a $L(f_t) = \chi(X)$.

Per il teorema dell'ϵ-intorno, esiste una proiezione normale $\pi : X^\epsilon \to X$, identica su X. Per compattezza, $x + tv(x) \in X^\epsilon$ per tutti gli x e tutti i tempi abbastanza piccoli. Poniamo

$$f_t(x) = \pi(x + tv(x)).$$

La derivata rispetto a t in zero è $d\pi_x v(x) = v(x)$, poiché $d\pi_x$ è l'identità su $T_x(X)$. Gli zeri sono evidentemente punti fissi. Se viceversa $\pi(x + tv(x)) = x$, la proprietà della proiezione normale implica $tv(x) \perp T_x(X)$; essendo anche tangente, $v(x) = 0$. □

La teoria dell'intersezione suggerisce una visione più sofisticata e quindi più semplice. Il campo è una sezione del fibrato tangente: il suo grafico è una copia di X in $T(X)$. Il campo nullo dà la sezione zero X_0; gli zeri corrispondono a $X_0 \cap \mathrm{grafico}(v)$, e la loro misura globale dev'essere $I(X_0, \mathrm{grafico}(v))$ (Figura 3-19). Inclinando la sezione zero di 45 gradi si riconosce l'analogo infinitesimale del grafico di f_t e della diagonale (Figura 3-20). Per una prova senza Lefschetz occorre: (1) identificare questo numero con $I(\Delta, \mathrm{grafico}(f_t)) = I(\Delta, \Delta) = \chi(X)$; (2) identificare i contributi locali con gli indici. Gli esercizi 6–9 realizzano questo programma.

Pagina 138 dell'originale

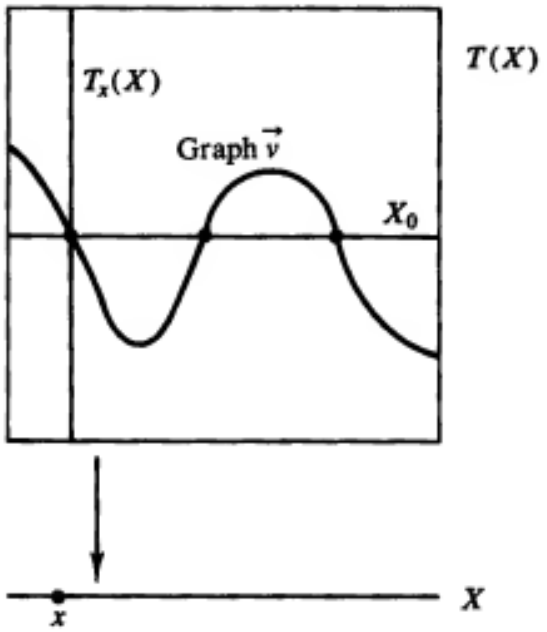


Figura 3-19. Gli zeri come intersezioni del grafico del campo con la sezione zero.

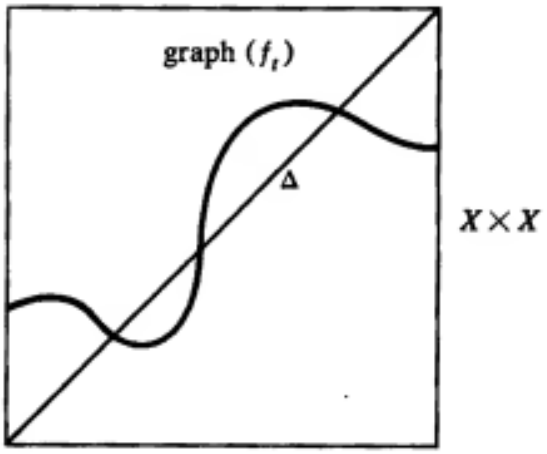


Figura 3-20. I punti fissi come intersezioni del grafico con la diagonale.

Esercizi

1. Per $v(x, y) = (x, y)$, mostrate che $h_t(z) = e^t z$ è il flusso: per ogni z, la curva $t \mapsto h_t(z)$ ha velocità $v(h_t(z))$. Disegnate campo e traiettorie; confrontate $\mathrm{ind}_0(v)$ e $L_0(h_t)$ per $t \neq 0$.

2. Per $v(x, y) = (-y, x)$, mostrate che il flusso è la rotazione

$$h_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Disegnate campo e traiettorie e confrontate indice e numero locale quando $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Pagina 139 dell'originale

***3.** Per un campo $v : X \to \mathbb{R}^N$, mostrate che in uno zero x la derivata dv_x manda $T_x(X)$ in se stesso. [*Suggerimento:* è evidente per $X = \mathbb{R}^k \times \{0\}$; riducetevi a questo caso con coordinate locali adatte nello spazio ambiente.]

4. Per $f_t(x) = \pi(x + tv(x))$, dimostrate, in uno zero di v,

$$d(f_t)_x = I + t\, dv_x.$$

[*Suggerimento:* $d\pi_x$ è l'identità sullo spazio tangente.][36]

***5.** Uno zero è *non degenere* se $dv_x : T_x(X) \to T_x(X)$ è invertibile. Dimostrate che è isolato e che $\operatorname{ind}_x(v) = \text{segno} \det dv_x$. [*Suggerimento:* usate l'esercizio 4 e i punti fissi di Lefschetz per $t > 0$.]

6. Il campo definisce $f_v : X \to T(X)$, $f_v(x) = (x, v(x))$. (a) Mostrate che è un embedding; la sua immagine X_v è diffeomorfa a X. (b) Calcolate lo spazio tangente a X_v. (c) Mostrate che uno zero x è non degenere se e solo se $X_v \pitchfork X_0$ in $(x, 0)$. (d) In tal caso, mostrate che $\operatorname{ind}_x(v)$ è il numero di orientazione di $(x, 0)$ in $X_0 \cap X_v$.

7. Se x è uno zero isolato di v e U non ne contiene altri, mostrate che esiste v_1, uguale a v fuori da un compatto di U, con soli zeri non degeneri in U. [*Suggerimento:* in coordinate ponete $v_1(z) = v(z) + \rho(z)a$, con $\rho = 1$ vicino a x e a supporto compatto in U; scegliete a piccolo e $-a$ valore regolare di v.]

Pagina 140 dell'originale

8. Usate il diffeomorfismo di II.3.18 tra un intorno di X_0 in $T(X)$ e un intorno della diagonale in $X \times X$, che manda $(x, 0)$ in (x, x), per dedurre $I(X_0, X_0) = I(\Delta, \Delta)$.

9. Mostrate che X_v può essere deformata in modo liscio in X_0. Con i tre esercizi precedenti, ricavatene un'altra dimostrazione di Poincaré–Hopf.

10. Se $V \subset \mathbb{R}^N$ è uno spazio vettoriale, dimostrate che $v \mapsto \psi_v$, $\psi_v(w) = v \cdot w$, è un isomorfismo $V \to V^*$.

11. Per una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definiamo il *gradiente* tramite $df_x(w) = \operatorname{grad} f(x) \cdot w$. Mostrate che su $\mathbb{R}^k$,

$$\operatorname{grad} f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_k}).$$

12. Sia $\phi : U \to X$ una parametrizzazione. Posto $g_{ij}(u) = d\phi_u(e_i) \cdot d\phi_u(e_j)$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, dimostrate

$$\phi^* \operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{k} g^{ij} \frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial x_i} e_j.$$

13. Dedotene che il gradiente di una funzione liscia è un campo liscio.

14. (a) Mostrate che gli zeri del gradiente sono i punti critici di f. [*Suggerimento:* la matrice (g_{ij}) è invertibile.] (b) Mostrate che uno zero del gradiente è non degenere se e solo se il punto critico di f è non degenere.

Pagina 141 dell'originale

[*Suggerimento:* in un punto critico, la matrice della derivata del gradiente riportato è $G^{-1}H$, con H hessiana di $f \circ \phi$; G è definita positiva e ha determinante positivo.]

15. Usate l'esercizio 14 per dimostrare che ogni varietà ammette un campo con soli zeri isolati. Una prova più diretta è in III.6.11.

[36] Corretto il segno meno stampato nell'originale.

16. Per un punto critico non degenere di f, definite $\mathrm{ind}_x(f)$ come il segno del determinante dell'hessiana. Mostrate che non dipende dalle coordinate. [*Suggerimento:* l'esercizio 14 evita ulteriori calcoli.]

17. Se X è compatta e f è di Morse, dimostrate che la somma degli indici nei suoi punti critici è $\chi(X)$.

18. Sia v un campo su $\mathbb{R}^k$ con zeri isolati e sia $W \subset \mathbb{R}^k$ una sottovarietà compatta di dimensione k con bordo, senza zeri di v su ∂W. Dimostrate che la somma degli indici degli zeri interni è il grado di $v/|v| : \partial W \to S^{k-1}$. [*Suggerimento:* eliminate piccole palle attorno agli zeri.]

19. (a) Interpretando $z \mapsto z^m$ come campo su $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, mostrate che lo zero nell'origine ha indice m per $m > 0$. (b) Per $z \mapsto \bar{z}^m$, mostrate che l'indice è $-m$.

§6. Il teorema del grado di Hopf

Pagina 141 dell'originale

La teoria dell'intersezione ha dato un senso preciso all'idea primitiva di un'applicazione n-a-uno: benché poche applicazioni mandino davvero esattamente n punti su ciascun punto del codominio,

Pagina 142 dell'originale

contando con le orientazioni possiamo dire che quasi ogni punto è raggiunto n volte. Qui consideriamo varietà compatte, connesse e orientate della stessa dimensione.

L'intero n, il grado, è invariante per omotopia. In questa sezione dimostrerete il risultato sorprendente che, quando il codominio è una sfera, questo solo intero determina completamente la classe di omotopia: due applicazioni $X \to S^k$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado. Il teorema è dovuto a Hopf. La prova sarà sviluppata in una serie di esercizi, più impegnativi di quelli su Jordan–Brouwer; in fondo troverete suggerimenti dettagliati. Le tecniche riprendono quelle delle ultime sezioni e offrono un utile ripasso. Speriamo che proviate a costruire la dimostrazione prima di leggere i suggerimenti.

Un'*isotopia* è un'omotopia h_t nella quale ogni applicazione è un diffeomorfismo. Due diffeomorfismi sono *isotopi* se sono collegati da un'isotopia. Essa è *a supporto compatto* se tutte le h_t coincidono con l'identità fuori da un compatto fissato.

Lemma di isotopia. Per due punti y, z di una varietà connessa senza bordo Y, esiste un diffeomorfismo $h : Y \to Y$, isotopo all'identità mediante un'isotopia a supporto compatto, con $h(y) = z$.

Dimostrazione. Diciamo «isotopi» due punti con questa proprietà. È una relazione di equivalenza. Mostreremo che ogni classe è aperta; la connessione implica allora che vi sia una sola classe.

Basta costruire in $\mathbb{R}^k$ un'isotopia che sia identica fuori da una piccola palla assegnata e mandi 0 in un qualsiasi punto abbastanza vicino. Trasportandola mediante una parametrizzazione di un intorno di y ed estendendola con l'identità, si ottiene l'apertura della classe.

In $\mathbb{R}$, scegliamo ρ liscia, nulla fuori da $(-\epsilon, \epsilon)$ e uguale a uno in zero. Poniamo $h_t(x) = x + t\rho(x)z$. Allora $h_0 = \mathrm{id}$, $h_1(0) = z$ e l'applicazione è identica fuori dall'intervallo.

Pagina 143 dell'originale

La derivata è $1 + t\rho'(x)z$. Poiché ρ' è limitata, per $|z|$ piccolo è sempre positiva. Ogni h_t è strettamente crescente e suriettiva, e l'inversa è liscia per il teorema della funzione inversa.

In $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}$ ruotiamo le coordinate affinché il punto desiderato sia $(z, 0)$. Scelta σ liscia, uguale a uno nell'origine e nulla fuori da una piccola palla di raggio δ, poniamo

$$h_t(x, y) = (x + t\sigma(y)\rho(x)z, y).$$

L'applicazione è identica salvo quando $|x| < \epsilon$, $|y| < \delta$, e manda $(0, 0)$ in $(z, 0)$ al tempo uno. Per $|z|$ piccolo è biiettiva su ogni retta $y =$ costante, e la matrice della derivata ha forma

$$\begin{pmatrix} 1 + t\sigma(y)\rho'(x)z & a_1 & \cdots & a_{k-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{k-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Il determinante è positivo; l'inversa è quindi liscia. □

Corollario. Se Y è connessa di dimensione maggiore di uno e $y_1, \dots, y_n$, $z_1, \dots, z_n$ sono due famiglie di punti distinti all'interno di ciascuna famiglia, esiste un'isotopia a supporto compatto dall'identità a un diffeomorfismo h con $h(y_i) = z_i$ per ogni i.

Dimostrazione. Se le due famiglie sono disgiunte, procediamo per induzione. Per spostare i primi $n-1$ punti usiamo la varietà privata di y_n, z_n; poi spostiamo y_n in z_n evitando i punti già fissati. Le varietà punteggiate restano connesse perché la dimensione supera uno.

Pagina 144 dell'originale

Il supporto compatto consente di estendere le isotopie con l'identità sui punti rimossi. La composizione delle due isotopie dà il risultato. Se le famiglie non sono disgiunte, introduciamo una terza famiglia disgiunta da entrambe e componiamo i due spostamenti.[37] □

Reintroduciamo il *numero di avvolgimento*, già implicito nei numeri locali di Lefschetz e negli indici. Per X compatta orientata di dimensione l, $f : X \to \mathbb{R}^{l+1}$ e $z \notin f(X)$, definiamo

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}, \qquad W(f, z) = \deg(u : X \to S^l).$$

I primi esercizi determinano l'avvolgimento dei diffeomorfismi locali e lo usano per contare controimmagini.

1. Sia $f : U \to \mathbb{R}^k$ liscia, $U \subset \mathbb{R}^k$ aperto, e sia x regolare con $f(x) = z$. Per una palla chiusa abbastanza piccola B centrata in x, dimostrate che $W(\partial f, z)$ è $+1$ o -1 secondo che f preservi o inverta l'orientazione in x.

2. Sia $f : B \to \mathbb{R}^k$ liscia su una palla chiusa. Se z è regolare e non ha controimmagini su ∂B, dimostrate che il numero delle controimmagini, contate con segno, è $W(\partial f, z)$. Serve anche il seguente argomento di estensione.

3. Sia B una palla chiusa e sia $f : \mathbb{R}^k \setminus \operatorname{Int} B \to Y$ liscia. Se $f|_{\partial B}$ è omotopa a una costante,

Pagina 145 dell'originale

mostrate che esiste un'applicazione liscia su tutto $\mathbb{R}^k$ che coincide con f fuori da una palla leggermente più grande.[38] Con questi strumenti dimostreremo prima un caso particolare, poi il teorema completo.

Caso particolare. Ogni applicazione liscia $f : S^l \to S^l$ di grado zero, $l \geq 1$, è omotopa a una costante.

4. Dedotene: ogni $f : S^l \to \mathbb{R}^{l+1} \setminus \{0\}$ con $W(f, 0) = 0$ è omotopa a una costante. Procediamo per induzione: $l = 1$ è III.3.9. Supponiamo il caso particolare vero in dimensione $k-1$ e dimostriamolo in dimensione k.

5. Sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, con 0 regolare, $f^{-1}(0)$ finito e somma dei segni delle controimmagini uguale a zero. Usando l'ipotesi induttiva, dimostrate che esiste $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ uguale a f fuori da un compatto. Poiché f, g coincidono fuori da un compatto, anche l'omotopia lineare tra esse è costante lì. Basta ora ridurre il problema sulla sfera a quello euclideo.

6. Dimostrate il caso particolare in dimensione k. Il teorema di Hopf è essenzialmente un caso del seguente risultato.

Teorema di estensione. Sia W compatta, connessa, orientata, di dimensione $k+1$ con bordo, $k \geq 1$. Una funzione liscia $f : \partial W \to S^k$ si estende a $F : W \to S^k$ con $\partial F = f$ se e solo se

[37] Esplicitato il passaggio tramite punti ausiliari, necessario quando le due famiglie si sovrappongono.

[38] Formulazione conforme agli errata: l'argomento di raccordo modifica f in un piccolo collare esterno; non è, in questa forma, un'estensione che la lasci identica su tutto il dominio iniziale.

$\deg f = 0$. Per dedurlo dal caso particolare, occorre prima un lemma sulla semplicità topologica dello spazio euclideo.

Pagina 146 dell'originale

7. Per una varietà compatta con bordo W, dimostrate che ogni $f : \partial W \to \mathbb{R}^{k+1}$ liscia si estende a W.

8. Dimostrate il teorema di estensione.

9. Concludete:

Teorema del grado di Hopf. Due applicazioni di una varietà compatta, connessa, orientata, senza bordo, di dimensione $k \geq 1$, in S^k sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado. Come applicazione risolviamo un problema classico: quali varietà compatte ammettono campi senza zeri? Poincaré–Hopf richiede $\chi(X) = 0$; questa è anche una condizione sufficiente.

Teorema. Una varietà compatta, connessa e orientata senza bordo ammette un campo vettoriale mai nullo se e solo se la sua caratteristica di Eulero è zero. L'idea è invertire il procedimento di scissione e riunire gli zeri di un campo. Il teorema di Hopf interviene nel caso euclideo.

10. Sia v un campo su $\mathbb{R}^l$ con un numero finito di zeri e somma degli indici zero. Mostrate che esiste un campo senza zeri uguale a v fuori da un compatto.

11. Mostrate che ogni varietà compatta ammette un campo con un numero finito di zeri.

12. Dato un aperto non vuoto U di una varietà compatta connessa X, mostrate che si può scegliere un campo con un numero finito di zeri, tutti in U.

13. Dimostrate il teorema.

Suggerimenti, secondo il numero dell'esercizio

1. Ponete $x = z = 0$, $A = df_0$, e scrivete $f(x) = Ax + \epsilon(x)$, con $\epsilon(x)/|x| \to 0$. Per B piccola, $W(A|_{\partial B}, 0) = W(\partial f, 0)$; usate il lemma lineare di pagina 128.

Pagina 147 dell'originale

2. Eliminate piccole palle attorno alle controimmagini. La mappa direzionale si estende al complemento, quindi il suo grado sul bordo totale è zero. Usate l'esercizio 1.

3. Con B centrata in zero, sia $g_t : \partial B \to Y$ un'omotopia da una costante a ∂f. La formula radiale $\widetilde{f}(tx) = g_t(x)$ dà il modello continuo interno. Per renderlo liscio, rendete l'omotopia costante vicino ai tempi zero e uno, come in I.6.1, e raccordate anche in un piccolo collare esterno.

4. La normalizzazione $f/|f|$ ha grado zero, quindi è omotopa a una costante; inoltre f e $f/|f|$ sono omotope nel complementare dell'origine.

5. Scegliete una grande palla che contenga $f^{-1}(0)$. Per l'esercizio 2 il numero di avvolgimento del bordo è zero. Applicate il corollario del caso particolare in dimensione $k-1$ e poi l'esercizio 3.

6. Scegliete valori regolari distinti a, b. Mediante il lemma di isotopia su $S^k \setminus f^{-1}(b)$, trovate un intorno U di $f^{-1}(a)$ diffeomorfo a $\mathbb{R}^k$, con $b \notin f(U)$. Siano $\alpha : \mathbb{R}^k \to U$ e $\beta : S^k \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^k$ diffeomorfismi, con $\beta(a) = 0$. Applicate l'esercizio 5 a $\beta \circ f \circ \alpha$; ottenete un'applicazione omotopa a f che evita a. Poiché $S^k \setminus \{a\}$ è contraibile, essa è omotopa a una costante.

7. Immergete W in $\mathbb{R}^N$ e usate un intorno tubolare di ∂W per estendere f a una funzione F su un aperto U di $\mathbb{R}^N$. Moltiplicate per una funzione liscia ρ, uguale a uno su ∂W e a supporto compatto in U, poi prolungate con zero fuori da U.

8. Estendete f a $F : W \to \mathbb{R}^{k+1}$ con l'esercizio 7 e rendete 0 regolare senza modificare il bordo. Il lemma di isotopia permette di racchiudere $F^{-1}(0)$ in una palla B di una carta interna. La normalizzazione si estende a $W \setminus \operatorname{Int} B$; poiché il grado su ∂W è zero, il numero di avvolgimento su ∂B è zero. Applicate ora il corollario del caso particolare e sostituite F dentro la carta con una funzione che non si annulla; infine normalizzate.

9. Ponete $W = I \times X$, con f_0 su X_0 e f_1 su X_1. Il grado sul bordo è $\deg f_1 - \deg f_0$; applicate l'esercizio 8.

10. Confrontate con l'esercizio 5, usando il teorema di Hopf sul bordo di una palla grande.

Pagina 148 dell'originale

11. Se $X \subset \mathbb{R}^N$ e P_x è la proiezione ortogonale su $T_x(X)$, considerate

$$\rho : X \times \mathbb{R}^N \to T(X), \qquad \rho(x, a) = (x, P_x a).$$

La mappa completa nel fibrato è una sommersione: in una trivializzazione locale ha componente di base identica e derivata suriettiva nelle variabili della fibra. Applicate la trasversalità parametrica alla sezione zero per ottenere un campo $x \mapsto P_x a$ trasversale a essa, dunque con zeri isolati e, per compattezza, finiti.[39]

12. Usate il corollario del lemma di isotopia e trasportate il campo tramite il diffeomorfismo. In dimensione uno si può usare direttamente un campo senza zeri su ogni circonferenza.

13. Concentrate gli zeri in una carta euclidea. Per Poincaré–Hopf la somma degli indici è zero; riportate il campo su $\mathbb{R}^k$ e applicate l'esercizio 10.

[39] Gli errata osservano che la sola proiezione vettoriale non è in generale una sommersione nello spazio ambiente. Qui è esplicitata la mappa nel fibrato tangente, includendo la componente di base; per questa mappa la suriettività è valida.

§7. Caratteristica di Eulero e triangolazioni

Pagina 148 dell'originale

La definizione iniziale della caratteristica di Eulero come autointersezione poteva sembrare strana e poco motivata. Abbiamo però visto che esprime informazioni topologiche fondamentali: limita rigidamente i campi vettoriali e le applicazioni ammesse da una varietà compatta orientata. Questo invariante è tuttavia più elementare di quanto si possa pensare; per comprenderlo dobbiamo guardare le varietà da un'altra prospettiva.

Un modo di studiare un oggetto consiste nel dividerlo in pezzi familiari e osservare come si incastrano. Possiamo, per esempio, tagliare una superficie in «poligoni». Questa sezione sarà deliberatamente informale e intuitiva: non specificheremo tutte le condizioni tecniche sulle decomposizioni ammissibili. Suddividiamo semplicemente X in copie curve di triangoli, quadrati e altri poligoni piani (Figura 3-21). La procedura più comune usa soltanto triangoli, da cui il nome *triangolazione*.

Contiamo le parti: F facce, E spigoli, V vertici. Disegnando esempi sulla sfera, con l'acume di Cartesio o di Eulero, oppure ricordando la geometria scolastica, noterete sempre

$$F - E + V = 2.$$

La costanza della somma alternata non è esclusiva della sfera: per ogni superficie compatta X essa è la caratteristica di Eulero.

Pagina 149 dell'originale

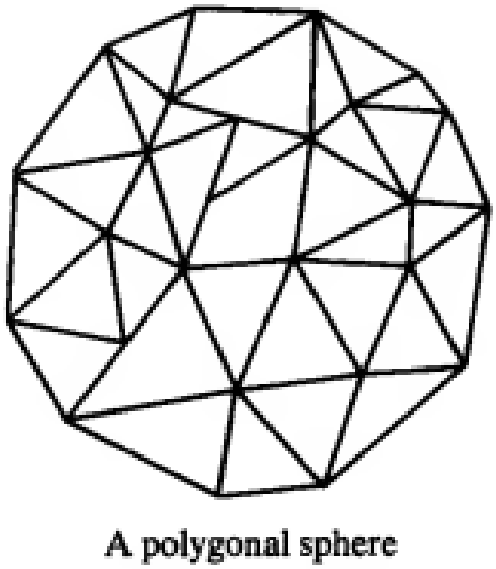


Figura 3-21. Una sfera suddivisa in poligoni.

La prova non è difficile, se non insistiamo sui dettagli. Si può costruire un campo con una sorgente in ogni faccia, una sella su ogni spigolo, un pozzo in ogni vertice e nessun altro zero. Poiché gli indici sono rispettivamente $+1, -1, +1$, Poincaré–Hopf dà $F - E + V = \chi(X)$. L'idea è collocare gli zeri appropriati e interpolare il resto del campo in modo liscio; il disegno su una faccia triangolare dovrebbe essere convincente (Figura 3-22).

Lo stesso schema vale in dimensione k, usando analoghi multidimensionali dei poligoni:

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \big(\text{numero delle facce di dimensione } j\big).$$

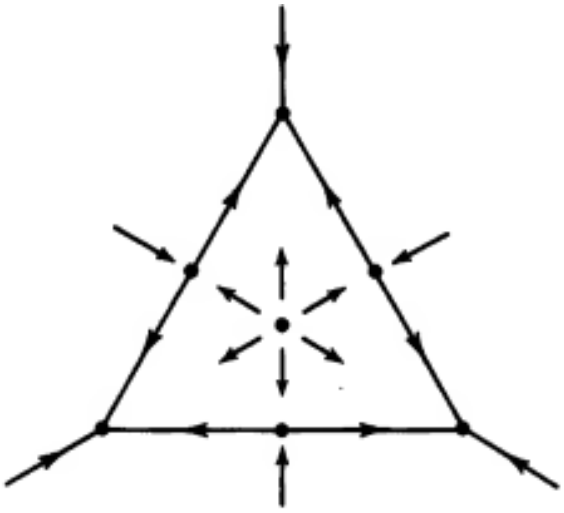


Figura 3-22. Un campo adattato a una faccia triangolare.

Pagina 150 dell'originale

È importante riconoscere quanto sia elementare, in realtà, questo potente invariante!

Esercizi

1. Mostrate che, se $F - E + V$ dà la caratteristica di Eulero per triangolazioni costituite da triangoli, la stessa formula vale per decomposizioni in poligoni arbitrari.

2. Calcolate mediante triangolazioni la caratteristica di Eulero della sfera e del toro.

3. Considerate la superficie di genere k come una sfera con k tubi cuciti e calcolatene la caratteristica. [*Suggerimento:* eliminate $2k$ facce non adiacenti dalla sfera e osservate il cambiamento della somma. Triangolate il cilindro chiuso $S^1 \times [0, 1]$ e verificate che ha somma zero. Cucitelo a due fori: la somma della sfera forata non cambia.]

Capitolo IV. Integrazione sulle varietà

§1. Introduzione

Pagina 151 dell'originale

Finora abbiamo studiato le varietà dal punto di vista del calcolo differenziale. Quest'ultimo capitolo introduce nel nostro studio i metodi del calcolo integrale. Mentre nelle prossime sezioni svilupperemo i nuovi strumenti, il lettore potrebbe domandarsi quale rapporto abbiano con il materiale precedente. Speriamo che il dubbio si chiarisca entro la fine del capitolo; intanto può essere utile un esempio preliminare.

Sia

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

un polinomio complesso su Ω, una regione compatta liscia del piano il cui bordo non contiene zeri di p. Nel §3 del capitolo precedente abbiamo mostrato che il numero degli zeri di p interni a Ω, contati con le loro molteplicità, è uguale al grado dell'applicazione

$$\frac{p}{|p|} : \partial\Omega \longrightarrow S^1.$$

Un celebre teorema della teoria delle funzioni di variabile complessa, chiamato *principio dell'argomento*, afferma che questo numero si può anche calcolare mediante un integrale,[40]

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} d(\arg p).$$

Pagina 152 dell'originale

Per cogliere il nostro punto non occorre comprendere il significato preciso dell'espressione. Ciò che conta è che il numero degli zeri può essere calcolato sia mediante un numero d'intersezione sia mediante una formula integrale.

Nella topologia differenziale abbondano teoremi simili al principio dell'argomento. Mostreremo che la loro presenza non è arbitraria o fortuita, ma è una conseguenza geometrica di un teorema generale noto come *teorema di Stokes*. Probabilmente conoscete già dal calcolo alcune sue versioni in dimensione bassa:

1. Secondo teorema fondamentale del calcolo:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

2. Teorema di Green nel piano:

$$\oint_{\partial\Omega} f_1\,dx + f_2\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

3. Teorema della divergenza nello spazio tridimensionale:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\,dv = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA, \qquad \vec{F} = (f_1, f_2, f_3).$$

[40] *Correzione del traduttore.* È inserito il fattore $1/(2\pi)$, assente nella formula stampata: l'argomento è misurato in radianti, come nelle consuete formule del testo.

4. Teorema classico di Stokes nello spazio tridimensionale:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz &= \iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{F}\,dA \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz\wedge dx \\ &\qquad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy.\end{aligned}$$

In particolare, il principio dell'argomento si deduce facilmente dal teorema di Green, purché si conosca qualcosa sulle funzioni analitiche complesse.

Le formule precedenti hanno uno spirito comune: spiegano tutte come calcolare un integrale su una regione limitata mediante un integrale sul solo bordo. È ragionevole aspettarsi che simili relazioni si possano generalizzare a varietà arbitrarie di qualsiasi dimensione; non è però affatto chiaro come formularle. Una parte del problema consiste proprio nel dare significato a espressioni infinitesimali

Pagina 153 dell'originale

come

$$f_1\,dx \qquad \text{o} \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

I manuali elementari di calcolo tendono a non preoccuparsi troppo di questi integrandi, ma in dimensione superiore bisogna essere più scrupolosi. Dovremo dunque sopportare un po' di formalismo, mentre la prossima sezione svilupperà l'algebra necessaria per definire e manipolare gli infinitesimi. Nel §3 introdurremo poi gli integrandi appropriati, oggetti astratti chiamati *forme differenziali*.

Sembra impossibile fornire fin dall'inizio una motivazione intuitiva soddisfacente per le forme differenziali. Soltanto l'esperienza potrà convincere lo studente che questi oggetti formali, con le loro particolari proprietà algebriche, costituiscono il fondamento più naturale della teoria dell'integrazione. Espresso nel linguaggio delle forme, il teorema generale di Stokes diventa semplice ed elegante. E, in verità, non è la semplicità il criterio ultimo per valutare i concetti fondamentali di una teoria? Perché, per esempio, la fisica ha formulato le leggi della meccanica in termini di quantità di moto ed energia, anziché mediante altre funzioni arbitrarie della massa e della velocità? Perché quelle grandezze semplificano enormemente le equazioni fondamentali, rendendo così la materia più facile da comprendere. Quanto all'intuizione, quanto apparivano osticamente formali nozioni come i campi elettrici o i numeri complessi, prima che la loro evidente utilità ci costringesse a usarle e ad acquistarne esperienza col tempo!

§2. Algebra esterna

Pagina 153 dell'originale

Per stabilire una base algebrica per le forme differenziali, cominciamo definendo alcune generalizzazioni del duale di uno spazio vettoriale reale V. Un *p-tensore* su V è una funzione a valori reali T sul prodotto cartesiano

$$V^p = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p \text{ volte}},$$

separatamente lineare in ciascuna variabile, ossia *multilineare*. Tenendo fisse tutte le variabili tranne la j-esima, vale dunque la consueta condizione di linearità

$$T(v_1, \ldots, v_j + av'_j, \ldots, v_p) = T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p) + aT(v_1, \ldots, v'_j, \ldots, v_p).$$

In particolare, gli 1-tensori sono semplicemente i funzionali lineari su V. Un 2-tensore familiare è il prodotto scalare su $\mathbb{R}^k$. Su $\mathbb{R}^k$ conoscete anche un k-tensore: il determinante. Infatti k vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k$ si possono disporre in una matrice $k \times k$

Pagina 154 dell'originale

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix},$$

il cui determinante è multilineare rispetto ai vettori riga; lo indichiamo con $\det(v_1, \ldots, v_k)$.

Poiché somme e multipli scalari di funzioni multilineari sono ancora multilineari, l'insieme dei p-tensori è uno spazio vettoriale $\mathcal{T}^p(V^*)$. Notate che $\mathcal{T}^1(V^*) = V^*$. I tensori si possono anche moltiplicare in modo semplice: se T è un p-tensore e S un q-tensore, definiamo un $(p+q)$-tensore $T \otimes S$ mediante

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) = T(v_1, \ldots, v_p)S(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}).$$

$T \otimes S$ si chiama *prodotto tensoriale* di T e S. Il prodotto tensoriale non è commutativo in generale: $T \otimes S \neq S \otimes T$. È però facile verificare che è associativo e distributivo rispetto all'addizione. Esso chiarisce in quale modo $\mathcal{T}^p(V^*)$ estenda V^*.

Teorema. Sia $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ una base di V^*. I p-tensori

$$\{\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p} : 1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq k\}$$

formano una base di $\mathcal{T}^p(V^*)$. Quindi $\dim \mathcal{T}^p(V^*) = k^p$.

Dimostrazione. Soltanto durante questa dimostrazione useremo la notazione seguente. Per una successione $I = (i_1, \ldots, i_p)$ di interi compresi tra 1 e k, poniamo $\phi_I = \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}$. Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ la base duale in V, e indichiamo con v_I la successione $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$. Per definizione, $\phi_I(v_J)$ è 1 se $I = J$ e 0 altrimenti. Per multilinearità, due p-tensori T, S sono uguali se e solo se $T(v_J) = S(v_J)$ per ogni J. Pertanto, dato T, il tensore $S = \sum_I T(v_I)\phi_I$ deve coincidere con T: i ϕ_I generano $\mathcal{T}^p(V^*)$. Sono anche indipendenti: se $S = \sum_I a_I \phi_I = 0$,

Pagina 155 dell'originale

allora $0 = S(v_J) = a_J$ per ogni J. □

Un tensore T è *alternante* se cambia segno quando si scambiano due variabili:

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p).$$

Tutti gli 1-tensori sono automaticamente alternanti. Anche il determinante lo è, mentre il prodotto scalare non lo è. È utile riformulare leggermente questa condizione. Sia S_p il gruppo delle permutazioni dei numeri da 1 a p. Una permutazione $\pi \in S_p$ si dice pari o dispari secondo che si possa esprimere come prodotto di un numero pari o dispari di trasposizioni semplici. Poniamo $(-1)^\pi = +1$ o -1, rispettivamente. Per ogni p-tensore T e ogni $\pi \in S_p$, definiamo

$$T^\pi(v_1, \ldots, v_p) = T(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p)}).$$

I tensori alternanti sono dunque quelli per cui $T^\pi = (-1)^\pi T$ per ogni $\pi \in S_p$. Vale sempre $(T^\pi)^\sigma = T^{\sigma\circ\pi}$, come precisato negli errata.

Esiste un procedimento standard per ottenere tensori alternanti da tensori arbitrari. Per un p-tensore T definiamo

$$\mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi.$$

Questo tensore è alternante. Infatti $(-1)^{\sigma\circ\pi} = (-1)^\sigma (-1)^\pi$, e quindi

$$[\mathrm{Alt}(T)]^\sigma = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^{\sigma\circ\pi} = \frac{(-1)^\sigma}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^{\sigma\circ\pi} T^{\sigma\circ\pi}.$$

Ponendo $\tau = \sigma \circ \pi$, al variare di π in S_p anche τ percorre S_p, perciò

$$[\mathrm{Alt}(T)]^\sigma = \frac{(-1)^\sigma}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau T^\tau = (-1)^\sigma \,\mathrm{Alt}(T).$$

Se T è già alternante, allora $\mathrm{Alt}(T) = T$: ciascun addendo $(-1)^\pi T^\pi$ è T, e le permutazioni sono esattamente $p!$.

Pagina 156 dell'originale

Poiché somme e multipli scalari di funzioni alternanti restano alternanti, i p-tensori alternanti formano un sottospazio $\Lambda^p(V^*)$ di $\mathcal{T}^p(V^*)$. Purtroppo il prodotto tensoriale di tensori alternanti non è in generale alternante, ma qui torna utile l'operatore Alt. Se $T \in \Lambda^p(V^*)$ e $S \in \Lambda^q(V^*)$, definiamo il loro *prodotto esterno*[41]

$$T \wedge S = \mathrm{Alt}(T \otimes S) \in \Lambda^{p+q}(V^*).$$

Il prodotto esterno è distributivo rispetto all'addizione e compatibile con la moltiplicazione scalare, perché Alt è lineare. Dimostrarne l'associatività richiede invece un po' di lavoro. Occorre un calcolo.

Lemma. Se $\mathrm{Alt}(T) = 0$, allora $\mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0 = \mathrm{Alt}(S \otimes T)$.

Dimostrazione. S_{p+q} contiene una copia naturale di S_p: il sottogruppo G delle permutazioni che fissano $p+1, \ldots, p+q$. A $\pi \in G$ corrisponde la restrizione π' a $\{1, \ldots, p\}$. Si ha $(T \otimes S)^\pi = T^{\pi'} \otimes S$ e $(-1)^\pi = (-1)^{\pi'}$, dunque[42]

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi = \left[\sum_{\pi' \in S_p} (-1)^{\pi'} T^{\pi'} \right] \otimes S = p!\,\mathrm{Alt}(T) \otimes S = 0.$$

[41] La normalizzazione del prodotto esterno ammette convenzioni diverse. Spivak, per esempio, introduce fattori fattoriali. Abbiamo scelto di mantenere semplice l'algebra, ma il fantasma dei fattoriali scomparsi tornerà quando discuteremo i volumi.

[42] *Correzione del traduttore.* Ripristinato il fattore $p!$ nella somma non normalizzata. La decomposizione in classi laterali è scritta coerentemente con la correzione degli errata alla composizione delle permutazioni.

Il gruppo S_{p+q} è unione disgiunta di classi laterali $\sigma G = \{\sigma \circ \pi : \pi \in G\}$. Per ciascuna di esse,

$$\sum_{\pi\in G} (-1)^{\sigma\circ\pi}(T \otimes S)^{\sigma\circ\pi} = (-1)^{\sigma}\left[\sum_{\pi\in G}(-1)^{\pi}(T\otimes S)^{\pi}\right]^{\sigma} = 0.$$

Sommando queste somme parziali e dividendo per $(p+q)!$ si ottiene $\mathrm{Alt}(T\otimes S) = 0$. Analogamente, $\mathrm{Alt}(S \otimes T) = 0$. □

Teorema. Il prodotto esterno è associativo:

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R),$$

e quindi la notazione $T \wedge S \wedge R$ è legittima.

Dimostrazione. Affermiamo che $(T \wedge S) \wedge R = \mathrm{Alt}(T \otimes S \otimes R)$. Per definizione e linearità,

$$(T \wedge S) \wedge R - \mathrm{Alt}(T \otimes S \otimes R) = \mathrm{Alt}([T \wedge S - T \otimes S] \otimes R).$$

Pagina 157 dell'originale

Poiché $T \wedge S$ è alternante,

$$\mathrm{Alt}(T \wedge S - T \otimes S) = T \wedge S - T \wedge S = 0.$$

Il lemma annulla dunque il membro destro. Analogamente, $T \wedge (S \wedge R) = \mathrm{Alt}(T \otimes S \otimes R)$. □

La formula appena dimostrata si estende al prodotto di un numero qualsiasi di tensori. Possiamo usarla per ricavare una base di $\Lambda^p(V^*)$. Ogni p-tensore si scrive

$$T = \sum t_{i_1,\dots,i_p}\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p},$$

dove $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ è una base di V^* e ciascun indice varia da 1 a k. Se T è alternante, $T = \mathrm{Alt}(T)$, perciò

$$T = \sum t_{i_1,\dots,i_p}\,\mathrm{Alt}(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}) = \sum t_{i_1,\dots,i_p}\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}.$$

D'ora in avanti indicheremo con ϕ_I il tensore alternante $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}$, dove $I = (i_1, \dots, i_p)$. Abbiamo mostrato che i ϕ_I generano $\Lambda^p(V^*)$, ma una proprietà fondamentale del prodotto esterno impedisce che siano tutti indipendenti.

Se $\phi, \psi \in \Lambda^1(V^*)$ sono funzionali lineari, l'operatore Alt assume una forma particolarmente semplice:

$$\phi \wedge \psi = \tfrac{1}{2}(\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi).$$

Quindi $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$ e $\phi \wedge \phi = 0$: il prodotto esterno è anticommutativo sugli 1-tensori. Come scoprirete, questa è la sua proprietà fondamentale. La ragione essenziale per sviluppare l'algebra dei tensori alternanti è proprio incorporare l'anticommutatività nei fondamenti della teoria dell'integrazione.

L'anticommutatività introduce relazioni tra i generatori ϕ_I. Se due successioni I, J differiscono soltanto per l'ordine, allora $\phi_I = \pm\phi_J$; se due indici di I sono uguali, $\phi_I = 0$. Eliminiamo dunque le ridondanze considerando soltanto successioni strettamente crescenti:

Pagina 158 dell'originale

$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le k$. Il loro numero è il numero di modi di scegliere p elementi tra k, cioè

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}.$$

I tensori rimasti sono linearmente indipendenti. Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è la base duale e $v_I = (v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$, la definizione di Alt dà $\phi_I(v_I) = 1/p!$ e $\phi_I(v_J) = 0$ per successioni crescenti diverse. Una relazione $\sum a_I \phi_I = 0$ implica quindi $0 = \sum a_I \phi_I(v_J) = a_J/p!$, ossia $a_J = 0$ per ogni J. Abbiamo dimostrato:

Teorema. Se $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ è una base di V^*, allora

$$\{\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} : 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le k\}$$

è una base di $\Lambda^p(V^*)$. Di conseguenza, $\dim \Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p}$.

Se I ha lunghezza p e J lunghezza q, dall'anticommutatività sugli 1-tensori segue rapidamente $\phi_I \wedge \phi_J = (-1)^{pq} \phi_J \wedge \phi_I$. Il teorema della base implica quindi:

Corollario. Per $T \in \Lambda^p(V^*)$ e $S \in \Lambda^q(V^*)$,

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T.$$

Inoltre $\Lambda^k(V^*)$ ha dimensione uno, per $k = \dim V$. È un fatto che probabilmente conoscete da anni, anche se in questa veste appare insolito. Conosciamo già un k-tensore alternante non nullo su $\mathbb{R}^k$: il determinante. Quindi $\dim \Lambda^k((\mathbb{R}^k)^*) = 1$ significa che ogni funzione alternante k-lineare su $\mathbb{R}^k$ è un multiplo del determinante: è l'«unicità della funzione determinante».

Pagina 159 dell'originale

Se la lunghezza di I supera k, qualche indice si ripete e $\phi_I = 0$. Dunque $\Lambda^p(V^*) = 0$ per $p > k$, e la successione $\Lambda^1(V^*), \Lambda^2(V^*), \dots$ termina con $\Lambda^k(V^*)$. È utile aggiungere $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$, interpretato come le funzioni costanti su V. Estendiamo il prodotto esterno ponendo che il prodotto di uno scalare e un tensore sia l'usuale moltiplicazione scalare. La somma diretta

$$\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \cdots \oplus \Lambda^k(V^*)$$

diventa così un'algebra, in generale non commutativa, detta *algebra esterna* di V^*, con unità $1 \in \Lambda^0(V^*)$.

Un'altra costruzione è fondamentale. Se $A : V \to W$ è lineare, la trasposta $A^* : W^* \to V^*$ si estende naturalmente alle algebre esterne, $A^* : \Lambda^p(W^*) \to \Lambda^p(V^*)$, per $p \ge 0$. Per $T \in \Lambda^p(W^*)$ definiamo

$$(A^*T)(v_1, \dots, v_p) = T(Av_1, \dots, Av_p).$$

È facile verificare che A^* è lineare e $A^*(T \wedge S) = A^*T \wedge A^*S$. È dunque un omomorfismo di algebre. Se $B : W \to U$ è un'altra applicazione lineare, $(BA)^* = A^*B^*$.

