CLAUDE GODBILLON

Elementi di topologia algebrica

Traduzione italiana dal testo francese

Volume completo

Gruppo fondamentale, rivestimenti e coomologia

Traduzione italiana — volume completo

Comprende l'introduzione, tutti i quindici capitoli, l'appendice di teoria dei gruppi, la bibliografia e l'indice analitico del volume allegato.

Edizione di lavoro per lettura e studio Novembre 2026

Nota alla traduzione

Il testo è stato tradotto dal volume francese *Éléments de topologie algébrique*. Sono conservati l'ordine dei paragrafi, la numerazione di definizioni ed enunciati, gli esercizi, le formule e i rinvii interni. Le figure sono riprodotte dalla scansione; i diagrammi algebrici sono ricomposti. I richiami in apice rinviano alle note redazionali finali, distinte dal testo dell'autore.

La numerazione e le interruzioni delle pagine del testo seguono l'originale. Sono omesse le pagine bianche; la copertina e le note sono aggiunte redazionali. La ricomposizione tipografica si avvicina all'originale, senza esserne una riproduzione facsimilare.

Connexe è reso con «connesso», *connexe par arcs* con «connesso per archi», *chemin* con «cammino», *revêtement* con «rivestimento» e *recollement* con «incollamento». «Separato» significa Hausdorff. Come nell'uso francese del testo, «compatto» include la separazione; anche «localmente compatto» è usato nel contesto separato.

Le indicazioni cronologiche e i riferimenti al sistema universitario francese nell'introduzione sono quelli dell'autore, che scrive nel 1970. La terminologia e i riferimenti storici sono conservati; le precisazioni redazionali sono raccolte in fondo al volume.

Avvertenze sul testo matematico

Nel teorema 3.1 «codimensione almeno 2» segue la disuguaglianza esplicita $m-n \geq 2$ dell'originale. Nell'esercizio 2.3 iv) si conserva invece la formulazione letterale «maggiore di 2»; il risultato vale anche per codimensione 2.

Sono corretti due refusi, segnalati anche a piè di pagina: gli indici della concatenazione nella dimostrazione di 3.1 e il saturato di un aperto nella dimostrazione di 6.1.

Nel lemma 1.8 e nel passaggio analogo precedente la definizione 2.7, l'argomento presuppone $A \neq \varnothing$; il testo originale non esplicita questa ipotesi. Gli enunciati sono mantenuti e la precisazione è registrata qui.

Traduzione assistita e ricomposizione matematica. Non è un'edizione italiana ufficiale.

INDICE GENERALE

Introduzione 11

PARTE PRIMA — GRUPPO FONDAMENTALE

I. CONNESSIONE. SPAZI QUOZIENTE

1. Connessione 17
2. Connessione per archi 20
3. Connessione nelle varietà 22
4. Topologia quoziente 23
5. Identificazioni e incollamenti 26
6. Azioni di gruppi topologici 27

II. ESEMPI DI SPAZI TOPOLOGICI

1. Palle, sfere e tori 31
2. Gruppi classici 35
3. Spazi proiettivi reali 38
4. Spazi proiettivi complessi 41
5. Superfici 43

III. COMPLESSI CELLULARI

1. Complessi cellulari 47
2. Complessi cellulari localmente finiti 50
3. Grafi 52

IV. OMOTOPIA

1. Omotopia. Tipo di omotopia 55
2. Omotopia relativa. Retratti per deformazione 58
3. Omotopia nei complessi cellulari 60
4. Omotopia nelle varietà differenziabili 63
5. Spazi di applicazioni continue 67

V. GRUPPO FONDAMENTALE

1. Omotopia dei cammini 71
2. Gruppo fondamentale 75
3. Gruppo fondamentale e applicazioni continue 76
4. Spazi semplicemente connessi 78
5. Gruppo fondamentale dei gruppi topologici 81
6. Spazi di cammini e di lacci 83

VI. CALCOLO DEL GRUPPO FONDAMENTALE

1. Prodotti e retratti 85
2. Gruppo fondamentale del cerchio 86
3. Applicazione: teoria dell'indice 89
4. Teorema di Van Kampen 91
5. Gruppo fondamentale dei complessi cellulari 96
6. Gruppo fondamentale dei gruppi classici 100

PARTE SECONDA — RIVESTIMENTI

VII. RIVESTIMENTI

1. Omeomorfismi locali 105
2. Rivestimenti 106
3. Gruppi discreti che agiscono propriamente e liberamente 110
4. Omomorfismi di rivestimenti 111
5. Costruzione dei rivestimenti per incollamento 114
6. Sollevamenti delle applicazioni 115

VIII. RIVESTIMENTI GALOISIANI

1. Rivestimenti galoisiani 119
2. Rivestimenti associati a un rivestimento galoisiano 121
3. Classificazione dei rivestimenti associati 123
4. Omomorfismi di spazi omogenei 125
5. Rivestimenti universali 127

IX. RIVESTIMENTI E GRUPPO FONDAMENTALE

1. Lemmi fondamentali 129
2. Gruppo fondamentale di un rivestimento 130
3. Sollevamenti delle applicazioni 132

4. Automorfismi di rivestimenti 134
5. Rivestimenti semplicemente connessi 137
6. Classificazione dei rivestimenti 139

X. APPLICAZIONI DEI RIVESTIMENTI

1. Teorema di Van Kampen: dimostrazione 143
2. Gruppi fondamentali delle varietà 145
3. Rivestimenti delle varietà 147
4. Rivestimenti e orientazione delle varietà 151
5. Rivestimenti dei complessi cellulari 153
6. Rivestimenti dei gruppi topologici 155

PARTE TERZA — COOMOLOGIE DELLE FORME DIFFERENZIALI

XI. COOMOLOGIE DELLE VARIETÀ DIFFERENZIABILI

1. Algebra di coomologia di de Rham 161
2. Applicazioni e omotopie differenziabili 163
3. Applicazioni continue 165
4. Algebra di coomologia a supporto compatto 167
5. Applicazioni e omotopie proprie 168
6. Coomologia a supporto compatto degli aperti 170

XII. COOMOLOGIE RELATIVE

1. Algebre di coomologia relativa 172
2. Applicazioni e omotopie differenziabili 173
3. Coomologia relativa a supporto compatto 175
4. Omomorfismo cobordo 176
5. Successioni esatte di coomologia 178
6. Coomologia delle sfere. Applicazioni 181
A. Successioni esatte di spazi vettoriali 183

XIII. COOMOLOGIA E FUNZIONI DI MORSE

1. Elementi di teoria di Morse 185
2. Coomologia delle varietà compatte 188
3. Disuguaglianze di Morse 191
4. Teorema di Künneth 195
5. Teorema di Künneth: dimostrazione 197
6. Applicazione alla coomologia dei gruppi di Lie 201

XIV. CALCOLI DI SPAZI DI COOMOLOGIA

1. Coomologia in dimensione 1 e gruppo fondamentale 205
2. Rivestimento associato a una forma di Pfaff chiusa 209
3. Coomologia a supporto compatto in dimensione massima: caso orientabile 211
4. Applicazioni 214
5. Coomologia a supporto compatto in dimensione massima: caso non orientabile 215
6. Coomologia a supporto chiuso in dimensione massima 216
7. Applicazione: coomologia degli spazi proiettivi 216
8. Applicazione: grado delle applicazioni 218
9. Applicazione: invariante di Hopf 221

XV. DUALITÀ DI POINCARÉ

1. Omomorfismo $*$ negli spazi euclidei 227
2. Omomorfismo $*$ nelle varietà riemanniane 229
3. Forme armoniche 231
4. Dualità di Poincaré 233
5. Classe e numero di Lefschetz 235

APPENDICE — COMPLEMENTI DI TEORIA DEI GRUPPI

1. Gruppi commutativi 239
2. Sottogruppo dei commutatori 241
3. Gruppi liberi 242
4. Prodotto libero 243

Bibliografia 245
Indice analitico 247

INTRODUZIONE

Da una ventina d'anni[1] la topologia algebrica è diventata uno strumento estremamente potente, che ha permesso di risolvere difficili problemi di geometria. Questo sviluppo si è però realizzato al prezzo, o grazie, a una formalizzazione sempre più spinta, che conduce spesso alla scomparsa di ogni supporto geometrico. Certamente, per chi comincia, questo punto di vista permette di giungere abbastanza rapidamente a un uso soddisfacente dei concetti; ma talvolta compromette l'acquisizione di una comprensione e di un'intuizione geometrica delle situazioni.

Si è dunque scelto di presentare qui due aspetti particolari di questa teoria, interessanti tanto per la loro semplicità quanto per la loro efficacia: il gruppo fondamentale e la coomologia di de Rham. Questi due aspetti sono in larga misura indipendenti; ma, in occasione di alcune questioni, si vedranno somiglianze di metodo che sono all'origine della teoria moderna.

I problemi di deformazione continua dei cammini negli spazi topologici, quali si incontrano per esempio nello studio delle funzioni analitiche di una variabile complessa, hanno condotto alla nozione di gruppo fondamentale. Questa nozione è del resto l'illustrazione più semplice, e più antica, dei metodi della topologia algebrica: associare a ogni spazio topologico un insieme munito di una struttura algebrica (gruppo, spazio vettoriale, algebra), in modo da soddisfare determinate proprietà di «naturalità» rispetto alle applicazioni continue. Essa permette inoltre di giungere rapidamente a bei risultati di geometria: il teorema del punto fisso di Brouwer per le applicazioni continue del disco D^2 in sé stesso; la teoria dell'indice per le applicazioni continue del cerchio nel piano.

Il teorema di Van Kampen permette la maggior parte dei calcoli di gruppi fondamentali. Se ne può dare una dimostrazione elementare, ma laboriosa; si è preferito qui considerarlo come un corollario della teoria dei rivestimenti.

Nata da diversi problemi di analisi (funzioni invarianti rispetto a gruppi discreti; isomorfismo locale dei gruppi topologici), la teoria dei rivestimenti

[1] Nota alla traduzione: Il testo è del 1971

è l'applicazione più immediata del gruppo fondamentale. Infatti, per gli spazi dotati di buone proprietà locali, come i complessi cellulari o le varietà topologiche, si può ricondurre lo studio dei rivestimenti a quello delle azioni del gruppo fondamentale su spazi discreti. L'obiettivo della topologia algebrica è dunque qui pienamente raggiunto: vi è una corrispondenza completa tra le questioni di natura topologica e le risposte di natura algebrica. A loro volta, del resto, i rivestimenti forniscono informazioni sul gruppo fondamentale: teorema di Van Kampen, gruppo fondamentale del complementare di una sottovarietà, ecc.

Queste due teorie intervengono anche in rami assai diversi della matematica: si è data qui la dimostrazione topologica, estremamente diretta, del teorema di Nielsen–Schreier sui sottogruppi dei gruppi liberi.

Il gruppo fondamentale appartiene all'aspetto omotopico della topologia algebrica. Con la coomologia di de Rham eccone l'aspetto (co-)omologico. È certamente insolito affrontare l'omologia da questo punto di vista: occorre infatti limitare il proprio oggetto alle varietà differenziabili e utilizzare tecniche di geometria differenziale che possono sembrare estranee all'argomento. Storicamente, tuttavia, esso si è introdotto in modo naturale attraverso lo studio degli integrali abeliani e quello dei gruppi di Lie e dei loro spazi omogenei. Inoltre, mediante la coomologia di de Rham si giunge rapidamente, con conoscenze elementari di geometria differenziale, a risultati profondi che in un altro quadro richiedono l'elaborazione di tecniche delicate: struttura moltiplicativa, coomologia a supporto compatto, classe fondamentale delle varietà orientate, invariante di Hopf, ecc. Questa teoria costituisce anche l'accesso più diretto a certi argomenti molto attuali, come gli spazi omogenei o le classi caratteristiche reali.

Questo libro, che trae origine da un corso tenuto a Strasburgo nel 1968, è dunque un'introduzione alla topologia algebrica. Si rivolge a studenti del secondo anno di *maîtrise* in matematica o del primo anno del terzo ciclo universitario.

Per le prime due parti, dedicate al gruppo fondamentale e ai rivestimenti, si suppongono noti soltanto elementi di topologia generale e di teoria dei gruppi. Nei capitoli I e II sono peraltro dati alcuni complementi di topologia (connessione, spazi quoziente, azioni di gruppi) di uso frequente nel seguito, oltre a una serie di esempi fondamentali in geometria (gruppi classici, spazi proiettivi, superfici). I risultati non elementari di teoria dei gruppi sono collocati in appendice.

La terza parte è dedicata alla coomologia di de Rham. Essa richiede la conoscenza di una teoria elementare delle varietà differenziabili

e del loro calcolo differenziale, quale è esposta, per esempio, nei primi capitoli di *Géométrie différentielle* [1].

Infine, nel testo sono stati inseriti numerosi esercizi che lo illustrano e lo completano (vi si troveranno, per esempio, tre diverse dimostrazioni topologiche del teorema di d'Alembert).

Orsay, luglio 1970.

Parte prima

Gruppo fondamentale

CAPITOLO I

Connessione, spazi quoziente

1. Connessione

1.1 DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico E è connesso se le sole parti di E contemporaneamente aperte e chiuse sono E stesso e l'insieme vuoto.*

Un sottospazio F di uno spazio topologico E è connesso se è uno spazio connesso per la topologia indotta.

1.2 LEMMA. *Sia E uno spazio topologico. Le proprietà seguenti sono equivalenti:*

i) E è uno spazio connesso;

ii) E non è unione di due aperti non vuoti disgiunti;

iii) ogni applicazione continua di E in uno spazio discreto è costante;

iv) ogni applicazione continua di E in $\mathbb{R}$ che assuma valori negativi e valori positivi si annulla.

La verifica di questo lemma è immediata.

La nozione di connessione è invariante per omeomorfismo: due spazi omeomorfi sono simultaneamente connessi o non connessi. Più in generale, del resto:

1.3 PROPOSIZIONE. *L'immagine di uno spazio connesso mediante un'applicazione continua è connessa.*

Esercizi.

i) Uno spazio formato da un solo punto è connesso.

ii) Uno spazio discreto avente più di un punto non è connesso.

iii) I sottospazi connessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli.

iv) I sottospazi connessi dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali sono i punti.

v) Sia A un sottospazio di uno spazio E, e sia U un aperto connesso di E. Se U incontra A ed $E-A$, incontra anche la frontiera $\overline{A}\cap\overline{E-A}$ di A.

1.4 PROPOSIZIONE. *Se uno spazio E è unione di una famiglia $(A_i)_{i\in I}$ di sottospazi connessi la cui intersezione $\bigcap_{i\in I} A_i$ non è vuota, anch'esso è connesso.*

Infatti ogni applicazione continua di E in uno spazio discreto è costante su ciascuno degli A_i, dunque su E.

1.5 PROPOSIZIONE. *Lo spazio prodotto di due spazi connessi E e F è connesso.*

Infatti, se x è un punto di E, $E \times F$ è l'unione dei sottospazi connessi $\{x\} \times F \cup E \times \{y\}$, $y \in F$.

Esempio. Lo spazio numerico $\mathbb{R}^m$ è connesso.

1.6 PROPOSIZIONE. *Sia A un sottospazio connesso di uno spazio E. Ogni sottospazio B di E compreso tra A e $\overline{A}$ $(A \subset B \subset \overline{A})$ è connesso.*

Infatti ogni applicazione continua di B in uno spazio discreto è costante su A, dunque su B.

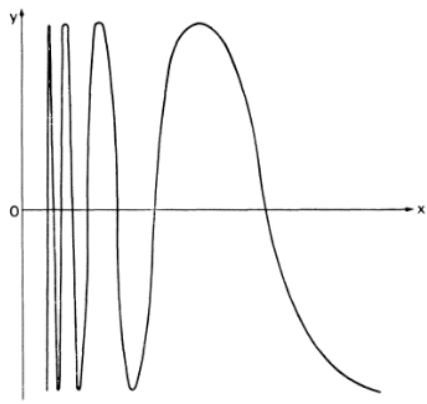
1.7 *Esempio.* Il sottospazio

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y = \sin \frac{1}{x} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$ è connesso (è omeomorfo a $\mathbb{R}$). La sua chiusura

$$\overline{A} = A \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ e } |y| \leq 1\}$$

è dunque anch'essa connessa.