Supponiamo in particolare $A : V \to V$, $\dim V = k$. L'applicazione $A^* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ è lineare su uno spazio unidimensionale, quindi è moltiplicazione per una costante λ: $A^*T = \lambda T$. Affermiamo che $\lambda = \det A$. Scelto un isomorfismo $B : V \to \mathbb{R}^k$, poniamo $T = B^*(\det)$. Da $A^*B^*(\det) = \lambda B^*(\det)$ segue

$$(B^*)^{-1} A^* B^*(\det) = \lambda \det, \qquad (BAB^{-1})^*(\det) = \lambda \det.$$

Valutiamo sulla base canonica ordinata $e_1, \dots, e_k$. Dalla definizione del tensore determinante, $\det(Ce_1, \dots, Ce_k) = \det C$ per ogni applicazione lineare C. Pertanto $\lambda = \det(BAB^{-1}) = \det A$. Abbiamo così provato:

Pagina 160 dell'originale

Teorema del determinante. Se $A : V \to V$ è lineare e $k = \dim V$, allora $A^*T = (\det A)T$ per ogni $T \in \Lambda^k(V^*)$. In particolare, per $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$,

$$A^*\phi_1 \wedge \cdots \wedge A^*\phi_k = (\det A)\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k.$$

Esercizi

1. Se $T \in \Lambda^p(V^*)$ e $v_1, \dots, v_p \in V$ sono linearmente dipendenti, dimostrate che $T(v_1, \dots, v_p) = 0$.

2. Dualmente, se $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$ sono linearmente dipendenti, dimostrate che $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = 0$.

3. Per $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ e $v_1, \dots, v_k \in V$, dove $k = \dim V$, dimostrate

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \det[\phi_i(v_j)].$$

[*Suggerimento:* se i ϕ_i sono dipendenti, le righe della matrice sono dipendenti e basta l'esercizio 2. Altrimenti verificate la formula sulla base duale; osservate poi che il determinante definisce un k-tensore alternante e usate $\dim \Lambda^k(V^*) = 1$.]

4. Più in generale, dimostrate che

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \det[\phi_i(v_j)].$$

[*Suggerimento:* se i v_i sono dipendenti, usate l'esercizio 1; altrimenti restringete i funzionali al sottospazio p-dimensionale generato dai v_i e usate l'esercizio 3.]

5. Scrivete esplicitamente $\mathrm{Alt}(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3)$.

***6.** (a) Sia $0 \neq T \in \Lambda^k(V^*)$, $k = \dim V$. Dimostrate che due basi ordinate $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{v'_1, \dots, v'_k\}$ hanno la stessa orientazione se e solo se $T(v_1, \dots, v_k)$ e $T(v'_1, \dots, v'_k)$ hanno lo stesso segno. [*Suggerimento:* teorema del determinante.]

(b) Se V è orientato, mostrate che $\Lambda^k(V^*)$ acquista un'orientazione naturale definendo il segno di $T \neq 0$ come quello di $T(v_1, \dots, v_k)$ per una qualsiasi base ordinata positiva di V.

Pagina 161 dell'originale

(c) Viceversa, mostrate che un'orientazione di $\Lambda^k(V^*)$ determina naturalmente un'orientazione di V, invertendo la costruzione precedente.

7. Per una matrice quadrata A, sia A^t la trasposta. Usando la multilinearità del determinante sia nelle righe sia nelle colonne, dimostrate $\det A^t = \det A$. [*Suggerimento:* usate $\dim \Lambda^k((\mathbb{R}^k)^*) = 1$.]

8. Una matrice A è ortogonale se $AA^t = I$. Deducete che allora $\det A = \pm 1$.

9. Sia $V \subset \mathbb{R}^N$ un sottospazio di dimensione k. Una base è ortonormale se $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$. Per $A : V \to V$ lineare, dimostrate l'equivalenza di: (a) $Av \cdot Aw = v \cdot w$ per ogni v, w; (b) A manda basi ortonormali in basi ortonormali; (c) la matrice di A in ogni base ortonormale è ortogonale. Una tale A si chiama *trasformazione ortogonale*. Per (b) è necessariamente un isomorfismo.

***10.** (a) Se $V \subset \mathbb{R}^N$ è orientato, $\dim V = k$, dimostrate che esiste un unico $T \in \Lambda^k(V^*)$ con $T(v_1, \dots, v_k) = 1/k!$ su ogni base ortonormale ordinata positiva. È detto *elemento di volume* di V. [*Suggerimento:* teorema del determinante, esercizi 8 e 9; per l'unicità, $\dim \Lambda^k(V^*) = 1$.]

(b) Mostrate che, se $\phi_1, \dots, \phi_k$ è la base duale di una base ortonormale ordinata positiva, l'elemento di volume è $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$. [Esercizio 3.]

***11.** Sia T l'elemento di volume di $\mathbb{R}^2$. Mostrate che $T(v_1, v_2)$ è, a meno del segno, metà dell'area del parallelogramma generato da v_1, v_2. Se i vettori sono indipendenti, il segno è quello della base ordinata nella consueta orientazione. Generalizzate a $\mathbb{R}^3$. Come definireste il volume di un parallelepipedo in $\mathbb{R}^k$?

12. (a) Sia $V \subset \mathbb{R}^N$. Per $v \in V$, definite $\phi_v(w) = v \cdot w$. Dimostrate che $v \mapsto \phi_v$ è un isomorfismo $V \to V^*$.

Pagina 162 dell'originale

(b) Sia ora V orientato e tridimensionale, e sia T il suo elemento di volume. Per $u, v \in V$, il funzionale $w \mapsto 3!T(u, v, w)$ corrisponde, per (a), a un vettore $u \times v$ tale che[43]

$$(u \times v) \cdot w = 3!T(u, v, w).$$

Dimostrate $u \times v = -v \times u$. Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortonormale positiva, mostrate $v_1 \times v_2 = v_3$, $v_2 \times v_3 = v_1$ e $v_3 \times v_1 = v_2$. Inoltre $v \times v = 0$.

[43] *Correzione del traduttore.* Ripristinato il fattore 3! nell'uguaglianza, necessario con la normalizzazione dell'elemento di volume adottata dagli autori.

§3. Forme differenziali

Pagina 162 dell'originale

Nella geometria differenziale classica le forme erano quantità simboliche del tipo

$$\sum_i f_i\,dx_i, \qquad \sum_{i<j} f_{ij}\,dx_i \wedge dx_j, \qquad \sum_{i<j<k} f_{ijk}\,dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

Si integravano e si differenziavano queste espressioni e, poiché l'esperienza aveva mostrato la convenienza dell'anticommutatività, si manipolavano come tensori alternanti. Le forme differenziali moderne si riducono localmente alle stesse quantità simboliche, ma possiedono l'attributo indispensabile di essere definite globalmente sulle varietà. La definizione globale degli integrandi rende possibile l'integrazione globale.

Definizione. Sia X una varietà liscia, con o senza bordo. Una *p-forma* su X è una funzione ω che assegna a ciascun punto $x \in X$ un p-tensore alternante sullo spazio tangente in x:

$$\omega(x) \in \Lambda^p[T_x(X)^*].$$

Due p-forme si sommano punto per punto: $(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$. Anche il prodotto esterno si definisce punto per punto: se ω è una p-forma e θ una q-forma,

$$(\omega \wedge \theta)(x) = \omega(x) \wedge \theta(x).$$

L'anticommutatività $\omega \wedge \theta = (-1)^{pq}\theta \wedge \omega$ segue dalla stessa identità in ogni punto. Le 0-forme sono semplicemente funzioni arbitrarie a valori reali su X.

Molti esempi di 1-forme si ottengono dalle funzioni lisce. Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ è liscia, $d\phi_x : T_x(X) \to \mathbb{R}$ è lineare per ogni x, dunque $x \mapsto d\phi_x$ definisce una 1-forma $d\phi$, chiamata

Pagina 163 dell'originale

differenziale di ϕ. In particolare le funzioni coordinate $x_1, \ldots, x_k$ su $\mathbb{R}^k$ danno le 1-forme $dx_1, \ldots, dx_k$. Poiché $T_z(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$, verificate che

$$dx_i(z)(a_1, \ldots, a_k) = a_i.$$

In ogni punto questi funzionali costituiscono quindi la base canonica di $(\mathbb{R}^k)^*$.

Mediante i dx_i si scrivono facilmente tutte le forme su un aperto euclideo U. Per una successione strettamente crescente $I = (i_1, \ldots, i_p)$ poniamo $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. Dal teorema della base applicato a $\Lambda^p[T_z(U)^*] = \Lambda^p((\mathbb{R}^k)^*)$ segue:

Proposizione. Ogni p-forma su un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ si esprime in modo unico come $\sum_I f_I\,dx_I$, dove $I = (i_1 < \cdots < i_p)$ e le f_I sono funzioni su U. Le forme euclidee sono dunque davvero le quantità simboliche della matematica classica, ma ora i simboli hanno significati precisi. Un esercizio facile vi costringerà a controllare le definizioni: se ϕ è liscia su $\mathbb{R}^k$, mostrate che

$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx_i.$$

La formula è ovvia; ma che cosa significano i suoi due membri?

Una proprietà importante delle forme è che si possono riportare indietro naturalmente mediante applicazioni lisce. Se $f : X \to Y$ è liscia e ω una p-forma su Y, definiamo la p-forma $f^*\omega$ su X come segue. Per $f(x) = y$, la derivata $df_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ induce, mediante la trasposta, un tensore su $T_x(X)$ a partire dal tensore alternante $\omega(y)$ su $T_y(Y)$. Poniamo

$$(f^*\omega)(x) = (df_x)^*\omega[f(x)].$$

La forma così ottenuta si chiama *pullback* di ω mediante f. Per una 0-forma si ha semplicemente $f^*\omega = \omega \circ f$. Ricordate il verso: se $f : X \to Y$, allora f^* porta forme da Y a X, non da X a Y.

Pagina 164 dell'originale

Prima di esplicitare la definizione, dimostrate le formule

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2, \qquad f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta, \qquad (f \circ h)^*\omega = h^* f^* \omega.$$

Vediamo ora come agisce f^* nello spazio euclideo. Siano $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ aperti e $f : V \to U$ liscia. Indichiamo con $x_1, \dots, x_k$ le coordinate di $\mathbb{R}^k$ e con $y_1, \dots, y_l$ quelle di $\mathbb{R}^l$. Scriviamo $f = (f_1, \dots, f_k)$, con f_i lisce su V. La matrice di df_y è $(\partial f_i/\partial y_j)(y)$; quella della trasposta è la matrice trasposta. Ne segue

$$f^* dx_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\, dy_j = df_i.$$

Convincetevi della validità di questa formula prima di proseguire. Sapete spiegare il significato esatto di ogni termine?

Il comportamento sulle 0-forme e sulle 1-forme fondamentali dx_i determina completamente f^*. Infatti ogni forma si scrive $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$ e le proprietà astratte danno

$$f^*\omega = \sum_I (f^* a_I)\, df_I, \qquad df_I = df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p}.$$

Qui $f^* a_I = a_I \circ f$ è il pullback della 0-forma a_I; la notazione df_I è quella corretta dagli errata.

Un esempio è particolarmente importante. Supponiamo che $f : V \to U$ sia un diffeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}^k$ e $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$, la cosiddetta *forma di volume*. Se $f(y) = x$, entrambi gli spazi tangenti sono $\mathbb{R}^k$, ma le loro basi duali canoniche sono indicate rispettivamente con $dy_i(y)$ e $dx_i(x)$. Dal teorema del determinante del §2 segue

$$(f^*\omega)(y) = (df_y)^* dx_1(x) \wedge \cdots \wedge (df_y)^* dx_k(x) = \det(df_y)\, dy_1(y) \wedge \cdots \wedge dy_k(y).$$

Pagina 165 dell'originale

Più brevemente,

$$f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \det(df)\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k,$$

dove $\det(df)$ indica la funzione $y \mapsto \det(df_y)$ su V.

Una forma $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$ su $U \subset \mathbb{R}^k$ si dice *liscia* se tutte le funzioni a_I sono lisce. Dal calcolo precedente è chiaro che il pullback di una forma liscia mediante un'applicazione liscia tra aperti euclidei è liscio.

Più in generale una forma ω su X è liscia se, per ogni parametrizzazione locale $h : U \to X$, la forma $h^*\omega$ è liscia su U (aperto di $\mathbb{R}^k$, o del semispazio nel caso con bordo). In realtà basta verificarlo per una famiglia di parametrizzazioni $h_\alpha : U_\alpha \to X$ che ricopra X. Infatti, per un'altra parametrizzazione $h : U \to X$, gli aperti $h^{-1}[h_\alpha(U_\alpha)]$ ricoprono U, e su ciascuno di essi

$$h^*\omega = (h_\alpha^{-1} \circ h)^* h_\alpha^* \omega$$

è liscia. Poiché ci interessano soltanto le forme lisce, d'ora in avanti «forma» significherà implicitamente «forma liscia».

Concludiamo con un esercizio per verificare la comprensione di questo formalismo. Svolgetelo direttamente dalle definizioni, senza ricorrere ai calcoli euclidei precedenti.

Esercizio. Se $f : X \to Y$ è liscia e $\phi : Y \to \mathbb{R}$ è liscia, allora

$$f^*(d\phi) = d(f^*\phi).$$

§4. Integrazione sulle varietà

Pagina 165 dell'originale

Le forme sono state create per l'integrazione; ma che cosa ne fa gli integrandi appropriati? Forse la qualità fondamentale è che si trasformano automaticamente nel modo giusto quando si cambiano coordinate. Ricordiamo il seguente importante teorema del calcolo, la cui dimostrazione si trova in molti testi, per esempio Spivak [2], p. 67.

Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^k$. Se $f : V \to U$ è un diffeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}^k$ e a è integrabile su U, allora

$$\int_U a\,dx_1 \cdots dx_k = \int_V (a \circ f)|\det(df)|\,dy_1 \cdots dy_k.$$

Pagina 166 dell'originale

Qui $\det(df)$ indica, come prima, la funzione $y \mapsto \det(df_y)$. È facile vedere che il teorema vale anche nel semispazio H^k.

Quando cambiamo variabili mediante f, una funzione a si trasforma nel pullback $a \circ f$. Questa trasformazione non è però naturale dal punto di vista dell'integrazione: poiché f deforma i volumi mandando V su U, gli integrali di $a \circ f$ e di a non coincidono. Bisogna compensare con il fattore $|\det(df)|$, che misura l'alterazione infinitesima del volume. Le forme compensano automaticamente questa variazione. Consideriamo come integrando, anziché la funzione a accompagnata dal simbolo formale $dx_1 \cdots dx_k$, la k-forma $\omega = a\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$, e definiamo

$$\int_U \omega = \int_U a\,dx_1 \cdots dx_k.$$

Come abbiamo calcolato, il pullback è $f^*\omega = (a \circ f)\det(df)\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$. Se f preserva l'orientazione, $\det(df) > 0$ e questo è esattamente l'integrando del membro destro nel teorema del cambiamento di variabili. Ogni k-forma ha la forma indicata; chiamandola integrabile quando lo è a, il teorema diventa:

Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^k$. Se $f : V \to U$ è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione tra aperti di $\mathbb{R}^k$ o H^k e ω è una k-forma integrabile su U, allora

$$\int_U \omega = \int_V f^*\omega.$$

Se f inverte l'orientazione, allora $\int_U \omega = -\int_V f^*\omega$.

Ripercorrendo le sezioni precedenti, scoprirete che la comparsa automatica del fattore compensatore $\det(df)$ è una conseguenza meccanica dell'anticommutatività delle 1-forme: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. L'intero apparato algebrico delle forme serve dunque a fornire integrandi che si trasformino correttamente.

Questa proprietà consente di integrare sulle varietà, dove non disponiamo di coordinate canoniche. Sia ω una k-forma liscia su una varietà *orientata* X, di dimensione k, con bordo. Il *supporto* di ω è la chiusura dei punti in cui $\omega(x) \neq 0$. Supponiamo tale chiusura compatta: ω si dice allora *a supporto compatto*. Supponiamo inizialmente che il supporto

Pagina 167 dell'originale

sia contenuto in un solo aperto parametrizzabile $W \subset X$. Se $h : U \to W$ è una parametrizzazione che preserva l'orientazione, con $U \subset H^k$ aperto, $h^*\omega$ è liscia e a supporto compatto, quindi integrabile. Poniamo

$$\int_X \omega = \int_U h^*\omega.$$

Se $g : V \to W$ è un'altra parametrizzazione positiva, $f = h^{-1} \circ g : V \to U$ preserva l'orientazione e

$$\int_U h^*\omega = \int_V f^* h^* \omega = \int_V g^*\omega.$$

Grazie alle proprietà di trasformazione, l'integrale ha un significato intrinseco, indipendente dalla parametrizzazione. Se la nostra propaganda non vi ha ancora convertito alle forme, provate a definire l'integrale di una funzione.

Per integrare una forma liscia arbitraria a supporto compatto, usiamo una partizione dell'unità per dividerla in parti con supporto parametrizzabile. Gli aperti parametrizzabili ricoprono X; scegliamo una partizione subordinata $\{\rho_i\}$. Per la finitezza locale, soltanto un numero finito di ρ_i non è identicamente nullo sul supporto compatto di ω. Le forme $\rho_i\omega$ sono dunque quasi tutte nulle, e ciascuna ha supporto compatto in un aperto parametrizzabile. Definiamo

$$\int_X \omega = \sum_i \int_X \rho_i \omega.$$

È facile provare l'indipendenza dalla partizione. Innanzi tutto, se il supporto di ω è già contenuto in un aperto parametrizzabile, le due definizioni concordano: da $\sum_i \rho_i = 1$ segue $\sum_i \rho_i\omega = \omega$, e la linearità del pullback e dell'integrale euclideo dà $\int_X \omega = \sum_i \int_X \rho_i\omega$.

Sia ora $\{\rho'_j\}$ un'altra partizione adatta. Per quanto appena osservato, $\int_X \rho_i\omega = \sum_j \int_X \rho'_j\rho_i\omega$;

Pagina 168 dell'originale

analogamente $\int_X \rho'_j\omega = \sum_i \int_X \rho_i\rho'_j\omega$. Quindi

$$\sum_i \int_X \rho_i\omega = \sum_i \sum_j \int_X \rho'_j\rho_i\omega = \sum_j \sum_i \int_X \rho_i\rho'_j\omega = \sum_j \int_X \rho'_j\omega,$$

e il risultato non dipende dalla partizione scelta.

Le consuete proprietà di linearità sono immediate:

$$\int_X (\omega_1 + \omega_2) = \int_X \omega_1 + \int_X \omega_2, \qquad \int_X c\omega = c\int_X \omega \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Lasciamo a voi verificare che la teoria continua a comportarsi correttamente sotto cambiamento di dominio.

Teorema. Se $f : Y \to X$ è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione, allora

$$\int_X \omega = \int_Y f^*\omega$$

per ogni k-forma liscia a supporto compatto su X, $k = \dim X = \dim Y$. Potete anche convincervi che questa proprietà determina completamente la teoria: abbiamo costruito l'unica operazione lineare sulle forme a supporto compatto che si trasforma naturalmente e si riduce all'integrazione usuale nello spazio euclideo.

Sebbene su X si possano integrare soltanto forme di grado $\dim X$, gli altri gradi si integrano sulle sottovarietà. Se Z è una sottovarietà orientata di X, la *restrizione* a Z di una forma ω su X è $i^*\omega$, dove $i : Z \hookrightarrow X$ è l'inclusione. Per una 0-forma è proprio l'usuale restrizione di funzioni. Se $\dim Z = l$, ω è una l-forma e il suo supporto incontra Z in un compatto, definiamo

$$\int_Z \omega = \int_Z i^*\omega.$$

Vediamo esempi concreti. Sia $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$

Pagina 169 dell'originale

una 1-forma liscia su $\mathbb{R}^3$, e sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva semplice, cioè un diffeomorfismo di $I = [0,1]$ sulla varietà compatta unidimensionale con bordo $C = \gamma(I)$, orientata mediante γ. Allora $\int_C \omega = \int_I \gamma^*\omega$. Scrivendo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, si ha $\gamma^* dx_i = d\gamma_i = \gamma_i'(t)\, dt$, dunque

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 f_i[\gamma(t)]\gamma_i'(t)\, dt.$$

Se $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$, il membro destro è l'usuale *integrale curvilineo* di $\vec{F}$ lungo C, indicato con $\int \vec{F} \cdot d\gamma$.

Consideriamo ora la 2-forma a supporto compatto su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

Integriamola su una superficie S che, per semplicità, supponiamo essere il grafico $x_3 = G(x_1, x_2)$ di una funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. L'ipotesi non è davvero restrittiva localmente: ogni superficie è localmente il grafico di una funzione, eventualmente esprimendo x_1 o x_2 in funzione delle altre coordinate.

Scegliamo la parametrizzazione $h : \mathbb{R}^2 \to S$, $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, G(x_1, x_2))$, e l'orientazione da essa indotta. Si calcola

$$\begin{aligned}
&h^*(dx_1 \wedge dx_2) = dx_1 \wedge dx_2,\\
&h^*(dx_2 \wedge dx_3) = dx_2 \wedge dG = dx_2 \wedge \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2\right) = -\frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2,\\
&h^*(dx_3 \wedge dx_1) = -\frac{\partial G}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

Pagina 170 dell'originale

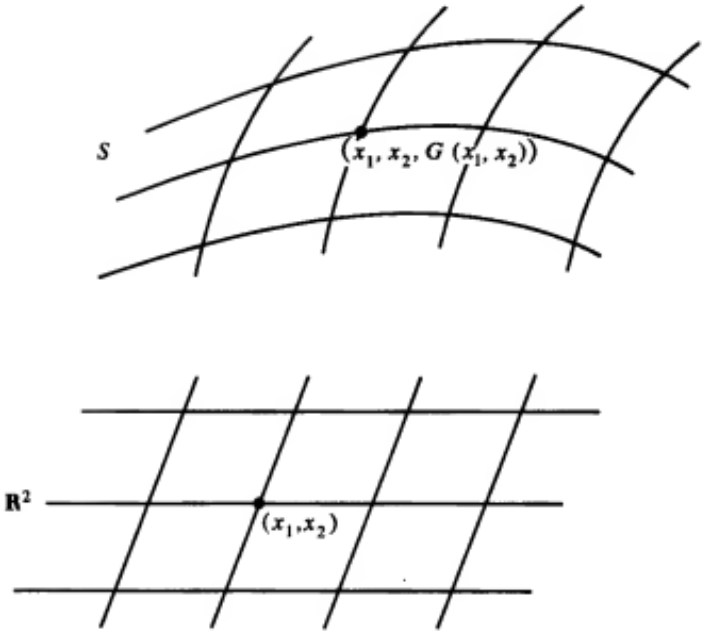


Figura 4-1. La parametrizzazione di una superficie come grafico.

Otteniamo

$$\int_S \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \left(n_1(f_1 \circ h) + n_2(f_2 \circ h) + n_3(f_3 \circ h)\right) dx_1 dx_2,$$

dove

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = \left(-\frac{\partial G}{\partial x_1}, -\frac{\partial G}{\partial x_2}, 1 \right).$$

Verificate che $\vec{n}$ è normale a S in $h(x_1, x_2)$. Per riscrivere l'integrale nella forma familiare dal calcolo, poniamo $\vec{u} = \vec{n}/|\vec{n}|$, $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) \circ h$ e definiamo su $\mathbb{R}^2$ la 2-forma $dA = |\vec{n}|\, dx_1 \wedge dx_2$. Allora

$$\int_S \omega = \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{F} \cdot \vec{u})\, dA.$$

Le composizioni con h in queste formule sono ripristinate secondo gli errata.

dA è solitamente chiamata *forma d'area* della superficie. Potete motivare il nome con un esercizio: se ΔS è un piccolo rettangolo in un piano di $\mathbb{R}^3$ e $\Delta S'$ è la sua proiezione sul piano x_1x_2, allora $\text{Area}(\Delta S) = \sec\theta\ \text{Area}(\Delta S')$,

Pagina 171 dell'originale

dove θ è l'angolo acuto fra la normale e l'asse x_3. Traslate dapprima il rettangolo nel suo piano finché un lato sia parallelo all'intersezione dei due piani: la formula diventa evidente. Mostrate poi che

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^2} = \sec\theta.$$

Infine, l'area di $\Delta S'$ è l'integrale di $dx_1 \wedge dx_2$ su di esso.

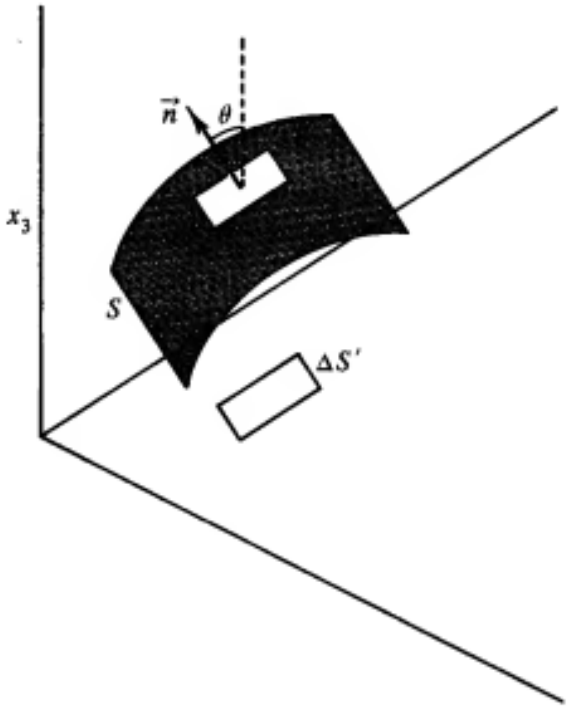


Figura 4-2. Area di un elemento di superficie e della sua proiezione.

Esercizi

1. Sia Z un insieme finito di punti di X, considerato come 0-varietà orientata mediante segni $\sigma(z) = \pm 1$. Per una funzione f su X, considerata come 0-forma, verificate

$$\int_Z f = \sum_{z \in Z} \sigma(z) f(z).$$

2. Se X è orientata di dimensione k, con bordo, e ω è una k-forma a supporto compatto, ricordando che $-X$ denota l'orientazione opposta,

Pagina 172 dell'originale

verificate $\int_{-X} \omega = -\int_X \omega$.

3. Sia $c : [a, b] \to X$ liscia, $c(a) = p$, $c(b) = q$. Se $\omega = df$, dimostrate $\int_a^b c^*\omega = f(q) - f(p)$.

4. Siano $c : [a, b] \to X$ e $f : [a_1, b_1] \to [a, b]$ lisce, con $f(a_1) = a$, $f(b_1) = b$. Mostrate

$$\int_a^b c^*\omega = \int_{a_1}^{b_1} (c \circ f)^*\omega.$$

L'integrale non dipende quindi dalle riparametrizzazioni che preservano l'orientazione; l'enunciato vale anche senza supporre f iniettiva.

***5.** Una *curva chiusa* su X è un'applicazione liscia $\gamma : S^1 \to X$. Per una 1-forma ω, definiamo $\oint_\gamma \omega = \int_{S^1} \gamma^*\omega$. Per $X = \mathbb{R}^k$, scrivete l'integrale esplicitamente mediante le coordinate di γ e ω.

6. Sia $h : \mathbb{R} \to S^1$, $h(t) = (\cos t, \sin t)$. Mostrate che per ogni 1-forma su S^1, $\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} h^*\omega$.

***7.** Se $\omega = df$, provate $\oint_\gamma \omega = 0$ per ogni curva chiusa γ. [*Suggerimento:* esercizi 3 e 5.]

***8.** Sul piano puntato $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definite

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy.$$

(a) Calcolate $\int_C \omega$ per una circonferenza C centrata nell'origine, di raggio r, con orientazione antioraria.

Pagina 173 dell'originale

(b) Mostrate che nel semipiano $x > 0$ la forma è il differenziale di una funzione. [Provate, a caso, $\arctan(y/x)$.] (c) Perché non è globalmente il differenziale di una funzione sul piano puntato?

***9.** Dimostrate che una 1-forma ω su S^1 è il differenziale di una funzione se e solo se $\int_{S^1} \omega = 0$. [*Suggerimento:* la necessità segue dall'esercizio 7, come precisato negli errata. Con h dell'esercizio 6, ponete $g(t) = \int_0^t h^*\omega$. Se l'integrale sulla circonferenza è nullo, $g(t+2\pi) = g(t)$; quindi $g = f \circ h$ per una funzione f su S^1. Verificate $df = \omega$.]

***10.** Sia ν una 1-forma su S^1 con integrale non nullo. Provate che per ogni altra 1-forma ω esistono $c \in \mathbb{R}$ e una funzione f tali che $\omega - c\nu = df$.

11. Sia X connessa e supponiamo $\oint_\gamma \omega = 0$ per tutte le curve chiuse. Per $p, q \in X$, definite $\int_p^q \omega = \int_0^1 c^*\omega$, dove $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dimostrate l'indipendenza dalla scelta di c. [*Suggerimento:* incollate due curve per formare una curva chiusa, dopo averle rese costanti vicino agli estremi mediante l'esercizio 4.]

***12.** Provate che, se $\oint_\gamma \omega = 0$ per tutte le curve chiuse, allora $\omega = df$. [*Suggerimento:* basta il caso connesso. Fissate p e ponete $f(x) = \int_p^x \omega$. Verificate $df = \omega$ in coordinate locali. Si può lavorare interamente in un intorno U, scegliendo $p' \in U$ e usando $f(x) = f(p') + \int_{p'}^x \omega$.]

13. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata e $\vec{n}(x) = (n_1, n_2, n_3)$ la normale unitaria positiva (capitolo III, §2, esercizio 19). Definite su S

$$dA = n_1\, dx_2 \wedge dx_3 + n_2\, dx_3 \wedge dx_1 + n_3\, dx_1 \wedge dx_2,$$

con i dx_i ristretti a S. Se S è il grafico di

Pagina 174 dell'originale

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, orientato mediante $\mathbb{R}^2$, mostrate che il pullback di questo dA è quello definito nel testo.

14. Per una 2-forma arbitraria $\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2$ su $\mathbb{R}^3$, verificate che la restrizione a S è $(\vec{F} \cdot \vec{n})dA$, dove $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$. [*Suggerimento:* per $u, v \in T_x(S)$, $\omega(x)(u, v)$ è metà del determinante della matrice con righe $\vec{F}(x), u, v$. Se $\vec{F}(x)$ è tangente, il determinante si annulla: contribuisce soltanto la componente normale.]

§5. Derivata esterna

Pagina 174 dell'originale

Le forme non si possono soltanto integrare: si possono anche differenziare. Abbiamo già visto come farlo per le 0-forme, ottenendo dalla funzione liscia f la 1-forma df. Nello spazio euclideo è evidente come proseguire. Per una p-forma liscia $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$ su un aperto di $\mathbb{R}^k$, differenziamo semplicemente i coefficienti: definiamo la *derivata esterna* come la $(p+1)$-forma

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Il teorema seguente ne riassume le proprietà principali.

Teorema. L'operatore d, sulle forme lisce di un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ o H^k, soddisfa:

(a) Linearità: $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ e $d(c\omega) = c\, d\omega$ per $c \in \mathbb{R}$.

(b) Regola del prodotto: $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$ se ω ha grado p.

Pagina 175 dell'originale

(c) Condizione di cociclo: $d(d\omega) = 0$.

Inoltre è l'unico operatore con queste proprietà che coincida con la precedente definizione di df per le funzioni lisce.

Dimostrazione. (a) è evidente; (b) e (c) si verificano mediante calcolo. Scriviamo la verifica di (c), lasciando (b) come esercizio. Da $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$ segue

$$d\omega = \sum_I \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I, \qquad d(d\omega) = \sum_I \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I.$$

Le derivate seconde miste sono simmetriche in i, j, mentre $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$: i termini si cancellano a due a due.

Per l'unicità, supponiamo D dotato delle stesse proprietà e $Df = df$ sulle funzioni. Allora $D(dx_i) = D(Dx_i) = 0$. Applicando (b) ripetutamente si ottiene $D(dx_I) = 0$. Per (a) e (b),

$$D\omega = \sum_I [D(a_I) \wedge dx_I + a_I D(dx_I)] = \sum_I da_I \wedge dx_I = d\omega. \qquad \square$$

Corollario. Se $g : V \to U$ è un diffeomorfismo di aperti di $\mathbb{R}^k$ o H^k, allora $d(g^*\omega) = g^*(d\omega)$.

Dimostrazione. Verificate che $D = (g^{-1})^* \circ d \circ g^*$ soddisfa (a), (b), (c). Il risultato per le funzioni è già stato provato, quindi D coincide con d sulle funzioni. Per unicità $D = d$, ossia $d \circ g^* = g^* \circ d$.$\square$

Pagina 176 dell'originale

Come la legge naturale $\int_V g^*\omega = \int_U \omega$ ha permesso di integrare sulle varietà, così $d \circ g^* = g^* \circ d$ consente di differenziare forme sulle varietà. Per una p-forma ω su una varietà con bordo X, definiamo $d\omega$ localmente. Nella parametrizzazione $\phi : U \to X$, poniamo

$$d\omega = (\phi^{-1})^* d(\phi^*\omega) \quad \text{su } \phi(U).$$

Se $\psi : V \to X$ ha immagine sovrapposta, sul dominio comune poniamo $g = \phi^{-1} \circ \psi$. Il corollario dà $g^* d(\phi^*\omega) = d(g^*\phi^*\omega) = d(\psi^*\omega)$, da cui

$$(\psi^{-1})^* d(\psi^*\omega) = (\psi^{-1})^* g^* d(\phi^*\omega) = (\phi^{-1})^* d(\phi^*\omega).$$

Quindi $d\omega$ è una $(p+1)$-forma ben definita globalmente. Traducete ora le proprietà euclidee nel contesto generale, dimostrando:

Teorema. La derivata esterna su una varietà arbitraria con bordo soddisfa:

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;
2. $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$, per ω di grado p;
3. $d(d\omega) = 0$;
4. sulle funzioni df coincide con la definizione precedente;
5. se $g : Y \to X$ è un diffeomorfismo, $d \circ g^* = g^* \circ d$.

Le operazioni euclidee $\int$ e d si estendono alle varietà per ragioni analoghe: si trasformano naturalmente sotto cambiamento di coordinate. La profondità delle due proprietà è però molto diversa. Il teorema del cambiamento di variabili, invocato senza dimostrarlo, è piuttosto sottile: richiede un'analisi precisa della distorsione dei volumi. Invece la commutazione di d con il pullback è una semplice conseguenza

Pagina 177 dell'originale

della definizione. Inoltre g non deve necessariamente essere un diffeomorfismo: la formula vale per ogni applicazione liscia.

Teorema. Se $g : Y \to X$ è una qualsiasi applicazione liscia di varietà con bordo, allora $d(g^*\omega) = g^*(d\omega)$ per ogni forma ω su X.

Dimostrazione. Per le 0-forme è l'esercizio finale del §3. Se $\omega = df$, entrambi i membri sono nulli, perché $d\omega = 0$ e $d(g^*df) = d(d(g^*f)) = 0$. La regola del prodotto mostra che, se la formula vale per ω e θ, vale per $\omega \wedge \theta$; la linearità la estende alle somme. Localmente ogni forma è una somma di prodotti esterni di una funzione e di differenziali di funzioni, poiché in coordinate è $\sum_I a_I \, dx_I$. La questione è locale, e questo conclude la dimostrazione. □

Prima di chiudere calcoliamo completamente d su $\mathbb{R}^3$. In termini di campi vettoriali, probabilmente lo conoscete già.

0**-forme.** Se f è una funzione,

$$df = g_1\,dx_1 + g_2\,dx_2 + g_3\,dx_3, \quad (g_1, g_2, g_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \operatorname{grad} f.$$

1**-forme.** Per $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3$,

$$d\omega = g_1\,dx_2 \wedge dx_3 + g_2\,dx_3 \wedge dx_1 + g_3\,dx_1 \wedge dx_2,$$

dove $g_1 = \partial f_3/\partial x_2 - \partial f_2/\partial x_3$, $g_2 = \partial f_1/\partial x_3 - \partial f_3/\partial x_1$ e $g_3 = \partial f_2/\partial x_1 - \partial f_1/\partial x_2$.

Pagina 178 dell'originale

In termini di campi, $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$.

2**-forme.** Per $\omega = f_1\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3\,dx_1 \wedge dx_2$,

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{div} \vec{F})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

3**-forme.** La derivata di qualsiasi 3-forma è zero. Perché?

Gradiente, rotore e divergenza sono dunque l'operatore d espresso mediante campi vettoriali. Mostrate che $d^2 = 0$ equivale alle formule $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ e $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

Esercizi

1. Calcolate la derivata esterna delle forme su $\mathbb{R}^3$: (a) $z^2\,dx \wedge dy + (z^2 + 2y)\,dx \wedge dz$; (b) $13x\,dx + y^2\,dy + xyz\,dz$; (c) $f\,dg$; (d) $(x + 2y^3)(dz \wedge dx + \frac{1}{2}dy \wedge dx)$.

2. Mostrate che il campo $(-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))$, definito sul piano puntato, ha rotore nullo ma non è il gradiente di alcuna funzione globale.

§6. Coomologia mediante forme

Pagina 178 dell'originale

Una p-forma ω su X[44] è *chiusa* se $d\omega = 0$ ed *esatta* se $\omega = d\theta$ per qualche $(p-1)$-forma. Ogni forma esatta è chiusa, perché $d^2 = 0$, ma non ogni forma chiusa è necessariamente esatta. Il fatto che le forme chiuse su X siano o no esatte risulta essere una questione puramente topologica. Forse conoscete già questo fenomeno dal calcolo,

Pagina 179 dell'originale

espresso mediante campi vettoriali: ogni gradiente ha rotore nullo, ma il viceversa dipende dal dominio, come mostra l'esercizio 2 precedente. In termini di forme,

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

è chiusa ma non esatta sul piano puntato.

Studieremo qui in modo elementare questa distinzione. L'argomento è piuttosto bello, e come nella sezione sul numero di avvolgimento lasceremo a voi gran parte delle verifiche. Speriamo così di compensare la scarsità di esercizi interessanti nelle ultime sezioni.

Per misurare quanto fallisca l'implicazione «chiusa $\Rightarrow$ esatta», introduciamo una relazione di equivalenza sulle p-forme chiuse. Due forme chiuse ω, ω' si dicono *coomologhe*, e si scrive $\omega \sim \omega'$, se $\omega - \omega' = d\theta$. Verificate che è una relazione di equivalenza. L'insieme delle classi è $H^p(X)$, il *p-esimo gruppo di coomologia di de Rham*. È naturalmente uno spazio vettoriale reale: se $\omega_1 \sim \omega_1'$ e $\omega_2 \sim \omega_2'$, allora $\omega_1 + \omega_2 \sim \omega_1' + \omega_2'$, e $c\omega_1 \sim c\omega_1'$. La classe zero è l'insieme delle forme esatte, poiché $\omega + d\theta \sim \omega$.

Per $f : X \to Y$ liscia, la relazione $f^* d = d f^*$ mostra che il pullback conserva le forme chiuse e quelle esatte, e manda forme coomologhe in forme coomologhe. Induce quindi un'applicazione lineare

$$f^{\#} : H^p(Y) \longrightarrow H^p(X).$$

Ricordate ancora il verso: il pullback va da Y a X. Gli enunciati numerati seguenti sono da dimostrare.

1. Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, allora $(g\circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$. In casi semplici la coomologia si calcola facilmente: $H^p(X) = 0$ per $p > \dim X$. Il caso successivo è:

2. Se X ha un numero finito di componenti connesse, $\dim H^0(X)$ è quel numero. In generale, $H^0(X)$ è lo spazio di tutte le funzioni reali sull'insieme delle componenti. [*Suggerimento:* non esistono 0-forme esatte non nulle; una funzione è chiusa se e solo se è costante su ogni componente.][45] Per studiare gli altri gruppi definiamo un operatore P sulle forme. Come d e $\int$, si definisce prima

Pagina 180 dell'originale

nello spazio euclideo e poi si estende mediante parametrizzazioni locali, grazie alla corretta trasformazione sotto diffeomorfismi.

Sia $U \subset \mathbb{R}^k$ aperto. Una p-forma su $\mathbb{R} \times U$ si scrive in modo unico

$$\omega = \sum_I f_I(t,x)\,dt \wedge dx_I + \sum_J g_J(t,x)\,dx_J. \tag{1}$$

[44] La lettura di questa sezione non è necessaria per quelle successive, ma alcuni esercizi successivi vi fanno riferimento.

[45] *Precisazione del traduttore.* L'enunciato stampato sulla dimensione richiede finitezza del numero delle componenti: per infinite componenti si ottiene un prodotto di copie di $\mathbb{R}$, non la loro somma diretta.

t è la coordinata di $\mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_k$ quelle di $\mathbb{R}^k$; I, J sono crescenti di lunghezza $p-1, p$. Fissato $a \in \mathbb{R}$, l'operatore P_a produce la $(p-1)$-forma

$$P_a\omega(t,x) = \sum_I \left[\int_a^t f_I(s,x)\,ds\right] dx_I.$$

Non compare alcun termine dt.[46] Se $\phi : V \to U$ è un diffeomorfismo e $\Phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \phi$, provate la proprietà essenziale:

3. $\Phi^* P_a\omega = P_a\Phi^*\omega$. [*Suggerimento:* evitate di scrivere tutto in coordinate. Basta osservare $\Phi^* dt = dt$ e che Φ^* conserva separatamente i due tipi di somme in (1).] Imitando l'estensione di d e $\int$, provate:

4. Esiste un unico operatore locale P_a su tutte le varietà X, che manda p-forme su $\mathbb{R} \times X$ in $(p-1)$-forme, coincide con la formula precedente sugli aperti euclidei e soddisfa $\Phi^* P_a = P_a \Phi^*$ per $\Phi = \mathrm{id} \times \phi$ con ϕ diffeomorfismo. La sua proprietà principale è la formula seguente, che a prima vista forse non sembra affatto meravigliosa: aspettate!

5. Siano $\pi : \mathbb{R} \times X \to X$ la proiezione e $i_a(x) = (a, x)$. Allora

$$dP_a\omega + P_a d\omega = \omega - \pi^* i_a^* \omega.$$

[*Suggerimento:* esplicitate la notazione; in (1), $\pi^* i_a^* \omega = \sum_J g_J(a,x)\,dx_J$.]

Pagina 181 dell'originale

La prima conseguenza importante è:

6. (*Lemma di Poincaré*) Le applicazioni

$$i_a^{\#} : H^p(\mathbb{R} \times X) \to H^p(X), \qquad \pi^{\#} : H^p(X) \to H^p(\mathbb{R} \times X)$$

sono inverse. Quindi i due spazi sono isomorfi. [*Suggerimento:* $\pi \circ i_a = \mathrm{id}$ dà un'identità; per l'altra interpretate l'esercizio 5 sulle forme chiuse.] Prendendo X ridotto a un punto, per il quale $H^p(X) = 0$ se $p > 0$, e procedendo per induzione, si ottiene:

Corollario. $H^p(\mathbb{R}^k) = 0$ per $p > 0$: ogni p-forma chiusa su $\mathbb{R}^k$ di grado positivo è esatta. Una conseguenza un po' più sottile è:

7. Se $f, g : X \to Y$ sono omotope, $f^{\#} = g^{\#}$. [*Suggerimento:* sia $H : \mathbb{R} \times X \to Y$ liscia con $H(a,x) = f(x)$, $H(b,x) = g(x)$. Allora $f^{\#} = i_a^{\#} H^{\#}$ e $g^{\#} = i_b^{\#} H^{\#}$, ma per l'esercizio 6 $i_a^{\#} = i_b^{\#}$.] Rafforzate ora il corollario:

8. Se X è contraibile, $H^p(X) = 0$ per ogni $p > 0$. Concludiamo con un risultato più profondo.

Teorema. Per $k > 0$, $H^p(S^k)$ ha dimensione uno se $p = 0$ o $p = k$ ed è zero per gli altri gradi. Procediamo per induzione, supponendo il risultato per S^{k-1}. Siano U_1 la sfera senza il polo sud e U_2 la sfera senza il polo nord: entrambi sono diffeomorfi a $\mathbb{R}^k$ per proiezione stereografica.