1.8 LEMMA. *Sia A un sottospazio connesso di uno spazio E, e sia $(C_i)_{i\in I}$ la famiglia di tutti i sottospazi connessi di E contenenti A. L'unione $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ è un sottospazio chiuso connesso di E contenente A.*

Questo lemma è una conseguenza immediata delle proposizioni 1.4 e 1.6.

L'unione C è dunque il più grande sottospazio connesso di E contenente A; C è pertanto un sottospazio connesso massimale di E. Questa osservazione giustifica la definizione seguente:

1.9 DEFINIZIONE. *Una componente connessa di uno spazio E è un sottospazio connesso massimale di E.*

Nelle ipotesi di 1.8 si dice anche che C è la componente connessa di A in E.

Una componente connessa di E è dunque chiusa, e due componenti distinte sono disgiunte.

Esercizi.

i) La relazione «esiste un sottospazio connesso di E contenente x e y» è una relazione di equivalenza su E le cui classi di equivalenza sono le componenti connesse di E.

ii) Sia G un gruppo topologico. La componente connessa dell'elemento neutro è un sottogruppo chiuso normale di G.

iii) Ogni gruppo topologico connesso è generato da ciascuno degli intorni dell'elemento neutro (un sottogruppo aperto è anche chiuso).

1.10 DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico E è localmente connesso se ogni punto di E possiede un sistema fondamentale di intorni connessi.*

In altri termini, E è localmente connesso se, per ogni punto x di E e ogni intorno V di x, esiste un intorno connesso W di x contenuto in V.

Esercizi.

i) Uno spazio discreto è localmente connesso.

ii) Lo spazio prodotto di due spazi localmente connessi è localmente connesso.

iii) Un aperto di $\mathbb{R}^m$ è localmente connesso (più in generale, un aperto di uno spazio localmente connesso è localmente connesso).

iv) Lo spazio $\overline{A}$ dell'esempio 1.7 non è localmente connesso.

1.11 PROPOSIZIONE. *In uno spazio localmente connesso E ogni componente connessa è aperta e chiusa in E.*

Infatti, sia C una componente connessa di E, e siano x un punto di C e U un intorno connesso di x. L'unione $C \cup U$ è connessa; di conseguenza U è contenuto in C. Ciò mostra che C è anche un aperto.

Uno spazio topologico localmente connesso può dunque essere considerato come lo spazio somma delle proprie componenti connesse.

Esercizio. In uno spazio localmente connesso ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni aperti connessi.

2. Connessione per archi

2.1 DEFINIZIONE. *Sia E uno spazio topologico. Un cammino in E è un'applicazione continua c del segmento $I = [0,1]$ in E.*

Si dice in queste condizioni che $x = c(0)$ è l'origine del cammino c, e $y = c(1)$ il suo estremo. Si dice anche che c è un cammino che congiunge x a y in E.

2.2 DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico E è connesso per archi se, quali che siano i punti x e y in E, esiste un cammino in E che congiunge x a y.*

Un sottospazio F di uno spazio topologico E è connesso per archi se è uno spazio connesso per archi per la topologia indotta.

La nozione di connessione per archi è invariante per omeomorfismo. Più in generale, del resto:

2.3 PROPOSIZIONE. *L'immagine di uno spazio connesso per archi mediante un'applicazione continua è connessa per archi.*

Esercizi.

i) Uno spazio formato da un solo punto è connesso per archi.

ii) Un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^m$ è connesso per archi.

iii) Per $m \geq 2$, $\mathbb{R}^m - \{0\}$ è connesso per archi.

iv) Sia E un sottospazio affine di $\mathbb{R}^m$. Se la codimensione di E è maggiore di 2, $\mathbb{R}^m - E$ è connesso per archi.

2.4 PROPOSIZIONE. *Lo spazio prodotto di due spazi connessi per archi E e F è connesso per archi.*

Infatti, se (x,y) e (x',y') sono due punti di $E \times F$, e se c (risp. γ) è un cammino in E (risp. in F) che congiunge x a x' (risp. y a y'), $c \times \gamma$ è un cammino in $E \times F$ che congiunge (x,y) a (x',y').

2.5 PROPOSIZIONE. *Se uno spazio E è unione di una famiglia $(A_i)_{i\in I}$ di sottospazi connessi per archi la cui intersezione $\bigcap_{i\in I} A_i$ non è vuota, anch'esso è connesso per archi.*

Siano infatti $x \in A_i$ e $y \in A_j$ due punti di E, e sia z un punto di $A_i \cap A_j$. Se c (risp. γ) è un cammino in A_i (risp. A_j) che congiunge z a x (risp. y), il cammino λ definito da

$$\lambda(t) = \begin{cases} c(1-2t) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2t-1) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

congiunge x a y in E (lemma di incollamento; cap. IV).

2.6 COROLLARIO. *Uno spazio E connesso per archi è connesso.*

Sia infatti x un punto di E. Per ogni punto y di E esiste un cammino c_y in E che congiunge x a y. Si ha allora $E = \bigcup_{y\in E} c_y(I)$.

Se A è un sottospazio connesso per archi di uno spazio E, e se $(C_i)_{i\in I}$ è la famiglia di tutti i sottospazi connessi per archi di E contenenti A, l'unione $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ è anch'essa connessa per archi. L'unione C è dunque il più grande sottospazio connesso per archi di E contenente A; C è pertanto un sottospazio connesso per archi massimale di E. Questa osservazione giustifica la definizione seguente:

2.7 DEFINIZIONE. *Una componente connessa per archi di uno spazio E è un sottospazio connesso per archi massimale di E.*

Nelle ipotesi precedenti si dice anche che C è la componente connessa per archi di A in E (essa è contenuta nella componente connessa di A in E, ma può esserne distinta).

Due componenti connesse per archi distinte sono disgiunte.

Si indica con $\pi_0(E)$ la partizione di E formata dall'insieme delle sue componenti connesse per archi.

Un'applicazione continua f di E in uno spazio F induce un'applicazione $f_* : \pi_0(E) \to \pi_0(F)$: se C è una componente connessa per archi di E, $f_*(C)$ è la componente connessa per archi di $f(C)$ in F.

Se f è l'applicazione identica di E, f_* è l'applicazione identica di $\pi_0(E)$. Se $g : F \to G$ è una seconda applicazione continua, si ha

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Di conseguenza, se E e F sono omeomorfi, $\pi_0(E)$ e $\pi_0(F)$ hanno la stessa cardinalità.

Esercizi.

i) Sia E un iperpiano affine di $\mathbb{R}^m$. Lo spazio $\mathbb{R}^m - E$ ha due componenti connesse per archi.

ii) Lo spazio $\overline{A}$ dell'esempio 1.7 ha due componenti connesse per archi.

2.8 DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico E è localmente connesso per archi se ogni punto di E possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.*

Uno spazio localmente connesso per archi è dunque localmente connesso.

Esercizi.

i) Uno spazio discreto è localmente connesso per archi.

ii) Il prodotto di due spazi localmente connessi per archi è localmente connesso per archi.

iii) Un aperto di $\mathbb{R}^m$ è localmente connesso per archi (più in generale, un aperto di uno spazio localmente connesso per archi è localmente connesso per archi).

2.9 PROPOSIZIONE. *In uno spazio localmente connesso per archi ogni componente connessa per archi è aperta.*

La verifica di questa proposizione è analoga a quella di 1.11.

Di conseguenza, in uno spazio localmente connesso per archi ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni aperti connessi per archi.

2.10 COROLLARIO. *Uno spazio connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*

Infatti ogni componente connessa per archi è aperta, dunque anche chiusa.

2.11 COROLLARIO. *In uno spazio localmente connesso per archi le componenti connesse per archi e le componenti connesse coincidono.*

3. Connessione nelle varietà

Una varietà topologica di dimensione m è uno spazio localmente connesso per archi (ogni punto possiede un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$ o del semispazio H^m). Di conseguenza una varietà topologica connessa è connessa per archi.

Esercizio. Sia M^m una varietà differenziabile connessa. Quali che siano i punti x e y di M^m, esiste un'applicazione differenziabile $c : I \to M$ tale che $c(0) = x$ e $c(1) = y$: si dice che c è un cammino differenziabile.

3.1 TEOREMA. *Sia M^m una varietà differenziabile connessa senza bordo di dimensione m. Se N^n è una sottovarietà chiusa di M^m di codimensione almeno 2 $(m-n \geq 2)$, l'aperto $M - N$ è connesso.*

Dimostrazione. Siano x e y due punti di $M - N$, e sia c un cammino che congiunge x a y in M. Esiste (cap. IX, lemma 1.3) una successione

$$0 = t_1 < \cdots < t_p < t_{p+1} = 1$$

tale che, per ogni i, $i = 1, \ldots, p$, $c([t_i, t_{i+1}])$ sia contenuto in un aperto U_i di M^m diffeomorfo a $\mathbb{R}^m$ e avente inoltre una delle due proprietà seguenti:

i) $U_i \cap N^n = \varnothing$;

ii) $U_i \cap N^n \neq \varnothing$ e $U_i - (U_i \cap N)$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$.

Poiché ogni $U_i - (U_i \cap N)$ è connesso per archi (esercizio iv) di 2.3),

si può costruire successivamente una sequenza γ_i, $i = 1, \ldots, p$, di cammini aventi le proprietà seguenti:

i) $\gamma_i(I) \subset U_i - (U_i \cap N)$;

ii) $\gamma_1(0) = x$; $\gamma_{i+1}(0) = \gamma_i(1)$; $\gamma_p(1) = y$.

Il cammino $\widetilde{c}$ definito da $\widetilde{c}(t) = \gamma_i(pt - i + 1)$ per $\frac{i-1}{p} \leq t \leq \frac{i}{p}$ congiunge allora x a y in $M - N$.[2] c.v.d.

Se invece N^n è una sottovarietà chiusa di codimensione 1, non si può concludere. Per esempio (cfr. cap. II):

i) il complementare di S^{m-1} in $\mathbb{R}^m$ ha due componenti connesse;

ii) il complementare di $\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}$ in $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è connesso.

Tuttavia:

3.2 PROPOSIZIONE. *Sia M^m una varietà differenziabile connessa senza bordo di dimensione m, e siano $f : M^m \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su M^m e c un valore regolare di f. L'insieme $N = f^{-1}(c)$ (se non è vuoto) è una sottovarietà chiusa di codimensione 1 di M^m il cui complementare $M - N$ non è connesso.*

Infatti la funzione $f - c$ non si annulla su $M - N$ e assume, nell'intorno di ogni punto di N, valori negativi e valori positivi.

Esempio. Un iperpiano proiettivo H di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ non può essere definito come l'insieme degli zeri di una funzione differenziabile $f : \mathrm{P}\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ il cui differenziale df non si annulli in alcun punto di H.

3.3 PROPOSIZIONE. *Sia M^m una varietà differenziabile connessa senza bordo di dimensione m, e sia N una sottovarietà chiusa connessa di codimensione 1 di M^m. L'aperto $M - N$ ha al più due componenti connesse.*

Infatti, se U è una componente connessa di $M - N$, si ha in M^m $\overline{U} = U \cup N$. Ora ogni punto di N possiede un intorno in M^m che incontra al più due componenti connesse di $M - N$.

3.4 *Esercizio.* Sia M^m una varietà topologica connessa con bordo. L'interno $M - \partial M$ di M^m è connesso (invece il bordo ∂M di M^m non è necessariamente connesso).

4. Topologia quoziente

Siano E uno spazio topologico e R una relazione di equivalenza su E. Si indica con q la proiezione canonica di E sull'insieme quoziente E/R.

4.1 TEOREMA. *Esiste su E/R una e una sola topologia avente le proprietà seguenti:*

i) *la proiezione q è continua;*

[2] Nota alla traduzione: corretti gli indici della parametrizzazione; nell'originale compare $\gamma_i(pt - i)$ su $[i/p, (i+1)/p]$, mentre i cammini sono indicizzati da 1 a p.

ii) *se f è un'applicazione continua di E in uno spazio X compatibile con R ($x \sim y$ implica $f(x) = f(y)$), l'applicazione $\widehat{f} : E/R \to X$ associata a f è continua.*

Si dice che questa topologia è la *topologia quoziente* della topologia di E per la relazione di equivalenza R, e che l'insieme E/R (munito di questa topologia) è lo *spazio (topologico) quoziente* di E per R.

Dimostrazione. La condizione i) implica che, se U è un aperto di E/R, $q^{-1}(U)$ è un aperto (saturo) di E.

Ora la famiglia $\mathscr{T}$ delle parti U di E/R tali che $q^{-1}(U)$ sia un aperto di E è una topologia su E/R per la quale la proiezione q è continua. Inoltre, se $f : E \to X$ è un'applicazione continua compatibile con R, e se V è un aperto di X, $f^{-1}(V)$ è un aperto saturo di E e si ha $q^{-1}(\widehat{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$. L'applicazione $\widehat{f} : E/R \to X$ associata a f è dunque continua; di conseguenza la topologia $\mathscr{T}$ soddisfa le due condizioni dell'enunciato.

Se $\mathscr{T}'$ è una seconda topologia su E/R avente queste due proprietà, l'applicazione identica è un omeomorfismo di E/R munito della topologia $\mathscr{T}$ su E/R munito della topologia $\mathscr{T}'$ (condizione ii)). Di conseguenza $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. c.v.d.

Si può caratterizzare la topologia quoziente $\mathscr{T}$ mediante una delle tre proprietà seguenti:

i) U è un aperto di E/R se e solo se $q^{-1}(U)$ è un aperto di E;

ii) F è un chiuso di E/R se e solo se $q^{-1}(F)$ è un chiuso di E;

iii) $\mathscr{T}$ è la topologia più fine su E/R per la quale la proiezione q è continua.

4.2 COROLLARIO. *Sia A un aperto (risp. chiuso) saturo di E, e sia R_A la relazione di equivalenza indotta da R su A. L'inclusione canonica di A in E induce un omeomorfismo di A/R_A su $q(A) \subset E/R$.*

Si ha infatti un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & E \\ {\scriptstyle q_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A/R_A & \xrightarrow[j]{} & E/R \end{array}$$

nel quale j è un'applicazione biiettiva e continua di A/R_A su $q(A)$. Inoltre, se A è un aperto (risp. chiuso) saturo di E, $q(A)$ è un aperto (risp. chiuso) di E/R e j è un'applicazione aperta (risp. chiusa).

Esercizio. Siano X e Y due spazi localmente compatti, e sia f un'applicazione continua suriettiva e propria di X su Y (se K è un compatto di Y, $f^{-1}(K)$ è un compatto di X). Sia R la relazione di equivalenza su X associata a f ($x \sim y$ per $f(x) = f(y)$). L'applicazione $\widehat{f} : X/R \to Y$ associata a f è un omeomorfismo di X/R su Y.

4.3 DEFINIZIONE. *La relazione di equivalenza R è aperta (risp. chiusa) se il saturato di un aperto (risp. chiuso) di E è un aperto (risp. chiuso) di E.*

Di conseguenza:

4.4 PROPOSIZIONE. *Affinché la relazione di equivalenza R sia aperta (risp. chiusa), è necessario e sufficiente che la proiezione q sia un'applicazione aperta (risp. chiusa).*

4.5 DEFINIZIONE. *La relazione di equivalenza R è separata se lo spazio quoziente E/R è separato.*

4.6 PROPOSIZIONE. *Se la relazione di equivalenza R è separata, il suo grafico Γ è chiuso in $E \times E$.*

Infatti, se E/R è separato, la diagonale Δ è chiusa in $E/R \times E/R$; di conseguenza $\Gamma = (q \times q)^{-1}(\Delta)$ è chiuso in $E \times E$.

4.7 TEOREMA. *Se la relazione di equivalenza R è aperta e ha grafico chiuso, essa è separata.*

Dimostrazione. Se $u = q(x)$ e $v = q(y)$ sono due punti distinti di E/R, il punto (x,y) non appartiene a Γ. Si possono dunque trovare un intorno aperto U di x in E e un intorno aperto V di y in E tali che il prodotto $U \times V$ non incontri il grafico Γ.

I sottospazi $q(U)$ e $q(V)$ sono allora intorni rispettivamente di u e v (prop. 4.4), e si ha $q(U) \cap q(V) = \varnothing$; infatti, se $w = q(\xi) = q(\eta)$, $\xi \in U$ e $\eta \in V$, fosse un punto di $q(U) \cap q(V)$, si avrebbe $(\xi, \eta) \in (U \times V) \cap \Gamma$; il che è impossibile. c.v.d.

4.8 TEOREMA. *Se E è uno spazio compatto, le proprietà seguenti sono equivalenti:*

i) R è chiusa;

ii) R è separata;

iii) il grafico Γ di R è chiuso in $E \times E$.

Dimostrazione. i) $\Rightarrow$ ii). Siano u_1 e u_2 due punti distinti di E/R. Le classi di equivalenza $q^{-1}(u_1)$ e $q^{-1}(u_2)$ sono chiuse in E (il saturato di un punto è chiuso). Poiché E è compatto, si possono trovare due aperti disgiunti U_1 e U_2 tali che $q^{-1}(u_i)$ sia contenuto in U_i, $i = 1,2$.

Il complementare $F_i = E - U_i$, $i = 1,2$, è un chiuso di E il cui saturato $\widetilde{F_i}$ è un chiuso che non incontra $q^{-1}(u_i)$; $\widetilde{U_i} = E - \widetilde{F_i}$ è allora un intorno aperto saturo di $q^{-1}(u_i)$ contenuto in U_i. Di conseguenza $V_1 = q(\widetilde{U_1})$ e $V_2 = q(\widetilde{U_2})$ sono intorni aperti disgiunti di u_1 e u_2.

ii) $\Rightarrow$ iii). Proposizione 4.6.

iii) $\Rightarrow$ i). Sia F un chiuso di E, e sia $\widetilde{F}$ il saturato di F. Si ha $\widetilde{F} = p_2((F \times E) \cap \Gamma)$, dove p_2 indica la seconda proiezione di $E \times E$ su E. Poiché $F \times E$ e Γ sono compatti, anche $(F \times E) \cap \Gamma$ lo è, e di conseguenza $\widetilde{F}$ è chiuso. c.v.d.

5. Identificazioni e incollamenti

Siano E uno spazio topologico, F un sottospazio non vuoto di E e f un'applicazione continua di F in E avente la proprietà seguente: per ogni x in F, l'insieme $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ degli iterati di x contiene al più due punti distinti (questa ipotesi è per esempio soddisfatta se $F \cap f(F) = \varnothing$, oppure se f è l'applicazione costante di F su un punto di E).

Sia R la relazione di equivalenza su E che identifica i punti x e $f(x)$, $x \in F$:

se $x \notin F \cup f(F)$, la classe di equivalenza di x è $\{x\}$,

se $x \in F$, la classe di equivalenza di x è $\{f(x)\} \cup f^{-1}(f(x))$,

se $x \in f(F) - (F \cap f(F))$, la classe di equivalenza di x è $\{x\} \cup f^{-1}(x)$.

In queste condizioni si dice che il quoziente E/R, indicato anche con E/f, è lo spazio ottenuto da E identificando i punti x e $f(x)$, $x \in F$.

Quando f è l'applicazione di F su uno dei suoi punti, si indica questo quoziente con E/F e si dice che E/F è lo *spazio ottenuto da E identificando F a un punto* (questo spazio è evidentemente indipendente dalla scelta del punto in F).

5.1 TEOREMA. *Se E è uno spazio compatto e F è chiuso in E, lo spazio E/f ottenuto da E identificando i punti x e $f(x)$, $x \in F$, è separato.*

Esso è dunque anche compatto.

Dimostrazione. Poiché E è compatto, basta verificare che il grafico Γ di R sia chiuso in $E \times E$ (teor. 4.8). Ora Γ è l'unione dei quattro sottospazi seguenti:

$$\Delta = \{(x,x),\ x \in E\} \quad \text{(la diagonale di } E \times E),$$
$$A = \{(x, f(x)),\ x \in F\},$$
$$B = \{(f(y), y),\ y \in F\},$$
$$C = \{(x,y) \in F \times F \mid f(x) = f(y)\}.$$

La diagonale Δ è chiusa in $E \times E$ (E è separato).

Il sottospazio A è l'immagine di F mediante l'applicazione continua $x \mapsto (x, f(x))$ di F in $E \times E$; è dunque chiuso. Analogamente, il sottospazio B è chiuso.

Il sottospazio C è la controimmagine in $F \times F$ della diagonale Δ mediante l'applicazione continua $f \times f$; è dunque chiuso in $F \times F$, e di conseguenza anche in $E \times E$. c.v.d.

In queste condizioni la proiezione $q : E \to E/f$ è un omeomorfismo dell'aperto $U = E - (F \cup f(F))$ sull'aperto $q(U)$.

5.2 Un caso importante di tale costruzione è il seguente.

Siano X e Y due spazi topologici, F un sottospazio non vuoto di Y e f un'applicazione continua di F in X. Lo spazio ottenuto dallo spazio somma $X \sqcup Y$ identificando i punti x e $f(x)$, $x \in F$, si indica con $X \cup_f Y$; si dice che $X \cup_f Y$ è lo *spazio ottenuto incollando Y a X mediante l'applicazione f*.

Se q indica la proiezione di $X \sqcup Y$ su $X \cup_f Y$, si ha

$$X \cup_f Y = q(X) \cup q(Y), \qquad q(X) \cap q(Y) = q(F) = q(f(F)).$$

Di conseguenza:

5.3 PROPOSIZIONE. *Se X e Y sono connessi (risp. connessi per archi), $X \cup_f Y$ è connesso (risp. connesso per archi).*

Riformulando il teorema 5.1 si ottiene:

5.4 TEOREMA. *Siano X e Y due spazi compatti, e sia f un'applicazione continua di un chiuso F non vuoto di Y in X. Lo spazio $X \cup_f Y$ ottenuto incollando Y a X mediante f è compatto.*

5.5 COROLLARIO. *Nelle ipotesi del teorema 5.4 la proiezione q è un omeomorfismo di X su $q(X)$.*

Infatti q è un'applicazione continua e biiettiva di X su $q(X)$, e X è compatto.

Si identifica allora X con la propria immagine $q(X)$ mediante questo omeomorfismo.

Esercizi. Sia E uno spazio unione di sottospazi chiusi X e Y. Se $X \cap Y$ non è vuoto, E è omeomorfo allo spazio ottenuto incollando Y a X mediante l'inclusione canonica di $X \cap Y$ in X.

Se f è un omeomorfismo di X su uno spazio X' e g un omeomorfismo di Y su uno spazio Y', E è omeomorfo allo spazio ottenuto incollando Y' a X' mediante l'applicazione $f \circ g^{-1} : g(X \cap Y) \to f(X \cap Y)$.

6. Azioni di gruppi topologici[3]

6.1 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo di G. Affinché lo spazio omogeneo G/H sia separato, è necessario e sufficiente che H sia un sottogruppo chiuso di G.*

[3] Si ricorda che una struttura di gruppo topologico su uno spazio G è determinata da una struttura di gruppo su G per la quale il prodotto $(g,h) \mapsto gh$ e il passaggio all'inverso $g \mapsto g^{-1}$ sono applicazioni continue, rispettivamente, di $G \times G$ e di G in G.

La condizione è evidentemente necessaria. Viceversa (teor. 4.7), basta verificare che la relazione di equivalenza R associata a H in G sia aperta e abbia grafico Γ chiuso in $G \times G$.

Ora, se U è un aperto di G, il saturato di U è l'unione $UH = \bigcup_{h \in H} Uh$; esso è dunque aperto.[4] D'altra parte, il grafico Γ è la controimmagine di H mediante l'applicazione continua $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ di $G \times G$ in G; è dunque chiuso.

6.2 COROLLARIO. *Sia H un sottogruppo discreto di un gruppo topologico separato G. Lo spazio omogeneo G/H è separato.*

Dimostrazione. Sia U un intorno dell'elemento neutro e in G tale che $H \cap U = \{e\}$. Si può trovare un intorno $V \subset U$ di e tale che $V^{-1} = V$ e $V \cdot V \subset U$.

Sia allora g un punto aderente a H. Se g non appartiene a H, l'intorno gV di g contiene due elementi distinti $h = gs$ e $k = gt$, $s,t \in V$, di H (G è separato). Ma in queste condizioni $h^{-1}k = s^{-1}t$ è un elemento di $H \cap U$ distinto da e; il che è assurdo. Di conseguenza g appartiene a H e H è chiuso. c.v.d.

Esercizio. Sia G un gruppo topologico connesso. Ogni sottogruppo discreto e normale di G è contenuto nel centro di G.

Si considerano ora uno spazio topologico E e un gruppo topologico G il cui elemento neutro si indica con e.

6.3 DEFINIZIONE. *Un'azione continua a sinistra di G su E è il dato di un'applicazione continua $(g,x) \mapsto gx$ di $G \times E$ in E avente le proprietà seguenti:*

i) $ex = x$ per ogni $x \in E$;

ii) $g(hx) = (gh)x$ per ogni $x \in E$ e ogni $g,h \in G$.

Per ogni elemento g di G, l'applicazione $x \mapsto gx$ è allora un omeomorfismo di E avente per inversa l'applicazione $x \mapsto g^{-1}x$. Si ottiene così un omomorfismo di G nel gruppo degli omeomorfismi di E.

Viceversa, se G è un gruppo discreto, il dato di un omomorfismo di G nel gruppo degli omeomorfismi di E determina un'azione continua a sinistra di G su E.

Si dice che G agisce continuamente a sinistra su E, o più semplicemente agisce su E, e che $Gx = \{gx,\ g \in G\}$, $x \in E$, è l'*orbita* (o la traiettoria) del punto x di E.

Per ogni parte H di G e ogni parte A di E, si indica con HA l'insieme $\{gx,\ g \in H \text{ e } x \in A\}$.

Per ogni punto x di E, l'insieme $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ è un sottogruppo di G: G_x è il *sottogruppo stabilizzatore* del punto x.

Sia R la relazione di equivalenza su E le cui classi sono le orbite dei

[4] Nota alla traduzione: nell'originale compare $\bigcup_{g \in G} gU$. Per le classi gH, coerenti con la condizione $g^{-1}h \in H$ del periodo successivo, il saturato corretto è UH.

punti di E. Lo spazio quoziente E/R, indicato anche con E/G, è lo *spazio delle orbite* di G in E.

6.4 LEMMA. *La relazione di equivalenza R è aperta.*

Infatti, se U è un aperto di E, il saturato di U è l'unione $\bigcup_{g\in G} gU$.

6.5 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo compatto che agisce continuamente a sinistra in uno spazio compatto E. Lo spazio delle orbite E/G è separato.*

Infatti (teor. 4.8), il grafico della relazione di equivalenza in E associata all'azione di G è l'immagine di $G\times E$ mediante l'applicazione continua $(g,x)\mapsto(gx,x)$ di $G\times E$ in $E\times E$; esso è dunque chiuso.

Si suppone ora data un'azione continua a sinistra di G su E.

6.6 DEFINIZIONE. *Il gruppo G agisce propriamente su E se, per ogni compatto K di E, l'insieme $G_K=\{g\in G \mid gK\cap K\neq\varnothing\}$ è relativamente compatto in G.*

Quando G è compatto questa condizione è sempre verificata. Quando G è discreto, essa è verificata se per ogni compatto K di E l'insieme G_K è finito.

6.7 TEOREMA. *Sia G un gruppo discreto che agisce continuamente a sinistra e propriamente su uno spazio E localmente compatto. Ogni orbita è chiusa e discreta in E, e lo spazio delle orbite E/G è separato.*

Dimostrazione. Quali che siano i punti x e y di E e l'intorno compatto V di x, l'intersezione $Gy\cap V$ è finita (ipotesi di azione propria). Di conseguenza ogni orbita è discreta e chiusa in E.

Per mostrare che E/G è separato, basta verificare (teor. 4.7 e lemma 6.4) che la relazione di equivalenza associata all'azione di G su E abbia grafico Γ chiuso in $E\times E$. Ora siano (x,y) un punto di $(E\times E)-\Gamma$, V un intorno compatto di x in E e W un intorno compatto di y tale che $W\cap Gx=\varnothing$. Poiché l'insieme $G_{V\cup W}$ è finito,

$$U=V-\left(V\cap\bigcup_{g\in G_{V\cup W}} gW\right)$$

è un intorno di x tale che $(U\times W)\cap\Gamma=\varnothing$. c.v.d.

6.8 DEFINIZIONE. *Il gruppo G agisce liberamente su E se ogni punto x di E ha sottogruppo stabilizzatore banale: $G_x=\{e\}$.*

In altri termini, G agisce liberamente su E se, per ogni punto x di E e ogni elemento g di G diverso da e, si ha $gx\neq x$.

6.9 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo discreto che agisce continuamente a sinistra, propriamente e liberamente su uno spazio localmente compatto E. Per ogni punto x di E esiste un intorno aperto V di x tale che $gV\cap V=\varnothing$ per ogni $g\neq e$.*

Dimostrazione. Sia x un punto di E e sia K un intorno compatto di x tale che $K \cap Gx = \{x\}$. Poiché G agisce propriamente e liberamente, l'insieme $G_K = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \varnothing\}$ è finito, e

$$W = K - \left(K \cap \bigcup_{g \in G_K - \{e\}} gK \right)$$

è un intorno di x tale che $gW \cap W = \varnothing$ per ogni $g \neq e$. Esiste dunque un intorno aperto $V \subset W$ di x avente anch'esso questa proprietà. c.v.d.

6.10 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 6.9 la proiezione $q : E \to E/G$ induce un omeomorfismo di V sull'aperto $q(V)$.*

Infatti q è un'applicazione biiettiva continua e aperta di V sull'aperto $q(V)$ di E/G.

6.11 DEFINIZIONE. *Il gruppo G agisce transitivamente su E se ogni punto x di E ha un'orbita Gx uguale a E.*

È del resto sufficiente che questa condizione sia soddisfatta per un punto x di E.

L'applicazione $g \mapsto gx$ induce allora un'applicazione continua e biiettiva dello spazio omogeneo G/G_x su E. In generale questa applicazione non è un omeomorfismo. Tuttavia:

6.12 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo topologico compatto che agisce continuamente a sinistra e transitivamente su uno spazio separato E, e sia x un punto di E. L'applicazione $g \mapsto gx$ di G su E induce un omeomorfismo di G/G_x su E.*

Infatti (prop. 6.1) lo spazio omogeneo G/G_x è allora compatto.

CAPITOLO II

Alcuni esempi di spazi topologici

Si indica con

$\mathbb{R}$ la retta numerica reale,

I l'intervallo $[0,1]$ di $\mathbb{R}$,

$\mathbb{C}$ il piano complesso,

$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_m^2)^{1/2}$ la norma euclidea del vettore $x = (x_1, \ldots, x_m)$ di $\mathbb{R}^m$,

$\|z\| = (z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_m\bar{z}_m)^{1/2}$ la norma hermitiana del vettore $z = (z_1, \ldots, z_m)$ di $\mathbb{C}^m$,

$D^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa in $\mathbb{R}^m$,

$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$ la sfera unitaria in $\mathbb{R}^m$.

Per $n < m$ si identifica $\mathbb{R}^n$ (risp. $\mathbb{C}^n$) con il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (risp. $\mathbb{C}^m$) definito da $x_{n+1} = \cdots = x_m = 0$.

1. Palle, sfere e tori

1.1 PROPOSIZIONE. *La palla D^m, $m \geq 1$, è una sottovarietà con bordo compatta connessa di dimensione m di $\mathbb{R}^m$. Il bordo di D^m è la sfera S^{m-1}.*

Infatti D^m è definita da $\|x\|^2 \leq 1$. Ora la funzione $f : x \mapsto \|x\|^2$ è differenziabile su $\mathbb{R}^m$ e ha rango 1 in ogni punto di $\mathbb{R}^m - \{0\}$. Di conseguenza $D^m = f^{-1}(]-\infty, 1])$ è una sottovarietà con bordo di dimensione m di $\mathbb{R}^m$, avente per bordo $S^{m-1} = f^{-1}(1)$.

Inoltre D^m è un sottospazio chiuso, limitato e convesso di $\mathbb{R}^m$.