9. $U_1 \cap U_2$ è diffeomorfo a $\mathbb{R} \times S^{k-1}$. [*Suggerimento:* è diffeomorfo a $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.][47] Useremo una tecnica classica della topologia algebrica, l'argomento di Mayer–Vietoris, per mostrare:

Pagina 182 dell'originale

[46] *Correzione del traduttore.* Il testo definisce P con estremo inferiore 0, ma nell'esercizio 5 usa un'inclusione i_a arbitraria. Scriviamo coerentemente P_a con estremo inferiore a; per $a = 0$ si ritrova esattamente l'operatore stampato. Sulle 0-forme P_a è zero.

[47] *Correzione del traduttore.* Nei due richiami alla proiezione stereografica la dimensione stampata $k-1$ è sostituita con k.

Proposizione. Per $p > 1$, $H^p(U_1 \cup U_2)$ e $H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$ sono isomorfi. Sia ω una p-forma chiusa su $U_1 \cup U_2 = S^k$. Poiché U_1, U_2 sono contraibili, $\omega = d\phi_1$ su U_1 e $\omega = d\phi_2$ su U_2. Allora $\nu = \phi_1 - \phi_2$ è una $(p-1)$-forma chiusa sull'intersezione. Abbiamo così costruito forme chiuse di grado $p-1$ sull'intersezione a partire da forme chiuse di grado p sull'unione.

Il procedimento si inverte facilmente. Scegliete funzioni ρ_1, ρ_2 sulla sfera tali che ρ_1 sia nulla vicino al polo nord, ρ_2 vicino al polo sud, e $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Data ν chiusa sull'intersezione, ponete $\phi_1 = \rho_1\nu$ su U_1, estendendo per zero vicino al polo nord: anche se ν vi diverge, ρ_1 la annulla in un intorno. Analogamente ponete $\phi_2 = -\rho_2\nu$ su U_2. Sull'intersezione $\phi_1 - \phi_2 = \nu$. Definite $\omega = d\phi_1$ su U_1 e $\omega = d\phi_2$ su U_2. Poiché $d\phi_1 - d\phi_2 = d\nu = 0$, la forma è ben definita globalmente ed è chiusa.

10. Mostrate che questi procedimenti provano la proposizione. Che cosa accade per $p = 1$? Siamo quasi alla fine: $H^p(U_1 \cup U_2) = H^p(S^k)$ e, per l'esercizio 9 e il lemma di Poincaré, $H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \cong H^{p-1}(S^{k-1})$. Quindi

$$H^p(S^k) \cong H^{p-1}(S^{k-1}) \quad (p > 1).$$

Mancano due passi: avviare l'induzione con $\dim H^1(S^1) = 1$ e mostrare $H^1(S^k) = 0$ per $k > 1$. Quest'ultimo segue facilmente da Stokes e sarà rinviato all'esercizio 10 del §7. Il primo è già contenuto negli esercizi 9 e 10 del §4, insieme all'esercizio 2 del §5.

§7. Il teorema di Stokes

Pagina 182 dell'originale

Esiste una relazione notevole fra gli operatori $\int$ e d sulle forme e l'operazione ∂ che associa a una varietà il suo bordo:

Pagina 183 dell'originale

notevole, perché ∂ è puramente geometrica, mentre d e $\int$ sono analitiche. In dimensione uno è il teorema fondamentale del calcolo; in dimensioni due e tre sono i teoremi classici di Green, Gauss e Stokes. In generale, sia X una varietà compatta orientata di dimensione k, con bordo, e assegniamo a ∂X l'orientazione di bordo.

Teorema generalizzato di Stokes. Per ogni $(k-1)$-forma liscia ω su X,

$$\boxed{\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega.}$$

Dimostrazione. Entrambi i membri sono lineari in ω. Mediante una partizione dell'unità possiamo quindi supporre che ω abbia supporto compatto nell'immagine di una parametrizzazione positiva $h : U \to X$, con U aperto in $\mathbb{R}^k$ o H^k.

Supponiamo prima $U \subset \mathbb{R}^k$, ossia che $h(U)$ non incontri il bordo. Allora $\int_{\partial X} \omega = 0$, mentre $\int_X d\omega = \int_U h^*(d\omega) = \int_U d\nu$, con $\nu = h^*\omega$. Estendendo per zero, scriviamo su $\mathbb{R}^k$

$$\nu = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

dove il cappello indica l'omissione del fattore. Quindi

$$d\nu = \left(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k, \quad \int_{\mathbb{R}^k} d\nu = \sum_i \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_1 \cdots dx_k. \tag{2}$$

Per il teorema di Fubini possiamo integrare il termine i prima rispetto a x_i:

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k.$$

Pagina 184 dell'originale

Fissate le altre coordinate, l'integrale interno è $\int_{-\infty}^{\infty} g'(t)\,dt$, dove $g(t) = f_i(b_1, \ldots, t, \ldots, b_k)$. Per il supporto compatto, g è nulla fuori da un intervallo $(-a, a)$ sufficientemente grande. Il teorema fondamentale del calcolo dà $\int g' = g(a) - g(-a) = 0$. Dunque $\int_X d\omega = 0$.

Se $U \subset H^k$, lo stesso ragionamento annulla tutti i termini di (2) tranne l'ultimo. Poiché $H^k = \{x_k \geq 0\}$, esso è

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \, dx_k \right) dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

Il supporto compatto annulla f_k per x_k grande, ma non necessariamente per $x_k = 0$. Pertanto

$$\int_X d\omega = -\int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

D'altra parte, $\int_{\partial X} \omega = \int_{\partial H^k} \nu$. Sul bordo $x_k = 0$ anche la restrizione di dx_k è nulla. Resta quindi soltanto

$$\nu|_{\partial H^k} = (-1)^{k-1} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}.$$

L'identificazione naturale $\mathbb{R}^{k-1} \to \partial H^k$, $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)$, non preserva sempre l'orientazione di bordo. La normale esterna è $-e_k$, quindi il segno della base $e_1, \ldots, e_{k-1}$ sul bordo è il segno di $-e_k, e_1, \ldots, e_{k-1}$ in $\mathbb{R}^k$, cioè $(-1)^k$.

Pagina 185 dell'originale

Si ottiene allora

$$\int_{\partial X} \omega = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} (-1)^{k-1} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{k-1},$$

esattamente la formula precedente, perché $(-1)^k(-1)^{k-1} = -1$. □

Le versioni classiche di Stokes compaiono negli esercizi, insieme ad applicazioni tipiche. Per noi il suo valore essenziale è il collegamento fondamentale fra analisi e topologia, che esploreremo nelle ultime sezioni del libro.

Esercizi

1. Mostrate che Stokes sull'intervallo $[a, b]$ è il teorema fondamentale del calcolo. Si veda l'esercizio 1 del §4.

2. Dimostrate la formula di Green: per un dominio compatto $W \subset \mathbb{R}^2$ con bordo liscio $\gamma = \partial W$,

$$\int_\gamma f\, dx + g\, dy = \int_W \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

3. Dimostrate il teorema della divergenza: se $W \subset \mathbb{R}^3$ è compatto con bordo liscio e $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ è liscio,

$$\int_W \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial W} (\vec{n} \cdot \vec{F})\, dA.$$

$\vec{n}$ è la normale esterna; per dA si vedano gli esercizi 13 e 14 del §4.

4. Dimostrate Stokes classico: se $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie compatta orientata con bordo e $\vec{F}$ è liscio in un suo intorno,

$$\int_S (\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n})\, dA = \int_{\partial S} f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3.$$

Qui $\vec{n}$ è la normale unitaria corrispondente all'orientazione di S.

Pagina 186 dell'originale

5. Il teorema della divergenza ha un'interpretazione nella dinamica dei fluidi. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ compatto con bordo liscio S, riempito di fluido incomprimibile di densità $\rho(x)$ e velocità $\vec{v}(x)$. La quantità $\int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA$ misura la portata massica uscente in un dato istante. Se $x \in \operatorname{Int} D$ e B_ϵ è la palla centrata in x di raggio ϵ, mostrate

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\epsilon)} \int_{\partial B_\epsilon} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \operatorname{div}(\rho \vec{v})(x).$$

Deducete che la quantità complessiva uscente coincide con l'integrale del tasso locale di apporto necessario a sostenerla.

6. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ compatto con bordo liscio S e $0 \in \operatorname{Int} D$. Una carica q nell'origine produce il campo $\vec{F} = q\vec{r}/r^3$, dove $\vec{r}(x) = x$ e $r = |x|$. Provate la legge di Gauss

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = 4\pi q.$$

[*Suggerimento:* applicate il teorema della divergenza a D privato di una piccola palla attorno all'origine.]

***7.** Se X è compatta, orientata e senza bordo, e ω è una forma esatta di grado $k = \dim X$, provate $\int_X \omega = 0$. [Stokes: anche il bordo vuoto è un bordo.]

***8.** Sia $X = \partial W$, con W compatta orientata, e sia $f : X \to Y$ liscia. Se ω è chiusa di grado $\dim X$ e f si estende a W, provate $\int_X f^*\omega = 0$.

***9.** Se $f_0, f_1 : X \to Y$ sono omotope e X è compatta orientata senza bordo di dimensione k, allora per ogni k-forma chiusa ω su Y,

Pagina 187 dell'originale

$\int_X f_0^*\omega = \int_X f_1^*\omega$. [Esercizio precedente.]

10. Se X è semplicemente connessa, provate $\oint_\gamma \omega = 0$ per ogni 1-forma chiusa e ogni curva chiusa. [Esercizio precedente.]

11. Deducete che ogni 1-forma chiusa su una varietà semplicemente connessa è esatta. Si veda l'esercizio 12 del §4, secondo la correzione degli errata.

12. Concludete che $H^1(S^k) = 0$ per $k > 1$.

13. Siano Z_0, Z_1 sottovarietà compatte orientate di dimensione p, senza bordo, di X, e supponetele cobordanti in senso orientato: esiste una varietà compatta orientata $W \subset X \times [0,1]$ con

$$\partial W = (-Z_0) \times \{0\} \ \cup \ Z_1 \times \{1\}.$$

Provate $\int_{Z_0} \omega = \int_{Z_1} \omega$ per ogni p-forma chiusa su X. L'orientazione del cobordismo è quella richiesta dagli errata.

14. (a) Se ω_1, ω_2 sono p-forme coomologhe e Z una sottovarietà compatta orientata senza bordo di dimensione p, provate $\int_Z \omega_1 = \int_Z \omega_2$. (b) L'integrazione su Z definisce dunque un funzionale lineare $\int_Z : H^p(X) \to \mathbb{R}$. (c) Se Z è il bordo di una sottovarietà compatta orientata di dimensione $p+1$ in X, provate che questo funzionale è nullo. (d) Se Z_1, Z_2 sono cobordanti in senso orientato, i loro funzionali sono uguali.

§8. Integrazione e applicazioni

Pagina 188 dell'originale

La nostra principale applicazione di Stokes è il teorema seguente, che collega l'operazione analitica dell'integrazione al comportamento topologico delle applicazioni.

Formula del grado. Sia $f : X \to Y$ liscia, con X, Y varietà compatte orientate senza bordo di dimensione k e Y connessa. Per ogni k-forma ω su Y,

$$\boxed{\int_X f^*\omega = \deg(f) \int_Y \omega.}$$

La connessione di Y è l'ipotesi aggiunta dagli errata. L'applicazione f moltiplica dunque l'integrale di ogni forma per un intero, l'invariante puramente topologico $\deg(f)$.

Fra le numerose applicazioni vi è il principio dell'argomento introdotto all'inizio del capitolo. Sia $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ e sia Ω una regione compatta del piano con bordo liscio privo di zeri di p. Vogliamo mostrare che il numero degli zeri interni, contati con molteplicità, è

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d\arg p(z).$$

Interpretiamo l'integrale. Ogni complesso non nullo si scrive $w = re^{i\theta}$, con $r = |w|$ e θ suo argomento. Ma $\theta = \arg w$ non è una funzione ben definita: anche $\theta + 2\pi n$, per $n \in \mathbb{Z}$, è un argomento. Fortunatamente la derivazione elimina l'ambiguità. In un intorno sufficientemente piccolo e connesso possiamo scegliere un argomento liscio $\arg_0 w$; ogni altra scelta liscia differisce per una costante $2\pi n$, quindi ha lo stesso differenziale. Questa 1-forma liscia su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è ciò che chiamiamo $d\arg$. La notazione può trarre in inganno: non è globalmente il differenziale di una funzione, ma lo è localmente.

Nel principio dell'argomento l'integrando è il pullback $p^*(d\arg)$,

Pagina 189 dell'originale

definito e liscio fuori dagli zeri di p. Sappiamo già che questi zeri in Ω sono contati dal grado di

$$f : \partial\Omega \to S^1, \qquad f(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|} = e^{i \arg p(z)}.$$

Occorre quindi identificare l'integrale con $2\pi \deg(f)$. Applichiamo la formula del grado a $d\arg$ ristretto a S^1. Localmente $\arg(f(z)) = \arg p(z)$, perciò

$$d\arg p = d(f^* \arg) = f^*(d\arg), \qquad \int_{\partial\Omega} d\arg p = \deg(f) \int_{S^1} d\arg\,.$$

Quest'ultimo integrale è immediato. Togliere un punto non cambia l'integrale; parametrizzando $S^1 \setminus \{1\}$ mediante $\theta \mapsto e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, il pullback di un ramo dell'argomento è θ. Quindi $\int_{S^1} d\arg = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

Al cuore della formula del grado si trova un teorema che ricorda una proprietà fondamentale del grado stesso.

Teorema. Se $X = \partial W$ e $f : X \to Y$ si estende a W, allora $\int_X f^*\omega = 0$ per ogni k-forma su Y, dove X, W sono compatte, tutte le varietà orientate e $k = \dim X = \dim Y$.

Dimostrazione. Se $F : W \to Y$ estende f, Stokes dà

$$\int_X f^*\omega = \int_{\partial W} F^*\omega = \int_W F^*(d\omega) = 0,$$

poiché una $(k+1)$-forma su una varietà k-dimensionale è nulla. □

Pagina 190 dell'originale

Corollario. Se $f_0, f_1 : X \to Y$ sono omotope, con X, Y compatte orientate senza bordo e della stessa dimensione k, allora $\int_X f_0^*\omega = \int_X f_1^*\omega$ per ogni k-forma ω.

Dimostrazione. Per un'omotopia $F : I \times X \to Y$, l'orientazione prodotto dà $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$. Il teorema precedente implica

$$0 = \int_{\partial(I\times X)} (\partial F)^*\omega = \int_{X_1} (\partial F)^*\omega - \int_{X_0} (\partial F)^*\omega.$$

Identificando X_0, X_1 con X, le restrizioni sono f_0, f_1. □

Una versione locale della formula del grado, vicino ai valori regolari, si dimostra facilmente e rivela concretamente l'origine del fattore $\deg(f)$.

Lemma. Sia y un valore regolare di $f : X \to Y$, con X, Y compatte orientate senza bordo, di dimensione k, e Y connessa. Esiste un intorno connesso U di y tale che

$$\int_X f^*\omega = \deg(f) \int_Y \omega$$

per ogni k-forma con supporto in U.

Dimostrazione. Per il teorema della pila di dischi (capitolo I, §4, esercizio 7), restringendo U si ha $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_N$, e ciascuna $f : V_i \to U$ è un diffeomorfismo. Poiché $f^*\omega$ è supportata in questa controimmagine,

$$\int_X f^*\omega = \sum_i \int_{V_i} f^*\omega = \sum_i \sigma_i \int_U \omega,$$

dove $\sigma_i = \pm 1$ secondo che il diffeomorfismo preservi o inverta l'orientazione. Per definizione $\sum_i \sigma_i = \deg(f)$. □

Le ipotesi di compattezza, la connessione di U e il dominio X dell'integrale sono corretti secondo gli errata.

Pagina 191 dell'originale

Dimostriamo infine la formula generale. Scegliamo un valore regolare y e U come nel lemma. Per il lemma di isotopia del capitolo III, §6, ogni $z \in Y$ è l'immagine di y mediante un diffeomorfismo $h : Y \to Y$ isotopo all'identità. Gli aperti $h(U)$ ricoprono Y; per compattezza basta una sottofamiglia finita $h_1(U), \ldots, h_n(U)$. Con una partizione dell'unità decomponiamo ω in forme supportate in questi aperti. Essendo entrambi i membri lineari, basta il caso $\operatorname{supp}\omega \subset h(U)$.

Poiché $h \simeq \mathrm{id}$, anche $h \circ f \simeq f$. Il corollario dà

$$\int_X f^*\omega = \int_X (h \circ f)^*\omega = \int_X f^* h^*\omega.$$

La forma $h^*\omega$ è supportata in U, quindi il lemma trasforma l'ultimo integrale in $\deg(f) \int_Y h^*\omega$. Infine h preserva l'orientazione, essendo isotopo all'identità, perciò $\int_Y h^*\omega = \int_Y \omega$. La formula è dimostrata.

Esercizi

1. Verificate che su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$d\arg = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

Pagina 192 dell'originale

la forma già studiata, spesso indicata anche con $d\theta$. [*Suggerimento:* localmente $\theta = \arctan(y/x)$.] Sapete già che è chiusa ma non esatta.

2. Per una curva chiusa liscia γ nel piano puntato e una 1-forma chiusa ω su di esso, provate

$$\oint_\gamma \omega = W(\gamma, 0) \int_{S^1} \omega,$$

dove $W(\gamma, 0) = \deg(\gamma/|\gamma|)$ è il numero di avvolgimento intero, definito come la versione modulo 2 ma usando il grado intero. Deducete $W(\gamma, 0) = (2\pi)^{-1} \oint_\gamma d\arg$.

3. Si definiscono forme complesse scrivendo $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, con ω_1, ω_2 reali. Il prodotto esterno si estende naturalmente, mentre $d\omega = d\omega_1 + i\, d\omega_2$ e $\int \omega = \int \omega_1 + i \int \omega_2$. Stokes vale separatamente sulle parti reale e immaginaria. Usiamo questo apparato per provare la formula integrale di Cauchy.

(a) Per la coordinata complessa $z = x + iy$, verificate $dz = dx + i\, dy$.

(b) Per una funzione liscia complessa f su $U \subset \mathbb{C}$, provate che $f(z)\, dz$ è chiusa se e solo se $\partial f/\partial y = i\, \partial f/\partial x$. Scrivendo $f = f_1 + i f_2$, esprimete questa equazione di Cauchy–Riemann come due equazioni reali. Una tale f si dice *olomorfa*.

(c) Il prodotto di due funzioni olomorfe è olomorfo. (d) z è olomorfa; quindi lo è ogni polinomio complesso.

Pagina 193 dell'originale

(e) Se f è olomorfa e γ_1, γ_2 sono curve chiuse omotope in U, provate $\oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\, dz$. [Esercizio 9, §7.]

(f) Se U è semplicemente connesso, deducete $\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa.

(g) $1/z$ è olomorfa fuori da 0; analogamente $1/(z-a)$ fuori da a.

(h) Per la circonferenza antioraria C_r di centro a, calcolate direttamente $\int_{C_r} dz/(z-a) = 2\pi i$.

(i) Se f è olomorfa in un intorno del disco chiuso delimitato da $C_r \subset U$, provate

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a).$$

[*Suggerimento:* per (e) l'integrale non dipende dal raggio entro tale disco; su C_r, $|f(z) - f(a)| \le \epsilon_r$ con $\epsilon_r \to 0$. Fate tendere r a zero.]

(j) *Formula integrale di Cauchy.* Se U è semplicemente connesso, $a \in U$, f è olomorfa in U e γ è una curva chiusa in $U \setminus \{a\}$, provate[48]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = W(\gamma, a) f(a).$$

[*Suggerimento:* usate (i) e l'argomento dell'esercizio 2, oppure sottraete $f(a)/(z-a)$ e applicate (f).]

4. Costruite su S^k una k-forma con integrale non nullo. [Proiettate stereograficamente una forma euclidea a supporto compatto con integrale non nullo.]

5. (a) Per $k > 0$, una k-forma ω su S^k è esatta se e solo se $\int_{S^k} \omega = 0$. [Usate $\dim H^k(S^k) = 1$ e l'esercizio precedente.] (b) Deducete che $\int_{S^k} : H^k(S^k) \to \mathbb{R}$ è un isomorfismo.

[48] *Correzione del traduttore.* La formulazione stampata omette una condizione sul dominio o sul ciclo. In (i) serve poter contrarre la circonferenza verso a restando nel dominio; in (j) è sufficiente, come qui precisato, che U sia semplicemente connesso. Senza una condizione del genere l'enunciato è falso: si veda la soluzione.

6. Per $k \geq 1$, una k-forma a supporto compatto su $\mathbb{R}^k$ è il differenziale di una $(k-1)$-forma a supporto compatto se e solo se ha integrale nullo. [*Suggerimento:* trasferitela su S^k. Per l'esercizio 5 è $d\nu$. Vicino al polo nord $d\nu = 0$; per $k > 1$ trovate μ con $\nu = d\mu$ in un intorno del polo ed estendete μ mediante una funzione di taglio. Allora $\nu - d\mu$ è nulla vicino al polo e torna a supporto compatto in $\mathbb{R}^k$. Trattate $k = 1$ direttamente.]

7. Se X è compatta, connessa, orientata e senza bordo, $\dim X = k$, provate che $\int_X : H^k(X) \to \mathbb{R}$ è un isomorfismo. [*Suggerimento:* scegliete $U \cong \mathbb{R}^k$ e ω supportata in U con integrale 1. Per l'esercizio 6, ogni forma supportata in U è coomologa a un multiplo di ω. Ricoprite X con aperti trasportabili in U mediante isotopie; usate l'esercizio 7 del §6 e una partizione dell'unità per mostrare $\theta \sim c\omega$. Identificate c, come precisato negli errata.][49]

8. Per $f : X \to Y$ liscia fra varietà compatte connesse orientate senza bordo, di dimensione k, l'integrazione identifica i gruppi superiori con $\mathbb{R}$. Provate che $f^\# : H^k(Y) \to H^k(X)$ diventa la moltiplicazione per $\deg(f)$, ossia che è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H^k(Y) & \xrightarrow{f^\#} & H^k(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \int_Y} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \int_X} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow[\times \deg(f)]{} & \mathbb{R}. \end{array}$$

[49] *Precisazione del traduttore.* La connessione è necessaria anche qui: in generale una varietà compatta orientata senza bordo ha un gruppo di coomologia superiore di dimensione pari al numero delle componenti.

§9. Il teorema di Gauss–Bonnet

Pagina 194 dell'originale

Cominciamo parlando di volume. Sia $X \subset \mathbb{R}^N$ una varietà compatta orientata di dimensione k. In ogni punto x, sia $\nu_X(x)$ l'elemento di volume di $T_x(X)$: il k-tensore alternante che vale $1/k!$ su ogni base ortonormale ordinata positiva (esercizio 10, §2). Non è difficile mostrare che la k-forma ν_X è liscia; la chiamiamo *forma di volume* di X. Su

Pagina 195 dell'originale

$\mathbb{R}^k$ è $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Il poco elegante $1/k!$ è imposto dalla normalizzazione del prodotto esterno adottata nel testo. L'integrale $\int_X \nu_X$ è, per definizione, il *volume* di X.

La forma di volume consente di integrare funzioni: definiamo $\int_X g = \int_X g\nu_X$. Su $\mathbb{R}^k$ è l'integrale usuale. La forma di volume è però geometrica, non topologica: dipende dal modo preciso in cui X è immersa nello spazio euclideo. L'integrazione di funzioni non è quindi un'operazione topologica naturale, e non si trasforma correttamente sotto diffeomorfismi: in generale $\int_Y h^* g \neq \int_X g$.

La ragione, spiegata nel §4, è la distorsione dei volumi. Possiamo misurarla quantitativamente mediante le forme di volume. Se $f : X \to Y$ è liscia fra varietà orientate k-dimensionali con bordo, in ciascun punto $\nu_X(x)$ è una base di $\Lambda^k[T_x(X)^*]$, quindi

$$f^*\nu_Y = J_f \nu_X.$$

Lo scalare $J_f(x)$ si chiama *Jacobiano* di f in x. Il tensore $\nu_X(x)$ assegna a $v_1, \ldots, v_k$ il volume con segno del parallelepipedo che generano in $T_x(X)$, diviso per $k!$; $f^*\nu_Y$ assegna quello generato dai $df_x(v_i)$ in $T_{f(x)}(Y)$, diviso per lo stesso fattore. Dunque $|J_f(x)|$ misura l'espansione o contrazione dei volumi prodotta da df_x, mentre il segno indica se preserva o inverte l'orientazione. Esso misura la variazione infinitesima di volume e orientazione dovuta a f.

Applichiamo queste idee alle *ipersuperfici*, sottovarietà k-dimensionali di $\mathbb{R}^{k+1}$. Un'ipersuperficie è orientabile se e solo se si può scegliere in modo liscio una delle due normali unitarie in ogni punto (capitolo III, §2, esercizio 18). Se X è compatta senza bordo, il teorema di separazione di Jordan–Brouwer la orienta come bordo del suo «interno», e possiamo scegliere la normale esterna $\vec{n}(x)$.

L'applicazione $g : X \to S^k$, $g(x) = \vec{n}(x)$, è l'*applicazione di Gauss*; il suo Jacobiano $J_g(x) = \kappa(x)$ è la *curvatura* di X in x. Per una sfera di raggio r, $\kappa = 1/r^k$ (esercizio 6). Aumentando il raggio, la curvatura diminuisce: le sfere grandi sono più piatte. Per un iperpiano $\kappa = 0$, perché g è costante.

Pagina 196 dell'originale

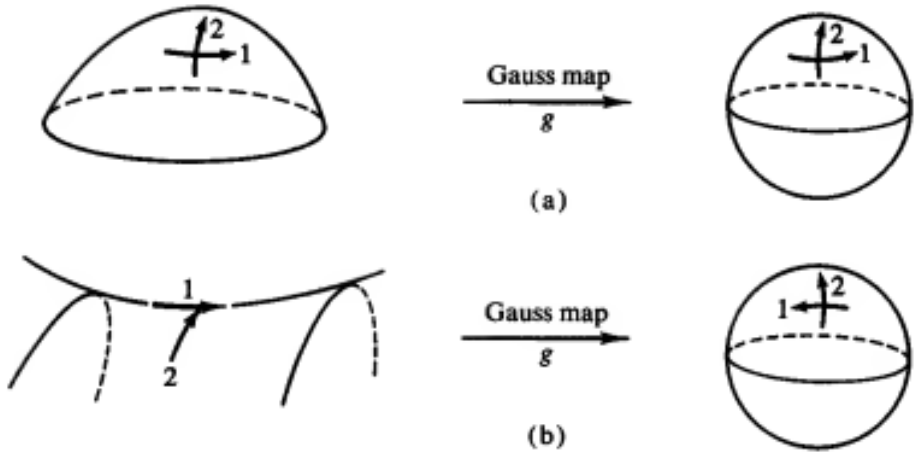


Figura 4-3. L'applicazione di Gauss presso un punto convesso (a) e un punto a sella (b).

Il modulo della curvatura misura dunque quanto rapidamente ruota la normale. Per le superfici, il segno distingue l'aspetto localmente convesso da quello a sella: nella figura (a) l'applicazione di Gauss preserva l'orientazione, nella (b) la inverte.

La curvatura è una caratteristica strettamente geometrica, non conservata dalle trasformazioni topologiche. Eppure uno dei più bei teoremi della matematica afferma che il suo integrale globale su un'ipersuperficie compatta di dimensione pari è un invariante topologico. Per quanto la deformiamo, torciamo o stiriamo, tutte le variazioni locali di curvatura si compensano esattamente. Non sorprenderà che l'invariante si esprima mediante la caratteristica di Eulero.

Teorema di Gauss–Bonnet. Se $X \subset \mathbb{R}^{k+1}$ è un'ipersuperficie compatta senza bordo di dimensione pari positiva k, allora

$$\int_X \kappa = \frac{1}{2}\gamma_k \chi(X),$$

dove $\gamma_k = \mathrm{vol}(S^k)$. In dimensione dispari la formula è falsa in generale, perché la caratteristica di Eulero è automaticamente zero.

La prima parte della dimostrazione applica la formula del grado:

$$\int_X \kappa = \int_X J_g \nu_X = \int_X g^* \nu_{S^k} = \deg(g) \int_{S^k} \nu_{S^k} = \deg(g)\gamma_k.$$

Pagina 197 dell'originale

Resta quindi da mostrare $\deg(g) = \frac{1}{2}\chi(X)$, usando Poincaré–Hopf. Scegliamo $a \in S^k$ in modo che a e $-a$ siano entrambi valori regolari di g. Perché è possibile? Sia $\vec{v}$ il campo tangente ottenuto proiettando $-a$ su $T_x(X)$:

$$\vec{v}(x) = -a - [-a \cdot \vec{n}(x)]\vec{n}(x) = [a \cdot g(x)]g(x) - a.$$

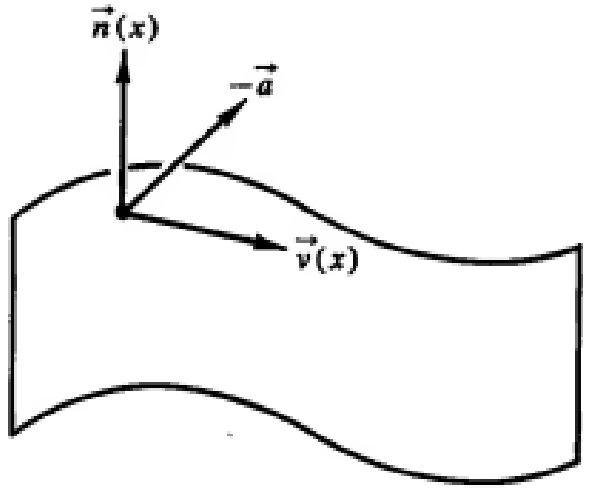


Figura 4-4. Proiezione di un vettore costante sullo spazio tangente.

Un punto z è uno zero di $\vec{v}$ esattamente quando $g(z) = \pm a$. La regolarità di questi valori e la compattezza di X rendono finito il numero degli zeri. Se $T(y) = y - a$ è la traslazione in $\mathbb{R}^{k+1}$, possiamo scrivere $\vec{v} = T \circ ([a \cdot g]g)$.

Lemma. Se $g(z) = a$, allora $d\vec{v}_z = dT_a \circ dg_z$; se $g(z) = -a$, allora $d\vec{v}_z = -dT_a \circ dg_z$.

Dimostrazione. Per $f(x) = [a \cdot g(x)]g(x)$ e $w \in T_z(X)$, la regola del prodotto dà

$$df_z(w) = [a \cdot g(z)]dg_z(w) + [a \cdot dg_z(w)]g(z). \tag{3}$$

Per verificarla, rappresentate w come tangente a una curva e differenziate ogni coordinata di f lungo di essa. Il primo termine è $\pm dg_z(w)$, perché $a \cdot a = 1$. Differenziando $g(x) \cdot g(x) = 1$ si ottiene $g(z) \cdot dg_z(w) = 0$:

Pagina 198 dell'originale

è il fatto che $dg_z(w)$ è tangente alla sfera, dunque perpendicolare a $g(z)$. Se $g(z) = \pm a$, il secondo termine è nullo. □

Corollario. L'indice di $\vec{v}$ nello zero z è $+1$ se g preserva l'orientazione in z e -1 se la inverte.

Dimostrazione. Dagli esercizi 3 e 5 del capitolo III, §5, $d\vec{v}_z$ manda $T_z(X)$ in sé; se è invertibile, l'indice è il segno del suo determinante. Poiché dT_a è l'identità, $d\vec{v}_z = \pm dg_z$ come applicazioni nello spazio ambiente.

Se $g(z) = a$, gli spazi $T_z(X)$ e $T_a(S^k)$ coincidono, anche nelle orientazioni, perché la normale positiva di entrambi è a. La regolarità rende $dg_z = d\vec{v}_z$ invertibile e il risultato segue. Se $g(z) = -a$, analogamente $T_z(X)$ coincide, come spazio orientato, con $T_{-a}(S^k)$, e

$$\det(d\vec{v}_z) = \det(-dg_z) = (-1)^k \det(dg_z) = \det(dg_z),$$

poiché k è pari. □

Ora Poincaré–Hopf dice che la somma degli indici è $\chi(X)$. Gli zeri con $g(z) = a$ contribuiscono $I(g, \{a\}) = \deg(g)$, quelli con $g(z) = -a$ contribuiscono ancora $\deg(g)$. Dunque $\chi(X) = 2\deg(g)$ e Gauss–Bonnet è dimostrato. Perché questo argomento non dà la stessa conclusione in dimensione dispari? Registriamo il risultato anche separatamente.

Teorema. Per un'ipersuperficie compatta senza bordo di dimensione pari positiva, la caratteristica di Eulero è il doppio del grado dell'applicazione di Gauss.

Pagina 199 dell'originale

Un'ultima osservazione: la curvatura si può definire anche mediante le sole proprietà metriche della varietà, senza usare quelle dell'embedding. In dimensione due è il *theorema egregium* di Gauss. Chern ha dato una dimostrazione intrinseca di Gauss–Bonnet, che evita del tutto l'embedding (si veda [16]); una versione accessibile in dimensione due si trova in [17]. Nell'esercizio 11 ricaveremo una versione intrinseca «lineare a tratti».

Esercizi

1. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è liscia e S è il suo grafico orientato mediante $\mathbb{R}^2$, provate che la sua forma di volume è la forma dA del §4.[50]

2. Per una superficie orientata con normale positiva $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, provate

$$\nu_S = n_1\, dx_2 \wedge dx_3 + n_2\, dx_3 \wedge dx_1 + n_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

In particolare su S^2 è $x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2$. [*Suggerimento:* il tensore è $(v, w) \mapsto \frac{1}{2}\det(v, w, \vec{n})$, con i vettori disposti come righe.][51]

3. Sia $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una rotazione, cioè una trasformazione ortogonale con $\det A = 1$. Mostrate che la sua restrizione a S^{n-1} preserva la forma di volume.[52]

[50] In dimensione due «forma d'area» sarebbe un termine migliore di «forma di volume».

[51] *Correzione del traduttore.* Nell'ultima componente della prima formula è ripristinato $dx_1 \wedge dx_2$, al posto del prodotto errato stampato.

[52] *Precisazione del traduttore.* L'ortogonalità da sola, indicata nell'originale, non basta: in generale $A^*\nu_{S^{n-1}} = (\det A)\nu_{S^{n-1}}$.

4. Per una curva regolare parametrizzata $C : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, orientata nel verso del parametro, mostrate che l'integrale della forma di volume è la lunghezza d'arco $\int_a^b |C'(t)|\, dt$ (contata con molteplicità se la parametrizzazione ripassa su un arco).

5. Se $f : [a, b] \to (0, \infty)$ è liscia, ruotate il suo grafico

Pagina 200 dell'originale

attorno all'asse x in $\mathbb{R}^3$. Integrando la forma di volume, ricavate la formula classica dell'area

$$\text{Area}(S) = \int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

[*Suggerimento:* esercizio 2.]

6. Provate che la sfera di raggio r in $\mathbb{R}^n$ ha curvatura $1/r^{n-1}$. [La derivata dell'applicazione di Gauss è $1/r$ volte l'identità.]

7. Calcolate la curvatura dell'iperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nel punto $(1, 0, 0)$. [Il risultato è -1.]

8. Sia S il grafico di $f(x, y)$, con $f(0) = f_x(0) = f_y(0) = 0$. Se κ_1, κ_2 sono gli autovalori della matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_0,$$

dimostrate che la curvatura in $(0, 0, 0)$ è $\kappa_1\kappa_2$. Il fattore $1/2$ davanti alla matrice è eliminato secondo gli errata. [*Suggerimento:* basta considerare $f(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2)$. Perché?][53]

9. Una superficie è *rigata* se per ogni suo punto passa una retta interamente contenuta nella superficie. Mostrate che la sua curvatura gaussiana è ovunque non positiva.

10. Sia $T_{a,b}$ il toro dei punti a distanza a dalla circonferenza di raggio b nel piano xy, con $0 < a < b$. Dove è positiva, negativa o nulla la curvatura?

11. Sia $S = T_1 \cup \cdots \cup T_m$ una superficie poliedrale triangolata in $\mathbb{R}^3$. Si intendono triangoli non degeneri che si incontrano soltanto lungo facce comuni. Le condizioni seguenti escludono bordo e singolarità ai vertici:

Pagina 201 dell'originale

[53] *Adeguamento del traduttore.* Dopo la correzione degli errata alla matrice hessiana, anche il modello quadratico del suggerimento deve avere il fattore 1/2.

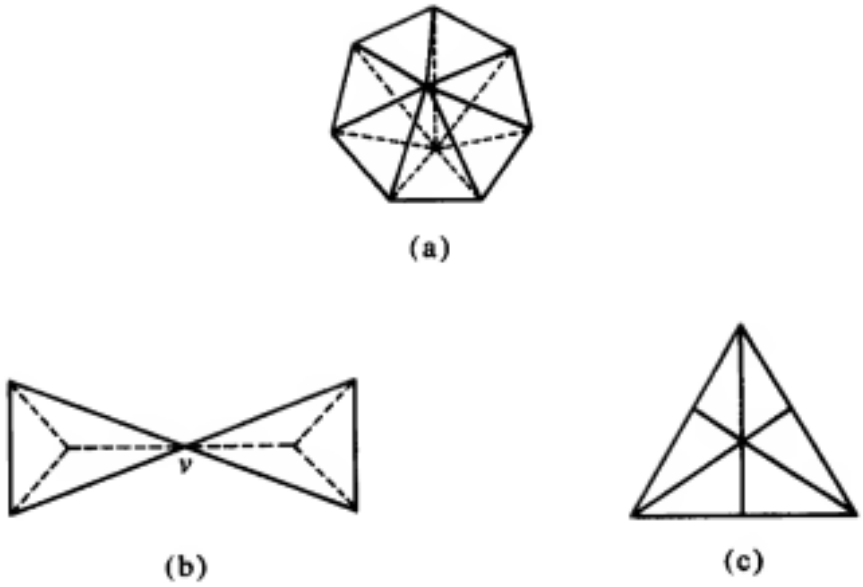


Figura 4-5. Superficie poliedrale, singolarità esclusa e suddivisione di un triangolo.

(a) Ogni lato è lato di esattamente due triangoli. (b) Due triangoli distinti non hanno più di un lato in comune. (c) Per ogni vertice v, l'unione dei lati opposti a v nei triangoli incidenti è connessa. La figura (b) è così esclusa.[54] Definite $\kappa(v)$ come 2π meno la somma degli angoli incidenti in v. Provate: (i) suddividendo ciascun triangolo, la somma totale $\sum_v \kappa(v)$ resta invariata; (ii) $\sum_v \kappa(v) = 2\pi\chi(S)$, dove $\chi(S)$ è il numero dei vertici meno quello dei lati più quello dei triangoli. [Ogni triangolo ha tre lati, ogni lato appartiene a due triangoli.]

12. Sia X una varietà orientata di dimensione $n-1$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ un'immersione. Mostrate che l'applicazione di Gauss $g : X \to S^{n-1}$ è definita anche se l'immagine non è una sottovarietà. Se inoltre X è compatta senza bordo e di dimensione pari positiva ($n-1 \geq 2$), provate $\deg(g) = \frac{1}{2}\chi(X)$. In dimensione dispari il risultato non vale: mostrate che l'immersione $S^1 \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos nt, \sin nt)$, per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ha applicazione di Gauss di grado n.

[54] Gli autori attribuiscono a Dennis Sullivan questa forma intrinseca di Gauss–Bonnet per superfici poliedrali. È esplicitata la consueta ipotesi di triangolazione, necessaria per interpretare correttamente vertici, lati e superficie.

Appendice 1. Misura nulla e teorema di Sard

Pagina 202 dell'originale

Se $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ sono due n-uple con $a_i < b_i$ per ogni i, indichiamo con $S(a, b)$ il parallelepipedo rettangolo formato dai punti $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano $a_i < x_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$. Il prodotto

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

è il *volume* di $S = S(a, b)$, indicato con $\mathrm{vol}(S)$. (Se $b_1 - a_1 = \cdots = b_n - a_n$, S è un cubo.)

Come nel capitolo I, §7, un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ha *misura nulla* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile di A con parallelepipedi $S_1, S_2, \dots$ tali che $\sum_i \mathrm{vol}(S_i) < \epsilon$. (*Problema:* mostrate che si possono scegliere gli S_i in modo che siano cubi.)

È evidente che un sottoinsieme di un insieme di misura nulla ha a sua volta misura nulla. Nel capitolo I, §7, abbiamo inoltre mostrato che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha ancora misura nulla. Questo fatto permette di esibire molti insiemi di misura nulla.

Esercizio. Mostrate che la copia naturale di $\mathbb{R}^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$, cioè $\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$, ha misura nulla. [*Suggerimento:* mostrate che ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^{n-1}$ è contenuto in un unico parallelepipedo rettangolo di $\mathbb{R}^n$ di volume minore di ϵ.]

Pagina 203 dell'originale

Ciò che è sorprendentemente difficile dimostrare è l'esistenza di insiemi che *non* hanno misura nulla! La deduciamo con un'ingegnosa dimostrazione dovuta a von Neumann.

Proposizione. Sia S un parallelepipedo rettangolo e sia $S_1, S_2, \dots$ un ricoprimento della sua chiusura $\overline{S}$ mediante altri parallelepipedi. Allora $\sum_j \mathrm{vol}(S_j) \geq \mathrm{vol}(S)$.

Dimostrazione. Chiamiamo *punto intero* di $\mathbb{R}^n$ un punto $(z_1, \dots, z_n)$ le cui coordinate siano tutte intere. Sia $S = S(a, b)$. Il numero degli interi nell'intervallo $a_i < z_i < b_i$ è minore di $b_i - a_i + 1$ e non minore di $b_i - a_i - 1$. Supponiamo per il momento che la lunghezza $b_i - a_i$ di ciascun lato di S sia maggiore di 1. Il numero di punti interi in S è allora minore di

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 1)$$

e non minore di $\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1)$.

Se $S_1, S_2, \dots$ ricoprono $\overline{S}$, per compattezza bastano finitamenti molti di essi, diciamo $S_1, \dots, S_N$. Il numero di punti interi in S non supera la somma dei numeri di punti interi in questi parallelepipedi. Scrivendo $S_j = S(a^j, b^j)$, otteniamo

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} (b_i^j - a_i^j + 1).$$

Per ogni $\lambda > 0$, definiamo $\lambda S(a, b) = S(\lambda a, \lambda b)$. Poiché $\lambda \overline{S}$ è ricoperto da $\lambda S_1, \dots, \lambda S_N$, lo stesso calcolo dà

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} (\lambda b_i^j - \lambda a_i^j + 1).$$

Qualunque siano le dimensioni di S, per λ abbastanza grande tutti i lati di λS sono maggiori di 1. L'ultima disuguaglianza vale dunque per λ grande senza alcuna restrizione su S. Dividendo per λ^n e facendo tendere λ a infinito si conclude la dimostrazione. □

Per dimostrare il teorema di Sard ci servirà la versione del teorema di Fubini relativa alla misura nulla. Supponiamo $n = k + l$ e scriviamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Per ogni $c \in \mathbb{R}^k$, sia V_c la «sezione verticale» $\{c\} \times \mathbb{R}^l$. Diremo che un sottoinsieme di V_c ha misura nulla in V_c se, identificando nel modo ovvio V_c con $\mathbb{R}^l$, esso ha misura nulla in $\mathbb{R}^l$.

Pagina 204 dell'originale

Teorema di Fubini (per la misura nulla). Sia A un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ tale che $A \cap V_c$ abbia misura nulla in V_c per ogni $c \in \mathbb{R}^k$. Allora A ha misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Poiché A è unione numerabile di compatti, possiamo supporre A compatto. Inoltre, per induzione su k, basta dimostrare il teorema per $k = 1$ e $l = n - 1$. Suddividiamo la dimostrazione in alcuni lemmi.