1.2 COROLLARIO. *La sfera S^m, $m \geq 0$, è una sottovarietà compatta senza bordo di dimensione m di $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Esercizi.

i) Per $m \geq 1$ lo spazio $\mathbb{R}^m - \{0\}$ è diffeomorfo alla varietà prodotto $S^{m-1} \times \mathbb{R}$.

ii) L'applicazione $h : D^p \times D^q \to D^{p+q}$ definita da

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\|y\|}{\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}}(x,y) & \text{per } 0 < \|x\| \le \|y\|, \\ \dfrac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}}(x,y) & \text{per } 0 < \|y\| \le \|x\|, \\ 0 & \text{per } x = y = 0 \end{cases}$$

è un omeomorfismo.[II.1]

1.3 PROPOSIZIONE. *La palla D^m è omeomorfa allo spazio ottenuto dal prodotto $S^{m-1} \times I$ identificando $S^{m-1} \times \{0\}$ a un punto.*

Infatti l'applicazione $q : (x,t) \mapsto tx$ di $S^{m-1} \times I$ su D^m induce un'applicazione continua e biiettiva dello spazio $X = (S^{m-1} \times [0,1])/(S^{m-1} \times \{0\})$ su D^m. E poiché X è compatto (cap. I, teor. 5.1), questa applicazione è un omeomorfismo.

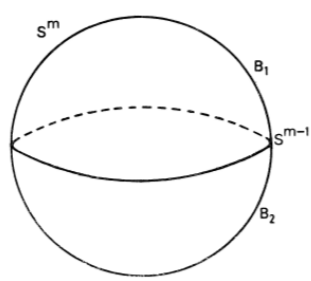
Si dice allora che x e t, $x \in S^{m-1}$ e $t \in I$, sono le *coordinate sferiche* del punto $q(x,t)$ di D^m.

1.4 PROPOSIZIONE. *La sfera S^m, $m \ge 1$, è omeomorfa allo spazio ottenuto incollando alla palla D^m una seconda palla D^m mediante l'applicazione identica $i : S^{m-1} \to S^{m-1}$.*

Siano infatti

$$B_1 = \{(x_1,\dots,x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} \ge 0\},$$
$$B_2 = \{(x_1,\dots,x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} \le 0\}.$$

Si ha $B_1 \cup B_2 = S^m$ e $B_1 \cap B_2 = S^{m-1}$.



D'altra parte la proiezione $(x_1,\dots,x_{m+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_m)$ determina omeomorfismi di B_1 e B_2 sulla palla D^m, uguali all'identità su S^{m-1}. Lo spazio $D^m \cup_i D^m$ è dunque omeomorfo a S^m (cap. I, esercizio 5.5).

1.5 COROLLARIO. *Per $m \ge 1$ la sfera S^m è connessa per archi.*

Invece $S^0 = \{-1,+1\} \subset \mathbb{R}$ non è connessa.

1.6 PROPOSIZIONE. *La sfera S^m, $m \geq 1$, è omeomorfa allo spazio ottenuto dalla palla D^m identificando il suo bordo S^{m-1} a un punto.*

Dimostrazione. Siano

$$B_1 = \{x \in D^m \mid \|x\| \leq \tfrac{1}{2}\}, \qquad B_2 = \{x \in D^m \mid \tfrac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}.$$

B_1 è omeomorfo alla palla D^m e B_2 al prodotto $S^{m-1} \times I$.

Indicando con q la proiezione di D^m su D^m/S^{m-1}, si hanno le proprietà seguenti:

– D^m/S^{m-1} è uno spazio compatto unione di $q(B_1)$ e $q(B_2)$;

– $q(B_1)$ è un chiuso di D^m/S^{m-1} omeomorfo a D^m;

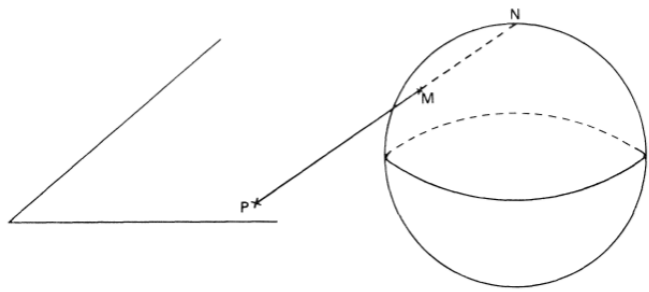
– $q(B_2)$ è un chiuso di D^m/S^{m-1} omeomorfo a D^m (prop. 1.3);

– $q(B_1) \cap q(B_2)$ è omeomorfo a S^{m-1}.

Di conseguenza (cap. I, es. 5.5 e prop. 1.4), D^m/S^{m-1} è omeomorfo a S^m. c.v.d.

Esempio. Il cerchio S^1 è omeomorfo allo spazio ottenuto dal segmento $[0,1]$ identificando i punti 0 e 1.

Esercizio. Il complementare di un punto in S^m, $m \geq 1$, è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Questo omeomorfismo può essere realizzato, per esempio, mediante una proiezione stereografica dal punto N.



1.7 PROPOSIZIONE. *La sfera S^m, $m \geq 1$, è omeomorfa allo spazio ottenuto incollando al prodotto $D^p \times S^q$, $p \geq 1$ e $p+q=m$, il prodotto $S^{p-1} \times D^{q+1}$ mediante l'applicazione identica*

$$i : S^{p-1} \times S^q = \partial(D^p \times S^q) \longrightarrow S^{p-1} \times S^q = \partial(S^{p-1} \times D^{q+1}).$$

Dimostrazione. Siano $B_1 = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_1^2 + \cdots + x_p^2 \leq \frac{1}{2}\}$ e $B_2 = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_1^2 + \cdots + x_p^2 \geq \frac{1}{2}\}$. L'unione $B_1 \cup B_2$ è uguale a S^m e l'intersezione $B_1 \cap B_2$ è omeomorfa al prodotto $S^{p-1} \times S^q$.

L'applicazione

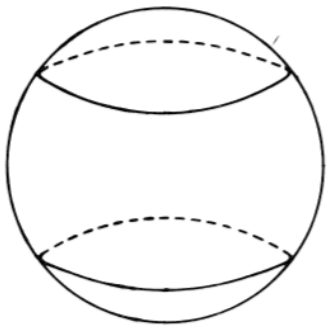
$$h : (x_1, \dots, x_{m+1}) \longmapsto \left(x_1\sqrt{2}, \dots, x_p\sqrt{2}, \frac{x_{p+1}}{\sqrt{1-\sum_{i\le p} x_i^2}}, \dots, \frac{x_{m+1}}{\sqrt{1-\sum_{i\le p} x_i^2}} \right)$$

è un omeomorfismo di B_1 su $D^p \times S^q$, e l'applicazione

$$k : (x_1, \dots, x_{m+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-\sum_{i\ge p+1} x_i^2}}, \dots, \frac{x_p}{\sqrt{1-\sum_{i\ge p+1} x_i^2}}, x_{p+1}\sqrt{2}, \dots, x_{m+1}\sqrt{2} \right)$$

è un omeomorfismo di B_2 su $S^{p-1} \times D^{q+1}$; queste applicazioni sono tali che $k \circ h^{-1}$ sia l'identità di $S^{p-1} \times S^q$. c.v.d.

Esempio. La sfera S^2 è omeomorfa



allo spazio $D^1 \times S^1 \cup_i S^0 \times D^2$.

Esercizio. Spazi lenticolari.

Sia $S^{2m+1} = \{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \|z\| = 1\}$ la sfera unitaria di dimensione $2m+1$, e sia λ una radice primitiva p-esima dell'unità. Il gruppo $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agisce propriamente e liberamente su S^{2m+1} mediante

$$\lambda^r : (z_1, \dots, z_{m+1}) \longmapsto (\lambda^r z_1, \dots, \lambda^r z_{m+1}).$$

Lo spazio delle orbite $L_p^{2m+1} = S^{2m+1}/\mathbb{Z}_p$ è allora una varietà compatta connessa senza bordo di dimensione $2m+1$ (cap. I, cor. 6.10): L_p^{2m+1} è lo spazio lenticolare di dimensione $2m+1$ e di gruppo $\mathbb{Z}_p$.

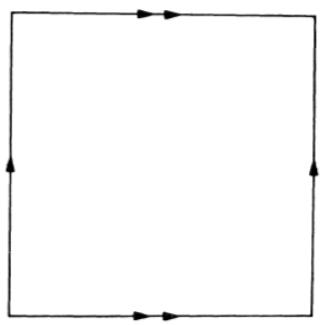
1.8 DEFINIZIONE. *Il toro T^m è lo spazio prodotto di m copie del cerchio S^1.*

Il toro T^m è dunque una varietà topologica compatta connessa senza bordo di dimensione m. Si munisce T^m della struttura differenziabile prodotto delle strutture differenziabili di ciascun fattore S^1.

1.9 PROPOSIZIONE. *Il toro T^m è omeomorfo al gruppo quoziente $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$.*

Infatti la proiezione $(x_1,\dots,x_m) \mapsto (e^{2\pi i x_1},\dots,e^{2\pi i x_m})$ induce un omeomorfismo di $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ su T^m.

Esempio. Il toro T^2 è omeomorfo allo spazio ottenuto identificando nel quadrato $I \times I$ i punti $(0,s)$ e $(1,s)$, $s \in I$, e i punti $(t,0)$ e $(t,1)$, $t \in I$. Questa identificazione è schematizzata nella figura seguente.



Esercizio. Sia $A \in \mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ una matrice a coefficienti interi. L'applicazione lineare $x \mapsto Ax$ induce un'applicazione continua f di T^m in sé stesso. Affinché f sia un omeomorfismo è necessario e sufficiente che il determinante di A sia uguale a ± 1.

1.10 DEFINIZIONE. *Il toro pieno è lo spazio prodotto $D^2 \times S^1$ del disco D^2 per il cerchio S^1.*

Il toro pieno è dunque una varietà topologica con bordo compatta connessa di dimensione 3. Il bordo di $D^2 \times S^1$ è il toro T^2.

Esempio. La sfera S^3 è omeomorfa allo spazio ottenuto incollando due tori pieni $D^2 \times S^1$ «identificando i meridiani del bordo dell'uno con i paralleli del bordo dell'altro» (prop. 1.8).[II.2]

2. Gruppi classici

Si indica con

$\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$ l'algebra (di dimensione complessa m^2) delle matrici quadrate di ordine m a coefficienti complessi,

α^* l'*aggiunta* di una matrice $\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{C})$: se $\alpha = (a_{jk})$, $\alpha^* = (\overline{a}_{kj})$,

$\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C}) = \{\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{C}) \mid \det\alpha \neq 0\}$ il gruppo lineare complesso,

$\mathrm{U}(m,\mathbb{C}) = \{\alpha \in \mathrm{Gl}(m,\mathbb{C}) \mid \alpha^{-1} = \alpha^*\}$ il gruppo unitario,

$\mathrm{SU}(m,\mathbb{C}) = \{\alpha \in \mathrm{U}(m,\mathbb{C}) \mid \det\alpha = 1\}$ il gruppo speciale unitario,

$\mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ l'algebra (di dimensione reale m^2) delle matrici quadrate di ordine m a coefficienti reali,

$\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R}) = \mathrm{Gl}(m,\mathbb{C}) \cap \mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ il gruppo lineare reale,

$\mathrm{O}(m,\mathbb{R}) = \mathrm{U}(m,\mathbb{C}) \cap \mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ il gruppo ortogonale,

$\mathrm{SO}(m,\mathbb{R}) = \mathrm{SU}(m,\mathbb{C}) \cap \mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ il gruppo speciale ortogonale,

$\exp : \alpha \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha^p}{p!}$ l'applicazione esponenziale di $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$ in $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$.

Per $n < m$ si identifica $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ con la sottoalgebra di $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$ formata dalle matrici $\alpha = (a_{jk})$ tali che $a_{jk} = \delta_{jk}$ per $j > n$ o $k > n$.[II.3]

2.1 *Richiami.*

i) $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$ è un aperto di $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$;

ii) $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$ è un gruppo topologico;

iii) $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathrm{M}(m,\mathbb{R})$;

iv) $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ e $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ sono sottogruppi chiusi di $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$;

v) $\alpha \mapsto \left(\frac{\alpha}{\det\alpha}, \det\alpha\right)$ è un isomorfismo (come gruppi topologici) di $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$ su $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C}) \times S^1$, e di $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ su $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R}) \times \{-1,+1\}$;[II.4]

vi) l'applicazione exp è un diffeomorfismo di un intorno aperto U di 0 in $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$ su un intorno aperto V di 1 in $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$;

vii) per $\alpha \in U$:

$\exp\alpha \in \mathrm{U}(m,\mathbb{C})$ equivale a $\alpha + \alpha^* = 0$ (α antihermitiana),

$\exp\alpha \in \mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$ equivale a $\alpha + \alpha^* = 0$ e $\mathrm{Tr}\,\alpha = 0$,

$\exp\alpha \in \mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$ equivale a $\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{R})$,

$\exp\alpha \in \mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ equivale a $\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ e $\alpha + {}^t\alpha = 0$ (α antisimmetrica).

viii) $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ e $\mathrm{U}(1,\mathbb{C})$ sono isomorfi al cerchio S^1 (gruppo dei numeri complessi di modulo 1).

2.2 PROPOSIZIONE. *I gruppi topologici* $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ *e* $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ *sono compatti.*

Infatti $\alpha \mapsto (\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^*))^{1/2}$ è una norma sullo spazio vettoriale $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$; si ha $\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^*) = m$ per ogni matrice $\alpha \in \mathrm{U}(m,\mathbb{C})$.[II.5] Di conseguenza $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$ (come pure $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$) è un sottospazio chiuso e limitato di $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$.

2.3 PROPOSIZIONE. *I gruppi* $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$, $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ *sono varietà topologiche (senza bordo) di dimensioni rispettivamente* $2m^2$, m^2, m^2-1, m^2 *e* $(m^2-m)/2$.

Infatti (richiami vi) e vii)) queste dimensioni sono quelle degli spazi vettoriali $\mathrm{M}(m,\mathbb{C})$, $\{\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{C}) \mid \alpha+\alpha^* = 0\}$, $\{\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{C}) \mid \alpha+\alpha^* = 0 \text{ e } \mathrm{Tr}\,\alpha = 0\}$, $\mathrm{M}(m,\mathbb{R})$ e $\{\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{R}) \mid \alpha + {}^t\alpha = 0\}$.

2.4 PROPOSIZIONE. *Il gruppo* $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$ *è connesso per archi.*

Infatti, se α è una matrice di $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$, si può trovare una matrice $\gamma \in \mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$ tale che $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ sia diagonale: $\beta = (b_{jk})$ con $b_{jk} = \delta_{jk}e^{2\pi i\lambda_k}$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$. Ma allora $t \mapsto \beta_t = (\delta_{jk}e^{2\pi it\lambda_k})$ è un cammino in $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$ che congiunge 1 a β; e $t \mapsto \gamma^{-1}\beta_t\gamma$ è un cammino in $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$ che congiunge 1 ad α.

2.5 COROLLARIO. *Il gruppo* $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$ *è connesso per archi.*

2.6 PROPOSIZIONE. *Il gruppo* $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ *è connesso per archi.*

Infatti, se α è una matrice di $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$, si può trovare una matrice $\gamma \in \mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ tale che $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ abbia la forma seguente:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & R(\lambda_1) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & R(\lambda_p) \end{pmatrix}, \quad R(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda \end{pmatrix}.$$

Si conclude allora come nella dimostrazione di 2.4.

2.7 COROLLARIO. *Il gruppo* $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ *ha due componenti connesse.*

Esercizio. Scopo di questo esercizio è mostrare che lo spazio $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$ (risp. $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$) è omeomorfo al prodotto $\mathrm{U}(m,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{m^2}$ (risp. $\mathrm{O}(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{(m^2+m)/2}$).

i) Una matrice $\alpha \in \mathrm{M}(m,\mathbb{C})$ è *hermitiana* se verifica $\alpha = \alpha^*$. Una tale matrice è diagonalizzabile e ha autovalori reali.

Il sottospazio H delle matrici hermitiane ha dimensione reale m^2.