Lemma 1. Sia $S_1, \ldots, S_N$ un ricoprimento dell'intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$. Esiste un altro ricoprimento $S'_1, \ldots, S'_M$ tale che ciascun S'_j sia contenuto in qualche S_i e

$$\sum_{j=1}^{M} \text{lunghezza}(S'_j) < 2(b - a).$$

Dimostrazione. Lasciata al lettore.

Per un insieme $I \subset \mathbb{R}$, poniamo $V_I = I \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Lemma 2. Sia A un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $A \cap V_c$ sia contenuto in un aperto U di V_c, identificato con un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$. Allora, per ogni intervallo I sufficientemente piccolo attorno a c, $A \cap V_I$ è contenuto in $I \times U$.

Dimostrazione. Altrimenti esisterebbe una successione $(c_j, x_j) \in A$ con $c_j \to c$ e $x_j \notin U$. Passando a una sottosuccessione convergente si ottiene un punto $(c, x) \in A$ con $x \notin U$, in contraddizione con l'ipotesi. □

Dimostrazione del teorema di Fubini. Poiché A è compatto, possiamo scegliere un intervallo $I = [a, b]$, $a < b$, tale che $A \subset V_I$. Per ogni $c \in I$ scegliamo un ricoprimento di $A \cap V_c$ con parallelepipedi $(n-1)$-dimensionali $S_1(c), \ldots, S_{N_c}(c)$ la cui somma dei volumi sia minore di ϵ. Scegliamo un intervallo $J(c) \subset \mathbb{R}$ tale che i parallelepipedi $J(c) \times S_i(c)$ ricoprano $A \cap V_{J(c)}$ (Lemma 2). Gli intervalli $J(c)$ ricoprono $[a, b]$; per compattezza e per il Lemma 1 possiamo sostituirli con una famiglia finita di sottointervalli J'_j la cui somma delle lunghezze sia minore di $2(b - a)$. Ogni J'_j è contenuto in un intervallo $J(c_j)$; quindi i parallelepipedi $J'_j \times S_i(c_j)$ ricoprono A e la somma dei loro volumi è minore di $2\epsilon(b - a)$. □

Occorre ancora un fatto di teoria della misura: la nozione di misura nulla ha senso sulle varietà. A questo scopo dimostriamo il seguente risultato.

Teorema. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ liscia. Se $A \subset U$ ha misura nulla, anche $f(A)$ ha misura nulla.

Pagina 205 dell'originale

Dimostrazione. Possiamo supporre che $\overline{A}$ sia compatto e contenuto in U, poiché A è unione numerabile di sottoinsiemi con questa proprietà. Sia W un intorno aperto di $\overline{A}$ con chiusura compatta contenuta in U. La liscezza di f e la compattezza permettono di trovare una costante M tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \qquad (x, y \in W).$$

Ne segue che esiste una costante M' tale che, per ogni cubo S contenuto in W, $f(S)$ sia contenuto in un cubo S' di volume minore di $M' \,\text{vol}(S)$.

Mostrate ora che A si può ricoprire con una successione di cubi $S_1, S_2, \ldots$, tutti contenuti in W, per i quali $\sum_i \mathrm{vol}(S_i) < \epsilon$, con $\epsilon > 0$ arbitrariamente assegnato. Otteniamo allora un ricoprimento di $f(A)$ con cubi $S'_1, S'_2, \ldots$ tali che $\sum_i \mathrm{vol}(S'_i) < M'\epsilon$. Poiché ϵ è arbitrario, $f(A)$ ha misura nulla. □

Esercizio. Combinate questo teorema con il primo esercizio per dimostrare:

Mini-Sard. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^m$ liscia. Se $m > n$, allora $f(U)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$.

(Per inciso, per dimostrare il teorema di embedding di Whitney abbiamo usato soltanto questa forma debole del teorema di Sard.)

Possiamo ora dire che un sottoinsieme A di una varietà k-dimensionale X ha misura nulla se, per ogni parametrizzazione locale $f : U \to X$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ ha misura nulla in $U \subset \mathbb{R}^k$. Per il teorema precedente basta verificare che, attorno a ogni punto di X, esista una parametrizzazione locale $f : U \to X$ per la quale $f^{-1}(A)$ abbia misura nulla.

Siamo ora pronti a dimostrare il risultato principale.

Teorema di Sard. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione liscia fra varietà e sia C l'insieme dei suoi punti critici in X. Allora $f(C)$ ha misura nulla in Y.

La dimostrazione riproduce pressoché alla lettera quella di Milnor [1], pp. 16–19. Per il secondo assioma di numerabilità esiste una famiglia numerabile di coppie di aperti (U_i, V_i), con $U_i \subset X$, $V_i \subset Y$, tale che gli U_i ricoprano X, $f(U_i) \subset V_i$ e gli U_i e V_i siano diffeomorfi ad aperti degli spazi euclidei delle rispettive dimensioni.[55] Basta dunque dimostrare:

Teorema. Sia U aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $f : U \to \mathbb{R}^p$ liscia. Se C è l'insieme dei punti critici di f, allora $f(C)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^p$.

Il risultato è certo per $n = 0$; lo supponiamo vero in dimensione $n - 1$ e lo dimostriamo in dimensione n. Il caso $p = 0$ è immediato, perché non vi sono punti critici; nel seguito $p > 0$. Cominciamo considerando la successione decrescente $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, dove C_1 è l'insieme dei punti $x \in U$ nei quali $df_x = 0$ e, più in generale, C_i è l'insieme dei punti nei quali tutte le derivate parziali di f di ordine da 1 a i si annullano.

Pagina 206 dell'originale

(Gli insiemi C_i sono chiusi in C.) Dimostriamo dapprima:

Lemma 1. L'immagine $f(C \setminus C_1)$ ha misura nulla.

Dimostrazione. Per ogni $x \in C \setminus C_1$ troveremo un intorno aperto V tale che $f(V \cap C)$ abbia misura nulla. Poiché, per il secondo assioma di numerabilità, bastano numerabilmente molti di questi intorni per ricoprire $C \setminus C_1$, ciò dimostrerà la tesi.

Poiché $x \notin C_1$, qualche derivata parziale non si annulla in x; riordinando le coordinate, possiamo supporre che sia $\partial f_1/\partial x_1$. Consideriamo l'applicazione $h : U \to \mathbb{R}^n$ data da

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_n).$$

dh_x è non singolare: quindi h manda diffeomorficamente un intorno V di x su un aperto V'. La composta $g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^p$ ha gli stessi valori critici della restrizione di f a V.

Per costruzione, g manda i punti $(t, x_2, \ldots, x_n)$ in punti $(t, y_2, \ldots, y_p)$: conserva cioè la prima coordinata. Per ogni t, induce quindi un'applicazione

$$g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \longrightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}.$$

[55] *Precisazione del traduttore.* L'originale indica per entrambi $\mathbb{R}^n$, ma dominio e codominio possono avere dimensioni diverse.

La matrice della derivata di g ha forma a blocchi

$$dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & dg^t \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\operatorname{rank}(dg) = 1 + \operatorname{rank}(dg^t)$: un punto della sezione è critico per g se e solo se è critico per g^t.[56] Per induzione, i valori critici di g^t hanno misura nulla. Il teorema di Fubini implica allora che anche l'insieme dei valori critici di g ha misura nulla.[57] □

Lemma 2. *$f(C_k \setminus C_{k+1})$ ha misura nulla per ogni $k \geq 1$.*

Dimostrazione. L'argomento è analogo, ma più semplice. Per ogni $x \in C_k \setminus C_{k+1}$ esiste una derivata di ordine $k+1$ di f che non si annulla. Possiamo dunque trovare una derivata di ordine k, diciamo ρ, che si annulla su C_k ma ha una derivata prima non nulla, che possiamo supporre essere $\partial\rho/\partial x_1$.

Pagina 207 dell'originale

L'applicazione $h : U \to \mathbb{R}^n$ definita da $h(x) = (\rho(x), x_2, \ldots, x_n)$ manda diffeomorficamente un intorno V di x su un aperto V'. Per costruzione, h manda $C_k \cap V$ nell'iperpiano $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. I punti di $h(C_k \cap V)$, ai quali ci riferiamo come punti di tipo C_k, appartengono quindi a tale iperpiano per l'applicazione $g = f \circ h^{-1}$. Sia

$$\bar{g} : (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

la restrizione di g. Per induzione i valori critici di $\bar{g}$ hanno misura nulla. I punti di tipo C_k sono evidentemente critici anche per $\bar{g}$, poiché già $dg = 0$ in tali punti. Dunque $f(C_k \cap V)$ ha misura nulla. Una famiglia numerabile di questi intorni V ricopre $C_k \setminus C_{k+1}$, e la tesi segue. □

Infine dimostriamo:

Lemma 3. *Se $k > n/p - 1$, allora $f(C_k)$ ha misura nulla.*

Combinato con i due lemmi precedenti, questo risultato dimostra il teorema.

Dimostrazione del Lemma 3. Sia $S \subset U$ un cubo chiuso di lato δ, contenuto con la propria chiusura in U. Se k è abbastanza grande (precisamente $k > n/p - 1$), mostreremo che $f(C_k \cap S)$ ha misura nulla. Poiché C_k si può ricoprire con numerabilmente molti cubi di questo tipo, ciò basterà.

Dal teorema di Taylor, dalla compattezza di S e dalla definizione di C_k segue che

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h), \qquad |R(x,h)| \leq a|h|^{k+1}, \tag{1}$$

per $x \in C_k \cap S$ e $x + h \in S$, dove a è una costante dipendente soltanto da f e da S. Suddividiamo S in r^n cubi di lato δ/r. Sia S_1 uno dei cubi della suddivisione che contiene un punto $x \in C_k$. Ogni punto di S_1 è della forma $x + h$, con

$$|h| \leq \sqrt{n}\,\frac{\delta}{r}. \tag{2}$$

Da (1), $f(S_1)$ è contenuto in un cubo centrato in $f(x)$ di lato b/r^{k+1}, con $b > 2a(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$ costante. Quindi $f(C_k \cap S)$ è ricoperto da al più r^n cubi aperti con somma dei volumi non superiore a $r^n(b/r^{k+1})^p = b^p r^{n-(k+1)p}$. Se $k + 1 > n/p$, questa quantità tende a zero per $r \to \infty$: $f(C_k \cap S)$ ha misura nulla. Ciò completa la dimostrazione del teorema di Sard. □

[56] *Correzione del traduttore.* L'originale usa qui il determinante, ma la matrice può essere rettangolare. L'argomento corretto è quello del rango. Per $p = 1$ l'insieme $C \setminus C_1$ è vuoto e il lemma è immediato.

[57] I valori critici di g non formano necessariamente un insieme chiuso; i punti critici sono però chiusi nel dominio. Poiché il dominio è unione numerabile di compatti, lo stesso vale per l'insieme dei punti critici e quindi per la sua immagine. Si può applicare Fubini a ciascuna di queste immagini compatte e poi prendere l'unione numerabile.

Appendice 2. Classificazione delle varietà compatte unidimensionali

Pagina 208 dell'originale

In questa appendice dimostriamo il seguente teorema di classificazione usando le funzioni di Morse. Per una dimostrazione basata invece sulla lunghezza d'arco, si veda l'appendice di Milnor [1].

Teorema. Ogni varietà compatta, connessa e unidimensionale, eventualmente con bordo, è diffeomorfa a una circonferenza oppure a un intervallo chiuso.[58]

La dimostrazione richiede un semplice lemma tecnico, che stabiliamo subito.

Lemma di lisciamento. Sia g una funzione continua su $[a, b]$, liscia e con derivata positiva ovunque salvo eventualmente in un punto interno c. Esiste allora una funzione $\widetilde{g}$, liscia su tutto $[a, b]$, coincidente con g vicino agli estremi e con derivata positiva ovunque.[59]

Dimostrazione. Sia ρ una funzione liscia, a supporto compatto in (a, b), uguale a 1 in un intorno di c, con $0 \leq \rho \leq 1$. Definiamo

$$\widetilde{g}(x) = g(a) + \int_a^x \left[k\rho(s) + g'(s)(1 - \rho(s))\right], ds,$$

Pagina 209 dell'originale

dove la costante è

$$k = \frac{g(b) - g(a) - \int_a^b g'(s)(1 - \rho(s)), ds}{\int_a^b \rho(s), ds}.$$

Gli integrandi che contengono $g'(1 - \rho)$ si estendono con valore zero vicino a c. Per la continuità di g, integrando separatamente ai due lati di c, il numeratore è $\int_a^b \rho(s)g'(s), ds > 0$, inteso come integrale improprio; dunque $k > 0$. Il lettore può ora verificare che $\widetilde{g}$ ha tutte le proprietà richieste. □

Per dimostrare il teorema, scegliamo una funzione di Morse f su X, con derivata non nulla nei punti del bordo.[60] Sia S l'unione dei punti critici di f e dei punti di bordo di X. Poiché S è finito, $X \setminus S$ è formato da un numero finito di varietà unidimensionali connesse $L_1, \ldots, L_N$.

Proposizione. f manda ciascun L_i diffeomorficamente su un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia L uno degli L_i. Poiché f è un diffeomorfismo locale e L è connesso, $f(L)$ è aperto e connesso in $\mathbb{R}$. Inoltre è contenuto nel compatto $f(X)$, quindi $f(L) = (a, b)$. Basta mostrare che f è iniettiva su L: allora $f^{-1} : (a, b) \to L$ è definita e localmente liscia, perché f è un diffeomorfismo locale.

Sia $p \in L$ e poniamo $c = f(p)$. Mostriamo che ogni altro punto $q \in L$ si può congiungere a p con una curva $\gamma : [c, d] \to L$, oppure $\gamma : [d, c] \to L$, tale che $f \circ \gamma$ sia l'identità e $\gamma(d) = q$. Per $q \neq p$ si ha allora $f(q) = d \neq c = f(p)$, provando l'iniettività (e, in pratica, costruendo l'inversa). Sia Q l'insieme dei punti che si possono congiungere così a p. Il fatto che f sia un diffeomorfismo locale

[58] *Correzione del traduttore.* L'ipotesi di connessione manca nell'enunciato originale, ma è usata nella dimostrazione. Senza di essa si ottiene un'unione disgiunta finita di circonferenze e intervalli.

[59] *Correzione del traduttore.* È necessaria la continuità di g, omessa nell'originale. Si corregge anche la normalizzazione della funzione ausiliaria nella prova: imporre soltanto $\int \rho = 1$ e $\rho = 1$ vicino a c non garantisce la positività asserita.

[60] *Precisazione del traduttore.* Questa condizione, ottenibile con una scelta generica della funzione, evita difetti di regolarità agli estremi che il lisciamento nei soli punti interni non eliminerebbe.

permette di verificare che Q è aperto e chiuso in L: le inverse locali prolungano un sollevamento agli estremi e la loro unicità li rende compatibili. Dunque $Q = L$. □

Richiamiamo ora un lemma la cui dimostrazione è richiesta nell'esercizio 8 del capitolo II, §2.

Lemma. Sia $L \subset X$ diffeomorfo a un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, con $\dim X = 1$. Allora $\overline{L} \setminus L$ contiene al più due punti.

Nel nostro caso, il diffeomorfismo $f : L_i \to (a_i, b_i)$ si estende continuamente alla chiusura $\overline{L}_i$. La situazione della Figura A-1 non può quindi verificarsi: i due limiti dei valori di f sono gli estremi distinti dell'intervallo. Ciascun $\overline{L}_i$ ha esattamente due punti estremi. Inoltre, poiché X è una varietà, ogni punto $p \in S$ è estremo di uno oppure di due degli L_i; nel primo caso $p \in \partial X$. (Perché non può verificarsi la Figura A-2?)

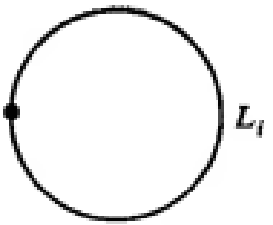


Figura A-1. Una componente con entrambi gli estremi identificati nello stesso punto: qui la continuità di f la esclude.

Pagina 210 dell'originale

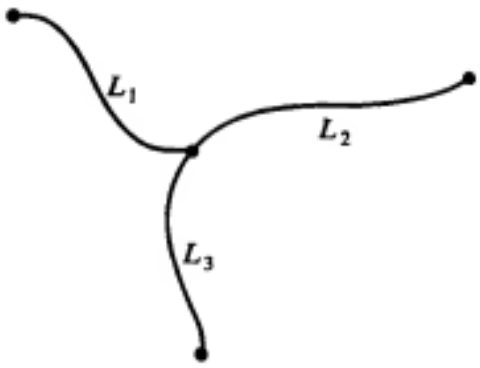


Figura A-2. Tre rami che si incontrano: il punto di giunzione non ha un intorno di varietà unidimensionale.

Chiamiamo *catena* una successione di componenti distinte $L_1, \ldots, L_k$ nella quale ogni coppia consecutiva L_j, L_{j+1} abbia un estremo comune p_j, $j = 1, \ldots, k-1$. Indichiamo con p_0 l'altro estremo di L_1 e con p_k l'altro estremo di L_k. Poiché il numero totale delle componenti è finito, esiste una catena massimale, cioè una catena che non si può allungare aggiungendo un'altra componente. Completiamo la dimostrazione stabilendo quanto segue.

Affermazione. Una catena massimale $L_1, \ldots, L_k$ contiene tutte le componenti L_i. Se $p_0 = p_k$, X è diffeomorfa alla circonferenza; altrimenti è diffeomorfa a un intervallo chiuso.

Dimostrazione. Supponiamo che una componente L non appartenga alla catena. Essa non può avere come estremo p_0 o p_k, altrimenti potremmo allungare la catena. Non può neppure condividere un altro p_j, perché la configurazione della Figura A-2 è esclusa. L'unione $\bigcup_{j=1}^{k} \overline{L}_j$ è dunque

disgiunta dalle chiusure delle componenti escluse; è quindi aperta e chiusa in X. Per connessione,

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{L}_j.$$

L'applicazione f si comporta bene su ogni L_j, ma può invertire il verso quando attraversa un estremo comune (Figura A-3). La raddrizziamo nel modo più semplice. Poniamo $a_j = f(p_j)$: f manda L_j diffeomorficamente su (a_{j-1}, a_j) oppure su (a_j, a_{j-1}), secondo l'ordine degli estremi. Per ogni $j = 1, \ldots, k$ scegliamo un'applicazione affine $\tau_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che mandi a_{j-1} in $j-1$ e a_j in j. (Un'applicazione affine è la somma di una lineare e di una costante: $t \mapsto \alpha t + \beta$.) Definiamo $f_j : \overline{L}_j \to [j-1, j]$ mediante $f_j = \tau_j \circ f$.

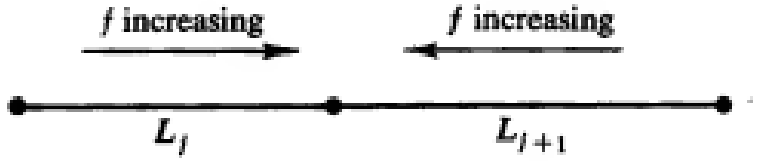


Figura A-3. La funzione può cambiare verso attraversando un punto critico; le trasformazioni affini rendono coerente l'ordine lungo la catena.

Pagina 211 dell'originale

Se $p_0 \neq p_k$, le f_j coincidono nei punti comuni dei loro domini e si incollano in un'applicazione $F : X \to [0, k]$, con $F = f_j$ su $\overline{L}_j$. F è continua e un diffeomorfismo salvo nei punti $p_1, \ldots, p_{k-1}$. Applichiamo il lemma di lisciamento in intorni disgiunti di tali punti, nelle coordinate locali orientate secondo l'ordine della catena: modificando F in questi intorni otteniamo un diffeomorfismo globale.

Se $p_0 = p_k$, poniamo $g_j = \exp(i(2\pi/k)f_j)$ e definiamo $G : X \to S^1$ ponendo $G = g_j$ su $\overline{L}_j$. Questa applicazione è continua e un diffeomorfismo salvo nei punti di giunzione $p_0, \ldots, p_{k-1}$. Il lemma di lisciamento, applicato nelle coordinate locali di S^1, permette nuovamente di renderla un diffeomorfismo globale.[61] □

[61] *Correzione del traduttore.* L'originale distingue i casi $a_0 \neq a_k$ e $a_0 = a_k$, ma la distinzione topologica riguarda i punti p_0, p_k: una funzione può avere uguali valori su estremi distinti. Nell'ultimo caso va incluso fra i punti da lisciare anche $p_0 = p_k$.

Bibliografia

Pagina 212 dell'originale

Come letture complementari raccomandiamo vivamente questi due libri:

[1] J. Milnor, *Topology from a Differential Viewpoint.* University of Virginia Press, 1965.

[2] M. Spivak, *Calculus on Manifolds.* New York: Benjamin, 1965.

Consigliamo inoltre di consultare alcuni dei libri seguenti, che approfondiscono argomenti qui soltanto accennati. Non proponiamo di leggerli dalla prima all'ultima pagina. Pensiamo piuttosto che possiate trovare, ogni tanto, qualche ora libera per conoscere meglio idee che hanno suscitato il vostro interesse, non che dedichiate un intero semestre a ciascun argomento. Per questo, la maggior parte dei riferimenti non è costituita da manuali di corso; quando lo è, indichiamo esplicitamente le parti pertinenti. Può esservi utile la seguente classificazione.

G Libro elementare: richiede soltanto un primo corso di analisi e algebra lineare.

PG Un po' meno elementare: è utile una certa maturità matematica, per esempio qualche conoscenza di algebra moderna o topologia algebrica.

R Matematica di livello avanzato, dalla quale anche uno studente universitario attento può ricavare idee utili.

X Lettura impegnativa anche per uno studente avanzato: da affrontare più per trarne ispirazione che per comprenderne ogni dettaglio.

Pagina 213 dell'originale

Ecco alcuni riferimenti per il materiale del capitolo I.

[3] J. Milnor, *Morse Theory.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, n. 51, 1963.

Nel capitolo I, §7, abbiamo mostrato che ogni varietà possiede funzioni di Morse. Per le conseguenze di questo fatto consultate la prima parte del libro, pp. 1–42. Un po' di topologia algebrica è utile ma non indispensabile [PG].

[4] M. Morse, *Pits, Peaks, and Passes.* Prodotto dal Committee on Educational Media della Mathematical Association of America; distribuito da Martin Learning Aids, 1966.

In questo film coinvolgente, Marston Morse mostra come la geografia ci informi sulla topologia. In due dimensioni, i punti critici di una funzione di Morse corrispondono ai monti, alle valli e ai valichi della superficie grafico [G].

[5] A. Wallace, *Differential Topology, First Steps.* New York: Benjamin, 1968.

L'autore tratta argomenti impegnativi, come la teoria di Morse e la chirurgia, da un punto di vista elementare e fornisce anche una classificazione delle varietà bidimensionali mediante la teoria di Morse [PG].

[6] A. Gramain, *Cours d'initiation à la topologie algébrique.* Orsay, Faculté des Sciences, 1970.

Anche qui si trova una classificazione delle varietà bidimensionali mediante la teoria di Morse. Per chi comincia, la trattazione è un po' più graduale e accessibile di quella di Wallace; è però scritta in francese [G].

[7] L. Ahlfors e L. Sario, *Riemann Surfaces.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1960.

Vi si trova una trattazione classica della classificazione delle varietà bidimensionali [PG].

[8] R. Abraham, *Transversal Mappings and Flows*. New York: Benjamin, 1967.

Il teorema di trasversalità ha importanti applicazioni alla teoria dei sistemi dinamici. Prima di consultare questo libro sull'argomento, è però opportuno leggere l'articolo di Smale citato più avanti [R].

[9] M. Golubitsky e V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*. New York: Springer, 1973.

Vi si presenta un'altra interessante applicazione della trasversalità: lo studio delle singolarità delle applicazioni [R].

Per il materiale dei capitoli II e III consigliamo caldamente il libro di Milnor [1]. In particolare, il suo §7 introduce il cobordismo con framing. Se l'argomento vi interessa, potete approfondirlo in alcune delle fonti seguenti.

Pagina 214 dell'originale

[10] L. Pontryagin, «Smooth Manifolds and Their Applications in Homotopy Theory», *Amer. Math. Society Translations*, serie 2, **11** (1959), 1–114.

È una lettura abbastanza accessibile: non lasciatevi scoraggiare dalla rigida successione di lemmi, teoremi e corollari o dagli slavismi rimasti nella traduzione. È utile conoscere un po' di teoria dell'omotopia [R].

[11] P. Alexandroff e H. Hopf, *Topologie*. New York: Chelsea, 1965 (ristampa dell'edizione originale pubblicata a Berlino nel 1935).

Uno dei trattati classici di topologia. Non è facile da leggere, anche perché il tedesco potrà scoraggiare alcuni lettori, ma contiene applicazioni molto belle delle idee discusse in questo libro [X].

La formulazione usuale del teorema del punto fisso di Lefschetz include una regola per calcolare il numero globale di Lefschetz mediante la teoria dell'omologia. Se volete vedere come funziona e conoscete un po' di topologia algebrica, consultate:

[12] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*. New York: Benjamin, 1967, §30 [PG].

Per approfondire gli aspetti topologici dei flussi e dei campi vettoriali, un buon punto di partenza è:

[13] W. Hurewicz, *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1958, cap. 5, pp. 102–115 [G].

Consigliamo anche un articolo panoramico molto leggibile:

[14] S. Smale, «Differentiable Dynamical Systems», *Bulletin of the A.M.S.*, **73** (1967), 747–817 [PG].

Per il capitolo IV, il riferimento principale è Spivak [2]. Può però essere utile riprendere un testo di calcolo, come quello di Apostol, per ricordare le formulazioni usuali dei teoremi di Green, della divergenza e di Stokes. Per il principio dell'argomento si veda:

[15] Ahlfors, *Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1953, p. 123 [PG].

La forma del teorema di Gauss–Bonnet dimostrata nel capitolo IV, §9, è quella detta «estrinseca», per ipersuperfici in $\mathbb{R}^n$. Esiste una versione «intrinseca» molto più sottile:

[16] S. Chern, «A Simple Intrinsic Proof of the Gauss–Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds», *Annals of Math.*, **45** (1944), 747–752 [X].

Senza una preparazione abbastanza solida in geometria differenziale, l'articolo di Chern risulterà probabilmente difficile. Una discussione molto accessibile del teorema intrinseco in due dimensioni si trova invece nel capitolo 7 di:

Pagina 215 dell'originale

[17] I. M. Singer e H. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Geometry and Topology.* Glenview, Ill.: Scott, Foresman, 1967 [PG].

(Il caso bidimensionale è più semplice di quello n-dimensionale perché il gruppo delle matrici ortogonali 2×2 che preservano l'orientazione è abeliano!)[62] Per il rapporto fra le forme intrinseca ed estrinseca del teorema di Gauss–Bonnet, si veda il capitolo 8 di Singer–Thorpe. Per un'introduzione alla coomologia mediante le forme, come nel §6, consigliamo:

[18] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1. Boston, Mass.: Publish or Perish, Inc.

A questo proposito, raccomandiamo caldamente Spivak come testo generale: è la migliore introduzione alla geometria differenziale avanzata che conosciamo. Purtroppo è piuttosto difficile da reperire; le librerie sembrano non tenerlo. Si può però richiederlo scrivendo direttamente a Publish or Perish, Inc., 6 Beacon St., Boston, Mass. 02108.[63]

[62] *Correzione del traduttore.* Nell'originale si parla di tutte le matrici ortogonali 2×2: $O(2)$ non è abeliano, mentre lo è $SO(2)$.

[63] *Nota editoriale.* Queste osservazioni sulla reperibilità e l'indirizzo postale sono tradotti dal testo del 1974 e conservati come informazione storica, non come indicazioni commerciali attuali.

Indice analitico

Traduzione dell'indice originale (pp. 217–222), riordinata secondo le voci italiane. Tutti i numeri sono quelli delle *pagine originali*, segnalate nel corpo del volume; non sono le pagine di questa edizione. Le sottovoci ripetute sono raggruppate conservando i rispettivi rinvii.

Algebra esterna 159.

Alt, operatore 155.

Aperto relativo 2.

Applicazione antipodale 38.

Applicazione di Lefschetz 33, 120.

Applicazione liscia 1, 2; famiglia liscia di applicazioni, 39.

Applicazione propria 17.

Applicazione trasposta 159.

Applicazione trasversale 28, 72.

Applicazioni che preservano l'orientazione Fra varietà orientate, 96; lineari fra spazi vettoriali, 96.

Applicazioni equivalenti 14.

Argomento 188; principio dell'argomento, 151.

Attrattore (sink) 123.

Auto-intersezione, numero di Modulo 2, 79; orientato, 115.

Avvolgimento, numero di Modulo 2, 86, 88; orientato, 144, 192.

Base ortonormale 161.

Basi orientate Equivalentemente, 95; negativamente, 95; positivamente, 95; segno di una base, 95.

Bordo Definizione, 57; dello spazio di omotopia $X \times I$, 99; orientazione, 97; spazio tangente, 60; teorema del bordo, 80.

Borsuk–Ulam, teorema di 91.

Bottiglia di Klein 48, 49.

Brouwer, teorema del punto fisso di 65.

Cambiamento di variabili 165; sulle varietà, 168; in $\mathbb{R}^k$, 166.

Campo gradiente 140, 177.

Campo vettoriale 55, 132; gradiente, 177; tangenza a un campo, 134; zeri, si veda *Zero di un campo vettoriale*.

Caratteristica di Eulero 116, 148.

Catena, regola della 8, 11.

Cauchy, formula integrale di 192.

Cauchy–Riemann, equazione di 192.

Classe di coomologia 179.

Classe di omotopia 34.

Classe stabile 34.

Classificazione delle varietà Unidimensionali, 64, 208; bidimensionali, 124.

Cobordanti 84, 187.

Cociclo, condizione di 174.

Codimensione 24.

Commutativo 9.

Connesso per archi 38.

Contraibile 38.

Controimmagine 21; orientazione, 100; spazio tangente, 33; teorema della controimmagine, 21.

Coomologia Classe, 179; gruppo, 179; gruppo di de Rham, 179; forme coomologhe, 179.

Coordinate Sistema di coordinate, 3; funzione coordinata, 4; coordinate lineari, 6.

Curva 12; chiusa, 172; teorema della curva di Jordan, 85.

Curvatura Di ipersuperfici in $\mathbb{R}^k$, 195; di varietà unidimensionali in $\mathbb{R}^2$, 75.

Deformazione 38.

Derivata Di applicazioni fra spazi euclidei, 8; fra varietà, 10; applicazione derivata fra fibrati tangenti, 50; di forme, si veda *Derivata esterna*.

Derivata esterna Su varietà, 176; in $\mathbb{R}^k$, 174.

Determinante Tensore determinante, 153; teorema del determinante, 160.

Diagonale 7; spazio tangente, 12, 76.

Diffeomorfismo 3; locale, 13, 14.

Differenziale Di una funzione, 163; di forme, si veda *Derivata esterna*.

Dimensione 3; dimensioni complementari, 77.

Divergenza 178; teorema della divergenza, 152.

Elemento di volume 161.

Embedding 17; teorema di embedding di Whitney, 48, 53.

Estensione, teorema di Per applicazioni nelle sfere, 145; per applicazioni trasversali, 72.

Fibrato in sfere 55.

Fibrato normale 71; della diagonale, 76; di una sottovarietà (relativo), 76; banale, 76.

Fibrato tangente 50.

Flusso 134.

Forma 162; forma area, 170; chiusa, 178; a valori complessi, 192; esatta, 178; liscia, 165; pullback, 163; restrizione, 168; supporto, 166; a supporto compatto, 166; forma volume, si veda *Forma volume*.

Forma volume Sullo spazio euclideo, 164; su una varietà, 194.

Forme coomologhe 179.

Formula del grado 188.

Fubini, teorema di 204.

Funzione di Morse 43.

Funzione olomorfa 192.

Funzioni indipendenti 23.

Gauss, applicazione di 195.

Gauss–Bonnet, teorema di 196.

Genere 124.

Grado Modulo 2, 80; orientato, 105; formula del grado, 188; teorema del grado di Hopf, 146; relazione con l'integrazione, si veda *Formula del grado*.

Grafico 7; spazio tangente, 12.

Green, teorema di 152.

Gruppo delle permutazioni 155.

Gruppo di Lie 23.

Gruppo ortogonale 22.

Hessiana, matrice 41.

Hopf, teorema del grado di 146.

Immersione 14; canonica, 14; teorema locale delle immersioni, 15; teorema di immersione di Whitney, 55.

Indice 133; teorema dell'indice di Poincaré–Hopf, 134.

Integrale Di forme su varietà, 167; di forme su $\mathbb{R}^k$, 166; di forme su sottovarietà, 168; di funzioni, 195; integrale di linea, 169, 172; formula integrale di Cauchy, 192.

Interno 57.

Intersezione modulo 2, numero di
Di un'applicazione e una sottovarietà, 78; auto-intersezione, 79; di due applicazioni, 83; di due sottovarietà, 79.

Intersezione orientata, numero di
Di un'applicazione e una sottovarietà, 107; auto-intersezione, 115; di due applicazioni, 113; di due sottovarietà, 112.

Intersezione trasversale 30; spazio tangente, 32.

Intorno ϵ-intorno, 69; tubolare, 76; teorema dell'ϵ-intorno, 69; teorema dell'intorno tubolare, 76.

Inversa, teorema della funzione 13, 19, 56.

Ipersuperficie 86, 195.

Isotopia 142; a supporto compatto, 142; lemma di isotopia, 142.

Jacobiana, matrice 8.

Jacobiano 195.

Jordan, teorema della curva di 85.

Jordan–Brouwer, teorema di separazione di 89.

Lefschetz, numero di Globale, 119; locale, 121, 127; calcolo locale, 130.

Mayer–Vietoris, argomento di 181.

Misura nulla 39, 202.

Molteplicità 110.

Morse, lemma di 42.

Multilineare 153.

Nastro di Möbius 63.

Non retrazione, teorema di 65.

Normale, vettore Campo normale, 106; interno, 63, 98; esterno, 64, 98; normale unitaria, si vedano queste stesse voci.

Omotopia 33; classe di omotopia, 34; teorema dell'omotopia trasversale, 70.

Orientabile, varietà 96.

Orientata, varietà 97.

Orientazione Del bordo, 97; della somma diretta, 100; delle varietà, 96; opposta, 97; della controimmagine, 100; del prodotto, 97; degli spazi vettoriali, 95; numero di orientazione in dimensione zero, 96.

Palla aperta In $\mathbb{R}^k$, 5.

Parallelepipedo rettangolo 202.

Parametrizzazione 3, 57.

Partizione dell'unità 52.

Permutazione Pari, 155; dispari, 155; gruppo delle permutazioni, 155.

Pila di dischi, teorema della 26.

Poincaré, lemma di 181.

Poincaré–Hopf, teorema dell'indice di 134.

Posizione generale 74.

Prodotto 58; cartesiano, 4; di varietà, 4, 58; di applicazioni, 7; orientazione, 97; tensoriale, 154; esterno, 156, 162.

Prodotto esterno Di tensori, 156; di forme, 162.

Proiezione Applicazione di proiezione, 55, 71; proiezione stereografica, 6.

Proprietà globale 3.

Proprietà locale 2.

Proprietà stabile 34.

Pullback Di classi di coomologia, 179; di forme, 163; di campi vettoriali, 134.

Punto critico 40; non degenere, 41.

Punto di sella 123.

Punto fisso 33; teorema di Brouwer, 65; di Lefschetz, 33, 120.

Punto regolare 40.

Quasi ogni 40.

Restrizione di forme 168.

Retrazione 65.

Ricoprimento localmente finito 56.

Rotore 178.

Sard, teorema di 39, 62, 205.

Scissione, proposizione di 126.

Semispazio superiore 57, 63.

Semplicemente connesso 38.

Sezione 55.

Sfera 4.

Sommersione 20; canonica, 20; teorema locale delle sommersioni, 20.

Sorgente 122.

Sottovarietà 5.

Spazio normale 71.

Spazio tangente 9; del bordo, 60; della diagonale, 12, 76; del grafico, 12; dell'intersezione, 32; di una varietà con bordo, 59; della controimmagine, 33; del prodotto, 12.

Stabilità, teorema di 35.

Stokes, teorema di Classico, 152; generalizzato, 183.

Successione esatta 103; corta, 103.

Supporto di una forma 166; supporto compatto, si veda *Forma*.

Tangente, vettore 9.

Tangenza a un campo vettoriale 134.

Tensore 153; alternante, 155; determinante, 153; prodotto tensoriale, 154.

Teorema fondamentale del calcolo, secondo 152.

Teorema fondamentale dell'algebra 82, 110.

Teoria dell'intersezione, ipotesi appropriate 107.

Toro 6.

Trasversalità, teorema di 68.

Triangolazione 148.

Urysohn, teorema di 56.

Valore critico 21.

Valore regolare 21.

Varietà 3; unidimensionale, 64, 208; bidimensionale, 124; con bordo, 57; spazio tangente di una varietà con bordo, 59.

Velocità, vettore 12.

Volume 194; elemento di volume, 161.

Whitney, teoremi di Embedding, 48, 53; immersione, 55.

Zero di un campo vettoriale 55, 132; non degenere, 139.

Registro delle correzioni e delle scelte editoriali

Errata allegati: interventi nel capitolo I

Le pagine seguenti sono quelle dell'originale. Il registro copre tutte le voci della nota allegata fino a pagina 56. Dove la scansione presenta già la lezione corretta, essa viene mantenuta.

Riferimento	Intervento
p. 5, es. 4	La palla è definita da $\lvert x\rvert < a$, non da $\lvert x\rvert^2 < a$.
p. 6, es. 8	«Iperboloide» al posto di «paraboloide».
p. 7, es. 18(b)	$g(x) = f(x-a)f(b-x)$; formula di h riscritta con $g(t)\,dt$.
p. 12, es. 8	«Iperboloide»; rimosse le parentesi attorno ad $a > 0$, conservate quelle della terna di coordinate.
p. 16, riga 16	L'apertura richiesta è in $f(X) \subset Y$, non in Y.
p. 24	Si prende X, non Z, come spazio euclideo ambiente.
p. 25, es. 6	Esplicitato «omogeneità di grado m»; 0 è l'unico valore critico *possibile*.
p. 27, es. 11(a)	Rinvio all'esercizio 6 anziché 5.
p. 27, es. 13	Eliminata la ripetizione di «of», senza alterare la formula della codimensione.
p. 28	Il dominio della composizione locale è U: $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$.
p. 35	Conservata l'ipotesi che Z sia *chiusa* nel teorema di stabilità, già leggibile nella scansione.
p. 45, es. 6	«Semplicemente connessa».
p. 48, es. 22	$r_i = \lvert x - x_i\rvert$, coerentemente con la lezione visibile.
p. 51	$g(x, \frac{1}{t}v) = a$: ripristinato il vettore v.
p. 52	Il rinvio degli errata all'«esercizio 15» non identifica nella scansione la costruzione richiesta. Usato il §1, es. 18(c), con nota esplicita.
p. 55, es. 11	Sostituito $f^{-1}(a)$ con $\{x \in X : F(x,v) = a$ per qualche $v\}$. Integrato il suggerimento corretto: limitatezza dei vettori nella fibra, poi uso della dimostrazione del teorema della pila di dischi.
p. 56, es. 15	A e B sono sottoinsiemi *chiusi disgiunti*; eliminata l'ipotesi impropria «smooth».

Interventi ulteriori del traduttore

Questi interventi non vengono attribuiti agli errata allegati. Le precisazioni sostanziali sono richiamate anche nel punto pertinente del testo.

p. 5. Specificato in nota il dominio dell'inversa della parametrizzazione prodotto: $\phi(W) \times \psi(U)$.

p. 9. Distinti l'approssimazione affine $u \mapsto x + d\phi_0(u)$, la sua parte lineare e lo spazio vettoriale tangente.

p. 10. Il dominio dell'estensione locale Φ' è l'aperto W, dopo eventuale restrizione della parametrizzazione.

p. 24. Nel primo viceversa parziale, le funzioni della dimostrazione sono definite su $f^{-1}(W)$. Nel secondo, l'inclusione locale è $Z \cap W \hookrightarrow W$.

p. 25, es. 2 e 6. Esplicitate in nota le convenzioni $X \neq \varnothing$, dimensione euclidea positiva in es. 2(b), grado $m > 0$ in es. 6.

p. 27, es. 11(a). Segnalata l'eccezione $n = 1$ alla frase «0 è l'unico valore critico»: uniformemente in n, si deve dire «l'unico valore critico possibile».

p. 37. Ripristinata la componente 0 in $G(x_0, 0) = (f_0(x_0), 0)$ e nell'analoga formula con y_0.

p. 40. «Valori critici», non «punti critici», nella definizione degli insiemi C_i usati per il corollario di Sard. Precisato «volume positivo» per i parallelepipedi che non hanno misura nulla.

p. 43. Nel teorema sulle perturbazioni di Morse, lo spazio dei parametri è $\mathbb{R}^N$, coerente con le N funzioni coordinate e con la dimostrazione.

p. 46, es. 10. Per $f = \sum a_{ij} x_i x_j$, la matrice hessiana è $H = A + A^t$, non $A = (a_{ij})$; se A è simmetrica, $H = 2A$.

p. 52. Nell'esaurimento compatto, usato $|z| \leq j$ invece di $|z| < j$.

p. 53. Sostituita l'applicazione non iniettiva $z/(1 + |z|^2)$ con il diffeomorfismo $z/\sqrt{1 + |z|^2}$ sulla palla unitaria.

p. 54. La funzione propria usata è quella positiva costruita nel corollario precedente: ciò giustifica il passaggio alla successione $\rho(x_i) \to +\infty$.

Scansione, notazione e riferimenti

A pagina 12 il margine con i numeri degli esercizi è tagliato: i numeri 3–12 del §2 sono ricostruiti dalla sequenza. A pagina 19 sono ricostruiti allo stesso modo i numeri 8–10 del §3. Non sono attribuiti asterischi che non risultino leggibili. Gli asterischi visibili dell'originale sono conservati.

Il simbolo di trasversalità è composto come $\pitchfork$; il suo significato rimane quello dell'originale. Le inverse delle derivate sono scritte $(d\phi_0)^{-1}$, distinguendole senza ambiguità dalla derivata di un'inversa. Il termine testuale *graph* è tradotto con grafico. I riferimenti «Appendice A» riproducono il testo, benché l'indice del libro numeri le appendici 1 e 2. I numeri bibliografici fra parentesi quadre rinviano alla bibliografia originale, inclusa nel presente volume.

Nel lemma di Morse a pagina 42 è conservata la forma quadratica con coefficienti h_{ij} indicata dagli autori: le nuove coordinate non sono vincolate ad avere differenziale identico a quello delle coordinate di partenza, perciò il fattore 1/2 della formula di Taylor non deve essere inserito automaticamente in questo enunciato.

Glossario coerente del capitolo I

Inglese	**Italiano**
manifold; submanifold	varietà; sottovarietà
smooth map; smoothness	applicazione liscia; liscezza (C^∞)
parametrization; coordinate system	parametrizzazione; sistema di coordinate
neighborhood	intorno
derivative; tangent space	derivata (differenziale); spazio tangente
chain rule	regola della catena
immersion; submersion	immersione; sommersione
embedding	embedding (qui: immersione iniettiva e propria)
proper map	applicazione propria
preimage	controimmagine
regular/critical point	punto regolare/critico (nel dominio)
regular/critical value	valore regolare/critico (nel codominio)
transversality	trasversalità
homotopy; contractible	omotopia; contraibile
simply connected	semplicemente connesso
measure zero	misura nulla
nondegenerate critical point	punto critico non degenere
tangent bundle; sphere bundle	fibrato tangente; fibrato in sfere
vector field; cross section	campo vettoriale; sezione
partition of unity	partizione dell'unità
Stack of Records Theorem	teorema della pila di dischi

Capitolo II: errata e interventi ulteriori

Errata allegati, pp. 61–62. Corretta l'equazione locale $Z = \phi^{-1}(0)$; ripristinati i codomini $\mathbb{R}^l$ e le dimensioni $k - l$, $k - l - 1$ dei nuclei.

Errata allegati, p. 64, es. 10. Il differenziale lungo la normale esterna è negativo.

Errata allegati, pp. 66, 70, 75–76. Nell'esercizio II.2.4 si usa $|x| < a$. La sommersione del corollario a p. 70 ha codominio Y^ϵ. In II.3.7 si considerano piani affini, aggiungendo il parametro di traslazione; in II.3.9 f ha codominio $\mathbb{R}$. In II.3.18 si identifica X con la sezione nulla $X \times \{0\}$.

Errata allegati, pp. 83–85. «Contraibile» sostituisce la grafia impropria originale; II.4.5 richiede $\dim X > 0$. In II.4.9 il numero è $I_2(f, Z)$ e il punto della proiezione stereografica evita l'unione $f(X) \cup Z$. In II.4.15 basta che C sia chiusa. In II.4.16 si considera $F^{-1}(\Delta)$. Il corollario conclusivo rinvia agli esercizi 18 e 19.

Errata allegati, pp. 90–91. In II.5.9 si giustifica l'esistenza di una semiretta trasversale con intersezione non vuota. In II.5.11 è compatta $\overline{D}_1$, non l'aperto D_1; corretto inoltre il refuso in «parametrizzazione».

Interventi ulteriori, pp. 62, 65–67. Nella prova del teorema di controimmagine, il valore 0 è regolare per π, non per g. Si esplicitano i casi vuoti del teorema di non retrazione. Nella prova di Brouwer la radice non positiva può essere zero. Il suggerimento di II.2.8 contiene intervalli incoerenti: la soluzione fornisce una prova indipendente mediante piccoli archi compatti.

Interventi ulteriori, pp. 72–75. L'intorno di trasversalità è un intorno di C, non di X; è esplicitata la condizione sul bordo. La caratterizzazione metrica dell'intorno normale si usa dopo un eventuale restringimento uniforme. In II.3.11 si specificano coordinate ortonormali e distanza orientata $1/\kappa$; la distanza usuale è $1/|\kappa|$.

Interventi ulteriori, pp. 81, 85–91. Si esplicita la compattezza di W per l'annullamento del grado di una mappa estendibile. II.4.18 richiede dimensione positiva. Per il numero di avvolgimento si assume $n \geq 2$, essendo S^0 sconnessa. Nel suggerimento II.5.10 la direzione limite è $-z/|z|$. Nel suggerimento II.5.11 si distinguono i semiballi aperti dalle loro chiusure.

Figure e testo. Conservate le 25 figure numerate del capitolo e il disegno non numerato di II.2.8. Le scritte interne alle immagini restano quelle della scansione; le didascalie sono italiane. «Mezza torsione» esplicita l'incollamento che produce il nastro di Möbius.

Registro delle correzioni: capitolo III

Errata allegati integrati

- P. 99: ripristinato «segno» nella formula dell'orientazione prodotto.
- P. 106, es. 18(b): richiesto che i vettori normali siano non nulli. Es. 21: chiarito che un livello regolare in un aperto è senza bordo e precisato il senso dell'affermazione per il nastro di Möbius. Es. 23: aggiunta la connessione.
- P. 117, es. 9: periodo 2π nella relazione $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi q$.
- P. 131, es. 4: concordanza al singolare della classe stabile.
- P. 138, es. 1: flusso $h_t(z) = e^t z$.
- P. 139, es. 7: «zeri non degeneri», non «punti fissi non degeneri».
- P. 140, es. 12: coefficienti della matrice inversa g^{ij} nella formula del gradiente. Es. 14(a): invertibilità della matrice (g_{ij}), non non annullamento dei singoli coefficienti.
- P. 141, es. 17: indici nei punti critici di f.
- Pp. 144–145, es. 3: il raccordo liscio può modificare la funzione in un collare esterno; si richiede uguaglianza soltanto fuori da una palla leggermente più grande.
- P. 147: es. 3, formula radiale $\widetilde{f}(tx) = g_t(x)$; es. 6, uso di β e codominio finale $S^k \setminus \{a\}$; es. 8, il ricorso al corollario segue la dimostrazione del grado zero sul bordo della palla.
- P. 148, es. 11: esplicitata la mappa completa nel fibrato tangente $(x, a) \mapsto (x, P_x a)$. Questa mappa è una sommersione in coordinate base–fibra; la sola proiezione vettoriale nello spazio ambiente, cui si riferisce il rilievo degli errata, non lo è in generale. La verifica è inclusa nella soluzione.

Ulteriori precisazioni e correzioni del traduttore

- P. 103, es. 3: l'esattezza della successione indicata richiede $\operatorname{Im} A_i = \ker A_{i+1}$ per $i = 1, \dots, n-1$, non fino a n.
- P. 104, es. 8: le circonferenze orizzontali sono descritte senza l'improprio «longitude circles». Es. 11: le derivate nel riferimento tangente sono quelle di f, non di $F = z - f$.
- P. 106, es. 24: richiesta la non vacuità del secondo fattore.
- P. 108: distinto il bordo come insieme dall'orientazione della controimmagine; esplicitato il fattore uniforme $(-1)^{\operatorname{codim} Z}$, che non modifica l'annullamento della somma.
- Pp. 110–111: nella regione forata si rimuovono gli interni dei dischi chiusi, conservando i bordi. Il grado considerato è su ∂W, non su W.
- P. 115: il criterio di non orientabilità basato sull'autointersezione richiede che la sottovarietà abbia dimensione dispari, come nell'argomento che lo precede.
- P. 124: aggiunta la connessione nel teorema di classificazione delle superfici.
- P. 126: usata la perturbazione $f_t = f - t\rho a$ affinché il valore regolare a di $f - \mathrm{id}$ corrisponda ai punti fissi di f_1.

- Pp. 135–136: precisato $t > 0$ nella formula tra indice e numero locale di Lefschetz; corretto il denominatore in $|v + tr|$.
- P. 139, es. 4: $d(f_t)_x = I + t\,dv_x$, in accordo con $f_t(x) = \pi(x + tv(x))$.
- Pp. 140–141, es. 14(b): in coordinate la derivata del gradiente nel punto critico è $G^{-1}H$; il determinante ha lo stesso segno di quello dell'hessiana. Es. 18: la normalizzazione ha codominio S^{k-1}.
- P. 132, es. 11: richiesta la dimensione positiva del gruppo di Lie e un elemento non identico nella componente dell'identità. I gruppi finiti non hanno caratteristica zero.
- Pp. 143–144: nel corollario del lemma di isotopia, se le due famiglie di punti si sovrappongono si passa tramite una famiglia ausiliaria disgiunta.
- Pp. 145–146: esplicitato $k \geq 1$ nei teoremi sul grado con codominio S^k connesso. Nell'esercizio 12 l'aperto deve essere non vuoto.
- Le formule del grado con S^0 che ricorrono negli indici unidimensionali si interpretano tramite il grado ridotto: il contributo è metà della differenza dei segni ai due estremi di un piccolo intervallo. Le soluzioni trattano separatamente questi casi e la dimensione zero.

Capitolo IV: errata e precisazioni

Correzioni della nota allegata

- P. 155: $(T^\pi)^\sigma = T^{\sigma\circ\pi}$; la dimostrazione e le classi laterali successive sono rese coerenti con questa convenzione.
- P. 164: $df_I = df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_p}$.
- P. 166: la varietà su cui si integra è orientata.
- P. 170: ripristinate le composizioni $f_i \circ h$ e $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) \circ h$.
- P. 173, es. 9: rinvio all'esercizio 7 per la necessità; il rinvio a h è esplicitato come esercizio 6.
- Pp. 174–175: uniformate le lettere (a), (b), (c) nelle proprietà della derivata esterna.
- P. 187, es. 11: rinvio all'esercizio 12 del §4. Es. 13: sottovarietà e cobordismo orientati, con $\partial W = (-Z_0) \times \{0\} \cup Z_1 \times \{1\}$.
- P. 188: Y connessa nella formula del grado.
- P. 190: compattezza di X, Y, intorno U connesso e integrale su X nel lemma.
- P. 191, es. 1: termine $x\,dy/(x^2 + y^2)$.
- P. 194, es. 7: richiesta l'identificazione del coefficiente c.
- P. 195: terminologia «parallelepipedo».
- P. 200, es. 8: eliminato il fattore $1/2$ davanti alla matrice hessiana.

Ulteriori interventi motivati del traduttore

- P. 151: inserito $1/(2\pi)$ nel principio dell'argomento, coerentemente con la formula corretta a p. 188 e con gli argomenti in radianti.
- P. 156: ripristinato $p!$ nella somma non normalizzata che dà $p!\,\mathrm{Alt}(T)$; nel lemma è usata esplicitamente $\mathrm{Alt}(T \otimes S)$ quando T non è alternante.
- P. 162, es. 12(b): $(u \times v) \cdot w = 3!T(u, v, w)$, necessario poiché l'elemento di volume vale $1/3!$ su una base ortonormale positiva.
- P. 165: nella definizione di liscezza sono incluse le carte di semispazio per le varietà con bordo.
- P. 177: ogni forma locale è una *somma* di prodotti di funzioni e differenziali, non necessariamente un solo prodotto.
- P. 179, es. 2: il conteggio della dimensione di H^0 è limitato a un numero finito di componenti; in generale lo spazio è il prodotto di copie di $\mathbb{R}$ indicizzate dalle componenti.
- P. 180: l'operatore è scritto P_a con integrale da a a t, per rendere valida la formula con i_a. Il testo stampato integra da 0 ma usa a arbitrario. Nel suggerimento è usato $g_J(a, x)$.
- P. 181: corretti i refusi $\mathbb{R}^{k-1}$ in $\mathbb{R}^k$ nei due richiami alla proiezione stereografica; nel corollario $H^p(\mathbb{R}^k) = 0$ la condizione è $p > 0$; il pullback dell'omotopia è sempre indicato $H^\#$.

- P. 187: esplicitata l'assenza di bordo delle sottovarietà su cui l'integrazione deve dipendere soltanto dalla classe di coomologia. Esplicitate le orientazioni nelle applicazioni di Stokes.
- P. 190: nel corollario le copie X_0, X_1 si identificano con X, non con Y.
- P. 193, es. 3(i): richiesto che il disco sia contenuto nel dominio di olomorfia. Es. 3(j): aggiunta la condizione sufficiente che U sia semplicemente connesso; l'enunciato senza condizioni sul dominio o sul ciclo è falso. Nelle soluzioni compare un controesempio esplicito. Per una versione più generale basta che il ciclo sia nullo in omologia nel dominio.
- P. 194, es. 5: esplicitato $k > 0$. Es. 6: trattato separatamente $k = 1$, per cui il suggerimento originale coinvolgerebbe forme di grado -1. Es. 7–8: esplicitata la connessione necessaria per identificare la coomologia superiore con una singola copia di $\mathbb{R}$.
- P. 199, es. 2: nell'ultima componente ripristinato $n_3\, dx_1 \wedge dx_2$. Es. 3: una rotazione deve avere determinante $+1$; per una trasformazione ortogonale generale la forma cambia del fattore $\det A$. Es. 4: esplicitata la regolarità della curva e il conteggio con molteplicità per integrali parametrizzati.
- P. 200, es. 8: adeguato il suggerimento alla correzione dell'hessiana, usando $\frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2)$. Es. 11: esplicitate le consuete condizioni di una triangolazione, con intersezioni lungo facce comuni.
- Pp. 196–201: per la formula con il grado dell'applicazione di Gauss la dimensione pari è positiva; in dimensione zero il codominio S^0 non è connesso e il grado globale usato qui non si applica. Nell'esercizio 12 sono esplicitate compattezza e assenza di bordo; nell'esempio circolare n è un intero non nullo, altrimenti non si ha un'immersione.

Convenzioni conservate

Il prodotto esterno è quello normalizzato degli autori, senza introdurre fattori aggiuntivi: $T \wedge S = \mathrm{Alt}(T \otimes S)$. In particolare $(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det[\phi_i(v_j)]/p!$. La forma di volume, indicata qui ν_X, vale $1/k!$ su una base ortonormale positiva. Nonostante questo valore tensoriale, la definizione dell'integrale $\int a\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int a\, dx_1 \cdots dx_k$ conserva l'usuale volume euclideo. L'operatore indotto in coomologia è indicato $f^{\#}$, per distinguerlo dal pullback f^* sulle forme.

Appendici e apparati: interventi ulteriori del traduttore

La nota di errata fornita non contiene voci relative alle due appendici o agli apparati finali. Gli interventi qui elencati derivano dal confronto matematico con la scansione e sono distinti dagli errata degli autori o del corso.

p. 204. Nel Lemma 1 è esplicitata l'ipotesi $a < b$; per un intervallo degenere la disuguaglianza stretta con membro destro zero sarebbe impossibile. Nel Lemma 2 si mantengono le coordinate nell'ordine (c_j, x_j), coerente con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

p. 205. Gli aperti coordinati di X e Y appartengono a spazi euclidei delle rispettive dimensioni, non necessariamente entrambi a $\mathbb{R}^n$. Il caso del codominio di dimensione zero nel teorema di Sard è separato prima di usare n/p.

p. 206. La matrice a blocchi della derivata può essere rettangolare. L'argomento basato sul determinante è sostituito dall'identità $\operatorname{rank} dg = 1 + \operatorname{rank} dg^t$. La conservazione dei valori critici risulta così valida anche quando $n \neq p$.

p. 207. Nell'ultima frase della prova del Lemma 2 si corregge $C_k \setminus C_{k-1}$ in $C_k \setminus C_{k+1}$. Nella prova del Lemma 3 si specificano cubi chiusi contenuti in U, così da usare la compattezza; le stime non strette si accompagnano a un allargamento del cubo immagine per ottenere ricoprimenti aperti. Si corregge inoltre il centro del cubo immagine da $\delta(x)$ a $f(x)$.

p. 208. Il teorema di classificazione richiede che X sia connessa. Il lemma di lisciamento richiede la continuità di g; la prova è corretta scegliendo $0 \leq \rho \leq 1$ e dividendo la formula di k per $\int \rho$.

p. 209. La funzione di Morse usata nella classificazione viene scelta con derivata non nulla sul bordo. Le componenti non possono terminare nello stesso punto perché i due valori limite di f sarebbero allora uguali.

pp. 210–211. Il criterio per la catena chiusa è $p_0 = p_k$, non l'uguaglianza dei valori $a_0 = a_k$. Il riferimento a L_0 nell'affermazione di p. 210 è interpretato come L_1. Nel caso circolare il punto di giunzione $p_0 = p_k$ è incluso tra quelli da lisciare.

p. 215. Il gruppo abeliano pertinente è $SO(2)$, non tutto $O(2)$: si aggiunge «che preservano l'orientazione» all'affermazione sulle matrici ortogonali. Le osservazioni commerciali e l'indirizzo dell'editore sono conservati come testo storico del 1974.

Indice, p. 219. Il rinvio al numero globale di Lefschetz, stampato «19», è corretto in «119», coerentemente con la tavola dei simboli e con la collocazione della definizione. I rinvii dell'indice e della tavola dei simboli restano riferiti alla paginazione originale.

Precisazioni nelle soluzioni del capitolo I

Le soluzioni esplicitano le convenzioni di non vacuità e dimensione positiva dove necessarie. In I, §7, esercizio 17 la stabilità è affermata in un intorno del compatto K, non su tutto il dominio non compatto. In I, §7, esercizio 22 si aggiunge l'argomento di compattezza necessario alla finitezza degli equilibri, non deducibile dalla sola non degenerazione. In I, §8, esercizio 11 si sceglie un valore regolare non nullo e si assume $k \geq 1$. In I, §8, esercizio 14 si usa un raffinamento con chiusure subordinate per controllare rigorosamente l'incollamento delle inverse locali. Queste precisazioni appartengono alle soluzioni aggiunte e non sono attribuite agli errata allegati.

Capitolo finale. Soluzioni degli esercizi

Le soluzioni seguono la numerazione degli esercizi nei capitoli e nelle sezioni originali. Gli asterischi conservano il significato attribuito loro dagli autori. Si usano le ipotesi corrette nel testo e negli errata; eventuali ambiguità dell'enunciato sono discusse nella soluzione. Le verifiche aggiuntive delle appendici sono raccolte alla fine.

Soluzioni degli esercizi del capitolo I

Queste soluzioni sono un'aggiunta alla traduzione. I riferimenti hanno la forma capitolo, sezione, esercizio; gli asterischi dell'originale non modificano la numerazione. Sono esplicitate anche le ipotesi necessarie nei casi limite.

I, §1. Definizioni

1. Siano $i : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^l$ l'inclusione e $p : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime coordinate. Una funzione liscia usuale f si estende mediante $f \circ p$. Viceversa ogni estensione locale F restringe a $F \circ i$, che è liscia nel senso usuale. L'argomento vale componente per componente.

2. Se F estende f su $U \cap X$, la stessa F estende $f|_Z$ su $U \cap Z$. Questo vale attorno a ciascun punto di Z.

3. Attorno a x scegliamo estensioni F di f e G di g attorno a $f(x)$. Per continuità restringiamo il dominio di F affinché la sua immagine sia nel dominio di G. Allora $G \circ F$ estende $g \circ f$. Se le due mappe sono diffeomorfismi, l'inversa della composta è $f^{-1} \circ g^{-1}$, liscia per quanto appena dimostrato.

4. (a) Si intende $a > 0$. L'inversa è $y \mapsto ay/\sqrt{a^2 + |y|^2}$: sostituendo si verificano entrambe le identità, e i denominatori non si annullano sui rispettivi domini. (b) Restringiamo una carta a una palla aperta centrata nel punto coordinato e precomponiamo la parametrizzazione con il diffeomorfismo da $\mathbb{R}^k$ a quella palla ottenuto da (a) e da una traslazione.

5. Una base $v_1, \dots, v_k$ di V definisce $\phi(t) = \sum_i t_i v_i$. Le coordinate inverse sono funzionali lineari su V, estendibili linearmente a $\mathbb{R}^N$ completando la base. Dunque ϕ e ϕ^{-1} sono lisce. Ogni mappa lineare su V ammette analogamente un'estensione lineare all'ambiente.

6. La funzione x^3 è liscia e strettamente crescente, con immagine $\mathbb{R}$. La sua inversa $y^{1/3}$ non è derivabile in 0, poiché il rapporto incrementale è $|y|^{-2/3}$.

7. Vicino a un punto non nullo dell'unione degli assi la dimensione è 1; quindi, se l'unione fosse una varietà, la componente contenente l'origine sarebbe unidimensionale. Un piccolo intorno connesso dell'origine privato dell'origine ha quattro componenti, mentre un intervallo privato di un punto interno ne ha due. Un diffeomorfismo, essendo un omeomorfismo, non può avere questa proprietà.

8. Per $a > 0$, l'applicazione

$$(u, v, z) \in S^1 \times \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{a + z^2}\, u, \sqrt{a + z^2}\, v, z)$$

ha inversa $(x, y, z) \mapsto (x/\sqrt{a + z^2}, y/\sqrt{a + z^2}, z)$ ed è un diffeomorfismo. Il cono per $a = 0$ ha dimensione 2 fuori dall'origine. Se fosse una varietà liscia anche nell'origine, il suo spazio tangente conterrebbe tutte le rette del cono, e quindi tre vettori linearmente indipendenti, per esempio $(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)$. Ciò contraddice la dimensione 2.

9. Si prendano le quattro parametrizzazioni $\phi_i : (-1,1) \to S^1$ del testo. Le sedici applicazioni $(s,t) \mapsto (\phi_i(s), \phi_j(t))$ ricoprono $S^1 \times S^1$ e hanno inverse lisce date dalle corrispondenti proiezioni coordinate. In alternativa bastano i quattro prodotti delle due carte stereografiche.

10. Un diffeomorfismo è

$$((u_1,u_2),(v_1,v_2)) \longmapsto ((a+bv_1)u_1, (a+bv_1)u_2, bv_2).$$

Infatti, posto $r = \sqrt{x^2+y^2}$, si ha $r \geq a - b > 0$, e l'inversa è $((x/r, y/r), ((r-a)/b, z/b))$. La distanza dalla circonferenza centrale è $\sqrt{(r-a)^2+z^2}$. Se $b = a$, il livello ha una strozzatura nell'origine: lì $r = a - \sqrt{a^2 - z^2} \sim z^2/(2a)$, sicché tutte le velocità delle curve nel livello sono verticali, incompatibilmente con una superficie liscia. Se $b > a$, i punti sull'asse z con $z = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$ sono punte coniche: presso il punto superiore $z - z_0 = (a/z_0)r + O(r^2)$. Il cono delle direzioni secanti non è un piano, come dovrebbe essere per una superficie liscia. Sono, rispettivamente, il toro a corno e il livello a forma di fuso con punte. Qui si usa la definizione mediante distanza, non l'intera superficie parametrica auto-intersecante ottenuta facendo ruotare un cerchio meridiano.

11. Per $k \geq 1$ una parametrizzazione globale renderebbe S^k diffeomorfa a un aperto non vuoto e compatto di $\mathbb{R}^k$, impossibile. Per $k = 0$, S^0 ha due punti mentre l'unico aperto non vuoto di $\mathbb{R}^0$ ne ha uno.

12. Si ha

$$\pi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \qquad \pi^{-1}(u,v) = \frac{(2u, 2v, u^2+v^2-1)}{1+u^2+v^2}.$$

La seconda formula ha norma 1 e terza coordinata minore di 1. Le sostituzioni danno le identità; i denominatori sono non nulli, dunque le mappe sono lisce.

13. Scrivendo un punto di S^k come $(x,t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, con $N = (0,1)$, le formule sono $\pi(x,t) = x/(1-t)$ e $\pi^{-1}(u) = (2u, |u|^2 - 1)/(1+|u|^2)$. La verifica è identica alla precedente.

14. Se F, G sono estensioni locali di f, g, allora $(x,y) \mapsto (F(x), G(y))$ è un'estensione locale liscia del prodotto.

15. La proiezione è la restrizione di una proiezione lineare degli spazi euclidei ambienti.

16. La mappa $x \mapsto (x,x)$ è liscia, biiettiva sulla diagonale e ha inversa la prima proiezione. Si applica la definizione di diffeomorfismo.

17. $F(x) = (x, f(x))$ è liscia e biiettiva sul grafico; l'inversa è ancora la prima proiezione. Trasportando le carte di X attraverso F si ottengono le carte del grafico.

18. (a) Per $x > 0$ ogni derivata è $P(1/x)e^{-1/x^2}$, con P polinomio. Poiché $t^m e^{-t^2} \to 0$ per $t \to \infty$ e ogni m, tutte queste derivate si raccordano in 0 alla funzione identicamente nulla a sinistra. L'induzione sui rapporti incrementali prova la liscezza e $f^{(j)}(0) = 0$ per ogni j. (b) Il prodotto indicato è liscio, positivo esattamente in (a,b) e a supporto in $[a,b]$. Il suo integrale totale è positivo e finito; il teorema fondamentale del calcolo dà le proprietà di h. (c) Sia h la funzione di (b) costruita con estremi a^2, b^2. Allora $1 - h(|x|^2)$ è la funzione richiesta, liscia anche in $x = 0$.

I, §2. Derivate e spazi tangenti

1. L'inclusione si estende alla mappa identica dell'ambiente. La sua derivata è dunque l'identità sui vettori di $T_x(X)$, considerati in $T_x(Y)$.

2. Una parametrizzazione di X attorno a x si può restringere affinché la sua immagine sia contenuta in U. Il differenziale che definisce lo spazio tangente è lo stesso per U e per X.

3. Con la parametrizzazione lineare $\phi : \mathbb{R}^k \to V$ si ha $d\phi = \phi$, quindi $T_x(V) = \operatorname{Im}\phi = V$ per ogni x.

4. Dalle identità $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ segue, per la catena, $d(f^{-1})_{f(x)} df_x = I$ e $df_x d(f^{-1})_{f(x)} = I$.

5. Un diffeomorfismo indurrebbe un isomorfismo $\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^l$ sugli spazi tangenti. Quindi $k = l$.

6. Derivando $|c(t)|^2 = 1$ lungo una curva della circonferenza si ottiene $ac_1' + bc_2' = 0$. Il tangente è quindi contenuto in $(a, b)^\perp$; entrambi hanno dimensione 1 e coincidono. Il vettore non nullo $(-b, a)$ ne è una base.

7. Si ha $T_p S^2 = p^\perp$. Se $a^2 + b^2 > 0$, una base è $(-b, a, 0)$ e $(-ac, -bc, a^2 + b^2)$: i due vettori sono non nulli, ortogonali fra loro e a p. Se $a = b = 0$, si prendono $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

8. Il differenziale di $x^2 + y^2 - z^2$ nel punto indicato è $(u, v, w) \mapsto 2\sqrt{a}\, u$. Il tangente è il piano $u = 0$, generato da $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

9. (a) La derivata di una parametrizzazione prodotto è la somma diretta delle due derivate, e la sua immagine è $T_x X \times T_y Y$. (b) La proiezione ambiente ha derivata $(v, w) \mapsto v$. (c) La derivata della componente costante è zero: $df_x(v) = (v, 0)$. (d) Derivando le due componenti del prodotto si ottiene $(v, w) \mapsto (df_x v, dg_y w)$.

10. (a) Le due componenti di f sono l'identità, dunque $df_x(v) = (v, v)$. (b) Poiché $f : X \to \Delta$ è un diffeomorfismo, l'immagine di df_x è tutto $T_{(x,x)}\Delta$, cioè la diagonale dei tangenti.

11. (a) Si derivano le componenti: $dF_x(v) = (v, df_x v)$. (b) F è un diffeomorfismo sul grafico e perciò la sua derivata ne parametrizza lo spazio tangente, che è precisamente grafico(df_x).

12. In coordinate euclidee dc_{t_0} è la matrice colonna $(c_1'(t_0), \ldots, c_k'(t_0))$, che applicata a 1 dà il vettore dichiarato. Per una carta ϕ con $\phi(u) = x$ e per $v \in T_x X$, scegliamo w con $d\phi_u(w) = v$; la curva $c(t) = \phi(u + tw)$, per t vicino a zero, ha velocità v. Viceversa la derivata di qualsiasi curva ha immagine nello spazio tangente per la definizione di derivata fra varietà.

I, §3. Immersioni

1. Se A è invertibile, l'inversa è $y \mapsto A^{-1}(y - b)$ ed è liscia. Se non lo è, un vettore non nullo di $\ker A$ mostra che la mappa non è iniettiva.

2. L'inclusione $Z \hookrightarrow X$ è un'immersione. Il teorema locale delle immersioni la rende $(u_1, \ldots, u_l) \mapsto (u_1, \ldots, u_l, 0, \ldots, 0)$. Poiché la topologia di Z è quella di sottospazio, si può restringere l'intorno ambiente in modo che non vi siano altri punti di Z oltre a questo pezzo parametrizzato. Le ultime $k - l$ coordinate definiscono allora esattamente $Z \cap U$.

3. f' non si annulla e, per continuità e connessione di $\mathbb{R}$, ha segno costante. Quindi f è strettamente monotona e iniettiva. La sua immagine è connessa e aperta, perché f è localmente un diffeomorfismo; è quindi un intervallo aperto. Le inverse locali si incollano nell'inversa liscia globale.

4. Si prenda $f(s, t) = (e^s \cos t, e^s \sin t)$. Il determinante jacobiano è $e^{2s} > 0$, ma $f(s, t + 2\pi) = f(s, t)$.

5. Un diffeomorfismo locale è aperto. Se è anche iniettivo, l'inversa su $f(X)$ è definita e coincide in ogni intorno con una delle inverse locali lisce; è quindi liscia globalmente.

6. (a) Il prodotto di due mappe lineari iniettive è iniettivo. (b) La composta di due mappe lineari iniettive è iniettiva, e si applica la catena. (c) La restrizione di una mappa lineare iniettiva a un sottospazio resta iniettiva. (d) In dimensioni uguali, un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se è un isomorfismo; si applica il teorema della funzione inversa.

7. (a) $g'(t) = 2\pi(-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$ non è mai nullo e dominio e codominio hanno dimensione 1. (b) Se due punti di L hanno la stessa immagine, la loro differenza appartiene a $\mathbb{Z}^2$. Scrivendola come $(s, \alpha s)$ con α irrazionale, si ottiene $s \in \mathbb{Z}$ e $\alpha s \in \mathbb{Z}$, dunque $s = 0$.

8. La mappa è $(\cosh t, \sinh t)$; la derivata $(\sinh t, \cosh t)$ non si annulla, e sinh è strettamente crescente. La norma tende a infinito per $|t| \to \infty$, quindi la mappa è propria. L'immagine soddisfa $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$, e ogni punto di questo ramo corrisponde a $t = \operatorname{arsinh} y$.

9. (a) Una matrice $N \times k$ di rango k, le cui colonne sono una base di $T_x X$, ha un minore $k \times k$ non nullo. Le righe corrispondenti individuano una proiezione coordinata che è un isomorfismo sul tangente; il teorema della funzione inversa la rende una carta vicino a x. (b) Sia $h : U \to V$ l'inversa della proiezione sulle prime k coordinate. Le prime componenti di $h(a)$ sono a; ponendo $g_i = h_i$ per $i > k$, si ottiene esattamente il grafico richiesto.

10. L'iniettività su Z, la compattezza e l'immersione implicano che $f|_Z$ è un embedding. Restringiamoci all'aperto dove df è invertibile. Se nessun intorno di Z fosse un dominio d'iniettività, scegliendo intorni sempre più piccoli con chiusura in un intorno relativamente compatto si troverebbero $a_j \neq b_j$ con $f(a_j) = f(b_j)$ e distanza da Z tendente a zero. Sottosuccessioni convergono ad $a, b \in Z$; continuità e iniettività su Z danno $a = b$. Ma vicino a questo punto f è iniettiva per il teorema della funzione inversa: contraddizione. L'esercizio 5 conclude.

I, §4. Sommersioni

1. In coordinate, una sommersione è una proiezione $(u, v) \mapsto u$, che manda aperti in aperti. L'immagine di un aperto è unione delle immagini di tali pezzi locali ed è quindi aperta.

2. (a) $f(X)$ è aperto per l'esercizio 1 e compatto, dunque chiuso in Y. È non vuoto e Y è connessa, perciò coincide con Y. (b) Questo costringerebbe $\mathbb{R}^n$ a essere compatto; è impossibile per $n > 0$.

3. La prima coordinata rende la curva iniettiva e propria e la sua derivata ha prima componente 1. Le funzioni $g_1 = y - x^2$ e $g_2 = z - x^3$ ne definiscono l'immagine; i differenziali $(-2x, 1, 0)$ e $(-3x^2, 0, 1)$ sono indipendenti su tutto $\mathbb{R}^3$.

4. Scegliamo coordinate adattate a $X \subset Y$, con X definita dalle prime $m = \operatorname{codim}_Y X$ coordinate nulle. All'interno di X, scegliamo coordinate adattate a Z mediante altre $l - m = \operatorname{codim}_X Z$ coordinate. Il cambiamento di coordinate su X si estende mantenendo le coordinate normali: $(u, v) \mapsto (u, \psi(v))$. Le prime l coordinate del sistema risultante hanno differenziali indipendenti e definiscono Z, mentre le prime m definiscono X.

5. $df = (2x, 2y, -2z)$ si annulla soltanto nell'origine, di valore 0. La dilatazione $u \mapsto \sqrt{b/a}\, u$ manda il livello a sul livello b. Per $c > 0$ il livello è un iperboloide a una falda, diffeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$; per $c < 0$ ha due falde, ciascuna diffeomorfa a $\mathbb{R}^2$; per $c = 0$ è il cono singolare.

6. Derivando $p(tx) = t^m p(x)$ in $t = 1$ si ottiene $dp_x(x) = mp(x)$. Se $dp_x = 0$ e $m > 0$, necessariamente $p(x) = 0$. Ogni livello non nullo è dunque regolare, di dimensione $k - 1$ quando non vuoto. La dilatazione di fattore $(b/a)^{1/m} > 0$ identifica i livelli dello stesso segno.

7. La fibra è una sottovarietà discreta e un sottoinsieme chiuso di un compatto, quindi è finita. Scegliamo intorni disgiunti W_i nei quali f sia un diffeomorfismo. Il compatto $K = X \setminus \bigcup_i W_i$ ha immagine chiusa che non contiene y. Un intorno U di y contenuto in $Y \setminus f(K)$ e in ogni $f(W_i)$ soddisfa la tesi con $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$. Per fibra vuota basta prendere U disgiunto da $f(X)$.

8. Si intende $m \geq 1$. Il differenziale reale della mappa olomorfa p è la moltiplicazione complessa per $p'(z)$; il suo determinante reale è $|p'(z)|^2$. Poiché p' è un polinomio non nullo, ha soltanto un numero finito di zeri.

9. $O(n)$ è chiuso, essendo il livello $AA^t = I$ di un'applicazione continua. Ogni riga ha norma 1, perciò tutte le entrate sono limitate in valore assoluto da 1. Il teorema di Heine–Borel implica la compattezza.

10. La derivata di $A \mapsto AA^t$ nell'identità è $B \mapsto B + B^t$. Il tangente al livello è quindi il suo nucleo: le matrici antisimmetriche.

11. (a) Se $\det A \neq 0$, lungo tA si ha $\det(tA) = t^n \det A$, con derivata non nulla in $t = 1$. Il livello 1 è pertanto regolare, di dimensione $n^2 - 1$. Moltiplicazione e inversa sono lisce, la seconda per la formula con l'aggiunta classica e il determinante. (b) Da $\det(I + tB) = 1 + t \operatorname{tr} B + O(t^2)$ segue $T_I SL(n) = \{B : \operatorname{tr} B = 0\}$.

12. Per $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ il gradiente di det è $(d, -c, -b, a)$, nullo soltanto per $A = 0$. Il livello zero in $M(2) \setminus \{0\}$ è quindi una sottovarietà di dimensione 3 e coincide con le matrici di rango 1.

13. Nell'aperto dove un minore $r \times r$ è invertibile scriviamo A a blocchi come nel testo. Operazioni invertibili su righe e colonne mostrano $\operatorname{rank} A = r + \operatorname{rank}(E - DB^{-1}C)$. La mappa $A \mapsto E - DB^{-1}C$ ha differenziale suriettivo perché la derivata rispetto a E è l'identità. Il suo livello zero è quindi di codimensione $(m - r)(n - r)$. Gli aperti di questo tipo ricoprono il luogo di rango r; per $r = 0$ esso è il solo punto zero.

I, §5. Trasversalità

1. (a) Il tangente a V è V e la derivata di A è A in ogni punto. Poiché $A(0) \in V$, la condizione è precisamente $A(\mathbb{R}^k) + V = \mathbb{R}^n$. (b) Si applica (a) all'inclusione di W nell'ambiente.

2. (a) Sì: piano e asse generano $\mathbb{R}^3$. (b) Sì: il secondo piano contiene un vettore con componente z non nulla. (c) No: entrambi sono contenuti nel piano xy. (d) Sì esattamente quando $k + l \geq n$, interpretando i sottospazi come le prime k e le ultime l coordinate di $\mathbb{R}^n$. (e) Sì esattamente quando $\max(k, l) = n$. (f) Sì: $(a, b) = (a - b, 0) + (b, b)$. (g) Sì: $A = (A + A^t)/2 + (A - A^t)/2$.

3. Poniamo $E_i = V_i^\perp$. L'identità $(\bigcap_i V_i)^\perp = E_1 + E_2 + E_3$ mostra che l'uguaglianza delle codimensioni equivale al fatto che questa somma sia diretta. Inoltre $V_i + (V_j \cap V_k) = \mathbb{R}^n$ equivale a $E_i \cap (E_j + E_k) = \{0\}$. Se la somma è diretta, tutte queste intersezioni sono nulle. Viceversa, una relazione $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ dà prima $e_1 = 0$ e poi $e_2 = e_3 = 0$ usando le condizioni per $i = 1, 2$. Ciò prova l'equivalenza.

4. L'inclusione dell'intersezione in ciascuna varietà dà $T_y(X \cap Z) \subset T_y X \cap T_y Z$. Per trasversalità, la dimensione del membro destro è $\dim X + \dim Z - \dim Y$, che è anche la dimensione del membro sinistro per il teorema della controimmagine. Quindi i due sottospazi coincidono.

5. Localmente $Z = g^{-1}(0)$ con g una sommersione e $T_{f(x)} Z = \ker dg_{f(x)}$. Per trasversalità, $g \circ f$ è una sommersione nel punto e $W = (g \circ f)^{-1}(0)$, dunque

$$T_x W = \ker(dg_{f(x)} df_x) = df_x^{-1}(T_{f(x)} Z).$$

Se f è l'inclusione di X in Y, questa è proprio la formula dell'esercizio 4.

6. Sì. In $\mathbb{R}^2$, prendendo $X = Z$ uguali all'asse x, l'intersezione è una retta di codimensione 1, anziché 2. Prendendo l'asse x e la parabola $y = x^2$, l'intersezione è il punto origine, di codimensione 2, pur mancando la trasversalità. Questi due esempi mostrano sia il fallimento della formula, sia la possibilità che essa valga accidentalmente.

7. Posto $z = g(f(x))$, sia $q : T_zZ \to T_zZ/T_zW$ la proiezione. La trasversalità di g dice che $q\,dg$ è suriettiva, e il tangente a $g^{-1}W$ è il suo nucleo. Pertanto

$$df(T_xX) + \ker(q\,dg) = T_{f(x)}Y \quad \iff \quad q\,dg\,df \text{ è suriettiva.}$$

La prima condizione è $f \pitchfork g^{-1}W$, la seconda è $g \circ f \pitchfork W$.

8. Sommando e sottraendo le equazioni si ottengono $x^2 + y^2 = (a+1)/2$ e $z^2 = (a-1)/2$. Per $a > 1$ l'intersezione è costituita da due circonferenze; i normali $(x, y, -z)$ e (x, y, z) sono indipendenti, dunque l'intersezione è trasversale. Per $a = 1$ è la circonferenza equatoriale e i normali coincidono: non è trasversale. Per $0 < a < 1$ non vi è intersezione e la trasversalità è vacua. Per $a < 0$ il secondo livello è vuoto; per $a = 0$ è il solo punto origine, disgiunto dall'iperboloide, ma non è una sfera bidimensionale.

9. Il quoziente di $V \times V$ per Δ si identifica con V mediante $(u, v) \mapsto v - u$. Sul grafico di A questa mappa è $A - I$. La trasversalità equivale dunque alla sua suriettività e, in dimensione finita uguale, alla sua invertibilità: 1 non deve essere un autovalore.

10. Vicino a un punto fisso, in coordinate comuni nel dominio e nel codominio, la mappa $u \mapsto f(u) - u$ ha derivata invertibile. Quindi quel punto fisso è isolato. L'insieme dei punti fissi è chiuso nel compatto X, dunque compatto; un compatto discreto con tutti i punti isolati è finito.

11. Sia f una funzione liscia con insieme degli zeri C. Il grafico $X = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^k\}$ è una sottovarietà diffeomorfa a $\mathbb{R}^k$ e incontra l'iperpiano $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ esattamente in $C \times \{0\}$.

I, §6. Omotopia e stabilità

1. La funzione ρ si costruisce con I, §1, esercizio 18(b), usando gli estremi $1/4, 3/4$. La composta $\widetilde{F}(x, t) = F(x, \rho(t))$ è liscia e ha le due proprietà richieste.

2. Riflessività: $F(x, t) = f(x)$. Simmetria: si sostituisce t con $1 - t$. Per la transitività rendiamo le due omotopie costanti vicino agli estremi mediante l'esercizio 1 e definiamo $H(x, t) = F(x, 2t)$ per $t \le 1/2$, $H(x, t) = G(x, 2t - 1)$ per $t \ge 1/2$. Vicino alla giunzione entrambe sono costanti e uguali a $g(x)$, quindi l'incollamento è liscio.

3. La relazione descritta è di equivalenza grazie alla concatenazione liscia precedente. Ogni classe contiene, assieme a un punto, un intero piccolo intorno coordinato: i segmenti nelle coordinate forniscono le curve. Le classi sono dunque aperte; il complemento di ciascuna, unione delle altre, è aperto. Per connessione esiste una sola classe.

4. Se $H : X \times I \to X$ contrae X al punto x_0, per ogni $f : Y \to X$ la mappa $H(f(y), t)$ contrae f alla costante x_0. Tutte le mappe sono quindi omotope fra loro. Viceversa, prendendo $Y = X$, l'identità è omotopa a una costante. Si intende X non vuota.

5. $H(x, t) = (1 - t)x$ è una contrazione a zero.

6. Una contrazione dà cammini verso il punto di contrazione e contrae ogni mappa $S^1 \to X$ per composizione, quindi implica la semplice connessione. Il viceversa è falso: S^2 è semplicemente

connessa per I, §7, esercizio 6, ma non contraibile. Ad esempio, usando la teoria del grado del capitolo III, l'identità ha grado 1 e una costante grado 0, mentre il grado è invariante per omotopia.

7. Se $k = 2m - 1$, identifichiamo $\mathbb{R}^{k+1}$ con m piani coordinati e su ognuno applichiamo la rotazione di angolo πt. La matrice a blocchi risultante è ortogonale, preserva S^k, vale I per $t = 0$ e $-I$ per $t = 1$.

8. Per t piccolo, la stabilità degli embedding e dei diffeomorfismi locali rende f_t iniettiva e localmente diffeomorfa. L'immagine di ogni componente compatta di X è aperta e chiusa nella componente di Y che la contiene. Per continuità in t, quella componente è la stessa raggiunta da f_0; siccome f_0 è un diffeomorfismo, tutte le componenti di Y sono raggiunte. Dunque f_t è biiettiva e le inverse locali ne rendono liscia l'inversa.

9. $f_0(x) = x$, mentre per $t > 0$ si ha $f_t(x) = 0$ quando $|x| > 2/t$. In questa regione la derivata è zero: falliscono diffeomorfismo locale, immersione, sommersione e trasversalità a $\{0\}$. La mappa non è iniettiva né propria e non è un diffeomorfismo. Un altro esempio è $g_t(x) = x - tx^3$, che per ogni $t > 0$ ha punti con derivata nulla e non è iniettivo; mostra i corrispondenti fallimenti pur senza diventare costante in una semiretta.

10. Per Z compatta si applica direttamente la stabilità degli embedding. Per un controesempio con codimensione positiva poniamo $Z = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e $i_t(x, 0) = (x\rho(tx), 0)$. i_0 è l'inclusione; per ogni $t > 0$ la mappa è costante nelle due code e non è un embedding.

11. Le prove del teorema usano la continuità delle derivate, la compattezza del dominio e, per l'iniettività, l'estrazione di sottosuccessioni. Nessun passaggio richiede che il parametro sia unidimensionale: se esistessero parametri cattivi arbitrariamente vicini a s_0, si sceglierebbe $s_j \to s_0$ e si ripeterebbero gli stessi argomenti. La liscezza su un sottoinsieme S fornisce proprio le estensioni locali e la continuità necessarie.

I, §7. Sard e funzioni di Morse

1. Per ogni intero $m > 0$, il pezzo $[-m, m]^k \times \{0\}$ è ricoperto da un parallelepipedo aperto di volume arbitrariamente piccolo, rendendo piccoli i lati nelle ultime $l - k$ direzioni. L'unione numerabile su m dà la tesi.

2. Basta considerare $A \times [-m, m]^l$. Se i parallelepipedi S_i ricoprono A con somma dei volumi minore di $\epsilon/(2m + 2)^l$, i prodotti $S_i \times (-m - 1, m + 1)^l$ ricoprono questo insieme con somma minore di ϵ. Si prende poi l'unione numerabile su m. Ponendo $A = \{0\} \subset \mathbb{R}^{l-k}$ e permutando le coordinate si ritrova l'esercizio 1.