Una matrice hermitiana α è *definita positiva* se tutti i suoi autovalori sono strettamente positivi. L'insieme H^+ delle matrici hermitiane definite positive è un aperto di H.

ii) L'applicazione esponenziale è un omeomorfismo di H su H^+.

iii) Esiste un omeomorfismo (e uno solo) f di H^+ su sé stesso tale che $(f(\alpha))^2 = \alpha$ per ogni $\alpha \in H^+$. Si pone allora $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$.

iv) Per ogni $\alpha \in \mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$, $\alpha^*\alpha$ appartiene a H^+.

v) L'applicazione $h : (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta$ è un omeomorfismo di $\mathrm{U}(m,\mathbb{C}) \times H^+$ su $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$: h^{-1} è data da $\alpha \mapsto (\alpha(\sqrt{\alpha^*\alpha})^{-1}, \sqrt{\alpha^*\alpha})$.

vi) L'applicazione h è un omeomorfismo di $\mathrm{O}(m,\mathbb{R}) \times (H^+ \cap \mathrm{M}(m,\mathbb{R}))$ su $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$.

vii) Il gruppo $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{C})$ è connesso. Il gruppo $\mathrm{Gl}(m,\mathbb{R})$ ha due componenti connesse.

2.8 PROPOSIZIONE. *Gli spazi omogenei* $\mathrm{O}(m+1,\mathbb{R})/\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ *e* $\mathrm{SO}(m+1,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$ *sono omeomorfi alla sfera* S^m.

Infatti $\mathrm{O}(m+1,\mathbb{R})$ (risp. $\mathrm{SO}(m+1,\mathbb{R})$) agisce transitivamente sulla sfera S^m, e lo stabilizzatore del punto $(0,0,\ldots,0,1)$ è $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ (risp. $\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$). Di conseguenza (cap. I, prop. 6.12), poiché $\mathrm{O}(m+1,\mathbb{R})$ è compatto, S^m è omeomorfa a $\mathrm{O}(m+1,\mathbb{R})/\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ (risp. $\mathrm{SO}(m+1,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(m,\mathbb{R})$).

2.9 PROPOSIZIONE. *Gli spazi omogenei* $\mathrm{U}(m+1,\mathbb{C})/\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$ *e* $\mathrm{SU}(m+1,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$ *sono omeomorfi alla sfera* S^{2m+1}.

Infatti $\mathrm{U}(m+1,\mathbb{C})$ (risp. $\mathrm{SU}(m+1,\mathbb{C})$) agisce transitivamente sulla sfera $S^{2m+1} = \{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \|z\| = 1\}$, e lo stabilizzatore del punto $(0,0,\ldots,0,1)$ è $\mathrm{U}(m,\mathbb{C})$ (risp. $\mathrm{SU}(m,\mathbb{C})$).

3. Spazi proiettivi reali

Il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ agisce continuamente a sinistra sullo spazio $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ mediante le omotetie $x \mapsto \lambda x$. Lo spazio delle orbite $(\mathbb{R}^{m+1} - \{0\})/\mathbb{R}^*$ può allora essere interpretato come l'insieme delle rette passanti per l'origine in $\mathbb{R}^{m+1}$: le orbite sono infatti le tracce di queste rette su $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$.

3.1 DEFINIZIONE. *Lo spazio proiettivo reale di dimensione m è lo spazio delle orbite di* $\mathbb{R}^*$ *che agisce su* $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ *mediante le omotetie.*

Si indica questo spazio con $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$. Si dice anche che $\mathrm{P}\mathbb{R}^1$ è la retta proiettiva reale e $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$ il piano proiettivo reale.

Sia R la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ associata all'azione di $\mathbb{R}^*$. La relazione indotta da R sulla sfera S^m può essere interpretata come la relazione di equivalenza associata all'azione del gruppo $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definita dalla simmetria $x \mapsto -x$.

3.2 LEMMA. *L'inclusione canonica* $i : S^m \to \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ *induce un omeomorfismo di* $S^m/\mathbb{Z}_2$ *su* $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

L'inclusione i induce infatti un'applicazione continua e biiettiva la cui inversa, indotta dall'applicazione $x \mapsto x/\|x\|$ di $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ su S^m, è anch'essa continua.

Di conseguenza (cap. I, cor. 6.10):

3.3 TEOREMA. *Lo spazio proiettivo* $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ *è una varietà compatta connessa senza bordo di dimensione m.*

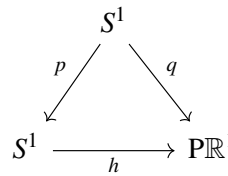
3.4 PROPOSIZIONE. *Lo spazio proiettivo* $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ *è omeomorfo allo spazio ottenuto dalla palla* D^m *identificando i punti* x *e* $-x$, $x \in S^{m-1} = \partial D^m$.

Infatti (prop. 1.4), lo spazio proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è omeomorfo allo spazio ottenuto dalla sfera S^m identificando i punti x e $-x$.

Esempi.

i) Lo spazio $\mathrm{P}\mathbb{R}^0$ si riduce a un punto.

ii) Lo spazio $\mathrm{P}\mathbb{R}^1$ è omeomorfo al cerchio S^1. Più precisamente, l'applicazione $p : z \mapsto z^2$ di S^1 su sé stesso induce un omeomorfismo h di S^1 su $\mathrm{P}\mathbb{R}^1$:



iii) Lo spazio lenticolare L_2^{2m+1} è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^{2m+1}$.

iv) Per $n < m$ l'inclusione canonica di S^n in S^m induce un omeomorfismo di $\mathrm{P}\mathbb{R}^n$ su un sottospazio chiuso di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$, che si identifica allora con $\mathrm{P}\mathbb{R}^n$.

In particolare si dice che $\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1} \subset \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è l'*iperpiano all'infinito* di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

3.5 PROPOSIZIONE. *Lo spazio proiettivo* $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ *è omeomorfo allo spazio ottenuto incollando a* $\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}$ *una palla* D^m *mediante la proiezione* $q : S^{m-1} = \partial D^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}$.

Questa asserzione è una conseguenza immediata della proposizione 3.4.

3.6 COROLLARIO. *Il complementare di* $\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}$ *in* $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ *è omeomorfo a* $\mathbb{R}^m$.

Se $z = q(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$, è un punto di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$, si dice che $x_1, \ldots, x_{m+1}$ sono le *coordinate omogenee* di z. Queste coordinate omogenee sono dunque definite a meno di un fattore non nullo, e i numeri $x_1, \ldots, x_{m+1}$ non sono tutti nulli. Per abuso di notazione si indica anche il punto z con $(x_1, \ldots, x_{m+1})$.

Per esempio, i punti dell'iperpiano $\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1} \subset \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ sono caratterizzati da $x_{m+1} = 0$.

Sia allora U_j l'insieme dei punti di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ per i quali x_j non è nullo; U_j è un aperto di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ e l'applicazione

$$h_j : (x_1, \ldots, x_{m+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_{m+1}}{x_j} \right)$$

è un omeomorfismo di U_j su $\mathbb{R}^m$. Si ha allora:

3.7 PROPOSIZIONE. *L'insieme* $\{(U_j, h_j)\}$ *è un atlante differenziabile su* $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

Infatti $\mathrm{P}\mathbb{R}^m = \bigcup U_j$ e, per $k \neq j$, $h_j h_k^{-1}$ è un diffeomorfismo dell'aperto $V_k = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_k \neq 0\}$.[II.6]

Si munisce sempre lo spazio proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ della struttura differenziabile definita da questo atlante. Le proiezioni $q : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ sono allora differenziabili.

Esercizi.

i) Il sottospazio $\mathrm{P}\mathbb{R}^n$ di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$, $n < m$, è una sottovarietà chiusa di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

ii) Il gruppo delle omotetie di $\mathbb{R}^{m+1}$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathrm{Gl}(m+1, \mathbb{R})$ isomorfo a $\mathbb{R}^*$. Il gruppo quoziente

$$\mathrm{PGl}(m, \mathbb{R}) = \mathrm{Gl}(m+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$$

agisce continuamente a sinistra e transitivamente sullo spazio proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$: $\mathrm{PGl}(m, \mathbb{R})$ è il gruppo delle trasformazioni proiettive di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

3.8 PROPOSIZIONE. *Il gruppo* $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ *è isomorfo al gruppo quoziente del gruppo* S^3 *dei quaternioni di norma 1 per il sottogruppo* $\{-1, +1\}$.

Dimostrazione. Sia $S^3 = \{q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$ il gruppo dei quaternioni di norma 1. Si interpreta $\mathbb{R}^3$ come lo spazio dei quaternioni puri: $\mathbb{R}^3 = \{ix_1 + jx_2 + kx_3\} \subset \mathbb{H}$.

Per ogni quaternione $q \in S^3$, l'applicazione $x \mapsto qxq^{-1}$, $x \in \mathbb{H}$, è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ che lascia invariato $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ è ortogonale a 1). Essa determina dunque un elemento $h(q)$ di $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$, e l'applicazione $h : q \mapsto h(q)$ è un omomorfismo continuo di S^3 in $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$. Di conseguenza, essendo S^3 connessa, l'immagine di h è contenuta in $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Poiché ogni elemento del nucleo di h commuta con i, j e k, si ha $\ker h = \{-1, +1\}$. Resta dunque da mostrare che h è suriettiva.

Ora basta verificare che le rotazioni attorno ai tre assi di $\mathbb{R}^3$ appartengano all'immagine di h (ogni rotazione in $\mathbb{R}^3$ è un prodotto di

rotazioni attorno agli assi coordinati). Ma, per esempio, se $q = \cos\theta + i\sin\theta$, si ha

$$h(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \qquad \text{c.v.d.}$$

3.9 COROLLARIO. *Il gruppo* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *è omeomorfo allo spazio proiettivo* $\mathrm{P}\mathbb{R}^3$.

Esercizi.

i) Si può dimostrare direttamente il corollario 3.9 nel modo seguente: a ogni punto x di D^3 si associa la rotazione di $\mathbb{R}^3$ il cui asse orientato è determinato dal vettore x e il cui angolo è $\|x\|\pi$. Si ottiene così un'applicazione continua e suriettiva di D^3 su $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ che identifica i punti x e $-x$ per $x \in S^2$.

ii) Per ogni quaternione $q \in S^3$, l'applicazione $h(q) : x \mapsto x\overline{q}$, $x \in \mathbb{H}$, è una trasformazione unitaria di determinante 1 di $\mathbb{H}$, considerato come spazio vettoriale complesso avente 1 e j per base. L'applicazione h è allora un isomorfismo del gruppo S^3 sul gruppo $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$: ogni matrice $\alpha \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

iii) L'applicazione h precedente può anche essere considerata come un omomorfismo di S^3 in $\mathrm{SO}(4,\mathbb{R})$. Identificando allora $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ con il sottogruppo delle matrici $\alpha = (a_{ij})$ di $\mathrm{SO}(4,\mathbb{R})$ tali che $a_{11} = 1$, l'applicazione $(q,\alpha) \mapsto h(q)\alpha$ è un omeomorfismo (ma non un isomorfismo) di $S^3 \times \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ su $\mathrm{SO}(4,\mathbb{R})$ (si utilizzerà l'applicazione $\alpha \mapsto \alpha(1)$ di $\mathrm{SO}(4,\mathbb{R})$ su S^3).

4. Spazi proiettivi complessi

Il gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ agisce continuamente a sinistra sullo spazio $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ mediante le omotetie $x \mapsto \lambda x$. Lo spazio delle orbite $(\mathbb{C}^{m+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ può allora essere interpretato come l'insieme delle rette complesse passanti per l'origine in $\mathbb{C}^{m+1}$.

4.1 DEFINIZIONE. *Lo spazio proiettivo complesso di dimensione m è lo spazio delle orbite di* $\mathbb{C}^*$ *che agisce su* $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ *mediante le omotetie.*

Si indica questo spazio con $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$, e si dice anche che $\mathrm{P}\mathbb{C}_1$ è la retta proiettiva complessa e $\mathrm{P}\mathbb{C}_2$ il piano proiettivo complesso.

Sia R la relazione di equivalenza su $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ associata all'azione di $\mathbb{C}^*$. La relazione indotta sulla sfera S^{2m+1} può essere interpretata come la relazione di equivalenza associata a un'azione del gruppo S^1.

4.2 LEMMA. *L'inclusione canonica* $i : S^{2m+1} \to \mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ *induce un omeomorfismo di* S^{2m+1}/S^1 *su* $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$.

La dimostrazione è analoga a quella del lemma 3.2.

Si ha dunque (cap. I, prop. 6.5):

4.3 PROPOSIZIONE. *Lo spazio proiettivo* $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$ *è uno spazio compatto e connesso per archi.*

La proiezione $q : S^{2m+1} \to \mathrm{P}\mathbb{C}_m$ si chiama allora *applicazione di Hopf*.

Si definiscono come nel caso reale le *coordinate omogenee* $z_1, \dots, z_{m+1}$ di un punto di $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$, e si identifica, per $n < m$, lo spazio $\mathrm{P}\mathbb{C}_n$ con il sottospazio definito da $z_{n+1} = \cdots = z_{m+1} = 0$ (questa identificazione è indotta dall'inclusione di S^{2n+1} in S^{2m+1}).

L'insieme $U_j = \{(z_1, \dots, z_{m+1}) \in \mathrm{P}\mathbb{C}_m \mid z_j \neq 0\}$ è ancora un aperto di $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$, e l'applicazione

$$h_j : (z_1, \dots, z_{m+1}) \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_{m+1}}{z_j} \right)$$

è un omeomorfismo di U_j su $\mathbb{C}^m$.

Si dimostra allora come in 3.7 il risultato seguente:

4.4 PROPOSIZIONE. *L'insieme* $\{(U_j, h_j)\}$ *è un atlante differenziabile su* $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$.

Lo spazio proiettivo complesso $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$ è dunque una varietà compatta connessa senza bordo di dimensione $2m$. Lo si munisce sempre della struttura differenziabile definita da 4.4. La proiezione $q : S^{2m+1} \to \mathrm{P}\mathbb{C}_m$ è allora un'applicazione differenziabile.

4.5 PROPOSIZIONE. *Lo spazio proiettivo complesso* $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$ *è omeomorfo allo spazio ottenuto incollando allo spazio proiettivo* $\mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1}$ *una palla* D^{2m} *mediante l'applicazione di Hopf* $q : S^{2m-1} = \partial D^{2m} \to \mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1}$.

Infatti, se f è l'applicazione

$$z = (z_1, \dots, z_m) \longmapsto (z_1, \dots, z_m, 1 - \|z\|)$$

di D^{2m} su $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$, e se i è l'inclusione canonica di $\mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1}$ in $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$, l'applicazione $h : \mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1} \sqcup D^{2m} \to \mathrm{P}\mathbb{C}_m$, uguale a i su $\mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1}$ e a f su D^{2m}, induce un omeomorfismo di $\mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1} \cup_q D^{2m}$ su $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$.

4.6 COROLLARIO. *Il complementare di* $\mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1}$ *in* $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$ *è omeomorfo a* $\mathbb{R}^{2m}$.

4.7 COROLLARIO. *La retta proiettiva complessa* $\mathrm{P}\mathbb{C}_1$ *è omeomorfa alla sfera* S^2.

Infatti, poiché $\mathrm{P}\mathbb{C}_0$ si riduce a un punto, $\mathrm{P}\mathbb{C}_1$ è omeomorfa allo spazio ottenuto dalla palla D^2 identificando il suo bordo $S^1 = \partial D^2$ a un punto.

Esercizio. Ogni frazione razionale $P/Q \in \mathbb{C}(X)$ determina un'applicazione differenziabile di $\mathrm{P}\mathbb{C}_1$ in sé stesso.

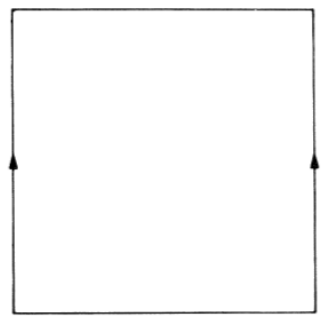
5. Superfici

Si intende in generale per *superficie* una varietà topologica di dimensione 2 (compatta o no, connessa o no, con o senza bordo). Il piano $\mathbb{R}^2$, il disco D^2, la sfera S^2, il toro T^2, il piano proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$, ..., sono esempi di superfici. Se ne daranno qui alcuni altri.

5.1 Il *cilindro* $S^1 \times \mathbb{R}$ è una superficie connessa senza bordo. È omeomorfo allo spazio delle orbite del gruppo $\mathbb{Z}$ che agisce sul piano $\mathbb{R}^2$ mediante le traslazioni $(x,y) \mapsto (x+n,y)$. È dunque anche omeomorfo allo spazio ottenuto dal prodotto $I \times \mathbb{R}$ identificando i punti $(0,y)$ e $(1,y)$.