3. In carte adattate, Z coincide localmente con un sottospazio coordinato di dimensione minore. Questo ha misura nulla per l'esercizio 1; i cambiamenti lisci di coordinate preservano gli insiemi di misura nulla. Un ricoprimento numerabile di carte, ottenuto dalla seconda numerabilità, conclude.

4. Enumeriamo i razionali q_j. Per $\epsilon > 0$, ricopriamo q_j con un intervallo di lunghezza $\epsilon/2^{j+1}$. La somma è minore di ϵ; la densità segue invece dalla proprietà archimedea, che fornisce un razionale in ogni intervallo aperto.

5. Sia β liscia, nulla vicino agli estremi di $[0, 1]$ e uguale a 1 in un sottointervallo interno. Definiamo $f(x) = r_i\beta(x - i)$ su $[i, i + 1]$, $i \geq 0$, e $f = 0$ per $x < 0$. I raccordi sono lisci perché la funzione è nulla vicino a ciascun intero. Ogni r_i è il valore di un tratto costante, quindi è critico; i valori critici sono pertanto densi.

6. S^k è connessa per $k > 1$. Ogni $f : S^1 \to S^k$ ha immagine di misura nulla per Sard, poiché tutti i punti del dominio sono critici. Esiste p fuori dall'immagine. La proiezione stereografica identifica $S^k \setminus \{p\}$ con $\mathbb{R}^k$, dove una contrazione lineare contrae f; riportandola sulla sfera otteniamo l'omotopia richiesta.

7. Localmente $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $k < l$. L'insieme $U \times \{0\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^l$, mentre $F(x,t) = f(x)$ è liscia su $U \times \mathbb{R}^{l-k}$. Per l'ipotesi di conservazione della misura nulla, $F(U \times \{0\}) = f(U)$ ha misura nulla. Si usano estensioni su piccoli aperti o la versione locale del teorema; le carte numerabili riducono il caso generale a questo.

8. (a) Il gradiente è $(2x, 12y^2)$: l'origine è l'unico punto critico, ma l'hessiana $\operatorname{diag}(2,0)$ è degenere. Il termine $4y^3$ cambia segno: non è un estremo. (b) $f = (x-y)^2$: tutti i punti della retta $x = y$ sono critici; l'hessiana ha rango 1. L'origine è un minimo non stretto, non isolato. (c) Il gradiente $(2x, 4y^3)$ si annulla soltanto in zero, che è un minimo stretto degenere. (d) L'hessiana in zero è $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, di determinante -119: il punto è non degenere, isolato e di sella. (e) L'hessiana è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, di determinante -100: ancora un punto di sella non degenere e isolato; il gradiente $(10y, 10x + 2y + 225y^2)$ si annulla soltanto nell'origine.

9. In un punto critico non degenere a, si ha $f(x) - f(a) = (x-a)^2 g(x)$ con $g(a) = f''(a)/2 \neq 0$. Vicino ad a il segno di g è costante. La coordinata $u = (x-a)\sqrt{|g(x)|}$ ha derivata non nulla in a, quindi è una coordinata locale, e $f = f(a) + \operatorname{sgn}(g(a))u^2$. Un ulteriore riscalamento dà la convenzione con coefficiente $f''(a)$ usata nell'enunciato del testo.

10. Derivando due volte si ottiene $H = A + A^t$, e $\nabla f(x) = Hx$. Il luogo critico è esattamente $\ker H$. Se contiene un vettore non nullo contiene tutta la retta che esso genera; altrimenti è il solo zero. Questo prova anche l'equivalenza richiesta.

11. Il lemma di Morse dà una forma quadratica con matrice simmetrica non singolare. Per il teorema spettrale un cambiamento ortogonale la diagonalizza con autovalori non nulli; riscalando la coordinata i di $\sqrt{|\lambda_i|}$ si ottengono i coefficienti $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} \lambda_i$.

12. Se tutti i segni sono positivi, $f - f(a) > 0$ vicino ad a fuori da a: minimo stretto. Con tutti i segni negativi si ha un massimo stretto. Con segni misti, lungo due assi coordinati di segno opposto si trovano valori rispettivamente maggiori e minori di $f(a)$ arbitrariamente vicino ad a.

13. Per $n = 2$, scrivendo $\det A = ad - bc$, il solo punto critico è zero e l'hessiana della forma quadratica è invertibile. Per $n > 2$, nell'origine tutte le derivate prime e seconde del polinomio omogeneo di grado n si annullano: zero è un punto critico degenere.

14. Il differenziale dell'altezza è la restrizione del funzionale $v \mapsto v_k$ a $x^\perp$. Si annulla esattamente quando x è parallelo a e_k, cioè ai due poli. In coordinate $u \in \mathbb{R}^{k-1}$ attorno ai poli, l'altezza è $\pm\sqrt{1 - |u|^2}$, con hessiana $\mp I$ in zero. Il polo nord è un massimo e il sud un minimo.

15. Si applica il teorema delle perturbazioni f_a alla funzione $f = 0$: quasi ogni $a \in \mathbb{R}^N$ dà una funzione di Morse $a \cdot x$ su X.

16. La somma è di quadrati e si annulla esattamente quando il gradiente è nullo e l'hessiana è singolare, cioè esattamente in un punto critico degenere.

17. La funzione continua $Q(x,t) = \det H_{f_t}(x)^2 + |\nabla f_t(x)|^2$ è positiva su $K \times \{0\}$. Per compattezza esistono $\eta > 0$, un intorno U_K di K e $\delta > 0$ tali che $Q(x,t) > \eta$ per $x \in U_K$ e $|t| < \delta$. L'esercizio 16 conclude che f_t è di Morse su U_K. La conclusione è locale vicino a K, non su tutta $\mathbb{R}^k$.

18. Ricopriamo X con un numero finito di intorni coordinati contenenti compatti la cui unione è X. Si applica l'esercizio 17 nelle carte e si prende il minimo dei finitamenti molti intervalli

ammessi per il parametro. La non degenerazione ai punti critici è invariante per cambiamento di coordinate.

19. I punti critici di f sono isolati e formano un chiuso compatto, quindi sono finiti. Scegliamo intorni disgiunti e funzioni ρ_i come nel suggerimento. Dove $\rho_i = 1$ la perturbazione è costante e non cambia le derivate. Sul compatto rimanente $|df|$ ha un minimo positivo; per coefficienti abbastanza piccoli, la derivata della perturbazione ha norma inferiore a tale minimo e non introduce punti critici. Evitando le finitamenti molte equazioni affini $f(x_i) + a_i = f(x_j) + a_j$ si rendono distinti tutti i valori. I coefficienti possono essere arbitrariamente piccoli, anche rispetto a qualunque numero finito di seminorme C^r.

20. (a) La stabilità della condizione di Morse per famiglie lisce a parametro multidimensionale, provata come nell'esercizio 18, dà l'apertura. (b) Scegliamo compatti K_j che ricoprano X. La condizione «nessun punto critico degenere in K_j» è aperta nei parametri: per una successione di parametri cattivi convergente, un punto degenere corrispondente ha una sottosuccessione convergente in K_j e il limite rimane degenere. L'intersezione di questi aperti è l'insieme dei parametri buoni. (c) Il complementare è dunque unione numerabile di chiusi; intersecandoli con palle chiuse si ottiene un'unione numerabile di compatti. Il teorema di Fubini dell'appendice si applica a questi compatti: le loro sezioni sono contenute nelle sezioni nulle già individuate nella dimostrazione. L'unione numerabile resta nulla.

21. Ogni punto di X ha un intorno sul quale ϕ è un embedding e alcune k componenti di ϕ sono coordinate. Su ciascun tale intorno l'argomento del teorema delle perturbazioni di Morse, con le altre componenti come funzioni lisce delle coordinate, dà un insieme nullo di parametri cattivi, tramite Sard e Fubini. Una famiglia numerabile di questi intorni ricopre X; l'unione dei loro insiemi eccezionali è ancora nulla. Fuori da essa non vi sono punti critici degeneri su X.

22. Poniamo $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$. La mappa $r = (r_1, \dots, r_4)$ è un'immersione: se $dr_i(v) = v \cdot (x - x_i)/r_i = 0$ per tutti gli i, allora v è ortogonale a tutte le differenze $x_i - x_j$, che generano $\mathbb{R}^3$ per l'indipendenza affine dei quattro punti; dunque $v = 0$. Anche $\phi = (1/r_1, \dots, 1/r_4)$ è un'immersione, essendo ottenuta da r con un diffeomorfismo del quadrante positivo. L'esercizio 21 implica che $V_q = q \cdot \phi$ è di Morse per quasi ogni q.

Per la *finitezza*, che non segue dalla sola non degenerazione su un dominio non compatto, escludiamo anche gli iperpiani $q_i = 0$ e $Q = \sum_i q_i = 0$, un insieme nullo. Vicino a x_i, il termine $-q_i(x - x_i)/|x - x_i|^3$ domina tutti gli altri termini del gradiente, che rimangono limitati; quindi non vi sono equilibri sufficientemente vicini alle cariche. All'infinito, uniformemente nella direzione,

$$\nabla V_q(x) = -Q\frac{x}{|x|^3} + O(|x|^{-3}),$$

e il termine principale, di norma $|Q|/|x|^2$, impedisce l'annullamento per $|x|$ grande. Tutti gli equilibri appartengono quindi a un compatto di X; sono un insieme chiuso e discreto, dunque finito.

I, §8. Embedding e fibrati tangenti

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}^k$, $T_x\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$. La definizione dà quindi $T(\mathbb{R}^k) = \{(x, v) : x, v \in \mathbb{R}^k\} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, con la struttura liscia usuale.

2. In una carta del fibrato indotta da $\phi : U \to X$, il punto (x, v) si rappresenta come (u, w) con $x = \phi(u)$ e $v = d\phi_u(w)$. La mappa diventa $(u, w) \mapsto (u, g(\phi(u))w)$, manifestamente liscia. La positività rende inoltre liscia l'inversa, con fattore $1/g$.

3. La mappa è $((x,y),(v,w)) \mapsto ((x,v),(y,w))$. È biiettiva per la formula del tangente al prodotto; nelle carte di fibrato è soltanto una permutazione delle coordinate, dunque un diffeomorfismo.

4. Se $x = (a,b) \in S^1$, ogni vettore tangente è un unico multiplo $t(-b,a)$. Il diffeomorfismo cercato è $(x,t) \mapsto (x, t(-b,a))$; l'inversa manda (x,v) in $(x, v \cdot (-b,a))$.

5. Nelle carte del fibrato p diventa $(u,w) \mapsto u$, il cui differenziale è suriettivo.

6. A un campo ambiente $v(x) \in T_xX$ si associa la sezione $s(x) = (x, v(x))$. Viceversa, dalla condizione $p \circ s = \mathrm{id}$ segue che $s(x) = (x, v(x))$ con $v(x)$ tangente; la seconda proiezione rende v liscia. Queste costruzioni sono inverse.

7. Per $k = 2m-1$ scriviamo $x \in \mathbb{R}^{2m}$ a coppie e poniamo $v(x) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$. Si ha $v(x) \cdot x = 0$ e $|v(x)| = |x| = 1$ su S^k, quindi è un campo tangente liscio mai nullo.

8. Normalizziamo v mediante $w = v/|v|$. Allora

$$H(x,t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)w(x)$$

ha norma 1, perché $x \perp w(x)$, e va da x a $-x$ in modo liscio.

9. Per $h(x,v) = |v|^2$, la curva $(x, (1+t)v)$ dà $dh_{(x,v)}(0,v) = 2|v|^2$. Sul livello 1 questo è non nullo, quindi 1 è un valore regolare e $S(X)$ ha dimensione $2k-1$. Se $k = 0$, il fibrato in sfere è vuoto e la formula dimensionale va intesa soltanto formalmente.

10. Partiamo da un'immersione $f : X \to \mathbb{R}^N$, ad esempio l'inclusione ambiente. Se $N > 2k$, la mappa

$$S(X) \longrightarrow S^{N-1}, \qquad (x,v) \longmapsto \frac{df_x(v)}{|df_x(v)|}$$

ha dominio di dimensione $2k-1 < N-1$, quindi la sua immagine ha misura nulla. Scegliamo una direzione unitaria a non nell'immagine; anche $-a$ non vi appartiene, per la simmetria $v \mapsto -v$. La proiezione ortogonale su $a^\perp$ composta con f resta un'immersione: un vettore nel nucleo darebbe una direzione tangente parallela ad a. Iterando si raggiunge $N = 2k$. Per $k = 0$ ogni applicazione verso $\mathbb{R}^0$ è un'immersione, poiché i tangenti sono nulli.

11. Si intende $k \geq 1$ e si sceglie un valore regolare $a \neq 0$, possibile per Sard. Per compattezza di X e iniettività di df, il minimo di $|df_x(v)|$ su $S(X)$ è un numero $c > 0$. Se $df_x(v) = a$, allora $|v| \leq |a|/c$. La fibra è dunque un chiuso in un disco fibrato compatto; è inoltre discreta perché $\dim T(X) = 2k$ e a è regolare. Quindi è finita. Il differenziale di $\pi \circ f$ può avere nucleo non nullo soltanto se $df_x(v)$ è un multiplo non nullo di a; riscalando v questo equivale a $df_x(v) = a$. I punti eccezionali appartengono alla proiezione della fibra finita.

12. Le colonne della derivata sono $(1,y,0)$ e $(0,x,2y)$, indipendenti salvo quando $x = y = 0$. Scrivendo le coordinate dell'immagine come (X,Y,Z), si ha

$$Y^2 = X^2 Z, \qquad Z \geq 0.$$

Viceversa, per $X \neq 0$ si ricostruisce $y = Y/X$, e per $X = 0$ si ha $Y = 0$, $y = \pm\sqrt{Z}$. Quindi queste equazioni descrivono esattamente l'immagine. La semiretta $X = Y = 0$, $Z > 0$ è una linea di auto-intersezione dei due fogli; essi terminano nel punto singolare dell'origine, il cross-cap (ombrello di Whitney).

13. Sia $\{\theta_i\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento dato, con supporti localmente finiti e ciascun supporto contenuto in un elemento del ricoprimento. Gli aperti $V_i = \{\theta_i > 0\}$ ricoprono X e sono localmente finiti, essendo contenuti nei rispettivi supporti. Formano il

raffinamento richiesto; l'indice del raffinamento non deve necessariamente coincidere con quello del ricoprimento iniziale.

14. Poniamo $A = f(Z)$. Poiché A è una sottovarietà, possiamo lavorare in un aperto $O \subset Y$ nel quale A è chiusa. Attorno a ogni $a \in A$ scegliamo un'inversa locale h_a di f che coincida su A con $(f|_Z)^{-1}$, restringendo dominio e carta adattata ad A. Scegliamo un raffinamento localmente finito $\{U_i\}$ che ricopra A, con $\overline{U_i} \subset V_i$, dove $h_i : V_i \to X$ è una di queste inverse; questo si ottiene mediante un raffinamento localmente finito e un restringimento del ricoprimento. Su U_i poniamo $g_i = h_i|_{U_i}$.

Fissato $a \in A$, soltanto finitamenti molti $\overline{U_i}$ incontrano un piccolo intorno di a. Eliminiamo restringendo l'intorno quelli le cui chiusure non contengono a. Per ciascuno dei rimanenti, h_i è definita in a e vale $(f|_Z)^{-1}(a)$. L'unicità dell'inversa locale di f in questo punto implica che queste finitamenti molte inverse coincidono in un intorno di a. Dunque l'insieme W del suggerimento contiene un intorno aperto W_0 di A. Le inverse vi si incollano in $g : W_0 \to X$. Si ha $f \circ g = \mathrm{id}$; localmente g è un diffeomorfismo, quindi $g(W_0)$ è aperto e contiene Z. La restrizione di f a questo aperto è il diffeomorfismo richiesto. Il controllo delle chiusure nel raffinamento è ciò che rende rigoroso l'argomento di finitezza locale del suggerimento.

15. Gli aperti $X \setminus A$ e $X \setminus B$ ricoprono X. Sia $\{\theta_i\}$ una partizione dell'unità subordinata a questo ricoprimento; raggruppiamo i termini secondo l'aperto a cui sono subordinati e poniamo $\phi = \sum_{\operatorname{supp}\theta_i \subset X\setminus A} \theta_i$, assegnando ciascun termine a uno solo dei due gruppi. La somma è localmente finita e liscia, con $0 \le \phi \le 1$. Su A tutti i termini del primo gruppo sono nulli, quindi $\phi = 0$; su B quelli del secondo gruppo sono nulli e la somma totale vale 1, quindi $\phi = 1$.

Soluzioni del capitolo II

§1. Varietà con bordo

1. Supponiamo $k \geq 1$ e che esista un diffeomorfismo $h : U \to V$. Sia $a = h^{-1}(0)$. La regola della catena rende dh_a invertibile. Per il teorema della funzione inversa, l'immagine di un intorno di a contiene un aperto euclideo attorno a 0, impossibile perché è contenuta in H^k. Il caso $k = 0$ è un'eccezione: i due modelli coincidono; la distinzione fra interno e bordo qui riguarda dimensioni positive.

2. Se un punto del bordo fosse mandato nell'interno, componendo le parametrizzazioni con f o f^{-1} otterremmo il diffeomorfismo escluso dall'esercizio 1. Quindi $f(\partial X) = \partial Y$. Le restrizioni di f e f^{-1} sono lisce e inverse fra loro.

3. Se il quadrato fosse una varietà liscia con bordo nella struttura indotta da $\mathbb{R}^2$, avrebbe dimensione due, perché contiene un aperto euclideo. Il vertice non può essere interno: una parametrizzazione in quel punto e il teorema della funzione inversa lo renderebbero interno al quadrato nel piano. Anche i punti vicini dei due lati sono sul bordo. In una carta che manda il vertice nell'origine di H^2, le due curve laterali vanno nella retta ∂H^2. Le loro derivate, immagini dei due vettori coordinati indipendenti, sono quindi dipendenti: contraddizione con l'invertibilità del differenziale. Il quadrato è invece una varietà topologica con bordo e una varietà liscia con angoli; l'esercizio riguarda la struttura liscia indotta.

4. Ponete $q(x, y, z) = a - x^2 - y^2 + z^2$. Il suo gradiente si annulla solo all'origine, dove $q = a > 0$; dunque 0 è un valore regolare. Il lemma del §1 applicato a $\{q \geq 0\}$ dà il risultato e il bordo $x^2 + y^2 - z^2 = a$.

5. Sulla sfera la disuguaglianza equivale a $1-2z^2 \leq a$. Per $a < -1$ l'insieme è vuoto; per $a = -1$ è formato dai due poli, una varietà di dimensione zero senza bordo. Per $-1 < a < 1$ sono le due calotte $|z| \geq \sqrt{(1-a)/2}$, ciascuna diffeomorfa a un disco chiuso, con due circonferenze di bordo complessive. Per $a \geq 1$ è tutta S^2, senza bordo. Se si richiede una *sottovarietà bidimensionale* con bordo, il caso $a = -1$ va escluso; la formulazione letterale consente anche la dimensione zero.

6. Scrivete il quoziente come $[0, 1] \times [-1, 1]$ con $(0, t) \sim (1, (-1)^n t)$. Se n è pari si ottiene il cilindro e i due lati $t = \pm 1$ danno due circonferenze distinte. Se n è dispari si ottiene il nastro di Möbius e gli stessi lati si concatenano in un'unica circonferenza. L'esercizio 2 impedisce un diffeomorfismo fra i due casi. La parità classifica il tipo astratto, non necessariamente l'immersione nello spazio.

7. Per una transizione di carte h con $h(0) = 0$ e $h(H^k) \subset H^k$, si ha per ogni $v \in H^k$:

$$dh_0(v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{h(tv) - h(0)}{t} \in H^k.$$

Usando la transizione inversa si ottiene l'uguaglianza $dh_0(H^k) = H^k$. La regola della catena mostra allora che le due immagini del semispazio nello spazio tangente coincidono.

8. Il complemento ortogonale di $T_x\partial X$ in $T_x X$ è una retta; i suoi due versori sono opposti e si trovano sui due lati del suo iperpiano di bordo. Per la liscezza, in una carta ponete $b = d\phi(e_k)$ e sottraete la proiezione ortogonale di b sul sottospazio generato da $d\phi(e_1), \ldots, d\phi(e_{k-1})$. Il vettore residuo w è liscio, non nullo e interno. La proiezione è liscia perché si esprime mediante l'inversa della matrice di Gram, invertibile. Quindi $\vec{n} = -w/|w|$ è liscia. Per H^k, $\vec{n} = -e_k$.

9. (a) L'interno è aperto, essendo ricoperto dalle immagini delle parti interne delle carte; il suo complementare ∂X è chiuso. Un chiuso di un compatto è compatto. (b) Esempi con bordo non vuoto: $[0, \infty)$ ha bordo $\{0\}$, e $S^1 \times [0, \infty)$ ha bordo $S^1 \times \{0\}$; entrambi sono non compatti.

10. In una carta $\phi : V \to U$ ponete $f = \mathrm{pr}_k \circ \phi^{-1}$. È non negativa, si annulla esattamente su ∂U, e il suo differenziale ha nucleo $T_z \partial X$. La normale interna ha ultima coordinata strettamente positiva nel modello tangente; la normale esterna ha quindi derivata strettamente negativa.

11. Ricoprite X con carte del bordo e con aperti interni. Sulle prime usate le funzioni f_i dell'esercizio 10; sugli aperti interni usate $f_i = 1$. Per una partizione dell'unità subordinata, $f = \sum \theta_i f_i$ è non negativa e si annulla esattamente sul bordo. In $z \in \partial X$ tutti i termini attivi hanno $f_i(z) = 0$, dunque

$$df_z(\vec{n}) = \sum_i \theta_i(z)\, d(f_i)_z(\vec{n}) < 0,$$

perché almeno un peso è positivo. Quindi 0 è regolare. Se il bordo è vuoto basta $f = 1$.

§2. Varietà unidimensionali

1. La risposta dipende da «deformare». Mediante omotopie arbitrarie si può farlo, perché $\mathbb{R}^3$ è contraibile. Attraverso embedding, invece, un nodo non banale non diventa una circonferenza senza attraversarsi. Per esempio il nodo trifoglio, il nodo torico $(2, 3)$, ha gruppo fondamentale del complementare $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$, ottenuto applicando van Kampen ai due tori solidi che il toro portante separa. Questo gruppo non è abeliano: manda a in una trasposizione e b in un ciclo di ordine tre, dando un quoziente S_3. Il complementare della circonferenza non annodata ha invece gruppo $\mathbb{Z}$. Un'isotopia induce un diffeomorfismo dei complementari, dunque non può collegarli. Il riferimento allo spago nell'esercizio intende questa seconda nozione.

2. Scegliete $p \in \partial B^n$ e $f(x) = p$. L'unico punto fisso è p.

3. Nel modello $S^1 \times B^2$, $f(z, w) = (e^{i\alpha} z, w)$, con $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$, è senza punti fissi. Per una regione non convessa come il toro solido, l'intersezione della semiretta con il bordo non produce in generale una scelta unica, continua e uguale all'identità su tutto il bordo. È precisamente qui che l'argomento per la palla fallisce.

4. Sia $h : B^n_a \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo, ad esempio $h(x) = x/\sqrt{a^2 - |x|^2}$ per $n \geq 1$. La traslazione $T(y) = y + e_1$ non ha punti fissi; quindi $h^{-1} \circ T \circ h$ è una mappa liscia della palla aperta in sé senza punti fissi.

5. Per $h(x) = f(x) - x$, $h(0) \geq 0$ e $h(1) \leq 0$. Il teorema dei valori intermedi dà uno zero.

6. Dato $\eta > 0$, approssimate f con un polinomio q tale che $|q - f| < \eta$. Allora $|q| \leq 1 + \eta$ e $p = q/(1 + \eta)$ manda la palla in sé, con $|p - f| < 2\eta$. Sia x_η un punto fisso di p, dato dal caso liscio. Se f non avesse punti fissi, per compattezza $|f(x) - x| \geq c > 0$. Scegliendo $2\eta < c$ avremmo $c \leq |f(x_\eta) - p(x_\eta)| < c$, assurdo.

7. Se A è singolare, 0 è un autovalore. Altrimenti $v \mapsto Av/|Av|$ è continua e manda il quadrante sferico Q in sé, perché le componenti di Av sono non negative. Il quadrante è omeomorfo al simplesso $\{t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$ mediante $v \mapsto v/\sum v_i$, con inversa $t \mapsto t/|t|$, e il simplesso è una palla chiusa di dimensione $n - 1$. Brouwer dà $Av/|Av| = v$, dunque $Av = \lambda v$ con $\lambda = |Av| > 0$.

8. Sia $g : (a, b) \to L$ il diffeomorfismo. La sua inclusione in X è un diffeomorfismo locale, quindi L è aperto. Per $p \in \overline{L} - L$ esiste una successione $g(t_j) \to p$. Nessuna sottosuccessione di t_j può convergere a un punto interno del dominio, altrimenti p apparterrebbe a L. Passando a una sottosuccessione, t_j tende a uno dei due estremi, anche infiniti, per esempio a.

Mostriamo che allora $\lim_{t \to a} g(t) = p$. Scegliete un piccolo arco coordinato compatto J attorno a p, con p nel suo interno relativo in X, e un t_0 con $g(t_0) \notin J$. Il bordo topologico di J in X ha al più due punti; per iniettività, $g^{-1}(\partial J)$ ha al più due elementi. In una coda (a, c) che non

contiene tali elementi, la curva non può entrare o uscire da J. Poiché vi sono t_j arbitrariamente vicini ad a con $g(t_j) \in \operatorname{Int} J$, tutta quella coda sta in J. Possiamo scegliere J in ogni intorno di p, quindi il limite è p. In uno spazio di Hausdorff ciascuno dei due estremi ha al più un limite. Ogni punto di $\overline{L} - L$ è uno di questi limiti, perciò sono al più due.

§3. Trasversalità

1. Per ogni $y \in Y$ scegliete $U_\alpha \ni y$ e $\epsilon_\alpha > 0$ tali che l'unione delle palle di raggio ϵ_α centrate in U_α sia contenuta in $\widetilde{U}$. Una partizione localmente finita dà $\epsilon(y) = \sum \theta_i(y)\epsilon_i > 0$. Se $|w - y| < \epsilon(y)$, almeno un indice attivo ha $\epsilon_i \geq \epsilon(y)$, dunque $w \in \widetilde{U}$. Nel caso compatto, la distanza di Y dal chiuso $\mathbb{R}^M - \widetilde{U}$ è positiva, oppure basta un sottoricoprimento finito di palle più piccole; scegliete un raggio costante inferiore al minimo.

2. La funzione continua $y \mapsto |w - y|^2$ raggiunge il minimo sul compatto. Per ogni $v \in T_y Y$ scegliete una curva con $c(0) = y$, $c'(0) = v$. La derivata al minimo è $-2(w - y) \cdot v = 0$, quindi $w - y$ è normale.

3. Sia $V \subset N(Y)$ un intorno della sezione nulla su cui h è iniettiva. Per compattezza esiste $\delta > 0$ tale che tutti i vettori normali di lunghezza $< \delta$ appartengano a V. Restringete $\epsilon < \delta$ e l'intorno immagine. Se y è un punto più vicino a $w \in Y^\epsilon$, allora $|w - y| < \epsilon$ e $(y, w - y) \in V$ per l'esercizio 2. L'iniettività di h mostra che questo è l'unico tale paio e che $y = \pi(w)$.

4. L'applicazione $F : X \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $F(x, a) = x + a$, è una sommersione. Il teorema parametrico implica che per quasi ogni a, $x \mapsto x + a$ è trasversale a Y; questo equivale a $(X + a) \pitchfork Y$.

***5.** Usate la famiglia F del corollario del teorema dell'ϵ-intorno applicata all'inclusione $i : X \to Y$. Per s sufficientemente piccolo tutte le $i_{ts}(x) = F(x, ts)$, $0 \leq t \leq 1$, restano embedding, per stabilità e compattezza; inoltre $|i_s(x) - x| < \epsilon$ uniformemente. Scegliete un tale s regolare per la trasversalità parametrica. Un'intersezione trasversale avrebbe dimensione $\dim X + \dim Z - \dim Y < 0$ ed è quindi vuota.

6. Ponete $C = X - U$. Su C l'inclusione evita Z ed è quindi trasversale. Nella costruzione del teorema di estensione prendete il fattore τ nullo vicino a C. Scegliete il parametro piccolo come nell'esercizio 5: l'intera isotopia resta di embedding, è costante su C e il suo estremo evita Z.

***7.** La derivata rispetto ad a della famiglia $F(t, v, a) = \sum t_i v_i + a$ è l'identità. Per quasi ogni $(v, a) \in S \times \mathbb{R}^N$, l'applicazione affine $t \mapsto F(t, v, a)$ è trasversale a X. È un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^l$ sul piano affine corrispondente: questa è la precisa interpretazione parametrica di «quasi ogni». Per soli sottospazi lineari l'affermazione sarebbe falsa, ad esempio con $X = \{0\}$ e $l < N$.

8. La derivata di $F(x, A) = df_x + A$ rispetto ad A è l'identità su $M(n)$. Per quasi ogni A, $F_A \pitchfork \{0\}$. Poiché $n < n^2$, la controimmagine di 0 è vuota. Ponete $f'(x) = f(x) + Ax$ e scegliete A abbastanza piccolo perché $\sup_K |Ax| < \epsilon$. Per $n = 1$ prendete $f(x) = x^2$, $K = [-1, 1]$ e $\epsilon < 1/2$: un'approssimante avrebbe $f'(-1), f'(1) > 1 - \epsilon$ e $f'(0) < \epsilon$ (qui f' indica il nome dell'applicazione). Non può essere strettamente monotona, mentre una funzione con derivata ovunque non nulla sulla retta lo è.

9. Per $G(x, a) = \nabla f(x) + a$ la derivata in a è l'identità. Quasi ogni a rende G_a trasversale a 0. In un punto critico di f_a, il differenziale di G_a è la matrice hessiana di f_a, che è quindi invertibile. È esattamente la condizione di Morse.

10. Parametrizzate il fibrato normale con $(t, s) \mapsto ((t, t^2), s(-2t, 1))$. La mappa è

$$h(t, s) = (t - 2ts, t^2 + s), \qquad \det Dh = 1 - 2s + 4t^2.$$

I punti critici hanno $s = \frac{1}{2} + 2t^2$; i valori critici formano la cuspide

$$(x, y) = (-4t^3, \tfrac{1}{2} + 3t^2), \qquad x^2 = \frac{16}{27}(y - \tfrac{1}{2})^3.$$

11. La proiezione sull'asse tangente ha derivata invertibile in p, quindi il teorema della funzione inversa dà il grafico richiesto. La mappa normale è $h(x, s) = (x - sf'(x), f(x) + s)$ e

$$\det Dh(x, s) = 1 - sf''(x) + (f'(x))^2.$$

In $x = 0$ si annulla per $s = 1/\kappa(p)$, dando il punto focale $(0, 1/\kappa(p))$. La distanza non orientata è $1/|\kappa(p)|$.

***12.** Nelle equazioni del suggerimento, $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_l$ sono indipendenti e generano il normale a Z in $\mathbb{R}^M$; gli ultimi $l - k$ generano il normale a Y. Proiettate i primi k su T_zY. Restano indipendenti, altrimenti una loro combinazione apparterrebbe allo spazio generato dagli ultimi, contraddicendo l'indipendenza iniziale. Generano quindi $N_z(Z; Y)$. Sono lisci in z (la proiezione si esprime mediante matrici di Gram) e danno una trivializzazione $U \times \mathbb{R}^k \simeq N(Z; Y)|_U$. La dimensione è $\dim Z + k = \dim Y$.

13. In $p = (p_1, \ldots, p_k, 0)$, $T_pS^k = p^\perp$ e $T_pS^{k-1} = p^\perp \cap \{v_{k+1} = 0\}$. Il complemento è $\mathbb{R}e_{k+1}$. Il diffeomorfismo è $(p, t) \mapsto (p, te_{k+1})$.

14. Nelle trivializzazioni precedenti σ è $(z, a) \mapsto z$, dunque è una sommersione. La fibra è il sottospazio vettoriale $\{z\} \times (T_zZ)^\perp_{T_zY}$, di dimensione $\operatorname{codim}_Y Z$.

15. La sezione nulla è liscia, iniettiva, immersiva e ha inversa continua data dalla proiezione. È anche propria: l'intersezione di un compatto del fibrato con la sezione nulla è chiusa nel compatto, perché la funzione lunghezza della fibra è continua. La proiezione di tale intersezione è compatta in Z.

***16.** Sia $q = \pi \circ h$ sul dominio indicato. In $(z, 0)$ lo spazio tangente del fibrato si identifica con $T_zZ \oplus N_z(Z; Y)$. Il differenziale è $(u, v) \mapsto u + v$, poiché $d\pi_z$ è l'identità su T_zY. È dunque un isomorfismo su T_zY. La restrizione alla sezione nulla è l'identità. Il teorema della funzione inversa attorno a una sottovarietà (I.8.14) dà il diffeomorfismo su intorni richiesto.

17. Un vettore $(a, b) \in T_xX \times T_xX$ è ortogonale a ogni (v, v) se e solo se $(a + b) \cdot v = 0$ per ogni $v \in T_xX$, ossia $b = -a$.

***18.** La mappa proposta è liscia e lineare biiettiva su ogni fibra; l'inversa è $((x, x), (v, -v)) \mapsto (x, v)$, anch'essa liscia. Il teorema tubolare della diagonale, composto con questo diffeomorfismo, dà l'isomorfismo locale richiesto e manda la sezione nulla nella diagonale.

***19.** I vettori normali costruiti nell'esercizio 12 formano una base liscia su ogni piccolo aperto $V \subset Z$. Scrivere un vettore in questa base dà la trivializzazione; le coordinate sono lisce, di nuovo mediante l'inversa della matrice di Gram.

***20.** Se il fibrato è banale, le k coordinate della fibra sono funzioni indipendenti che si annullano esattamente sulla sezione nulla. Trasferitele all'intorno tubolare; dopo eventuale restrizione del dominio, restano indipendenti. Viceversa, se $g = (g_1, \ldots, g_k)$ è una sommersione su U e $g^{-1}(0) = Z$, allora $\ker dg_z = T_zZ$. L'algebra lineare dà l'isomorfismo $dg_z^t : \mathbb{R}^k \to N_z(Z; Y)$. Dipende in modo liscio da z; l'inversa si esprime con $(dg_z dg_z^t)^{-1} dg_z$. Pertanto $(z, a) \mapsto (z, dg_z^t a)$ è una trivializzazione globale.

§4. Intersezione modulo 2

1. Per R abbastanza grande, $R^7 > 1 + 93R^4$. Sul cerchio $|z| = R$ nessuna funzione $p_t(z) = z^7 + t\cos(|z|^2)(1 + 93z^4)$ si annulla, perché il termine perturbativo ha modulo al più $1 + 93R^4$. Quindi $p_1/|p_1|$ ha lo stesso grado modulo 2 di $z^7/|z^7|$, cioè uno. Se p_1 non avesse zeri nel disco, questa applicazione si estenderebbe al disco, contraddicendo il teorema del bordo.

2. $g^{-1}(W)$ è chiusa e ha codimensione $\operatorname{codim} W$ per la trasversalità di g. Le due condizioni dimensionali sono dunque equivalenti. Scegliete f' omotopa a f e trasversale a $g^{-1}(W)$. Il criterio di trasversalità per una composizione (I.5.7) rende $g \circ f'$ trasversale a W, e

$$(g \circ f')^{-1}(W) = (f')^{-1}(g^{-1}(W)).$$

I conteggi coincidono e l'invarianza per omotopia conclude.

3. (a) Le omotopie delle due applicazioni producono un'omotopia del prodotto; usate l'invarianza con la diagonale chiusa. (b) Il diffeomorfismo di scambio sul dominio $X \times Z$ preserva la cardinalità delle controimmagini; quello sul codominio preserva Δ. Quindi i conteggi dopo perturbazione coincidono. (c) Quando $f \pitchfork Z$, $f \times i \pitchfork \Delta$ e $(f \times i)^{-1}(\Delta) = \{(x, f(x)) : f(x) \in Z\}$, in biiezione con $f^{-1}(Z)$. Il caso generale segue perturbando f. (d) Applicate (b) e (c) alle inclusioni. Questo argomento tratta anche intersezioni non trasversali senza pretendere che si possano perturbarne entrambi i fattori indipendentemente mantenendo invariata una definizione non ancora simmetrica.

***4.** Sia f omotopa alla costante c_y. Se $\dim X > 0$, $\dim Z < \dim Y$, perciò la componente di y contiene $y' \notin Z$; una curva da y a y' dà un'omotopia fra le costanti. La costante $c_{y'}$ evita Z, quindi il numero è zero. Se X è un punto, Z ha codimensione zero ed è aperta e chiusa in Y; il numero vale uno esattamente quando la componente del valore di f è contenuta in Z.

***5.** Una contrazione di Y rende ogni f omotopa a una costante. Con $\dim X > 0$ applicate l'esercizio 4. La dimensione positiva è indispensabile: per $X = \{p\}$, $Y = \mathbb{R}$ e $Z = Y$, il numero è uno.

***6.** Uno spazio contraibile è connesso, quindi una varietà compatta contraibile di dimensione zero è un solo punto. Se la dimensione è positiva, l'identità ha grado modulo 2 uguale a uno, mentre per contraibilità sarebbe omotopa a una costante e avrebbe grado zero. Contraddizione. L'assenza di bordo è essenziale: un disco chiuso è contraibile.

***7.** Se S^1 fosse semplicemente connessa, il suo cammino chiuso identità sarebbe omotopo a una costante. Il grado modulo 2 passerebbe da uno a zero, impossibile.

***8.** (a) Scrivete $F(t) = f(e^{it}) \in \mathbb{C}$. Scegliete $g(0)$ con $e^{ig(0)} = F(0)$ e ponete

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \operatorname{Im}(\overline{F(s)}F'(s))\, ds.$$

Poiché $|F| = 1$, $\overline{F}F'$ è puramente immaginario; quindi $F' = ig'F$ e $e^{-ig}F$ è costante uguale a uno. La periodicità di F implica che $g(t + 2\pi) - g(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$; questa differenza è continua e quindi costante, $2\pi q$. (b) Scegliete un valore regolare $e^{i\alpha}$ diverso da $F(0)$. Le sue controimmagini corrispondono agli attraversamenti dei livelli $\alpha + 2\pi m$ da parte di g su $[0, 2\pi]$. Il conteggio con segno degli attraversamenti è

$$\left\lfloor \frac{g(2\pi) - \alpha}{2\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g(0) - \alpha}{2\pi} \right\rfloor = q.$$

Modulo 2, il segno non conta; quindi $\deg_2(f) = q \bmod 2$.

9. $f(X)$ ha misura nulla in S^k per Sard, perché $\dim X < k$; anche Z ha misura nulla, perché $\dim Z = k - \dim X < k$. Scegliete p fuori dalla loro unione. La proiezione stereografica identifica $S^k - \{p\}$ con $\mathbb{R}^k$ e manda Z in un chiuso relativo. L'esercizio 5 dà zero per il numero d'intersezione, che coincide con quello calcolato nella sfera.

10. Nel toro le due circonferenze fondamentali hanno intersezione modulo 2 uguale a uno. Un diffeomorfismo verso S^2 conserverebbe il conteggio trasversale; ma su S^2 l'esercizio 9 rende nullo il numero fra qualunque coppia di curve chiuse. Contraddizione.

11. Se $y \notin f(X)$, esso è un valore regolare con controimmagine vuota. Dunque $\deg_2(f) = 0$. La contrapposta dà la suriettività.

12. $f(X)$ è compatta e non può coincidere con la varietà non compatta Y. Usate l'esercizio 11.

13. (a) Prendete $X = S^1$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \{(x, 0) : x > 0\}$. Il cerchio unitario incontra Z una volta; il cerchio traslato di $(-2, 0)$ non lo incontra. Le due inclusioni sono omotope e trasversali agli estremi. (b) Siano $X = Y = \mathbb{R}$, $Z = \{0\}$, $f_0(x) = x$ e $f_1(x) = e^x$. L'omotopia $(1 - t)x + te^x$ li collega; i conteggi agli estremi sono uno e zero. (c) Nell'esempio (a), l'inclusione del cerchio unitario si estende al disco, ma il conteggio col semiasse aperto è uno. (d) Prendete $W = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $X = \partial W = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $Z = \{0\}$ e $F(x, t) = x$: il conteggio sul bordo è uno. Qui necessariamente anche W è non compatta, poiché il bordo di un compatto è compatto. (e) Prendete $W = S^1 \times [0, \infty)$, $Y = S^1$, $F(z, t) = z$ e $Z = \{1\}$. Il bordo è compatto, Z è chiusa e $F|_{\partial W}$ ha conteggio uno. Questi esempi soddisfano sempre la condizione di dimensione complementare e la trasversalità sul bordo.

***14.** Se $i_t : X \to Y$ è un'isotopia con immagine finale Z, la mappa $(x, t) \mapsto (i_t(x), t)$ è un embedding di $X \times I$ in $Y \times I$; la compattezza del dominio ne garantisce la proprietà di essere propria. La sua immagine è il cobordismo. I pantaloni hanno un bordo superiore con una componente e uno inferiore con due: questi non possono essere immagini dello stesso X mediante embedding e non sono neppure diffeomorfi.

***15.** La proiezione $F : W \to Y$ restringe sul bordo le due inclusioni. Il teorema del bordo dà $0 = I_2(F|_{\partial W}, C) = I_2(X, C) + I_2(Z, C)$, dunque i due valori coincidono. Basta che C sia chiusa: W fornisce la compattezza necessaria.

16. Rendete f trasversale ai due punti e scegliete una curva liscia c che li colleghi. Per $F(x, t) = (f(x), c(t))$, il bordo è trasversale a Δ. Il teorema relativo permette di perturbare F senza cambiarne il bordo, rendendola trasversale. La controimmagine di Δ è una varietà unidimensionale compatta con bordo in biiezione con $f^{-1}(y_0) \sqcup f^{-1}(y_1)$; il numero totale è pari. L'invarianza per omotopia di f conclude il caso iniziale.

17. Se $g : W \to \partial W$ fosse una retrazione, per $z \in \partial W$ il numero d'intersezione della sua restrizione al bordo con $\{z\}$ sarebbe uno, essendo tale restrizione l'identità. Il teorema del bordo lo rende invece zero. Non occorre che ∂W sia connesso.

18. Il fibrato normale è banale. Nell'intorno tubolare, per un vettore costante $a \neq 0$ abbastanza piccolo (uniformemente grazie alla compattezza), le sezioni $x \mapsto (x, ta)$ danno un'isotopia dalla sezione nulla a una sezione disgiunta. Quindi l'autointersezione è zero. Il rango normale positivo è indispensabile, come osservato nella nota all'enunciato.

19. Usate il modello $(\theta, t) \sim (\theta + 2\pi, -t)$. La curva centrale è $t = 0$. Per ϵ piccolo, il grafico $t = \epsilon \cos(\theta/2)$ è ben definito nel quoziente ed è una perturbazione isotopa alla curva centrale. In $0 \leq \theta < 2\pi$ ha un solo zero, $\theta = \pi$, con derivata non nulla. Quindi il conteggio è uno. Con l'esercizio 18 ciò esclude una funzione definente indipendente.

§5. Avvolgimento e separazione

1. Se F evita z, la mappa $U(y) = (F(y) - z)/|F(y) - z|$ estende a D la mappa delle direzioni sul bordo. Il teorema del bordo dà grado zero.

2. Togliete gli interni delle palle: $D' = D - \bigcup_i \operatorname{Int} B_i$ è compatta con bordo disgiunto $X \sqcup \bigsqcup_i \partial B_i$. Su D' la mappa F evita z. Per 1 il grado della restrizione delle direzioni all'intero bordo è zero. Il grado modulo 2 è additivo sull'unione disgiunta dei domini, perché lo sono i conteggi delle controimmagini regolari; segue la formula.

3. In ogni y_i il differenziale di F è un isomorfismo. Scegliete una carta data dall'inversa locale di F e prendete B_i come controimmagine di una piccola palla chiusa centrata in z. Il bordo viene mandato diffeomorficamente sulla sfera; la mappa delle direzioni ha grado uno. La formula di 2 dà il teorema, compreso il caso senza controimmagini trattato in 1.

4. Sia $A \subset X$ l'insieme dei punti ogni cui intorno incontra la componente C di z nel complementare. È chiuso in X per definizione di aderenza. È non vuoto: un punto x più vicino a z esiste per compattezza, e il segmento aperto da z a x evita X, altrimenti ci sarebbe un punto più vicino. Per l'apertura, raddrizzate X in un intorno coordinato di $x \in A$: il complementare locale ha due semiballi connessi. Almeno uno incontra C e quindi è contenuto in C. Ogni punto del disco centrale più piccolo è aderente a quel semiballo, dunque appartiene ad A. La connessione di X implica $A = X$. Negli aperti euclidei la connessione equivale alla connessione per archi; gli archi si possono scegliere lisci a tratti e poi lisciare restando nell'aperto.

5. Fissate un piccolo intorno coordinato di un punto di X, diviso in due semiballi, con punti z_0, z_1 su lati opposti. Per 4 ogni componente del complementare incontra questo intorno e dunque almeno uno dei due semiballi. Ciascun semiballo è connesso, quindi appartiene a una sola componente globale. Le componenti globali sono al più due.

6. Collegate i due punti con una curva liscia z_t nel complementare. Le mappe $(x - z_t)/|x - z_t|$ formano un'omotopia; i gradi modulo 2 coincidono.

7. La derivata di $g(y) = (y - z)/|y - z|$ è

$$dg_y(w) = \frac{1}{|y - z|}(w - (w \cdot u)u), \qquad u = g(y).$$

È suriettiva su $T_u S^{n-1} = u^\perp$ e ha nucleo $\mathbb{R}u$. La restrizione a $T_y X$ è suriettiva esattamente quando $T_y X + \mathbb{R}u = \mathbb{R}^n$, cioè quando la semiretta è trasversale a X in y. Sard dà la genericità delle direzioni.

8. Per compattezza e trasversalità l'intersezione è finita. La controimmagine di v per la mappa delle direzioni da z_0 è l'intero insieme dei punti d'intersezione lungo la semiretta; quella relativa a z_1 ne conserva solo quelli successivi a z_1. La differenza delle cardinalità è esattamente l, e si conclude riducendo modulo 2.

9. Occorre garantire un'intersezione. Fissate $x \in X$ e prendete $z = x - \delta\nu$, con ν normale unitaria e $\delta > 0$ piccolo. La retta verso x è trasversale in x, e per il teorema della funzione inversa la mappa delle direzioni ha immagine contenente un aperto attorno a ν. Scegliete in quell'aperto un valore regolare globale usando Sard: la semiretta corrispondente incontra X e tutte le intersezioni sono trasversali. Due punti immediatamente prima e dopo una di esse hanno avvolgimenti di parità opposta per 8. Entrambe le classi D_0, D_1 sono quindi non vuote. Per 6 ogni componente è contenuta in una classe e, per 5, vi sono al più due componenti: sono precisamente le due classi.

10. Se $X \subset B_R(0)$ e $|z| > R$, per ogni $x \in X$ si ha $(x - z) \cdot z < 0$. L'immagine della mappa delle direzioni sta nell'emisfero opposto a z e omette, per esempio, $z/|z|$. Il grado è quindi zero.

11. Le componenti D_0, D_1 sono aperte e connesse per 9. Per 10, D_1 è limitata. Per 4, ogni punto di X è aderente a entrambe le componenti, mentre nessun punto dell'altra componente aperta può appartenere a $\overline{D}_1$. Quindi $\overline{D}_1 = D_1 \cup X$, un insieme chiuso e limitato, dunque compatto. In una carta che raddrizza X, ciascun semiballo aperto appartiene a una componente globale. Poiché entrambe le componenti si avvicinano al punto centrale, i due semiballi appartengono a componenti diverse. La chiusura del semiballo del lato D_1 parametrizza quindi $\overline{D}_1$ vicino a quel punto. Questo prova che è una varietà con bordo esattamente X.

12. Scegliete sulla semiretta un punto z_1 oltre tutte le intersezioni e fuori da una grande palla contenente X. Per 10 il suo avvolgimento è zero; per 8 quello di z è la parità del numero totale d'intersezioni. Per 9, tale parità vale uno esattamente nell'interno.

§6. Borsuk–Ulam

1. Se $F : S^k \to \mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ è dispari, anche $u = F/|F| : S^k \to S^k$ è dispari e $W_2(F, 0) = \deg_2(u)$. Viceversa, una mappa dispari della sfera in sé si considera direttamente come mappa nel complementare dell'origine. Le due affermazioni coincidono.

2. Per il sollevamento g di II.4.8, la disparità dà $e^{ig(s+\pi)} = -e^{ig(s)}$. Quindi $g(s + \pi) - g(s)$ appartiene a $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ e, per continuità, è una costante πq con q dispari. Iterando, $g(s + 2\pi) = g(s) + 2\pi q$. L'esercizio citato dà $\deg_2(f) = q \bmod 2 = 1$.

3. Le restrizioni dei p_i a S^n sono lisce e dispari, perché i gradi sono dispari. Borsuk–Ulam fornisce $v \in S^n$ con $p_i(v) = 0$ per tutti gli indici. Per omogeneità, $p_i(tv) = t^{\deg p_i} p_i(v) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; la retta $\mathbb{R}v$ è quella cercata.

Soluzioni del capitolo III

§2

Le soluzioni adottano l'ordine degli addendi e la convenzione della normale esterna del testo. Per i soli argomenti unidimensionali che usano una normalizzazione con codominio S^0, adottiamo esplicitamente il grado ridotto: per una funzione non nulla agli estremi $a < b$ esso è $[\text{segno}\, v(b) - \text{segno}\, v(a)]/2$. Non è il grado con codominio connesso definito nel testo. In particolare, l'antipodale su S^0 ha grado ridotto -1 e non è omotopa all'identità, poiché ogni omotopia verso uno spazio discreto è costante nel parametro. In dimensione zero, una base positiva va intesa come il segno assegnato al punto; non si sceglie un vettore tangente non nullo.

1. La matrice del cambiamento da una base a se stessa è I, di determinante uno; quella del cambiamento inverso ha determinante reciproco; quella di una composizione ha determinante prodotto. Positività dà rispettivamente riflessività, simmetria e transitività.

2. Le matrici delle tre operazioni hanno determinanti rispettivamente c, -1, 1. Nell'ultimo caso si tratta di una matrice elementare che aggiunge a una colonna combinazioni delle altre; la multilinearità del determinante ne prova l'invarianza.

3. Scegliete una base u di U, una base w di W e sollevamenti $\widetilde{w}_j \in V$ con $B\widetilde{w}_j = w_j$. La concatenazione $(Au, \widetilde{w})$ è una base di V. Imporre $\text{segno}(Au, \widetilde{w}) = \text{segno}\, u\, \text{segno}\, w$ determina la terza orientazione. Cambiare i sollevamenti aggiunge ai vettori finali combinazioni dei primi; cambiare le basi moltiplica i determinanti dei due blocchi. La prescrizione è quindi indipendente dalle scelte.

4. Per scambiare due blocchi di p e q vettori occorrono pq trasposizioni, ciascuna di segno -1.

5. In una carta di bordo, i vettori tangenti alle prime $k-1$ coordinate formano un riferimento liscio di $T(\partial X)$. La normale esterna è liscia per II.1.8. Il determinante della base costituita dalla normale seguita dal riferimento è una funzione liscia non nulla; il suo segno è localmente costante. Correggendo, se necessario, il segno del primo vettore tangente si ottiene un riferimento positivo liscio.

6. La normale esterna a H^k è $-e_k$. La base $(-e_k, e_1, \ldots, e_{k-1})$ ha determinante $(-1)(-1)^{k-1} = (-1)^k$. Quindi la base standard del bordo ha numero di orientazione $(-1)^k$.

7. Posto $p = (a, b, c)$, scegliete un qualsiasi e_j non parallelo a p e ponete $u = e_j - (e_j \cdot p)p$, $v = p \times u$. Allora u, v sono tangenti e $u \times v = |u|^2 p$, sicché (p, u, v) ha determinante positivo. Questa scelta vale localmente dove $u \neq 0$; non può produrre un unico riferimento globale su tutta la sfera.

8. In $p = (x, y, t)$ ponete $r^2 = x^2 + y^2 = 1 - t^2$. La direzione tangente a S^2 su cui df è positiva è $n = e_3 - tp$. Il vettore $v = (y, -x, 0)$ è tangente alla circonferenza e $\det(p, n, v) = r^2 > 0$. Pertanto il livello è orientato in senso orario visto dall'alto.

9. Su S^k, $dg_x(w) = 2x \cdot w$. Il complemento normale positivo è generato dal vettore radiale esterno x. La definizione della controimmagine richiede esattamente che (x, β) sia positivo, come la definizione del bordo.

10. Il vettore normale su cui dF è positivo è $m = (f', -1)$. Con $v = (1, f')$, $\det(m, v) = 1 + (f')^2 > 0$; quindi v è positivo. Il normale n del suggerimento è invece negativo per dF.

11. Si ha $dF(n) = 1 + f_x^2 + f_y^2 > 0$ e $\det(n, v_1, v_2) = 1 + f_x^2 + f_y^2 > 0$. La base positiva è dunque (v_1, v_2).

12. In carte orientate il segno del determinante della derivata è continuo e non nullo. È quindi localmente costante e, per connessione, costante su tutto X.

13. Ogni componente di un'ipersuperficie compatta separa lo spazio euclideo per Jordan–Brouwer. La normale unitaria diretta verso il lato esterno della regione limitata è definita globalmente e liscia: in ogni carta la scelta del lato fissa il segno di una normale locale liscia. La regola «normale prima, base tangente dopo» orienta l'ipersuperficie. Si procede componente per componente.

14. Poiché $T_y(X \cap Z) = 0$, il complemento normale della controimmagine in X è tutto $T_y(X)$. Le due formule che definiscono l'orientazione della controimmagine dicono quindi che il segno del punto è il segno del confronto tra $T_y(X) \oplus T_y(Z)$ e $T_y(Y)$.

15. Applicate l'esercizio 4 ai due blocchi tangenti nella formula dell'esercizio 14.

16. Ponete $s = \dim S$, $a = \operatorname{codim} Z$, $b = \operatorname{codim} X$ e scegliete complementi A di $T(S)$ in $T(X)$ e B in $T(Z)$. Le formule della controimmagine, applicate due volte, consentono di confrontare le orientazioni usando una base ambientale formata dai blocchi $A, B, T(S)$. Passando da $X \cap Z$ a $Z \cap X$ vengono scambiati soltanto i blocchi A, B, di dimensioni a, b; gli altri confronti sono identici. Il fattore è dunque $(-1)^{ab}$. Questo ragionamento è indipendente dai complementi per l'esercizio 28.

17. (a) L'origine ha segno $+1$. (b) In $(0, y)$, $y = \pm 1$, la base positiva di TS^1 è $(-y, 0)$: il segno dell'intersezione con e_2 è $-y$. (c) L'origine ha segno $+1$, poiché (e_1, e_2, e_3) è positiva. (d) In $(0, y, z)$, $y^2 + z^2 = 1$, è positivo $v = (0, z, -y)$: il complemento e_1 è positivo rispetto al piano yz, e $\det((0, y, z), e_1, v) = 1$. (e) I due punti $(0, \pm 1, 0)$ hanno rispettivamente segni $-1, +1$, poiché $\det(-ye_1, e_2, e_3) = -y$. (f) L'intersezione è l'asse y, orientato da e_2. (g) La circonferenza $z = 0$, $x^2 + y^2 = a$, è orientata da $(y, -x, 0)$: la normale positiva all'iperboloide è $(x, y, 0)$ e $\det((x, y, 0), e_3, (y, -x, 0)) = a > 0$.

18. (a)⇒(b): la regola della normale prima seleziona in ogni fibra normale una delle due normali unitarie, in modo liscio. (b)⇒(a): normalizzate il campo e usatelo nella stessa regola. Un campo normale non nullo trivializza il fibrato mediante $(z, t) \mapsto tn(z)$; viceversa una trivializzazione fornisce tale campo, provando (b)⇔(c). Per (c)⇒(d), in un intorno tubolare trivializzato usate la coordinata normale t, restringendo eventualmente a un raggio variabile. Per (d)⇒(b), il gradiente normale di θ lungo Z è non nullo.

19. Il segno del determinante di (n, β) rispetto a un riferimento positivo di Y è localmente costante, dunque costante su ogni componente. Delle due normali unitarie soltanto una rende quel segno positivo; la scelta è liscia e unica. Per un bordo la definizione coincide esattamente con la convenzione della normale esterna.

20. Se il nastro fosse orientabile, la sua circonferenza centrale orientata avrebbe fibrato normale banale per l'esercizio 18. Ma un intorno normale della circonferenza è un nastro di Möbius e il suo fibrato normale è non banale: percorrendo una volta la circonferenza, una normale ritorna col segno opposto. Contraddizione.

21. Una funzione definente regolare sullo spazio orientato $\mathbb{R}^3$ fornisce, mediante il gradiente non nullo, una normale globale e quindi un'orientazione dell'interno del nastro. L'interno del nastro di Möbius è non orientabile per lo stesso argomento della circonferenza centrale. Inoltre un livello regolare in un aperto non può già da solo avere bordo: questa è la ragione della precisazione dell'enunciato.

22. Invertire l'orientazione di entrambi i fattori moltiplica quella prodotto per $(-1)^2 = 1$.

23. Per connessione le due orientazioni possibili differiscono ovunque per lo stesso segno. Applicate l'esercizio 22 in ogni coppia di punti. Senza connessione si potrebbero invertire soltanto alcune componenti e il risultato sul prodotto di componenti diverse cambierebbe.

24. Fissate $y \in Y$ e un'orientazione di T_yY. Una presunta orientazione di $X \times Y$ induce, tramite $T_xX \oplus T_yY$, un'orientazione liscia di tutti i T_xX, contraddizione. La non vacuità di Y è necessaria.

25. Il fibrato tangente $T(X)$ ha un'orientazione canonica: sotto cambio di coordinate, la matrice della trasformazione di base e fibra è triangolare a blocchi con due copie della stessa matrice diagonale, quindi determinante $(\det A)^2 > 0$. Il diffeomorfismo tubolare alternativo $(x, v) \mapsto (x, \pi(x + v))$ tra intorni della sezione zero e della diagonale trasporta tale orientazione: lungo la sezione zero ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ I & I \end{smallmatrix}\right)$, di determinante positivo. In coordinate sulla diagonale essa coincide con l'orientazione dei prodotti di due copie della stessa carta, per cui non dipende da un'orientazione di X.

26. Si può trasportare un'orientazione lungo un cammino suddividendolo in tratti contenuti in carte connesse. La scelta del segno sul primo tratto determina successivamente gli altri. Il trasporto non cambia sotto omotopia del cammino a estremi fissi: suddividete il quadrato dell'omotopia in rettangoli la cui immagine sia in una carta, dove il trasporto attorno al bordo è identico, e cancellate i lati interni. In uno spazio semplicemente connesso due cammini con gli stessi estremi sono omotopi relativamente agli estremi, quindi il risultato è univoco. Le orientazioni così assegnate sono localmente quelle di una carta e dunque lisce.

27. Scrivete $h = cn + v$ con $v \in T_x\partial X$. La componente esterna impone $c > 0$. Aggiungere combinazioni degli altri vettori e moltiplicare il primo per un numero positivo non cambia l'orientazione della base (n, β).

28. Se N è il complemento ortogonale, ogni altro complemento è il grafico di una mappa lineare $A : N \to T_xS$. Sostituire n_i con $n_i + An_i$ non cambia il determinante della base ambientale ottenuta aggiungendo una base di T_xS. Analogamente, $df_xAn_i \in T_zZ$, quindi aggiungere questi termini non cambia il determinante dopo avere aggiunto una base di T_zZ. Le due variazioni si compensano esattamente nelle formule di orientazione; l'orientazione di T_xS resta uguale.

§3

1. Ogni valore ha una sola controimmagine. Il suo contributo è il segno della derivata, costante per connessione: dunque il grado è quel segno.

2. (a) L'antipodale estende $-I$ sulla palla di dimensione $k+1$; il confronto tra normale esterna e basi tangenti dà grado $(-1)^{k+1}$. (b) Se k è pari, il grado differisce da quello dell'identità. Se k è dispari, identificate $\mathbb{R}^{k+1}$ con uno spazio complesso: $H_t(z) = e^{i\pi t}z$ collega identità e antipodale. (c) Se k è dispari, $v(z) = iz$ è tangente e non nullo. Viceversa un campo unitario v dà $H_t(x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x)$, un'omotopia tra identità e antipodale; per (b), k è dispari. Per $k = 0$ non esistono campi non nulli. (d) No: i gradi $+1, -1$ coincidono modulo 2.

3. Per $m > 0$, su $|z| = r$ il termine principale domina strettamente gli altri, quindi $z^m + t(a_1z^{m-1} + \cdots + a_m)$ non si annulla per $0 \le t \le 1$. La normalizzazione ha grado m. Se p non avesse zeri nel disco, si estenderebbe e avrebbe grado zero, contraddizione.

4. Su $z = re^{i\theta}$, $f/|f| = e^{-i\theta}$, quindi il grado è -1. Non si può applicare l'argomento di estensione al disco perché $1/z$ non è definita nell'origine: la singolarità, non uno zero, impedisce l'estensione.

5. Il bordo di un intervallo è S^0, che non è connesso. La normalizzazione di un polinomio reale di grado pari ha lo stesso segno ai due estremi lontani e si può estendere senza annullarsi. Il

corrispondente conto orientato sul bordo è zero; non esiste l'ostacolo non nullo ottenuto nel caso complesso. Per grado dispari si ritrova invece il teorema degli zeri reale.

6. Basta una soluzione reale positiva. La funzione $h(r) = r^2 - e^{-r^2}$ è continua, $h(0) = -1$, $h(1) = 1 - e^{-1} > 0$. Il teorema dei valori intermedi dà un $r \in (0,1)$ con $r^2 = e^{-r^2}$.

7. In coordinate angolari, $\bar{z}^m = e^{-im\theta}$: ogni valore regolare ha $|m|$ controimmagini di segno $-\operatorname{segno} m$, e per $m = 0$ il grado è zero. Quindi il grado è $-m$.

8. La funzione $g(t) - qt$ è 2π-periodica. L'interpolazione $g_s(t) = (1-s)g(t) + sqt$ conserva la relazione di periodicità e scende a un'omotopia di f con $e^{it} \mapsto e^{iqt}$. Quest'ultima ha grado q.

9. L'invarianza del grado dà la necessità. Per la sufficienza, scegliete sollevamenti g_0, g_1 con lo stesso incremento $2\pi q$; l'interpolazione lineare tra essi scende a un'omotopia sulla circonferenza.

10. Scegliete $z \in Z$ che sia valore regolare di g e tale che ogni $y \in g^{-1}(z)$ sia regolare per f. Tale scelta è possibile: i valori critici di g sono di misura nulla; i valori critici di f, anch'essi di misura nulla, hanno immagine di misura nulla sotto g perché le dimensioni sono uguali e g è localmente Lipschitz in carte. Allora z è regolare per $g \circ f$ e

$$\deg(g \circ f) = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \operatorname{segno} \det dg_y \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{segno} \det df_x = \deg g \, \deg f.$$

11. Un'estensione impone grado zero. Se il grado è zero, III.3.9 dà un'omotopia da una costante a f. Rendendola costante vicino ai tempi iniziale e finale e usando il raggio come parametro sull'anello $1/2 \le |z| \le 1$, si ottiene un'estensione liscia, costante vicino alla circonferenza interna; completatela con la stessa costante sul disco interno.

12. In ogni punto trasversale le basi dei due spazi tangenti vengono scambiate a blocchi: il segno cambia di $(-1)^{(\dim X)(\dim Z)}$. Sommate sui punti.

13. Si può calcolare con applicazioni di Lefschetz omotope alle identità, la cui esistenza è dimostrata nel §4: siano f su X, g su Y. Il prodotto ha punti fissi (x,y), con derivata a blocchi; pertanto

$$L_{(x,y)}(f \times g) = \operatorname{segno} \det(df_x - I) \operatorname{segno} \det(dg_y - I).$$

La somma sui punti è $L(f)L(g) = \chi(X)\chi(Y)$, mentre $f \times g$ è omotopa all'identità del prodotto. Questa prova usa un risultato successivo, senza presupporre la formula da dimostrare.

14. La trasversalità di f rende $S = f^{-1}(Z)$ una sottovarietà chiusa con $\operatorname{codim}_X S = \operatorname{codim}_Y Z = \dim W$. Perturbate g perché sia trasversale a S. Allora $f \circ g \pitchfork Z$ e le due controimmagini coincidono. Nei quozienti normali, df identifica il normale orientato di S con quello di Z, per la definizione di orientazione della controimmagine. I determinanti che assegnano il segno a ciascun punto sono quindi gli stessi. Sommando e usando l'invarianza per omotopia si ottiene la formula per ogni g.

15. Per dimensioni complementari, $df_{x_i} T_{x_i} X \oplus T_{f(x_i)} Z = T_{f(x_i)} Y$, quindi df_{x_i} è iniettiva. Il teorema delle immersioni dà le immagini locali V_i; restringendo U_i si escludono le altre controimmagini. Il diffeomorfismo $U_i \to V_i$ preserva l'orientazione scelta e il confronto dei due spazi tangenti dà esattamente il segno locale di $I(f, Z)$. Anche se alcuni punti immagine coincidono, vanno contati separatamente per ciascun ramo.

16. La formula con la diagonale dà $I(Z,Z) = (-1)^d I(Z \times Z, \Delta)$. Se d è pari il segno è uno; se è dispari, l'antisimmetria impone $I(Z,Z) = 0$, quindi anche l'altro numero è zero. In entrambi i casi segue l'uguaglianza.

17. Invertire l'orientazione di una componente di X non cambia quella prodotto vicino alla sua diagonale, per III.2.22. Il numero $I(\Delta \times \Delta, \Delta_{X\times X})$ dell'esercizio 16 si calcola soltanto vicino a tali diagonali; le due occorrenze dell'orientazione invertita si cancellano. Per componenti diverse non vi sono intersezioni. Quindi $\chi(X)$ non cambia.

18. Scegliete un intorno più piccolo V di $X \cap Z$ con chiusura contenuta in U. Per compattezza, deformazioni abbastanza piccole non creano intersezioni fuori da V. Rendete le applicazioni trasversali con perturbazioni sostenute in U e sommate i segni, usando le orientazioni date. Due scelte si collegano mediante una perturbazione dell'omotopia relativa agli estremi, sempre in U. La controimmagine è una varietà compatta orientata di dimensione uno, la cui somma orientata del bordo è zero; ciò dimostra indipendenza e stabilità locale.

19. Vicino alla diagonale di $Z \times Z$ esiste l'orientazione canonica di III.2.25, anche se Z non è orientabile. Il prodotto $Y \times Y$ e la sua diagonale sono orientati da Y. Applicate l'esercizio 18 a $Z \times Z$ e Δ_Y e definite l'autointersezione con quel numero. Nel caso orientabile coincide con la definizione precedente per l'esercizio 16; le piccole deformazioni mantengono le orientazioni locali e il numero.

20. Per X non orientabile, un intorno della sua diagonale in $X \times X$ è canonicamente orientato per III.2.25. Applicate l'esercizio 19 alla diagonale, entro tale intorno. Ogni diffeomorfismo induce il corrispondente diffeomorfismo del prodotto e preserva questa orientazione canonica, poiché i due fattori di determinante hanno prodotto positivo. Il numero ottenuto è quindi un invariante per diffeomorfismi.

§4

1. Una dimostrazione completa alternativa alla traccia evita i casi dell'induzione. Per la decomposizione polare scrivete $E = QP$, con P simmetrica definita positiva e Q ortogonale. L'omotopia $Q((1-t)P + tI)$ resta invertibile e collega E a Q. Se $\det E > 0$, anche $\det Q > 0$. Una base ortonormale decompone Q in rotazioni planari e blocchi $+1$, accoppiando gli eventuali autovalori -1 in rotazioni di angolo π. Riducendo ogni angolo linearmente a zero si collega Q all'identità in $SO(k)$. Se $\det E < 0$, componete prima con la riflessione R; l'omotopia di RE all'identità, moltiplicata per R, collega E a R. Nella traccia, (b) è l'omotopia triangolare indicata; (c) è l'interpolazione tra uno scalare positivo e 1; (d) segue perché un nucleo imporrebbe un autovalore reale $-t/(1-t)$ a E. La decomposizione in piani di rotazione completa rigorosamente il passaggio (e), incluso l'accoppiamento dei blocchi negativi.

2. L'insieme dei punti fissi è il sottospazio $\ker(A - I)$. L'origine è isolata esattamente quando questo nucleo è zero, cioè quando $A - I$ è invertibile. Poiché la derivata di A è A in ogni punto, questa è anche la condizione di Lefschetz in zero e in tutti i punti fissi.

3. Applicate l'esercizio 2 alla trasformazione lineare $A = df_x$: tutte le condizioni equivalgono all'invertibilità di $df_x - I$.

4. La mappa del grafico dipende in modo liscio dalla famiglia di applicazioni. La diagonale è chiusa e il dominio è compatto; la stabilità della trasversalità implica che, per parametri piccoli, il grafico resta trasversale alla diagonale.

5. Se la diagonale fosse definita in un suo intorno da due funzioni indipendenti, un piccolo livello regolare vicino al livello zero la sposterebbe disgiuntamente da se stessa, quindi l'autointersezione sarebbe zero. Ma $I(\Delta, \Delta) = \chi(S^2) = 2$. Per $S^2 \times \{a\}$ scegliete una carta (u_1, u_2) vicino ad a, centrata in a; le funzioni $u_i \circ \mathrm{pr}_2$ su $S^2 \times U$ sono indipendenti e definiscono esattamente quella copia della sfera. «Globalmente» qui significa su un intorno dell'intera sottovarietà.

6. Le matrici $df_0 - I$ sono rispettivamente I e $-I/2$. I determinanti hanno segni 1 e $(-1)^k$.

7. Per $k \geq 1$, $f(x) = \pi(x - ae_{k+1})$, $0 < a < 1$, ha soltanto i due poli fissi. Al polo nord la derivata tangente è $(1-a)^{-1}I$, al sud $(1+a)^{-1}I$. I contributi sono 1 e $(-1)^k$, e f è omotopa all'identità. Dunque $\chi(S^k) = 1 + (-1)^k$. Per S^0, due punti, la caratteristica è direttamente 2.

8. Scegliete f, g di Lefschetz omotope alle identità. I punti fissi del prodotto sono le coppie di punti fissi e la matrice differenziale meno l'identità è a blocchi diagonali. I segni locali si moltiplicano; la somma sulle coppie è il prodotto delle somme.

9. Su $\mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ ha un solo punto fisso con numero $+1$, mentre $g(x) = x + 1$ non ne ha. Sono omotope mediante l'interpolazione lineare. Il punto fisso può sfuggire all'infinito, per cui non esiste l'argomento di compattezza del bordo.

10. (a) La normalizzazione di $f(z) - z = z^m$ sulla piccola circonferenza ha grado m. (b) I punti fissi risolvono $z^m = -c$: sono m radici distinte, tutte di modulo $|c|^{1/m}$. La derivata di $z^m + c$ è la moltiplicazione complessa per $mz^{m-1} \neq 0$, con determinante reale positivo, quindi ogni contributo è $+1$. (c) La normalizzazione di $\bar{z}^m$ ha grado $-m$, per la riflessione della coniugazione.

11. In un gruppo di Lie compatto di dimensione positiva scegliete $a \neq e$ nella componente dell'identità. La traslazione L_a non ha punti fissi, mentre un cammino da e ad a dà un'omotopia da id a L_a. Quindi $\chi(G) = L(\mathrm{id}) = L(L_a) = 0$. Per $O(n)$, $n \geq 2$, si può scegliere una piccola rotazione non identica in $SO(n)$. La condizione di dimensione positiva esclude correttamente i gruppi finiti.

§5

1. $\frac{d}{dt}e^t z = e^t z = v(e^t z)$ e $h_0 = \mathrm{id}$. Le traiettorie non costanti sono semirette percorse verso l'esterno. La direzione di v compie un giro positivo attorno all'origine, quindi l'indice è 1. Per $t \neq 0$, $dh_t - I = (e^t - 1)I_2$ ha determinante positivo, quindi anche $L_0(h_t) = 1$.

2. Derivando la matrice di rotazione si ottiene $\dot{h}_t = Jh_t$, dove $J(x, y) = (-y, x)$. Le traiettorie sono circonferenze percorse in senso antiorario. Il campo normalizzato ha grado uno. Se $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\det(h_t - I) = 2 - 2\cos t > 0$, quindi il numero locale è uno. Ai tempi $2\pi\mathbb{Z}$ il flusso è l'identità e il punto fisso non è isolato, perciò il numero locale non è definito.

3. In una parametrizzazione ϕ scrivete $v(\phi(u)) = d\phi_u\, w(u)$, dove w è il campo riportato. Se $v(x) = 0$, allora $w(u) = 0$. Derivando, il termine con la derivata di $d\phi$ è moltiplicato per $w(u)$ e si annulla. Rimane $dv_x\, d\phi_u = d\phi_u\, dw_u$, che ha immagine tangente a X.

4. Per la regola della catena, nello zero x,

$$d(f_t)_x = d\pi_x \circ (I + t\, dv_x).$$

L'esercizio 3 mostra che il secondo fattore ha immagine in T_xX, sul quale $d\pi_x = I$. Ne segue il segno positivo della formula corretta.

5. In coordinate, il campo riportato ha derivata invertibile nello zero, quindi il teorema della funzione inversa rende lo zero isolato. Per $t > 0$, $d(f_t)_x - I = t\, dv_x$. Il numero locale è dunque il segno di $\det dv_x$ e coincide con l'indice per la proposizione di pagina 135.

6. (a) La proiezione del fibrato composta con f_v è l'identità, dunque f_v è iniettiva, immersiva e ha inversa continua e liscia sulla sua immagine. È anche propria: la controimmagine di un

compatto è chiusa nella sua proiezione compatta. Quindi è un embedding nella convenzione del testo. (b) Nell'immersione del fibrato in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$,

$$T_{(x,v(x))}X_v = \{(u, dv_x u) : u \in T_x X\}.$$

(c) In uno zero, $T_{(x,0)}T(X) \simeq T_xX \oplus T_xX$; il tangente alla sezione zero è $\{(u,0)\}$. L'intersezione col grafico di dv_x è nulla se e solo se dv_x è invertibile. (d) Concatenando le basi di sezione zero e grafico, la matrice a blocchi è $\left(\begin{smallmatrix} I & I \\ 0 & dv_x \end{smallmatrix}\right)$, di determinante $\det dv_x$. Il segno è quindi l'indice.

7. Scegliete in una carta $\rho = 1$ in V vicino allo zero e a supporto compatto $K \subset U$. Su $K \setminus V$ il modulo del campo ha minimo positivo c. Per $|a| < c/2$ la perturbazione $v + \rho a$ non si annulla lì; scegliete inoltre $-a$ valore regolare di v. Nei soli zeri possibili, in V, la derivata è dv invertibile. Trasportate il campo alla varietà e lasciatelo invariato fuori dalla carta.

8. Il diffeomorfismo tubolare può essere dato vicino alla sezione zero da $(x, v) \mapsto (x, \pi(x + v))$. In $(x, 0)$ la derivata, nelle coordinate base–fibra, è $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ I & I \end{smallmatrix}\right)$, di determinante uno. Preserva quindi le orientazioni ambientali e identifica le sezioni zero con la diagonale, comprese le loro orientazioni. I numeri di autointersezione coincidono.

9. Le sezioni $x \mapsto (x, tv(x))$ deformano X_0 in X_v. Perturbate il campo vicino a ogni zero isolato come nell'esercizio 7; la somma degli indici non cambia, perché il campo normalizzato è invariato sul bordo di piccole palle. Per il campo con zeri non degeneri la somma degli indici è $I(X_0, X_v)$ per l'esercizio 6; per omotopia è $I(X_0, X_0) = I(\Delta, \Delta) = \chi(X)$.

10. La mappa è lineare. Se $\psi_v = 0$, ponendo $w = v$ si ottiene $|v|^2 = 0$, quindi è iniettiva. Poiché $\dim V = \dim V^*$, è un isomorfismo.

11. Per $X = \mathbb{R}^k$, $df_x(w) = \sum_i f_{x_i}(x) w_i$. L'unico vettore che produce questo prodotto scalare per ogni w è $(f_{x_1}, \ldots, f_{x_k})$.

12. Scrivete il gradiente riportato come $\sum_j a_j e_j$. Applicando la definizione del gradiente al vettore $d\phi(e_i)$ si ottiene

$$\partial_i (f \circ \phi) = \sum_j g_{ij} a_j.$$

In forma matriciale, $Ga = \nabla(f \circ \phi)$; moltiplicando per G^{-1} si ricava la formula con g^{ij}.

13. Le funzioni g_{ij} sono lisce e G è invertibile ovunque; $G^{-1} = \operatorname{adj}(G)/\det G$ è quindi liscia. La formula precedente mostra la liscezza del campo in ogni carta.

14. (a) Dalla definizione, $df = 0$ se e solo se il vettore che lo rappresenta tramite prodotto scalare è zero. (b) In un punto critico, derivando $a = G^{-1}\nabla(f \circ \phi)$ i termini che derivano G^{-1} si annullano, perché il gradiente coordinato è zero. Dunque $Da = G^{-1}H$. La matrice G è di Gram di vettori indipendenti, quindi definita positiva e invertibile; Da è invertibile se e solo se lo è H, e i determinanti hanno lo stesso segno.

15. Il teorema di I.7 garantisce una funzione di Morse su ogni varietà. Il suo gradiente è liscio e ha soltanto zeri non degeneri per l'esercizio 14, quindi isolati per l'esercizio 5.

16. L'esercizio 14 identifica il segno dell'hessiana con l'indice del gradiente, già indipendente dalle coordinate. Direttamente, in un punto critico un cambio di coordinate trasforma H in $A^{\mathsf{T}} H A$, il cui determinante è $(\det A)^2 \det H$.

17. Il gradiente di una funzione di Morse ha zeri non degeneri precisamente nei punti critici e gli stessi indici. Su una varietà compatta questi zeri sono finiti: un insieme chiuso discreto compatto è finito. Applicate Poincaré–Hopf al gradiente.

18. Gli zeri in W sono finiti, perché isolati, senza accumulazione nel compatto e assenti sul bordo. Eliminate piccole palle disgiunte B_i attorno a essi. La normalizzazione si estende a $W \setminus \bigcup_i \operatorname{Int} B_i$; il grado sul bordo totale è zero. Poiché quel bordo è $\partial W - \bigcup_i \partial B_i$, il grado su ∂W è la somma dei gradi sulle ∂B_i, cioè degli indici.

19. Sulla circonferenza $z = re^{i\theta}$ le direzioni sono rispettivamente $e^{im\theta}$ ed $e^{-im\theta}$. I gradi, quindi gli indici, sono m e $-m$.

§6

1. Traslate x, z nell'origine e scrivete $f(u) = Au + r(u)$, A invertibile, $r(u) = o(|u|)$. Esiste $c > 0$ con $|Au| \geq c|u|$; su una sfera abbastanza piccola $|r(u)| < c|u|/2$. Quindi $Au + tr(u)$ non si annulla per $0 \leq t \leq 1$ e le normalizzazioni sono omotope. Il lemma lineare di III.4 riduce il grado della normalizzazione di A a quello dell'identità o di una riflessione: il risultato è $\operatorname{segno} \det A$.

2. La controimmagine è una varietà compatta di dimensione zero, quindi finita. Scegliete piccole palle disgiunte B_i attorno alle controimmagini, tutte interne a B. La mappa $(f - z)/|f - z|$ si estende alla palla privata degli interni delle B_i, e il suo grado sul bordo totale è zero. Il bordo esterno ha quindi grado uguale alla somma di quelli interni; l'esercizio 1 identifica questi ultimi con i segni delle derivate.

3. Portate il raggio di B a 1. Sia $H(s, u)$ un'omotopia liscia da una costante c a $f(u)$, $u \in S^{k-1}$, resa costante rispetto a s vicino a $0, 1$. All'interno del disco ponete $F(ru) = H(\lambda(r), u)$, con $\lambda = 0$ vicino a $r = 0$ e $\lambda = 1$ vicino a $r = 1$. Questa funzione è costante vicino al centro e uguale a $f(u)$ vicino alla sfera. Nel collare esterno ponete $F(ru) = f(\mu(r)u)$, dove $\mu(r) = 1$ vicino a $r = 1$ e $\mu(r) = r$ per $r \geq 1 + \epsilon$, raccordando con una funzione liscia. I due pezzi coincidono in un collare della sfera; per $r \geq 1 + \epsilon$ mantenete $F = f$. La funzione risultante è liscia e coincide con f fuori dalla palla ampliata, come richiesto dagli errata.

4. La normalizzazione $f/|f|$ ha grado zero e, per il caso particolare, è nullomotopa in S^l. L'omotopia

$$H_t(x) = \left((1 - t) + \frac{t}{|f(x)|}\right) f(x)$$

collega f alla normalizzazione senza attraversare l'origine. Componete le due omotopie.

5. Scegliete una palla B contenente tutte le controimmagini di zero. Per l'esercizio 2, $W(f|_{\partial B}, 0) = 0$. Per l'ipotesi induttiva e l'esercizio 4, la restrizione al bordo è nullomotopa in $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Applicate l'esercizio 3 al tratto esterno di f, considerato come applicazione in quel complementare. Ottenete g senza zeri, uguale a f fuori da una palla leggermente più grande. La differenza ha quindi supporto compatto.

6. Per $k = 1$ il risultato è già noto. Per $k \geq 2$, scegliete valori regolari distinti a, b. Se a non è raggiunto, la tesi è immediata. Altrimenti $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ sono insiemi finiti disgiunti. La varietà $M = S^k \setminus f^{-1}(b)$ è connessa. Il lemma di isotopia per famiglie finite permette di portare $f^{-1}(a)$ dentro una piccola palla di M; riportando la palla tramite il diffeomorfismo, si ottiene un aperto $U \subset M$, diffeomorfo a $\mathbb{R}^k$, contenente tutte le controimmagini di a. Scegliete $\alpha : \mathbb{R}^k \to U$ e $\beta : S^k \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^k$ con $\beta(a) = 0$. I segni delle controimmagini di zero per $\beta f \alpha$ sommano a zero, perché $\deg f = 0$; eventuali inversioni globali delle carte non alterano lo zero della somma. Applicate l'esercizio 5 e l'omotopia lineare tra l'applicazione risultante e $\beta f \alpha$. Trasportatela e incollatela con f fuori da U: il supporto compatto ne garantisce la liscezza. L'applicazione finale evita a ovunque; il codominio $S^k \setminus \{a\}$ è contraibile, quindi essa, e dunque f, è nullomotopa.

7. Un intorno tubolare di ∂W nello spazio ambiente ammette una retrazione liscia π sul bordo. L'applicazione $f \circ \pi$ estende f a tale intorno. Scegliete una funzione ρ uguale a uno su ∂W e con

supporto compatto nell'intorno. Definite $\rho(f \circ \pi)$ lì e zero altrove; poiché il supporto è interno, il raccordo è liscio. Restringete a W.

8. La necessità è il teorema di estendibilità del grado. Per la sufficienza, estendete f a $F : W \to \mathbb{R}^{k+1}$ tramite l'esercizio 7 e perturbate relativamente al bordo perché zero sia regolare. Gli zeri sono finiti e interni. Poiché $k+1 \geq 2$, il lemma di isotopia li racchiude in una palla coordinata $B \subset \operatorname{Int} W$. La normalizzazione di F è definita fuori da $\operatorname{Int} B$ e ha grado zero su ∂W, dunque anche su ∂B. Il caso particolare in dimensione k, seguito dall'esercizio 4, rende $F|_{\partial B}$ nullomotopa nel complementare dell'origine. L'esercizio 3 la riempie senza zeri, modificando F soltanto in una palla coordinata leggermente più grande, ancora interna a W. La nuova funzione non si annulla; normalizzandola si ottiene l'estensione in S^k. Sul bordo originale essa è ancora f, che ha già norma uno.

9. L'invarianza del grado dà la necessità. Per la sufficienza, orientate $W = I \times X$, il cui bordo è $X_1 - X_0$. La funzione di bordo data da f_1 e f_0 ha grado $\deg f_1 - \deg f_0 = 0$, quindi si estende a W per l'esercizio 8. L'estensione è esattamente l'omotopia richiesta.

10. Per $l \geq 2$ scegliete una grande palla contenente gli zeri. III.5.18 dà grado zero alla normalizzazione sul bordo. Il teorema di Hopf la rende nullomotopa; la funzione non normalizzata è anch'essa nullomotopa nel complementare dell'origine. Riempite mediante l'esercizio 3, mantenendo il campo fuori da una palla più grande. Per $l = 1$, l'indice di uno zero isolato è metà della differenza tra i segni del campo a destra e a sinistra. Sommando, il valore zero della somma implica che i segni ai due estremi lontani coincidano. Un'interpolazione liscia di quel segno, raccordata al campo in collari dove esso non si annulla, elimina gli zeri. Per $l = 0$ l'ipotesi della somma zero non si verifica per il campo sul singolo punto.

11. Usate la mappa $\rho(x, a) = (x, P_x a)$ descritta nel suggerimento corretto. In coordinate di fibrato, la derivata nella base è l'identità e quella rispetto ad a è suriettiva sulla fibra; perciò ρ è trasversale alla sezione zero. La trasversalità parametrica dà un parametro a per cui la sezione $x \mapsto (x, P_x a)$ è trasversale alla sezione zero. L'insieme degli zeri è allora una sottovarietà di dimensione zero di X, chiusa e compatta, quindi finita.

12. Se $\dim X \geq 2$, scegliete un campo come nell'esercizio 11 e punti distinti in U in numero uguale ai suoi zeri. Il corollario del lemma di isotopia fornisce un diffeomorfismo che manda ciascuno zero nel punto prescelto. Il campo trasportato $w(h(x)) = dh_x v(x)$ ha esattamente quegli zeri. Se $\dim X = 1$, X è una circonferenza e ammette direttamente un campo tangente senza zeri. Se $\dim X = 0$, la connessione implica che X sia un punto, contenuto necessariamente nell'aperto non vuoto U.

13. Un campo senza zeri implica $\chi(X) = 0$ per Poincaré–Hopf. Viceversa, se $\chi(X) = 0$, concentrate gli zeri di un campo in una carta diffeomorfa a $\mathbb{R}^k$ con l'esercizio 12. La somma degli indici del campo riportato è zero. L'esercizio 10 lo sostituisce con un campo senza zeri uguale al precedente fuori da un compatto della carta. Trasportate e incollate: ne risulta un campo globale senza zeri.

§7

1. Un poligono con m lati si suddivide mediante diagonali in $m-2$ triangoli, aggiungendo $m-3$ spigoli e nessun vertice. La variazione di $F - E + V$ è $(m-3) - (m-3) = 0$. Triangolate così ogni faccia e applicate la formula nota.

2. La sfera è rappresentata dal bordo di un tetraedro: $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$, quindi $\chi = 2$. Per il toro dividete il quadrato fondamentale in una griglia periodica $m \times m$, con $m \geq 3$, e ogni quadrato

in due triangoli compatibili. Dopo le identificazioni, $V = m^2$, $E = 3m^2$, $F = 2m^2$, quindi $\chi = 0$. La scelta $m \geq 3$ evita le degenerazioni della rappresentazione con un solo quadrato.