Il gruppo $\mathbb{Z}$ agisce continuamente a sinistra, propriamente e liberamente sul cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ mediante le traslazioni $(x,y) \mapsto (x,y+n)$. Lo spazio delle orbite è allora omeomorfo al toro T^2.

Il *cilindro (compatto)* $S^1 \times I$ è una superficie connessa compatta il cui bordo è l'unione dei cerchi $S^1 \times \{0\}$ e $S^1 \times \{1\}$. È omeomorfo allo spazio ottenuto dal quadrato $I \times I$ identificando i punti $(0,y)$ e $(1,y)$. Questa identificazione è schematizzata nella figura seguente.



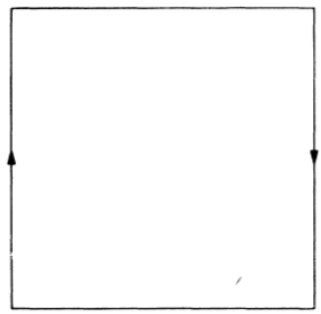
Il toro T^2 è omeomorfo allo spazio ottenuto dal cilindro $S^1 \times I$ identificando i punti $(z,0)$ e $(z,1)$ (esempio 1.10).[II.7]

5.2 Il gruppo $\mathbb{Z}$ agisce continuamente a sinistra, propriamente e liberamente sul piano $\mathbb{R}^2$ mediante $(x,y) \mapsto (x+n,(-1)^n y)$. Lo spazio delle orbite M è allora una superficie connessa senza bordo: M è il *nastro di Möbius*.

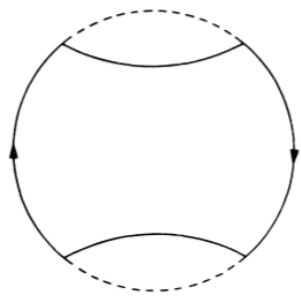
Il nastro di Möbius è omeomorfo allo spazio ottenuto dal prodotto $I \times \mathbb{R}$ identificando i punti $(0,y)$ e $(1,-y)$.

Il sottospazio $I \times [-1,+1]$ è un sottospazio saturo di $I \times \mathbb{R}$, e la sua immagine in M è una superficie compatta connessa B il cui bordo è omeomorfo al cerchio S^1: B è la *banda di Möbius*.

La banda di Möbius è omeomorfa allo spazio ottenuto dal prodotto $I \times [-1,+1]$ identificando i punti $(0,y)$ e $(1,-y)$. Questa identificazione è schematizzata nella figura seguente.



Esercizio. Il piano proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$ è omeomorfo allo spazio ottenuto incollando alla banda di Möbius B una palla D^2 mediante un omeomorfismo di S^1 su ∂B.



5.3 Sia G il gruppo di omeomorfismi del piano generato dalla traslazione $t : (x,y) \mapsto (x+1,y)$ e dalla trasformazione $s : (x,y) \mapsto (-x,y+1)$ (G non è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Il gruppo (discreto) G agisce continuamente a sinistra, propriamente e liberamente sul piano $\mathbb{R}^2$.

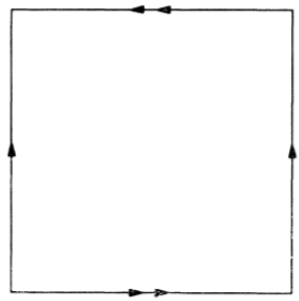
Lo spazio delle orbite T è allora una superficie connessa senza bordo: T è il *toro di Klein*.

Esercizio. Scopo di questo esercizio è mostrare che il toro di Klein è compatto.

i) Si ha la relazione $tst = s$. Di conseguenza ogni elemento di G si scrive (in modo unico) nella forma $s^n t^m$, $n,m \in \mathbb{Z}$.

ii) Per ogni punto x di $\mathbb{R}^2$, $Gx \cap (I \times I)$ non è vuoto. Per ogni punto x interno al quadrato $I \times I$, $Gx \cap (I \times I) = \{x\}$.

iii) Il toro di Klein è omeomorfo allo spazio ottenuto dal quadrato $I \times I$ identificando i punti $(0,y)$ e $(1,y)$ e i punti $(x,0)$ e $(1-x,1)$. Questa identificazione è schematizzata nella figura seguente.



Due risultati molto importanti della teoria delle superfici sono i teoremi seguenti, che ammetteremo (il primo sarà dimostrato nel capitolo XIV nel caso in cui f sia un'immersione differenziabile iniettiva, ossia un *embedding*, di S^1 in $\mathbb{R}^2$):

5.4 TEOREMA DI JORDAN. *Sia f un'applicazione continua e iniettiva del cerchio S^1 nel piano $\mathbb{R}^2$. L'aperto $\mathbb{R}^2 - f(S^1)$ ha due componenti connesse, una delle quali è limitata.*

Si dice allora che $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, o $C = f(S^1)$, è una *curva di Jordan* nel piano, e che la componente limitata di $\mathbb{R}^2 - f(S^1)$ è l'*interno* di C.

5.5 TEOREMA DI SCHOENFLIES. *Nelle ipotesi del teorema di Jordan, e se U è la componente limitata di $\mathbb{R}^2 - f(S^1)$, l'applicazione f si prolunga in un omeomorfismo del disco D^2 sulla chiusura $\overline{U} = U \cup f(S^1)$ di U.*

Esercizio. L'applicazione f si prolunga in un omeomorfismo di $D^2 - \{0\}$ su $\mathbb{R}^2 - U$ (notazione del teorema 5.5).

5.6 Sia $C_i = f_i(S^1)$, $f_i : S^1 \to \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1, \ldots, p$, una famiglia di curve di Jordan aventi le proprietà seguenti:

i) $C_i \cap C_j = \varnothing$ per $i \neq j$;

ii) $C_1, \ldots, C_p$ sono contenute nell'interno U_0 di C_0;

iii) gli interni $U_1, \ldots, U_p$ di $C_1, \ldots, C_p$ sono a due a due disgiunti.

Si dice allora che $X = \overline{U}_0 - (U_1 \cup \cdots \cup U_p)$ è un *disco con p buchi*. Il cilindro $S^1 \times I$ è, per esempio, omeomorfo a un disco con un buco.

Questa terminologia è giustificata dall'esercizio i) seguente.

Esercizi.

i) Se X e Y sono due dischi con p buchi, X e Y sono omeomorfi. La dimostrazione si fa per induzione su p, utilizzando la costruzione indicata sotto.



ii) Sia U il complementare di p punti distinti in $\mathbb{R}^2$; U è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{1, 2, \ldots, p\}$.

iii) Il nastro di Möbius M non è omeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

iv) La banda di Möbius non è omeomorfa al cilindro $S^1 \times I$.

CAPITOLO III

Complessi cellulari

1. Complessi cellulari

Sia K uno spazio topologico separato.

Una *partizione in celle* di K è una partizione π di K ogni cui elemento è omeomorfo a uno spazio numerico (la dimensione di questo spazio è allora ben determinata: teorema dell'invarianza del dominio, cap. XIV, teor. 4.1). In queste condizioni si indica con $K^m = K^m(\pi)$ l'unione degli elementi di π di dimensione minore o uguale a m; lo spazio K è l'unione dei sottospazi K^m.

1.1 DEFINIZIONE. *Una decomposizione cellulare di K è una partizione in celle di K tale che, per ogni elemento e di questa partizione, esista un'applicazione continua f della palla chiusa D^m in K^m avente le proprietà seguenti:*

i) $f(S^{m-1}) \subset K^{m-1}$,

ii) $f|_{D^m - S^{m-1}}$ *è un omeomorfismo di* $D^m - S^{m-1}$ *su* e.

Quando ci si riferisce a una decomposizione cellulare di K, si dice anche che

– K è un *complesso cellulare*,

– K^m è lo *scheletro di dimensione* m di K,

– e è una *cella di dimensione* m di K (si dice anche *vertice* quando $m = 0$ e *spigolo* quando $m = 1$),

– f è un'*applicazione di attacco* della cella e (queste applicazioni non fanno parte dei dati della decomposizione cellulare).

Il complesso cellulare K è *finito* se l'insieme delle sue celle è finito; altrimenti è *infinito*.

Il complesso cellulare K è di *dimensione finita* m se non possiede celle di dimensione $n > m$, o anche se $K^n = K^m$ per $n \geq m$; altrimenti è di *dimensione infinita*. In particolare un complesso cellulare finito è di dimensione finita.

1.2 *Esempi.* In ciascuno degli esempi seguenti si dà una successione crescente $(K^m)_{m\geq 0}$ di sottospazi di uno spazio K tale che le componenti connesse dei sottospazi K^0 e $K^m - K^{m-1}$, $m \geq 1$, determinino

una decomposizione cellulare di K avente K^m per scheletro di dimensione m:

i) K è uno spazio discreto; $K^m = K$ per ogni $m \geq 0$ (decomposizione cellulare di dimensione 0);

ii) $K = \mathbb{Q}$; $K^m = \mathbb{Q}$ per ogni $m \geq 0$;

iii) $K = \mathbb{R}$; $K^0 = \mathbb{Z}$ e $K^m = \mathbb{R}$ per $m \geq 1$;

iv) $K = S^p$; $K^m = \{(0,\dots,0,1)\}$ per $0 \leq m < p$ e $K^m = S^p$ per $m \geq p$ (cap. II, prop. 1.6);

v) $K = S^p$; $K^m = S^m$ per $0 \leq m \leq p$ e $K^m = S^p$ per $m \geq p$ (cap. II, prop. 1.4);

vi) $K = D^p$; $K^m = \{(0,\dots,0,1)\}$ per $0 \leq m < p-1$, $K^{p-1} = S^{p-1}$ e $K^m = D^p$ per $m \geq p$;

vii) $K = D^p$; $K^m = S^m$ per $0 \leq m \leq p-1$ e $K^m = D^p$ per $m \geq p$;

viii) $K = \mathrm{P}\mathbb{R}^p$; $K^m = \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ per $0 \leq m \leq p$ e $K^m = \mathrm{P}\mathbb{R}^p$ per $m \geq p$ (cap. II, prop. 3.4);

ix) $K = \mathrm{P}\mathbb{C}_p$; $K^{2m} = K^{2m+1} = \mathrm{P}\mathbb{C}_m$ per $0 \leq m \leq p$ e $K^m = \mathrm{P}\mathbb{C}_p$ per $m \geq 2p$ (cap. II, prop. 4.5).

Esercizi.

i) Sia e una cella di dimensione m di un complesso cellulare K. Allora

a) $\overline{e} - e = \overline{e} \cap K^{m-1}$;

b) e è chiusa in $K^m - K^{m-1}$;

c) $\overline{e} - e$ è chiuso in K, e connesso per $m \geq 2$.

ii) Se K è un complesso cellulare finito, una cella e di dimensione m di K è un aperto di K^m. Le celle di dimensione m di K sono dunque le componenti connesse di $K^m - K^{m-1}$. Di conseguenza la decomposizione cellulare di K è determinata dalla successione dei suoi scheletri.

iii) Siano K un complesso cellulare finito, f un'applicazione continua di S^{m-1} in K^{m-1} e $L = K \cup_f D^m$ lo spazio ottenuto incollando a K una palla D^m mediante l'applicazione f. La successione (L^n) definita da $L^n = K^n$ per $n \leq m-1$ e $L^n = K^n \cup_f D^m$ per $n \geq m$ determina una decomposizione cellulare di L:[III.1] si dice che L è il complesso cellulare ottenuto incollando a K una cella di dimensione m mediante l'applicazione f.

iv) Un complesso cellulare finito è compatto e localmente connesso per archi.

1.3 PROPOSIZIONE. *Sia $(e_i)_{i\in I}$ (risp. $(\varepsilon_j)_{j\in J}$) una decomposizione cellulare di uno spazio K (risp. L). La partizione $(e_i \times \varepsilon_j)_{(i,j)\in I\times J}$ è una decomposizione cellulare dello spazio prodotto $K \times L$.*

Infatti, se $f : D^p \to K$ (risp. $g : D^q \to L$) è un'applicazione di attacco della cella e di K (risp. ε di L), e se h è un omeomorfismo di $D^p \times D^q$ su D^{p+q} (cap. II, esercizio 1.2), $(f \times g) \circ h^{-1}$ è un'applicazione di attacco di $e \times \varepsilon$.

Lo scheletro di dimensione m di $K \times L$ è allora

$$(K \times L)^m = \bigcup_{p+q=m} K^p \times L^q.$$

Si dice che questa decomposizione è la *decomposizione cellulare prodotto*, e che $K \times L$ è il *complesso cellulare prodotto* dei complessi cellulari K e L.

1.4 COROLLARIO. *Se K e L sono due complessi cellulari finiti, il loro prodotto $K \times L$ è anch'esso finito.*

Esempi. Le decomposizioni cellulari degli esempi 1.2 permettono di ottenere decomposizioni cellulari dello spazio $\mathbb{R}^m$, del toro T^m, del toro pieno $D^2 \times S^1$, del cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, ...

1.5 DEFINIZIONE. *Un sottocomplesso di un complesso cellulare K è un sottospazio L di K avente le proprietà seguenti:*

i) L è unione di celle di K;

ii) se e è una cella di K contenuta in L, anche la chiusura $\bar{e}$ di e è contenuta in L.

Questa terminologia è giustificata dal fatto che la decomposizione cellulare di K determina una decomposizione cellulare di L.

1.6 *Esempi.*

i) Il segmento $I = [0,1]$ è un sottocomplesso di $\mathbb{R}$ (esempio iii) di 1.2).

ii) Lo scheletro K^m di dimensione m di K è un sottocomplesso (di dimensione finita m) di K; lo scheletro di dimensione n, $n < m$, di K^m è allora K^n.

iii) Se $(L_i)_{i \in I}$ è una famiglia di sottocomplessi di K, l'unione $\bigcup_{i \in I} L_i$ e l'intersezione $\bigcap_{i \in I} L_i$ sono sottocomplessi di K.

Si può dunque parlare, in particolare, del più piccolo sottocomplesso $K(X)$ di K contenente un sottospazio X di K.

Esercizi.

i) Un sottocomplesso finito è chiuso. Invece un sottocomplesso infinito non lo è necessariamente.

ii) Se L e L' sono due sottocomplessi di complessi cellulari K e K', $L \times L'$ è un sottocomplesso del complesso cellulare prodotto $K \times K'$.

1.7 PROPOSIZIONE. *Ogni componente connessa di un complesso cellulare K è un sottocomplesso di K.*

Infatti, poiché ogni cella è connessa, ogni componente connessa di K è un sottospazio chiuso unione di celle di K.

2. Complessi cellulari localmente finiti

2.1 DEFINIZIONE. *Un complesso cellulare K è localmente finito se, per ogni punto x di K, esiste un sottocomplesso finito $L \subset K$ che sia un intorno di x in K.*

Esempi.

i) Un complesso cellulare finito è localmente finito.

ii) La decomposizione di $\mathbb{R}$ data nell'esempio 1.2 è localmente finita, mentre quella di $\mathbb{Q}$ non lo è.

iii) Un sottocomplesso cellulare di un complesso cellulare localmente finito K è localmente finito. In particolare lo scheletro K^m è localmente finito.

iv) Il prodotto di due complessi cellulari localmente finiti è localmente finito.

Esercizi.

i) Un complesso cellulare localmente finito è uno spazio localmente compatto e localmente connesso per archi.

ii) Affinché un complesso cellulare di dimensione 0 sia localmente finito, è necessario e sufficiente che sia uno spazio discreto.

iii) Affinché un complesso cellulare localmente finito sia compatto, è necessario e sufficiente che sia finito.

2.2 PROPOSIZIONE. *Sia K un complesso cellulare localmente finito. Affinché un sottospazio F (risp. U) di K sia chiuso (risp. aperto), è necessario e sufficiente che, per ogni cella e di K, l'intersezione $F \cap \overline{e}$ (risp. $U \cap \overline{e}$) sia chiusa (risp. aperta) in $\overline{e}$.*

Dimostrazione. La condizione è evidentemente necessaria.

Viceversa, sia x un punto di $K - F$, e sia L un sottocomplesso finito di K che sia un intorno di x. L'intersezione $F \cap L$ è l'unione degli $F \cap \overline{e}$ per e che percorre l'insieme (finito) delle celle di L. Essa è dunque chiusa; e $W = L - (F \cap L)$ è un intorno di x che non incontra F. Ciò mostra che F è chiuso.

Se ora $U \cap \overline{e}$ è aperto in $\overline{e}$ per ogni cella e di K, $(K - U) \cap \overline{e}$ è chiuso. Di conseguenza $K - U$ è un chiuso di K, e U è aperto. c.v.d.

In particolare una cella di dimensione m di K è un aperto di K^m. Di conseguenza la decomposizione cellulare di K è determinata dalla successione dei suoi scheletri (cfr. esercizio ii) di 1.2).

2.3 COROLLARIO. *Un sottocomplesso L di un complesso cellulare localmente finito K è chiuso in K.*

Infatti per ogni cella e di K si ha $L \cap \overline{e} = \varnothing$ oppure $L \cap \overline{e} = \overline{e}$.[III.2]

2.4 COROLLARIO. *Sia K un complesso cellulare localmente finito e sia F (risp. U) un chiuso (risp. aperto) di K. Affinché un'applicazione f di F (risp. U) in uno spazio X sia continua, è necessario e sufficiente che, per ogni cella e di K, la restrizione di f a $F \cap \overline{e}$ (risp. $U \cap \overline{e}$) sia continua.*

La condizione è evidentemente necessaria.

Viceversa, se Z è un chiuso di X, per ogni cella e di K,

$$f^{-1}(Z) \cap \overline{e} = (f|_{F \cap \overline{e}})^{-1}(Z)$$

è chiuso in $F \cap \overline{e}$, dunque in $\overline{e}$; di conseguenza $f^{-1}(Z)$ è chiuso in K.

Il caso dell'aperto U si dimostra in modo analogo.

2.5 TEOREMA. *Affinché un complesso cellulare localmente finito K sia connesso, è necessario e sufficiente che lo sia il suo scheletro K^1.*

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che lo scheletro K^m, $m \geq 0$, sia connesso. Per ogni cella e di dimensione $m+1$ di K, $K^m \cup e = K^m \cup \overline{e}$ è connesso. Di conseguenza K^{m+1}, che è l'unione dei sottospazi $K^m \cup e$ per e che percorre l'insieme delle celle di dimensione $m+1$ di K, è anch'esso connesso. Ogni scheletro K^n, $n \geq m$, è dunque connesso, così come $K = \bigcup_{n \geq m} K^n$.

Viceversa, supponiamo che K^m, $m \geq 1$, sia unione disgiunta di due chiusi non vuoti K_1^m e K_2^m; questi due chiusi sono allora sottocomplessi di K. Per ogni cella e di dimensione $m+1$ di K, si ha $K_1^m \cap (\overline{e} - e) = \varnothing$ oppure $K_1^m \cap (\overline{e} - e) = \overline{e} - e$. Si può dunque scrivere K^{m+1} come unione disgiunta di due sottocomplessi K_1^{m+1} e K_2^{m+1} caratterizzati dalle relazioni $K_i^{m+1} \cap K^m = K_i^m$, $i = 1, 2$.

Si costruiscono così per induzione due famiglie K_i^n, $n \geq m$ e $i = 1, 2$, di sottocomplessi di K, aventi per ogni n le proprietà seguenti:

i) $K_1^n \cap K_2^n = \varnothing$,

ii) $K_1^n \cup K_2^n = K^n$,

iii) $K_i^{n+1} \cap K^n = K_i^n$.

Lo spazio K è allora unione disgiunta dei due sottocomplessi $K_1 = \bigcup_{n \geq m} K_1^n$ e $K_2 = \bigcup_{n \geq m} K_2^n$; poiché K_1 e K_2 sono chiusi in K (cor. 2.3), K non è connesso. c.v.d.

Osservazione. La dimostrazione precedente mostra anche che un complesso cellulare avente un solo vertice è connesso.

Esercizi. Sia K un complesso cellulare localmente finito.

i) Per ogni compatto F di K esiste un sottocomplesso finito L di K tale che F sia contenuto nell'interno di L.

ii) Lo spazio K è normale (se F_1 e F_2 sono due chiusi disgiunti di K, esistono due aperti disgiunti U_1 e U_2 di K tali che $F_1 \subset U_1$ e $F_2 \subset U_2$).

iii) Sia L un sottocomplesso finito di K. La successione $(K^m \cup L)/L$, $m \geq 0$, determina una decomposizione cellulare localmente finita di K/L.

3. Grafi

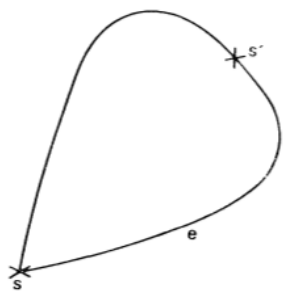
3.1 DEFINIZIONE. *Un grafo è un complesso cellulare localmente finito di dimensione 0 o 1.*

Si dice allora *sottografo* invece di sottocomplesso.

Se e è uno spigolo di un grafo K, il sottospazio $\overline{e} - e$ ha al più due punti, che si chiamano gli *estremi* di e. Ogni vertice s di K è allora estremo di un numero finito di spigoli di K.

3.2 PROPOSIZIONE. *Ogni grafo K possiede una decomposizione cellulare per la quale ogni spigolo ha due estremi distinti.*

Infatti, se e è uno spigolo di K i cui due estremi coincidono, si può introdurre un nuovo vertice scegliendo un punto di e. Eseguendo questa costruzione per tutti tali spigoli, si ottiene una nuova decomposizione cellulare (localmente finita di dimensione 1) di K per la quale ogni spigolo ha i suoi due estremi distinti.



3.3 LEMMA. *Affinché un grafo K sia connesso, è necessario e sufficiente che, quali che siano i vertici distinti s e s' di K, esista una successione finita $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ di spigoli di K con estremi s_i e t_i tali che $s = s_1$, $t_i = s_{i+1}$ e $t_p = s'$.*

L'unione $L = \bigcup_i \overline{e}_i$ è allora un sottocomplesso connesso (per archi) di K: L è una *catena* che congiunge s a s'.[III.3]

Dimostrazione. La condizione è evidentemente sufficiente.

Viceversa, sia s un vertice di K e sia S l'insieme dei vertici t di K per i quali esiste una catena che congiunge s a t. L'unione L di tutte le catene che congiungono s ai punti di S è allora un sottocomplesso connesso (chiuso) di K.

Ma L è anche aperto in K; infatti, se t è un vertice di S, ogni spigolo avente t per estremo appartiene a L. Di conseguenza L è una componente connessa di K. c.v.d.

3.4 PROPOSIZIONE. *Sia K un grafo connesso. Per ogni spigolo e di K, $K - e$ ha al più due componenti connesse.*

3.5 DEFINIZIONE. *Un albero è un grafo connesso K tale che, per ogni spigolo e di K, $K - e$ abbia due componenti connesse.*

Gli estremi di ogni spigolo e di K sono allora distinti e si trovano in componenti connesse distinte di $K - e$.

3.6 PROPOSIZIONE. *Affinché un grafo connesso K sia un albero, è necessario e sufficiente che ogni sottografo finito connesso L di K sia un albero.*

Dimostrazione. Supponiamo che K sia un albero, e siano L un sottografo finito connesso di K ed e uno spigolo di L. Non esiste una catena che congiunga gli estremi di e in $K - e$ (lemma 3.3); di conseguenza $L - e$ non è connesso.

Viceversa, supponiamo che ogni sottografo finito connesso di K sia un albero, e sia e uno spigolo di K. Se $K - e$ fosse connesso, esisterebbe una catena L che congiunge gli estremi di e in $K - e$. Ma allora $\widetilde{L} = L \cup e$ sarebbe un sottocomplesso finito connesso di K tale che $\widetilde{L} - e = L$ sia connesso; il che è impossibile. c.v.d.

3.7 DEFINIZIONE. *Sia K un grafo connesso finito. La connettività $c(K)$ di K è il più grande degli interi p aventi la proprietà seguente: esiste una successione $e_1, \ldots, e_p$ di spigoli distinti di K tale che $K - (e_1 \cup \cdots \cup e_p)$ sia connesso.*

3.8 DEFINIZIONE. *Sia K un grafo finito avente b_0 vertici e b_1 spigoli. La caratteristica di Eulero–Poincaré di K è il numero $\chi(K) = b_0 - b_1$.*

3.9 TEOREMA. *Sia K un grafo finito connesso. Si ha $c(K) = 1 - \chi(K)$.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sul numero b_1 degli spigoli: se $b_1 = 0$, si ha $c(K) = 0$ e $\chi(K) = 1$.

Se b_1 è maggiore di 0 e $c(K) = 0$, K è un albero. Il complementare di uno spigolo e di K è costituito da due alberi aventi rispettivamente β_0 e γ_0 vertici, $\beta_0 + \gamma_0 = b_0$, e β_1 e γ_1 spigoli, $\beta_1 + \gamma_1 = b_1 - 1$. Si ha allora $\beta_0 - \beta_1 = 1$, $\gamma_0 - \gamma_1 = 1$; dunque anche $b_0 - b_1 = 1$.

Se b_1 e $c(K)$ sono maggiori di 0, si possono trovare $c(K)$ spigoli di K il cui complementare L sia un albero. Si ha allora $c(L) = 0$ e

$$\chi(L) = b_0 - (b_1 - c(K)) = 1.$$

Di conseguenza $c(K) = 1 - (b_0 - b_1) = 1 - \chi(K)$. c.v.d.

Si è anche dimostrato:

3.10 PROPOSIZIONE. *Affinché un grafo finito connesso K sia un albero, è necessario e sufficiente che $\chi(K) = 1$.*

3.11 COROLLARIO. *Se K è un albero finito, esiste un vertice di K che è estremo di un solo spigolo di K.*

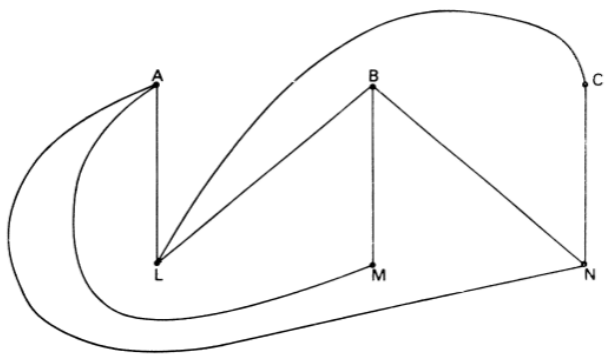
[III.4] Infatti, se ogni vertice di K fosse estremo di almeno due spigoli di K, si avrebbe $b_1 \geq b_0$ e $\chi(K) = b_0 - b_1 \leq 0$; il che è impossibile.

Esercizi.

i) Un grafo finito K è *planare* se è omeomorfo a un sottospazio compatto del piano $\mathbb{R}^2$.

Sia allora $K \subset \mathbb{R}^2$ un grafo planare connesso. Il numero delle componenti connesse di $\mathbb{R}^2 - K$ è $2 - \chi(K)$: *formula di Eulero*.

ii) È impossibile congiungere tre case A, B, C a tre impianti L, M, N (acqua, gas, elettricità!) in modo che le «condutture» non si incrocino.



CAPITOLO IV

Omotopia

Nel seguito si utilizzerà frequentemente, e spesso senza menzionarlo, il lemma seguente:

LEMMA DI INCOLLAMENTO. *Sia $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ un ricoprimento chiuso finito di uno spazio E, e sia, per ogni i, f_i un'applicazione continua di F_i in uno spazio X. Se, quali che siano i e j, f_i e f_j coincidono su $F_i \cap F_j$, esiste una e una sola applicazione continua f di E in X uguale a f_i su F_i.*

Poiché E è l'unione degli F_i e f_i e f_j coincidono su $F_i \cap F_j$, esiste una e una sola applicazione f di E in X uguale a f_i su F_i. Resta da verificare che f sia continua.

Ora, se F è un chiuso di X, ogni $f_i^{-1}(F)$ è chiuso in F_i, dunque in E; e si ha $f^{-1}(F) = \bigcup_i f_i^{-1}(F)$.

1. Omotopia. Tipo di omotopia

1.1 DEFINIZIONE. *Siano f_0 e f_1 due applicazioni continue di uno spazio X in uno spazio Y. L'applicazione f_0 è omotopa all'applicazione f_1 se esiste un'applicazione continua F del prodotto $X \times I$ in Y tale che $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$.*

Per ogni $t \in I$ si indica allora con $f_t : X \to Y$ l'applicazione $x \mapsto F(x,t)$, e si dice che F (o f_t) è un'*omotopia* di f_0 a f_1.

1.2 PROPOSIZIONE. *La relazione «f_0 è omotopa a f_1» è una relazione di equivalenza nell'insieme delle applicazioni continue di X in Y.*

Si chiamano allora *classi di omotopia* di applicazioni di X in Y le classi di equivalenza di questa relazione (e si dice che due applicazioni sono omotope se appartengono alla stessa classe di omotopia).

Dimostrazione. Questa relazione è riflessiva: per ogni applicazione continua $f : X \to Y$, $F : (x,t) \mapsto f(x)$ è un'omotopia di f a f.

È simmetrica: se F è un'omotopia di f_0 a f_1, $G : (x,t) \mapsto F(x,1-t)$ è un'omotopia di f_1 a f_0.

È infine transitiva: se F è un'omotopia di f_0 a f_1 e G un'omotopia di f_1 a f_2, l'applicazione $H : X \times I \to Y$ definita da

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{per } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1) & \text{per } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

è un'omotopia di f_0 a f_2 (lemma di incollamento). c.v.d.

1.3 *Esempio.* Due applicazioni continue f_0 e f_1 di uno spazio X in $\mathbb{R}^m$ (o, più in generale, in un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^m$) sono omotope: $(x,t) \mapsto (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ è infatti un'omotopia di f_0 a f_1.

Esercizi.

i) Due applicazioni continue f_0 e f_1 di uno spazio X nella sfera S^m tali che $f_0(x) \neq -f_1(x)$ per ogni $x \in X$ sono omotope.

ii) Due applicazioni continue omotope f e g di uno spazio X in uno spazio Y inducono la stessa applicazione di $\pi_0(X)$ in $\pi_0(Y)$.

1.4 *Osservazione.* Se f_0 e f_1 sono due applicazioni continue e proprie di X in Y, si può definire un'*omotopia propria* di f_0 a f_1 come un'omotopia $H : X \times I \to Y$ di f_0 a f_1 per la quale H sia anche un'applicazione propria.

Si dice allora che f_0 è *propriamente omotopa* a f_1. Come in precedenza, si verifica che questa relazione è una relazione di equivalenza nell'insieme delle applicazioni continue e proprie di X in Y.

1.5 PROPOSIZIONE. *Siano f_0 e f_1 due applicazioni continue e omotope di uno spazio X in uno spazio Y, e siano g_0 e g_1 due applicazioni continue e omotope di Y in uno spazio Z. Le applicazioni composte $g_0 \circ f_0$ e $g_1 \circ f_1$ sono omotope.*

In altri termini, la relazione di omotopia è compatibile con la composizione delle applicazioni.

Infatti, se F (risp. G) è un'omotopia di f_0 a f_1 (risp. di g_0 a g_1), $H : (x,t) \mapsto G(F(x,t),t)$ è un'omotopia di $g_0 \circ f_0$ a $g_1 \circ f_1$.

1.6 DEFINIZIONE. *Due spazi X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia se esistono un'applicazione continua $f : X \to Y$ e un'applicazione continua $g : Y \to X$ tali che le applicazioni $g \circ f$ e $f \circ g$ siano rispettivamente omotope alle applicazioni identiche di X e di Y.*

Si dice in queste condizioni che f (risp. g) è un'*equivalenza omotopica* da X a Y (risp. da Y a X), e che g (risp. f) è un *inverso omotopico* di f (risp. g).

Esercizi.

i) La relazione «avere lo stesso tipo di omotopia» è riflessiva, simmetrica e transitiva.

ii) Se X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia, gli insiemi $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$ hanno la stessa cardinalità.

1.7 *Esempi.*

i) Due spazi omeomorfi hanno lo stesso tipo di omotopia.