3. Partite da una triangolazione della sfera abbastanza fine da avere $2k$ facce disgiunte. Togliendone gli interni si perdono $2k$ facce, senza cambiare spigoli e vertici: la somma diventa $2 - 2k$. Un cilindro triangolato ha caratteristica zero; per esempio, con m vertici per ciascun bordo e m rettangoli divisi a metà, ha $V = 2m$, $E = 4m$, $F = 2m$. Incollandolo lungo due circonferenze di bordo si sottraggono due complessi con $V = E = m$, ciascuno di caratteristica zero. Ogni manico lascia quindi invariata la somma della sfera forata, e la superficie finale ha $\chi = 2 - 2k$.

Soluzioni del capitolo IV

Le soluzioni usano la convenzione degli autori $T \wedge S = \mathrm{Alt}(T \otimes S)$; quindi il valore di un prodotto di p funzionali è il determinante diviso per $p!$. Gli integrali di forme conservano invece la consueta normalizzazione del calcolo. Gli enunciati corretti sono quelli della traduzione.

§2. Algebra esterna

1. Se un vettore è combinazione degli altri, la multilinearità riduce il valore di T a una somma di valori con due argomenti uguali. Ciascuno è nullo, perché scambiandoli il valore resta uguale e cambia segno. Se uno dei vettori è zero, la conclusione segue direttamente dalla linearità.

2. Esprimete uno dei funzionali come combinazione degli altri. La multilinearità del prodotto esterno dà una somma di prodotti contenenti due volte lo stesso funzionale. Per anticommutatività e associatività, ciascuno contiene un fattore $\phi \wedge \phi = 0$.

3. Per definizione,

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi \prod_{i=1}^{k} \phi_i(v_{\pi(i)}).$$

La somma è precisamente lo sviluppo del determinante della matrice $[\phi_i(v_j)]$. Non è necessario separare i casi dipendente e indipendente.

4. La stessa dimostrazione con p al posto di k vale senza alcuna ipotesi sulla dimensione di V o sull'indipendenza dei vettori.

5. Il risultato è

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}(&\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3 + \phi_2 \otimes \phi_3 \otimes \phi_1 + \phi_3 \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 \\ &- \phi_2 \otimes \phi_1 \otimes \phi_3 - \phi_1 \otimes \phi_3 \otimes \phi_2 - \phi_3 \otimes \phi_2 \otimes \phi_1).\end{aligned}$$

6. (a) Se $v'_j = Av_j$, il teorema del determinante dà $T(v'_1, \ldots, v'_k) = \det(A) T(v_1, \ldots, v_k)$. Poiché $T \neq 0$, il valore su ogni base è non nullo. I segni coincidono esattamente quando $\det A > 0$. (b) Ne segue che il segno su una base positiva non dipende dalla base scelta. Definisce una delle due semirette di $\Lambda^k(V^*)$ come positiva. (c) Scelta la semiretta positiva di $\Lambda^k(V^*)$, dichiarate positiva una base su cui un qualsiasi tensore positivo abbia valore positivo. Cambiare tale tensore lo moltiplica per un numero positivo, quindi la definizione è coerente; (a) verifica la regola di cambiamento di base.

7. Scrivendo lo sviluppo per permutazioni, $\det A^t = \sum_\pi (-1)^\pi \prod_i a_{\pi(i),i}$. La sostituzione $\sigma = \pi^{-1}$ conserva il segno e trasforma ogni prodotto in $\prod_j a_{j,\sigma(j)}$. La somma è $\det A$. Equivalentemente, la normalizzazione del determinante come forma alternante multilineare unica nelle colonne dà lo stesso risultato.

8. $1 = \det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2$, quindi $\det A = \pm 1$.

9. In una base ortonormale, il prodotto scalare è $u^t w$. Se M rappresenta A, la condizione (a) è $M^t M = I$, equivalente a $MM^t = I$ per matrici quadrate. Essa è dunque (c). Le colonne di M sono le coordinate delle immagini della base: $M^t M = I$ significa esattamente che queste sono ortonormali, cioè (b). In particolare sono una base e A è invertibile.

10. (a) Fissata una base ortonormale positiva, esiste un unico tensore alternante che vi vale $1/k!$, perché lo spazio dei tensori superiori ha dimensione uno. Un'altra base ortonormale positiva

differisce per una matrice ortogonale di determinante $+1$, perciò il valore resta $1/k!$. (b) Il prodotto esterno della base duale assume tale valore per l'esercizio 3; è quindi l'elemento di volume.

11. In $\mathbb{R}^2$, $T(v_1, v_2) = \det(v_1, v_2)/2$. Il valore assoluto del determinante è base per altezza del parallelogramma, mentre il segno è l'orientazione della coppia. In $\mathbb{R}^3$ vale $T(v_1, v_2, v_3) = \det(v_1, v_2, v_3)/6$, e il volume è base per altezza. In generale il volume euclideo del parallelepipedo è $|\det(v_1, \dots, v_k)| = k!|T(v_1, \dots, v_k)|$. Per vettori in un sottospazio di $\mathbb{R}^N$ la formula intrinseca è $\sqrt{\det[(v_i \cdot v_j)]}$, ottenuta scegliendo una base ortonormale del sottospazio.

12. (a) L'applicazione $v \mapsto \phi_v$ è lineare. Se $\phi_v = 0$, allora $|v|^2 = \phi_v(v) = 0$, quindi è iniettiva. Gli spazi hanno la stessa dimensione, dunque è un isomorfismo. (b) L'anticommutatività di T dà $(u \times v) \cdot w = -(v \times u) \cdot w$ per ogni w; la non degenerazione del prodotto scalare dà $u \times v = -v \times u$. Per una base ortonormale positiva v_1, v_2, v_3, il funzionale $w \mapsto 6T(v_1, v_2, w)$ vale $0, 0, 1$ sui tre vettori: corrisponde quindi a v_3. Le permutazioni cicliche danno le altre due identità; $v \times v = 0$ segue dall'alternanza. Senza il fattore 6 ripristinato nell'enunciato, si otterrebbe erroneamente $v_1 \times v_2 = v_3/6$.

§3. Forme differenziali: esercizio finale e verifiche nel testo

Per l'esercizio finale, valutiamo su $v \in T_x(X)$:

$$(f^* d\phi)_x(v) = d\phi_{f(x)}(df_x v) = d(\phi \circ f)_x(v) = d(f^*\phi)_x(v),$$

per la regola della catena. Questa prova non usa coordinate.

Per le verifiche nel testo: $dx_i(z)(a_1, \dots, a_k) = a_i$ perché la coordinata è lineare. La formula $d\phi = \sum_i \partial_i \phi \, dx_i$ è la formula della derivata applicata a un vettore arbitrario. La linearità del pullback segue dalla linearità di $(df_x)^*$. La compatibilità con $\wedge$ si verifica direttamente dalla somma che definisce Alt, poiché sostituire $df_x v_j$ a ogni argomento commuta con le permutazioni. Infine la regola della catena e $(AB)^* = B^* A^*$ danno $(f \circ h)^* = h^* f^*$. In particolare $f^* dx_i = d(x_i \circ f) = df_i$.

§4. Integrazione sulle varietà

1. Su un punto positivo l'integrale della 0-forma f è $f(z)$ per la definizione euclidea in dimensione zero. Cambiare l'orientazione moltiplica per -1. La somma sulle componenti dà $\sum_z \sigma(z) f(z)$.

2. Calcolate mediante una partizione dell'unità e parametrizzazioni locali. Una parametrizzazione positiva per X è negativa per $-X$; la formula di cambiamento di variabili cambia il segno di ciascun contributo. Sommando, $\int_{-X} \omega = -\int_X \omega$.

3. $c^* df = d(f \circ c) = (f \circ c)' dt$. Il teorema fondamentale del calcolo dà $f(c(b)) - f(c(a))$.

4. Scrivete $c^*\omega = a(t)dt$ e scegliete una primitiva A su $[a, b]$. Allora $(c \circ f)^* \omega = a(f(s)) f'(s) ds = d(A \circ f)$. Il suo integrale è $A(b) - A(a)$, uguale al primo integrale. Non occorrono né monotonia né iniettività di f.

5. Per $\omega = \sum_j a_j(x) dx_j$ su $\mathbb{R}^k$ e $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\cos t, \sin t)$,

$$\oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \sum_j a_j(\widetilde{\gamma}(t)) \widetilde{\gamma}_j'(t) \, dt.$$

È la definizione del pullback, seguita dalla parametrizzazione positiva della circonferenza.

6. Dividete S^1 in archi parametrizzati positivamente da intervalli di lunghezza minore di 2π, e usate una partizione dell'unità. Su ciascun arco la formula segue dalla definizione dell'integrale; sommando si ottiene $\int_0^{2\pi} h^*\omega$. Gli estremi hanno misura nulla e non contribuiscono.

7. Per l'esercizio 6 e il pullback dei differenziali, $\oint_\gamma df = \int_0^{2\pi} d(f \circ \gamma \circ h) = 0$, perché la funzione ha lo stesso valore ai due estremi.

8. (a) Con $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ si ha $c^*\omega = dt$, dunque l'integrale antiorario è 2π (quello orario -2π). (b) Per $x > 0$, $d\arctan(y/x) = (-y\,dx + x\,dy)/(x^2+y^2)$. (c) Se esistesse una primitiva globale, l'esercizio 7 darebbe integrale nullo su ogni circonferenza, in contraddizione con (a).

9. La necessità è l'esercizio 7. Per la sufficienza, scrivete $h^*\omega = a(t)dt$, con a liscia 2π-periodica. Se l'integrale è nullo, $g(t) = \int_0^t a(s)ds$ soddisfa $g(t+2\pi) = g(t)$. Discende quindi a una funzione liscia f su S^1, poiché h è un diffeomorfismo locale. Si ha $h^*df = dg = h^*\omega$; l'invertibilità locale di h implica $df = \omega$.

10. Prendete $c = (\int_{S^1}\omega)/(\int_{S^1}\nu)$. Allora $\omega - c\nu$ ha integrale nullo ed è esatta per l'esercizio 9. Il valore di c è unico; la primitiva lo è a meno di una costante.

11. Rendete ogni curva costante vicino agli estremi mediante una funzione liscia $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ uguale a 0 vicino a 0 e a 1 vicino a 1. L'esercizio 4 conserva gli integrali. Incollando una curva con la seconda percorsa al contrario si ottiene una curva chiusa liscia, il cui integrale è la differenza dei due integrali. Per ipotesi questa differenza è zero. La connessione di una varietà implica connessione per cammini lisci, quindi le curve richieste esistono.

12. Si lavora su ogni componente connessa separatamente. Fissato p, ponete $f(x) = \int_p^x \omega$, ben definita per l'esercizio 11. In una carta convessa attorno a x_0, la funzione si esprime come una costante più l'integrale lungo segmenti, quindi è liscia per derivazione sotto il segno d'integrale. Se $\omega = \sum_i a_i(x)dx_i$, l'indipendenza dal cammino permette di calcolare

$$f(x + he_j) - f(x) = \int_0^h a_j(x + te_j)\,dt.$$

Dividendo per h e passando al limite si ottiene $\partial_j f = a_j$. Dunque $df = \omega$.

13. Per $h(u,v) = (u,v,F(u,v))$, ponete $N = (-F_u, -F_v, 1)$, $n = N/|N|$. Le formule dei pullback del testo danno

$$h^*dA = (-n_1F_u - n_2F_v + n_3)\,du \wedge dv = |N|\,du \wedge dv.$$

È la forma d'area definita nel testo.

14. Per u, v tangenti, $\omega(u,v) = \frac{1}{2}\vec{F} \cdot (u \times v)$. Poiché $u \times v$ è normale a S, soltanto $(\vec{F}\cdot n)n$ contribuisce. Dunque $\omega(u,v) = (\vec{F}\cdot n)\frac{1}{2}n \cdot (u \times v) = (\vec{F}\cdot n)dA(u,v)$.

§5. Derivata esterna

1. Scrivendo tutti i risultati nell'ordine $dx \wedge dy \wedge dz$ quando il grado è tre:

(a) $d\omega = (2z-2)\,dx \wedge dy \wedge dz$;
(b) $d\omega = yz\,dx \wedge dz + xz\,dy \wedge dz$;
(c) $d(f\,dg) = df \wedge dg$;
(d) $d\omega = 6y^2\,dx \wedge dy \wedge dz$.

Per esempio in (a) $d(z^2) \wedge dx \wedge dy = 2z\,dx \wedge dy \wedge dz$ e $d(z^2+2y) \wedge dx \wedge dz = -2\,dx \wedge dy \wedge dz$. In (d) il termine $\frac{1}{2}dy \wedge dx$ non contribuisce, mentre $6y^2 dy \wedge dz \wedge dx$ ha segno positivo.

2. Per $P = -y/(x^2+y^2)$, $Q = x/(x^2+y^2)$ si calcola $Q_x = P_y = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2$. Quindi il rotore bidimensionale è nullo. Se il campo fosse un gradiente globale, $P\,dx + Q\,dy$ sarebbe esatta, ma il suo integrale su S^1 è 2π per §4.8.

Verifiche del testo. Per monomi $a\,dx_I$, $b\,dx_J$, la regola del prodotto deriva da $d(ab) = b\,da + a\,db$ e $dx_I \wedge db = (-1)^{|I|} db \wedge dx_I$; la linearità la estende a tutte le forme. Le proprietà sulle varietà seguono riportando ogni identità in una carta, dove il pullback è invertibile. La relazione $d^2 = 0$ su una funzione dà $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$, e su una 1-forma dà $\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Per una 2-forma il secondo differenziale ha grado quattro e quindi è automaticamente nullo in dimensione tre.

§6. Coomologia mediante forme

1. Per ogni forma chiusa ω, $(g\circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$. Passando alle classi si ottiene $(g\circ f)^\# = f^\# g^\#$, perché i pullback mandano forme esatte in forme esatte.

2. Una 0-forma f è chiusa se $df = 0$. In ogni carta tutte le derivate parziali sono nulle, quindi f è localmente costante, e dunque costante su ciascuna componente connessa. Viceversa ogni funzione costante sulle componenti è liscia e ha differenziale nullo, perché le componenti di una varietà sono aperte. Non vi sono forme di grado -1, quindi non si quozienta per alcun sottospazio non nullo. Ne segue $H^0(X) \cong \prod_{C\in\pi_0(X)} \mathbb{R}$, di dimensione pari al numero delle componenti se questo è finito. Se le componenti sono infinite, il prodotto non è la somma diretta; la formulazione originale sulla dimensione non è valida in generale.

3. Scrivete $\omega = dt\wedge\alpha(t) + \beta(t)$, con $\alpha(t), \beta(t)$ forme su U di gradi $p-1, p$. Per $\Phi(t,x) = (t, \phi(x))$, il pullback è $dt \wedge \phi^*\alpha(t) + \phi^*\beta(t)$. L'integrazione dei coefficienti commuta con il pullback ϕ^*, che non dipende da t. Quindi entrambi i membri sono $\int_a^t \phi^*\alpha(s)ds$.

4. Per una carta $h : U \to X$, usate $\mathrm{id}\times h$ per trasportare la definizione euclidea. Sulle sovrapposizioni i risultati concordano per l'esercizio 3, quindi si incollano in un'unica forma liscia. La formula è locale rispetto alla variabile x e l'integrale in t produce coefficienti lisci. L'unicità segue dal fatto che le carte ricoprono X: un operatore locale con la prescrizione euclidea deve dare lo stesso risultato in ciascuna carta. Sulle 0-forme poniamo $P_a = 0$.

5. Con la notazione precedente e d_X per la derivata nelle variabili di X,

$$d\omega = dt \wedge (\partial_t\beta - d_X\alpha) + d_X\beta, \qquad P_a\omega = \int_a^t \alpha(s)ds.$$

Pertanto

$$dP_a\omega = dt\wedge\alpha(t) + \int_a^t d_X\alpha(s)ds,$$
$$P_a d\omega = \beta(t) - \beta(a) - \int_a^t d_X\alpha(s)ds.$$

La somma è $\omega - \beta(a) = \omega - \pi^* i_a^*\omega$. La verifica locale vale globalmente per l'esercizio 4. In grado zero resta il teorema fondamentale del calcolo, $P_a df = f(t,x) - f(a,x)$. La formula con un P integrato da 0 e un i_a arbitrario sarebbe falsa: per $\omega = t$, il primo membro è t, mentre il secondo sarebbe $t - a$.

6. Poiché $\pi i_a = \mathrm{id}$, $i_a^\#\pi^\# = \mathrm{id}$. Se $d\omega = 0$, l'esercizio 5 dà $\omega - \pi^* i_a^*\omega = d(P_a\omega)$, quindi le due forme sono coomologhe. Pertanto anche $\pi^\# i_a^\# = \mathrm{id}$.

7. Un'omotopia su un intervallo può essere resa costante presso gli estremi mediante una riparametrizzazione liscia e poi estesa a $\mathbb{R}\times X$. Per tale H, $f = Hi_a$, $g = Hi_b$. Ma $i_a^\#$ e $i_b^\#$ sono entrambe inverse di $\pi^\#$ per l'esercizio 6; sono quindi uguali. Ne segue $f^\# = i_a^\# H^\# = i_b^\# H^\# = g^\#$.

8. Se l'identità di X è omotopa a una costante c, l'esercizio 7 dà $\mathrm{id}_{H^p(X)} = c^\#$. Per $p > 0$, il pullback di ogni p-forma mediante una costante è zero, perché la sua derivata è nulla. Quindi $H^p(X) = 0$. Si usa qui la nozione di contraibilità mediante omotopie lisce adottata nel testo.

9. La proiezione stereografica identifica $U_1 \cap U_2$ con $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Un diffeomorfismo esplicito di quest'ultimo con $\mathbb{R} \times S^{k-1}$ è $x \mapsto (\log|x|, x/|x|)$, con inversa $(t, u) \mapsto e^t u$.

10. Poniamo $A = U_1$, $B = U_2$, $C = A \cap B$ e $p > 1$. Per ω chiusa, scegliete $d\phi_A = \omega|_A$, $d\phi_B = \omega|_B$ e definite $\delta[\omega] = [\phi_A - \phi_B] \in H^{p-1}(C)$. Cambiando primitive, la differenza aggiunta è la restrizione di forme chiuse di grado $p-1 > 0$ su A, B, quindi esatte per contraibilità. Cambiando ω di $d\eta$, si possono cambiare entrambe le primitive di η, lasciando invariata la differenza. Dunque δ è ben definita e lineare.

La costruzione con ρ_1, ρ_2 nel testo mostra la suriettività: da ν chiusa si ottiene ω con primitive $\phi_A = \rho_1\nu$, $\phi_B = -\rho_2\nu$ e differenza ν.

Per l'iniettività, supponiamo $\phi_A - \phi_B = d\eta$ su C. Con le stesse funzioni, ponete $\eta_A = \rho_1\eta$ su A e $\eta_B = -\rho_2\eta$ su B, estese per zero presso i poli. Allora $\eta_A - \eta_B = \eta$ su C. Le forme $\phi_A - d\eta_A$ e $\phi_B - d\eta_B$ coincidono sull'intersezione, si incollano in una forma globale ϕ e soddisfano $d\phi = \omega$. Quindi δ è iniettiva.

Per $p = 1$ le primitive sono funzioni, determinate a meno di costanti sui due aperti. Si ottiene invece

$$H^1(S^k) \cong H^0(C)/\mathbb{R},$$

dove $\mathbb{R}$ è il sottospazio delle funzioni costanti su tutto C. Per $k > 1$, C è connesso e il quoziente è zero; per $k = 1$, C ha due componenti e il quoziente di $\mathbb{R}^2$ per la diagonale è unidimensionale. Per verificare direttamente l'iniettività nel caso $p = 1$, quando la differenza delle primitive è costante sottraetela a una delle due; le primitive si incollano. Questo completa anche la base dell'induzione per la coomologia delle sfere.

§7. Il teorema di Stokes

1. Con l'orientazione crescente, $\partial[a, b] = \{b\} - \{a\}$. Per una funzione f, $\int_{\partial[a,b]} f = f(b) - f(a)$, mentre $\int_{[a,b]} df = \int_a^b f'(t)dt$. Stokes è esattamente il teorema fondamentale del calcolo.

2. Ponete $\omega = f\,dx + g\,dy$. Allora $d\omega = (g_x - f_y)dx \wedge dy$. Stokes, con l'orientazione di bordo positiva, dà la formula richiesta.

3. Ponete $\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$. Dal §5, $d\omega = (\operatorname{div}\vec{F})dx \wedge dy \wedge dz$; sul bordo, per §4.14, $\omega = (\vec{F} \cdot n)dA$. Applicate Stokes a W.

4. Sia $\eta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. La forma $d\eta$, ristretta a S, è $(\operatorname{rot}\vec{F} \cdot n)dA$ per §5 e §4.14. Stokes su S dà la formula con l'orientazione indotta su ∂S.

5. Applicando il teorema della divergenza alla piccola palla,

$$\frac{1}{\operatorname{vol} B_\epsilon} \int_{\partial B_\epsilon} \rho\vec{v} \cdot n\, dA = \frac{1}{\operatorname{vol} B_\epsilon} \int_{B_\epsilon} \operatorname{div}(\rho\vec{v})\, dv.$$

La continuità fa tendere la media al valore nel centro. Applicando il medesimo teorema a D, il flusso totale è l'integrale del tasso locale $\operatorname{div}(\rho\vec{v})$. Nell'interpretazione fisica, tale divergenza rappresenta la sorgente massica necessaria in regime stazionario; in generale l'equazione di continuità è $\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = s$. L'identità matematica vale indipendentemente dall'ipotesi di incomprimibilità.

6. Fuori dall'origine, $\operatorname{div}(x/|x|^3) = 3|x|^{-3} - 3|x|^{-5}|x|^2 = 0$. Applicate la divergenza a $D \setminus \operatorname{Int} B_\epsilon$: la normale sul bordo interno è opposta a quella uscente dalla palla, quindi il flusso su S è uguale a quello su ∂B_ϵ. Su quest'ultima, $\vec{F} \cdot n = q/\epsilon^2$ e l'area è $4\pi\epsilon^2$, dando $4\pi q$.

7. Se $\omega = d\eta$, Stokes dà $\int_X \omega = \int_{\partial X} \eta = 0$ perché $\partial X = \varnothing$.

8. Per un'estensione $F : W \to Y$, $\int_X f^*\omega = \int_{\partial W} F^*\omega = \int_W dF^*\omega = \int_W F^* d\omega = 0$.

9. Su $W = [0,1] \times X$, con orientazione prodotto, $\partial W = X_1 - X_0$. Applicate l'esercizio 8 all'omotopia F: si ottiene $0 = \int_X f_1^*\omega - \int_X f_0^*\omega$.

10. Ogni curva chiusa su X è omotopa a una costante. L'esercizio 9, con dominio S^1, rende uguali gli integrali dei pullback della forma chiusa. Il pullback mediante la costante è zero perché la derivata è nulla. Quindi l'integrale è nullo. La semplice connessione e le omotopie sono intese nella categoria liscia del testo; una nullomotopia continua può essere regolarizzata senza cambiare gli estremi.

11. Per l'esercizio 10 tutti i periodi sono nulli. L'esercizio 12 del §4 costruisce allora una primitiva mediante integrazione lungo cammini.

12. Per $k > 1$, S^k è semplicemente connessa (capitolo I, §7, esercizio 6 corretto dagli errata). Ogni 1-forma chiusa è quindi esatta e $H^1(S^k) = 0$.

13. Sia $\pi : X \times [0,1] \to X$ la proiezione. La forma $\pi^*\omega$ ristretta a W è chiusa, perciò Stokes dà

$$0 = \int_W d(\pi^*\omega) = \int_{\partial W} \pi^*\omega = \int_{Z_1} \omega - \int_{Z_0} \omega.$$

I segni usano precisamente la definizione di cobordismo orientato degli errata.

14. (a) Se $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$, la restrizione a Z è esatta e ha integrale zero per l'esercizio 7. (b) Quindi l'integrale dipende solo dalla classe; linearità segue da quella delle forme e dell'integrale. (c) Se $Z = \partial W$, per $d\omega = 0$ vale $\int_Z \omega = \int_W d\omega = 0$. (d) È l'esercizio 13, applicato a ogni rappresentante chiuso. L'ipotesi che Z sia senza bordo in (a) è essenziale: su $[0,1]$, la forma esatta dx ha integrale 1.

§8. Integrazione e applicazioni

1. Su $x > 0$, derivando $\arg(x+iy) = \arctan(y/x)$ si ottiene $(-y\,dx + x\,dy)/(x^2+y^2)$. Le altre scelte locali di argomento differiscono per costanti, dunque la formula vale globalmente sul piano puntato. Il suo differenziale è zero per calcolo diretto, ma l'integrale 2π su S^1 impedisce che sia esatta.

2. La curva γ è omotopa nel piano puntato alla normalizzata $\widehat{\gamma} = \gamma/|\gamma|$ mediante $H(s,t) = ((1-s) + s/|\gamma(t)|)\gamma(t)$, il cui fattore è positivo. Per l'invarianza omotopica degli integrali di forme chiuse,

$$\oint_\gamma \omega = \int_{S^1} \widehat{\gamma}^*(\omega|_{S^1}) = \deg(\widehat{\gamma}) \int_{S^1} \omega.$$

L'ultima uguaglianza è la formula del grado. Applicandola a $d\arg$, il cui integrale è 2π, si ottiene la formula del numero di avvolgimento.

3. (a) La linearità complessa dà $d(x+iy) = dx + i\,dy$. (b) $d(f\,dz) = df \wedge dz = (if_x - f_y)dx \wedge dy$. È nullo se e solo se $f_y = if_x$. Per $f = u + iv$ ciò equivale a $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. (c) Se $f_y = if_x$ e $g_y = ig_x$, allora $(fg)_y = i(fg)_x$ per la regola del prodotto. (d) Per z, le derivate sono $z_x = 1$, $z_y = i$. Prodotti, somme e multipli complessi conservano Cauchy–Riemann, quindi tutti

i polinomi sono olomorfi. (e) La forma complessa $f(z)dz$ è chiusa. Applicate §7.9 separatamente alle parti reale e immaginaria. (f) Ogni curva chiusa è omotopa a una costante, il cui integrale è zero. (g) Per $f = 1/(z-a)$, $f_x = -1/(z-a)^2$ e $f_y = -i/(z-a)^2 = if_x$. (h) Scrivendo $z = a+re^{it}$, $dz = ire^{it}dt$, quindi $dz/(z-a) = i\,dt$ e l'integrale è $2\pi i$. (i) Le circonferenze di raggi positivi entro il disco sono omotope nel disco puntato, e la forma $f(z)dz/(z-a)$ è chiusa. Il suo integrale è dunque costante nel raggio. Inoltre

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right| \le \frac{\sup_{C_r} |f(z)-f(a)|}{r}\, 2\pi r \longrightarrow 0.$$

Per (h), il termine costante dà $2\pi i f(a)$.

(j) La funzione

$$F(z) = \begin{cases} (f(z)-f(a))/(z-a), & z \neq a, \\ f_x(a), & z = a \end{cases}$$

è liscia e olomorfa su U. Per verificarlo senza invocare un teorema di singolarità eliminabili, in un piccolo disco convesso attorno ad a usate

$$F(z) = \int_0^1 f_x(a + t(z-a))\,dt.$$

Questa identità segue dalla regola della catena e da $f_y = if_x$; l'integrando è liscio. Differenziando Cauchy–Riemann si verifica che f_x è olomorfa, quindi lo è anche F per derivazione sotto integrale. Fuori dal punto è il quoziente di funzioni olomorfe. Per (f), $\oint_\gamma F(z)dz = 0$. Ne segue

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a) \oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\, W(\gamma, a) f(a),$$

dove l'ultima identità segue dall'esercizio 2 applicato dopo traslazione, oppure da $dz/(z-a) = d\log|z-a| + i\,d\arg(z-a)$.

Perché la precisazione sul dominio è necessaria. Nell'enunciato originale prendete $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a = 1$, $f(z) = 1/z$ e $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$. Si ha $W(\gamma, 1) = 0$, ma

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz = \oint_\gamma \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz = -2\pi i.$$

Il secondo termine ha primitiva nel disco $|z| < 1$. Dunque la formula stampata senza condizione sul dominio o sul ciclo è falsa.

4. Sia $\phi : \mathbb{R}^k \to S^k \setminus \{N\}$ una parametrizzazione positiva e sia $a \ge 0$ liscia, non nulla, a supporto compatto in $\mathbb{R}^k$. Trasportate $a\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ sulla sfera mediante $(\phi^{-1})^*$ ed estendetela per zero vicino a N. La forma è liscia e l'integrale è $\int_{\mathbb{R}^k} a > 0$. Per $k = 0$ basta assegnare un valore non nullo a un punto orientato, ma le successive affermazioni su $H^k(S^k)$ richiedono $k > 0$.

5. L'integrale annulla le forme esatte per Stokes, dunque induce un funzionale $H^k(S^k) \to \mathbb{R}$. Per l'esercizio 4 è non nullo e per il calcolo della coomologia il dominio ha dimensione uno. È quindi un isomorfismo. Il suo nucleo nullo significa precisamente che una forma di integrale zero è esatta; la necessità è già Stokes.

6. Necessità: se $\omega = d\eta$ con η a supporto compatto, scegliete una palla che contenga il supporto nel proprio interno. Stokes dà $\int \omega = \int_{\partial B} \eta = 0$.

Sufficienza per $k = 1$: se $\omega = a(x)dx$, ponete $F(x) = \int_{-\infty}^x a(t)dt$. A sinistra del supporto $F = 0$; a destra $F = \int a = 0$. Quindi F ha supporto compatto e $dF = \omega$.

Per $k > 1$ trasferite ω su S^k, estendendo per zero vicino a N, e chiamate il risultato ω'. Per l'esercizio 5 è $d\nu$. In un piccolo intorno contrattile U di N, $d\nu = 0$ e $\deg \nu = k - 1 > 0$, quindi

il lemma di Poincaré dà $\nu = d\mu$ su U. Scegliete χ supportata in U e uguale a 1 in un intorno più piccolo di N. Estendete $\chi\mu$ per zero sulla sfera. La forma $\nu - d(\chi\mu)$ è nulla vicino a N e ha differenziale ω'. Tornando in $\mathbb{R}^k$ si ottiene la primitiva a supporto compatto richiesta.

7. Il caso $k = 0$ con X connessa è un singolo punto, immediato. Sia $k > 0$. Scegliete una palla coordinata positiva U e una forma ω supportata in essa con integrale 1. Se η è supportata in U, allora $\eta - (\int_X \eta)\omega$ ha integrale nullo e, trasferita in $\mathbb{R}^k$, è esatta con primitiva a supporto compatto per l'esercizio 6. Estendendo la primitiva per zero, $[\eta] = (\int_X \eta)[\omega]$ in $H^k(X)$.

Per ogni punto $x \in X$, il lemma di isotopia fornisce un diffeomorfismo h_x isotopo all'identità che manda x in U. Restringendo un intorno V_x di x, si ha $h_x(V_x) \subset U$. Compattezza e una partizione dell'unità permettono di scrivere una forma arbitraria θ come somma finita di forme θ_i supportate in tali V_i. La forma $(h_i^{-1})^*\theta_i$ è supportata in U; poiché h_i è isotopo all'identità, per §6.7 la sua classe è $[\theta_i]$. Il cambiamento di variabili preserva l'integrale, dunque $[\theta_i] = (\int_X \theta_i)[\omega]$. Sommando,

$$[\theta] = \left(\int_X \theta\right)[\omega].$$

Ogni classe è quindi un multiplo di $[\omega]$, e il coefficiente richiesto è $c = \int_X \theta$. Poiché $\int_X \omega = 1$, il funzionale è un isomorfismo.

8. Per ogni classe $[\omega] \in H^k(Y)$, la formula del grado dà

$$\int_X f^{\#}[\omega] = \int_X f^*\omega = \deg(f) \int_Y \omega.$$

Questa è esattamente la commutatività del diagramma. La connessione di entrambi i domini è necessaria per identificare ciascun gruppo superiore con una sola copia di $\mathbb{R}$; per varietà disconnesse si ottiene invece una matrice di gradi fra le componenti.

§9. Il teorema di Gauss–Bonnet

1. Per $h(u, v) = (u, v, f(u, v))$, i vettori h_u, h_v hanno prodotto vettoriale $N = (-f_u, -f_v, 1)$. Il valore della forma di volume su di essi è metà dell'area del parallelogramma, $|N|/2$. Poiché $(du \wedge dv)(e_1, e_2) = 1/2$,

$$h^*\nu_S = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, du \wedge dv,$$

che coincide con il pullback di dA nel §4.

2. La forma proposta valutata su $v, w \in T_xS$ è $\frac{1}{2}\det(v, w, n)$. Se v, w sono una base ortonormale positiva, anche n, v, w è una base positiva di $\mathbb{R}^3$; la permutazione ciclica verso v, w, n è pari, quindi il determinante è 1. La forma vale dunque $1/2$, come richiesto dalla definizione. Sulla sfera unitaria $n(x) = x$, dando la formula specifica.

3. Per $x \in S^{n-1}$ e $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_xS^{n-1}$,

$$\nu_{S^{n-1},x}(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!} \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Poiché A è ortogonale, manda sfera in sfera e $dA = A$. Sostituire tutti i vettori con le loro immagini moltiplica il determinante per $\det A$. Dunque $A^*\nu = (\det A)\nu$, che è ν per una rotazione con determinante $+1$. Una riflessione mostra che l'ipotesi di sola ortogonalità nell'originale è insufficiente.

4. Se la curva è regolare, il versore tangente positivo è $T = C'/|C'|$. La forma di volume unidimensionale vale 1 su T, quindi $C^*\nu = |C'(t)|dt$. Integrando si ottiene la lunghezza d'arco.

Se la curva non è iniettiva, la formula è l'integrale parametrizzato, che conta ogni passaggio; non coincide necessariamente con la misura dell'insieme immagine.

5. Parametrizzate la superficie mediante $H(t,\theta) = (t, f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta)$. I vettori H_t e H_θ sono ortogonali, con norme $\sqrt{1+f'^2}$ e f. Quindi il modulo del loro prodotto vettoriale è $f\sqrt{1+f'^2}$. Orientando coerentemente,

$$\int_S \nu_S = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,d\theta\,dt = \int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt.$$

6. Sulla sfera di raggio r e normale esterna, $g(x) = x/r$. La derivata sui tangenti è $r^{-1}I$, fra spazi tangenti che coincidono come sottospazi orientati. Il Jacobiano è $r^{-(n-1)}$.

7. Vicino a $(1,0,0)$ scrivete l'iperboloide come $x = \sqrt{1-y^2+z^2}$. Le derivate prime si annullano nel punto e l'hessiana nelle variabili (y,z) è $\mathrm{diag}(-1,1)$. Per il calcolo dell'esercizio 8, o differenziando direttamente la normale $(x,y,-z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, la curvatura è il determinante -1.

8. Per il grafico con normale verso l'alto,

$$g(x,y) = \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

All'origine $df = 0$, quindi il fattore di normalizzazione ha derivata zero e

$$dg_0(u,v) = (-f_{xx}u - f_{xy}v, -f_{yx}u - f_{yy}v, 0).$$

Le basi (e_1,e_2) sono ortonormali positive sia sul grafico sia sulla sfera in e_3. La matrice è $-\mathrm{Hess}_0 f$, il cui determinante, in dimensione due, è $\det \mathrm{Hess}_0 f = \kappa_1\kappa_2$. Il risultato dipende solo dalle derivate fino all'ordine due. Dopo una rotazione nel piano, il polinomio quadratico con la stessa hessiana è $\frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2)$: questo spiega il suggerimento corretto.

9. In ogni punto scegliete coordinate ortonormali con piano tangente orizzontale e superficie localmente grafico $z = f(x,y)$, con $f(0) = 0$, $df_0 = 0$. La retta contenuta nella superficie e passante per il punto ha una direzione tangente non nulla v. Lungo tale retta $f(tv) = 0$, quindi $v^t(\mathrm{Hess}\, f)v = 0$. Una matrice simmetrica 2×2 il cui modulo quadratico si annulla su un vettore non nullo non può essere definita positiva o negativa; i suoi autovalori hanno prodotto non positivo. Per l'esercizio 8, $\kappa \le 0$.

10. Una parametrizzazione è

$$H(\theta,\phi) = ((b + a\cos\theta)\cos\phi, (b+a\cos\theta)\sin\phi, a\sin\theta).$$

La normale esterna è $g = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$. Si verifica $g_\theta = H_\theta/a$ e $g_\phi = [\cos\theta/(b + a\cos\theta)]H_\phi$. Le due direzioni sono ortogonali e indipendenti, dunque

$$\kappa(\theta,\phi) = \frac{\cos\theta}{a(b+a\cos\theta)}.$$

Il denominatore è positivo. La curvatura è positiva sul lato esterno ($\cos\theta > 0$), negativa sul lato interno ($\cos\theta < 0$), nulla sulle due circonferenze superiore e inferiore ($\cos\theta = 0$).

11. (i) In un vecchio vertice, suddividere i triangoli non cambia la somma degli angoli incidenti, quindi non cambia il difetto. In un nuovo vertice interno a un triangolo, gli angoli sommano 2π. In un nuovo vertice all'interno di un vecchio lato, su ciascuno dei due triangoli adiacenti gli angoli sommano π, dunque ancora 2π. Ogni nuovo difetto è quindi zero. Questo prova l'invarianza per

una suddivisione compatibile lungo i lati. (ii) Se V, E, F sono i numeri di vertici, lati e triangoli, la somma di tutti gli angoli di tutti i triangoli è πF. Perciò $\sum_v \kappa(v) = 2\pi V - \pi F$. Contando le incidenze lato-triangolo, $3F = 2E$, dunque

$$2\pi(V - E + F) = 2\pi V - \pi F = \sum_v \kappa(v).$$

12. L'immersione identifica ogni T_xX con l'iperpiano $df_x(T_xX) \subset \mathbb{R}^n$. L'orientazione di X sceglie l'unica normale unitaria $g(x)$ per cui $(g(x), df_x e_1, \dots, df_x e_{n-1})$ è positiva quando $(e_1, \dots, e_{n-1})$ è positiva. In coordinate, i cofattori della matrice di df danno una normale non nulla, e normalizzandola si vede che g è liscia.

Munite X della metrica indotta da f. Per $a, -a$ valori regolari di g, definite il campo v mediante

$$df_x(v_x) = (a \cdot g(x))g(x) - a.$$

Il membro destro è tangente all'iperpiano immerso, perciò v esiste ed è liscio. I suoi zeri sono precisamente $g^{-1}(\{a, -a\})$, finiti per compattezza. In uno zero z, differenziando l'identità e usando $v_z = 0$ si ottiene

$$df_z \circ Dv_z = \begin{cases} dg_z, & g(z) = a, \\ -dg_z, & g(z) = -a. \end{cases}$$

Il termine contenente la derivata di df si annulla perché è moltiplicato per v_z. Le orientazioni dell'iperpiano immerso e di $T_{\pm a}S^{n-1}$ coincidono per la scelta della normale. Se $n - 1$ è pari, il segno di $\det Dv_z$ coincide in entrambi i casi col segno locale di g. Poincaré–Hopf dà dunque $\chi(X) = 2\deg(g)$.

Per $f(t) = (\cos nt, \sin nt)$, il vettore tangente orientato ha direzione $\operatorname{sgn}(n)(-\sin nt, \cos nt)$. La normale positiva è $g(t) = \operatorname{sgn}(n)(\cos nt, \sin nt)$. Il fattore costante -1 quando $n < 0$ è una rotazione della circonferenza, di grado uno, quindi $\deg g = n$. Invece $\chi(S^1) = 0$, mostrando il fallimento in dimensione dispari.

Soluzioni dei problemi e degli esercizi delle appendici

Appendice 1

Problema a p. 202: ricoprimenti mediante cubi. Per ogni parallelepipedo aperto limitato S e ogni $\eta > 0$ esiste un ricoprimento con cubi aperti la cui somma dei volumi è minore di $\mathrm{vol}(S) + \eta$. Infatti, dividiamo lo spazio in cubi di lato δ e prendiamo quelli che incontrano S; sono finitamenti molti, contenuti nel parallelepipedo ottenuto allargando ogni lato di S di 2δ. La somma dei volumi dei cubi chiusi di questa griglia tende a $\mathrm{vol}(S)$ per $\delta \to 0$. Un ulteriore allargamento arbitrariamente piccolo di ciascuno li rende aperti senza alterare la stima oltre η. Ora ricopriamo l'insieme nullo A con parallelepipedi S_j di somma dei volumi minore di $\epsilon/2$. Per ciascuno applichiamo la costruzione con errore $\eta_j = \epsilon/2^{j+2}$, $j \geq 1$. L'insieme di tutti i cubi così ottenuti è numerabile, ricopre A e ha somma dei volumi minore di ϵ.

Esercizio a p. 202: un iperpiano ha misura nulla. Ogni compatto di $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ è contenuto in $[-M, M]^{n-1} \times \{0\}$ per qualche M. Il parallelepipedo $(-M-1, M+1)^{n-1} \times (-\delta, \delta)$ lo ricopre e ha volume $2\delta(2M+2)^{n-1}$, arbitrariamente piccolo. L'iperpiano è unione numerabile di questi compatti, dunque ha misura nulla.

Dimostrazione lasciata al lettore: Lemma 1 a p. 204. Il ricoprimento aperto finito di $[a, b]$, $a < b$, ha un numero di Lebesgue $\lambda > 0$. Suddividiamo $[a, b]$ in m intervalli chiusi di uguale lunghezza $h = (b-a)/m < \lambda/2$. Ciascuno è contenuto in un elemento del ricoprimento. Per compattezza dei singoli intervalli, possiamo allargarli di una quantità $\delta_j > 0$ ai due estremi restando nell'elemento assegnato, e scegliere gli allargamenti tanto piccoli che $2\sum_j \delta_j < b - a$. I nuovi intervalli aperti ricoprono $[a, b]$ e la somma delle loro lunghezze è $(b-a) + 2\sum_j \delta_j < 2(b-a)$.

Passaggio richiesto a p. 205: cubi contenuti in W. Nella riduzione usata nel testo, $\overline{A}$ è compatto in W, quindi la sua distanza dal chiuso $\mathbb{R}^n \setminus W$ è un numero $d > 0$. Partiamo da un ricoprimento cubico di somma dei volumi minore di ϵ, suddividiamo gli eventuali cubi grandi in cubi di diametro minore di $d/2$ e conserviamo soltanto quelli che incontrano A. Un allargamento abbastanza piccolo, scelto con somma degli incrementi di volume arbitrariamente piccola, li rende aperti e li mantiene in W. Partendo, ad esempio, da una somma minore di $\epsilon/2$ si ottiene il ricoprimento finale richiesto con somma minore di ϵ.

Esercizio a p. 205: Mini-Sard. Se $m > n$, $U \times \{0\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$, per il primo esercizio e per l'inclusione in un iperpiano. La mappa $F : U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, $F(x, t) = f(x)$, è liscia e ha la stessa dimensione nel dominio e nel codominio. Il teorema di conservazione della misura nulla implica che $F(U \times \{0\}) = f(U)$ ha misura nulla.

Appendice 2

Verifica richiesta nel lemma di lisciamento, pp. 208–209. Con la normalizzazione corretta, $\widetilde{g}' = k\rho + (1-\rho)g' > 0$. Vicino a c il secondo addendo è identicamente nullo e il primo vale la costante positiva k: dunque $\widetilde{g}$ è liscia anche in c. Vicino ad a e b, $\rho = 0$ e $\widetilde{g}' = g'$. La definizione dà $\widetilde{g}(a) = g(a)$ e la scelta di k dà $\widetilde{g}(b) = g(b)$: le differenze costanti vicino agli estremi sono quindi nulle. Questo verifica tutte le proprietà del lemma.

Domanda sulla Figura A-2, p. 209. Se tre componenti distinte di $X \setminus S$ avessero lo stesso estremo p, ogni piccolo intorno di p, privato di p, conterrebbe almeno tre rami disgiunti. Una carta di varietà unidimensionale fornisce invece un intervallo o un semi-intervallo, che dopo la rimozione del punto ha rispettivamente due o una sola componente. La configurazione non può dunque verificarsi.