In particolare due spazi ridotti a un punto hanno lo stesso tipo di omotopia. Si potrà dunque dire di uno spazio che ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

ii) Lo spazio $\mathbb{R}^m$ ha lo stesso tipo di omotopia di un punto. Siano infatti f l'applicazione costante di $\mathbb{R}^m$ su 0 e g l'inclusione canonica di $\{0\}$ in $\mathbb{R}^m$; l'applicazione $(x,t) \mapsto tx$ è un'omotopia di $g \circ f$ all'applicazione identica di $\mathbb{R}^m$.

iii) Lo spazio $\mathbb{R}^m - \{0\}$ e la sfera S^{m-1} hanno lo stesso tipo di omotopia. Siano infatti f l'inclusione canonica di S^{m-1} in $\mathbb{R}^m - \{0\}$ e g l'applicazione $x \mapsto x/\|x\|$ di $\mathbb{R}^m - \{0\}$ su S^{m-1}; $g \circ f$ è l'applicazione identica di S^{m-1}, e $(x,t) \mapsto (1-t)x/\|x\| + tx$ è un'omotopia di $f \circ g$ all'applicazione identica di $\mathbb{R}^m - \{0\}$.

1.8 DEFINIZIONE. *Uno spazio X è contrattile se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.*

Due spazi contrattili hanno dunque lo stesso tipo di omotopia.

Esempi. Lo spazio $\mathbb{R}^m$ è contrattile. Più in generale ogni sottospazio convesso di $\mathbb{R}^m$ è contrattile (per esempio la palla chiusa D^m è contrattile).

Esercizi.

i) Uno spazio contrattile è connesso per archi.

ii) Le proposizioni seguenti sono equivalenti:

a) X è contrattile;

b) l'applicazione identica di X è omotopa a un'applicazione costante;

c) ogni applicazione continua di uno spazio Y in X è omotopa a un'applicazione costante;

d) due applicazioni continue di uno spazio Y in X sono omotope;

e) ogni applicazione continua di X in uno spazio Z è omotopa a un'applicazione costante;

f) due applicazioni continue di X in uno spazio Z sono omotope.[IV.1]

2. Omotopia relativa. Retratto per deformazione

2.1 DEFINIZIONE. *Sia A un sottospazio di uno spazio X, e siano f_0 e f_1 due applicazioni continue di X in uno spazio Y uguali su A. L'applicazione f_0 è omotopa relativamente ad A all'applicazione f_1 se esiste un'omotopia F di f_0 a f_1 tale che $F(x,t) = f_0(x) = f_1(x)$ per ogni $x \in A$ e ogni $t \in I$.*

Si verificano come in precedenza le proprietà seguenti:

i) la relazione di omotopia relativamente ad A è una relazione di equivalenza nell'insieme delle applicazioni continue di X in Y uguali su A a un'applicazione data f;

ii) la relazione di omotopia relativa è compatibile con la composizione delle applicazioni (in un senso che si espliciterà).

2.2 DEFINIZIONE. *Un sottospazio Y di uno spazio X è un retratto di X se esiste un'applicazione continua $r : X \to Y$ tale che $r(y) = y$ per ogni $y \in Y$.*

Si dice allora che r è una *retrazione* di X su Y.

Esempi.

i) Un punto di uno spazio X è un retratto di X.

ii) Il sottospazio $Y = \{0,1\}$ di I non è un retratto di I: infatti I è connesso e Y non lo è.

2.3 DEFINIZIONE. *Un sottospazio Y di uno spazio X è un retratto per deformazione di X se esiste una retrazione r di X su Y omotopa relativamente a Y all'applicazione identica di X.*

In altri termini, Y è un retratto per deformazione di X se esiste un'applicazione continua $H : X \times I \to X$ avente le proprietà seguenti:

i) $H(x,0) = x$ per ogni $x \in X$,

ii) $H(x,1) = r(x) \in Y$ per ogni $x \in X$,

iii) $H(x,t) = x$ per ogni $x \in Y$ e ogni $t \in I$.

Si dice allora che r è una *retrazione per deformazione* di X su Y.

Di conseguenza:

i) se Y è un retratto per deformazione di X, l'inclusione $i : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica avente $r : X \to Y$ per inverso omotopico.

ii) Se Y è un retratto per deformazione di X e Z un retratto per deformazione di Y, Z è un retratto per deformazione di X.

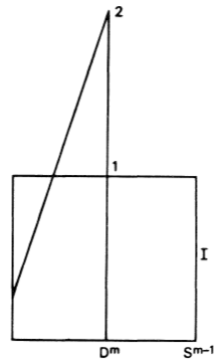
2.4 *Esempi.*

i) La sfera S^{m-1} è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^m - \{0\}$ (esempio iii) di 1.7).

ii) Il cerchio $S^1 \times \{0\}$ è un retratto per deformazione dei cilindri $S^1 \times \mathbb{R}$ e $S^1 \times I$.

iii) Sia F il chiuso $D^m \times \{0\} \cup S^{m-1} \times I$ di $D^m \times I$. L'applicazione $r : D^m \times I \to D^m \times I$ definita da

$$r(x,s) = \begin{cases} \left(\dfrac{2x}{2-s}, 0\right) & \text{per } \|x\| \leq \dfrac{2-s}{2}, \\ \left(\dfrac{x}{\|x\|}, \dfrac{s+2\|x\|-2}{\|x\|}\right) & \text{per } \|x\| \geq \dfrac{2-s}{2} \end{cases}$$



è una retrazione per deformazione di $D^m \times I$ su F.

Esercizi.

i) Siano a e b i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ del piano $\mathbb{R}^2$, e sia Y l'unione del cerchio di centro a e raggio 1 e del cerchio di centro b e raggio 1; Y è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 - \{a,b\}$.

ii) Il complementare di p punti distinti di $\mathbb{R}^2$ ha lo stesso tipo di omotopia di un disco con p buchi.

iii) Il nastro di Möbius e la banda di Möbius hanno lo stesso tipo di omotopia del cerchio S^1.

iv) Sia $X = \{(x,y) \in I \times I \mid x = 0, \text{ oppure } y = 0, \text{ oppure } y = 1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Lo spazio X è contrattile, ma il punto $(1,0)$ non è un retratto per deformazione di X.

3. Omotopia nei complessi cellulari

Si indica con I il segmento $[0,1]$ munito della sua decomposizione cellulare canonica: le celle di I sono $\{0\}$, $\{1\}$ e $]0,1[$.

Se K è un complesso cellulare localmente finito, anche il prodotto $K \times I$ è un complesso cellulare localmente finito, le cui celle sono della forma $e \times \{0\}$, $e \times \{1\}$ ed $e \times]0,1[$, dove e è una cella di K.

Trasponendo il corollario 2.4 del capitolo III, si ottiene:

3.1 LEMMA. *Sia F (risp. U) un chiuso (risp. aperto) di K, e sia Φ un'applicazione di $F \times I$ (risp. $U \times I$) in uno spazio X. Affinché Φ sia continua, è necessario e sufficiente che, per ogni cella e di K, la restrizione di Φ a $(F \cap \overline{e}) \times I$ (risp. $(U \cap \overline{e}) \times I$) sia continua.*

Esercizio: proprietà di estensione delle omotopie.

Sia L un sottocomplesso di K. Un'applicazione continua G di $K \times \{0\} \cup L \times I$ in uno spazio X si prolunga in un'applicazione continua di $K \times I$ in X. In altri termini, se $f : K \to X$ è un'applicazione continua, un'omotopia g_t di $g_0 = f|_L$ si estende in un'omotopia f_t di f (utilizzare l'esempio iii) di 2.4).

3.2 PROPOSIZIONE. *Sia K un complesso cellulare finito, e siano f e g due applicazioni continue della sfera S^{m-1} nello scheletro K^{m-1}. Se le applicazioni f e g sono omotope in K, i complessi cellulari $L = K \cup_f D^m$ e $M = K \cup_g D^m$ hanno lo stesso tipo di omotopia.*

Dimostrazione. Indichiamo con p (risp. q) la proiezione di $K \sqcup D^m$ su L (risp. M), e sia $H : S^{m-1} \times I \to K$ un'omotopia di f a g. Si possono definire:

– un'applicazione continua $\varphi : L \to M$ ponendo

$$\varphi(y) = \begin{cases} q(z) & \text{per } y = p(z),\ z \in K, \\ q(2tx) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1},\ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ q(H(x, 2-2t)) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1},\ \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$$

– un'applicazione continua $\psi : M \to L$ ponendo

$$\psi(y) = \begin{cases} p(z) & \text{per } y = q(z),\ z \in K, \\ p(2tx) & \text{per } y = q(tx),\ x \in S^{m-1},\ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ p(H(x, 2t-1)) & \text{per } y = q(tx),\ x \in S^{m-1},\ \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

L'applicazione $\psi \circ \varphi : L \to L$ è allora definita da

$$\psi(\varphi(y)) = \begin{cases} y & \text{per } y = p(z),\ z \in K, \\ p(4tx) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1},\ 0 \le t \le \frac{1}{4}, \\ p(H(x, 4t-1)) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1},\ \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2}, \\ p(H(x, 2-2t)) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1},\ \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Si può ottenere un'omotopia Φ di $\psi \circ \varphi$ all'applicazione identica di L ponendo:

$$\Phi(y,s) = \begin{cases} y & \text{per } y = p(z),\ z \in K, \\ p\left(\dfrac{4tx}{3s+1}\right) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1}, \\ & 0 \le t \le \dfrac{3s+1}{4}, \\ p(H(x, 4t-3s-1)) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1}, \\ & \dfrac{3s+1}{4} \le t \le \dfrac{s+1}{2}, \\ p(H(x, 2-2t)) & \text{per } y = p(tx),\ x \in S^{m-1}, \\ & \dfrac{s+1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Analogamente, l'applicazione $\varphi \circ \psi$ è omotopa all'applicazione identica di M. c.v.d.

Esempi.

i) Se K è connesso per archi, tutti i complessi cellulari ottenuti attaccando a K una cella di dimensione 1 hanno lo stesso tipo di omotopia.

ii) Se K è semplicemente connesso (cap. V, §4), tutti i complessi cellulari ottenuti attaccando a K una cella di dimensione 2 hanno lo stesso tipo di omotopia.

3.3 TEOREMA. *Un complesso cellulare localmente finito K è uno spazio localmente contrattile.*

In altri termini, ogni intorno U di un punto x di K contiene un intorno (aperto) contrattile di x.

Dimostrazione. Poiché K è localmente finito e la proprietà ha carattere locale, si può supporre che K sia un complesso cellulare finito di dimensione m.

Siano allora x un punto di K e U un intorno aperto di x. Se la cella e di K contenente x ha dimensione n, costruiremo per induzione una

successione $V_n, V_{n+1}, \dots, V_m$ di sottospazi di K, aventi per ogni p, $n \leq p \leq m$, le proprietà seguenti:

i) V_p è un intorno aperto di x in K^p;

ii) $\overline{V}_p \subset U$;

iii) V_p è contrattile.

Il sottospazio V_m sarà allora un intorno aperto contrattile di x contenuto in U.

Poiché e è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, si può trovare un intorno contrattile V_n di x in $U \cap e$, dunque in $U \cap K^n$, tale che $\overline{V}_n \subset U$.

Supponiamo allora costruito V_p, e siano $e_1, \dots, e_r$ le celle di dimensione $p+1$ di K la cui chiusura incontra V_p. Per ogni $i = 1, \dots, r$ sia $f_i : D^{p+1} \to K$ un'applicazione di attacco di e_i, e poniamo:

$$Q_i = f_i^{-1}(V_p) \subset S^p, \qquad F_i = f_i^{-1}(\overline{V}_p) \subset S^p, \qquad U_i = f_i^{-1}(U) \subset D^{p+1}.$$

Esiste un numero ε, $0 < \varepsilon < 1$, tale che, per ogni i, l'insieme $\widehat{F}_i = \{tx \in D^{p+1} \mid x \in F_i \text{ e } \varepsilon \leq t \leq 1\}$ sia contenuto in U_i.[IV.2] Se $\widehat{Q}_i = \{tx \mid x \in Q_i \text{ e } \varepsilon < t \leq 1\}$, $W_i = f_i(\widehat{Q}_i)$ è un aperto di $\overline{e}_i$ avente le due proprietà seguenti:

– $\overline{W}_i \subset U \cap \overline{e}_i$,

– $W_i \cap K^p = V_p \cap (\overline{e}_i - e_i)$.

Il sottospazio $V_{p+1} = V_p \cup W_1 \cup \dots \cup W_r$ è allora un intorno aperto di x in K^{p+1} la cui chiusura è contenuta in U e tale che $V_{p+1} \cap K^p = V_p$. Resta da mostrare che V_{p+1} è contrattile.

Ora, per ogni i, $tx \mapsto x$ è una retrazione per deformazione di $\widehat{Q}_i$ su Q_i che induce una retrazione per deformazione di W_i su $W_i \cap K^p$. Di conseguenza V_p è un retratto per deformazione di V_{p+1}, e V_{p+1} è contrattile. c.v.d.

3.4 COROLLARIO. *Un complesso cellulare localmente finito è uno spazio localmente connesso per archi.*

Di conseguenza, un complesso cellulare localmente finito connesso è connesso per archi.

Esercizio. Sia L un sottocomplesso cellulare di un complesso cellulare localmente finito K. Esiste un intorno aperto U di L in K tale che L sia un retratto per deformazione di U.

3.5 PROPOSIZIONE. *Un albero finito K è uno spazio contrattile.*

La dimostrazione si fa per induzione sul numero b_1 degli spigoli di K.

Se $b_1 = 1$, K è omeomorfo a I.

Supponiamo $b_1 > 1$, e sia s un vertice di K che sia estremo di un solo spigolo e di K (cap. III, cor. 3.11). Il sottocomplesso $L = K - (e \cup \{s\})$ ha $b_1 - 1$ spigoli ed è un retratto per deformazione di K. Di conseguenza K ha lo stesso tipo di omotopia di L, che è contrattile.

4. Omotopie nelle varietà differenziabili

Siano M e N due varietà differenziabili di dimensioni rispettivamente m e n.

4.1 DEFINIZIONE. *Siano f e g due applicazioni differenziabili di M in N. L'applicazione f è differenziabilmente omotopa a g se esiste un'applicazione differenziabile $H : M \times \mathbb{R} \to N$ tale che $H(x,t) = f(x)$ per $t \leq 0$ e $H(x,t) = g(x)$ per $t \geq 1$.*

Si dice che H è un'*omotopia differenziabile* di f a g. La restrizione di H a $M \times I$ è allora un'omotopia di f a g.

4.2 PROPOSIZIONE. *La relazione «f è differenziabilmente omotopa a g» è una relazione di equivalenza nell'insieme delle applicazioni differenziabili di M in N.*

Si potrà dunque dire di due applicazioni differenziabili di M in N che sono differenziabilmente omotope.

Dimostrazione. Questa relazione è manifestamente riflessiva e simmetrica. Se ora H è un'omotopia differenziabile di f a g, e K un'omotopia differenziabile di g a h, l'applicazione $L : M \times \mathbb{R} \to N$ definita da

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,3t) & \text{per } t < 2/3, \\ K(x,3t-2) & \text{per } t > 1/3 \end{cases}$$

è un'omotopia differenziabile di f a h. Ciò mostra che la relazione è transitiva. c.v.d.

4.3 DEFINIZIONE. *Siano f e g due applicazioni differenziabili e proprie di M in N. L'applicazione f è differenziabilmente e propriamente omotopa a g se esiste un'applicazione differenziabile $H : M \times \mathbb{R} \to N$ avente le proprietà seguenti:*

i) $H(x,t) = f(x)$ per $t \leq 0$;

ii) $H(x,t) = g(x)$ per $t \geq 1$;

iii) la restrizione di H a $M \times I$ è un'applicazione propria.

Si verifica come in precedenza che la relazione «f è differenziabilmente e propriamente omotopa a g» è una relazione di equivalenza nell'insieme delle applicazioni differenziabili e proprie di M in N.

4.4 DEFINIZIONE. *Un'applicazione continua f di M in N è differenziabile su un chiuso F di M se esiste un intorno aperto di F sul quale f è differenziabile.*

4.5 TEOREMA. *Sia f un'applicazione continua di M in N differenziabile su un chiuso F di M. Esiste un'omotopia H relativamente a F di f a un'applicazione differenziabile g di M in N. Inoltre, se f è propria, si può scegliere H propria.*

In particolare (per $F = \varnothing$):

4.6 PROPOSIZIONE. *Ogni applicazione continua di M in N è omotopa a un'applicazione differenziabile.*

4.7 PROPOSIZIONE. *Ogni applicazione continua e propria di M in N è propriamente omotopa a un'applicazione differenziabile e propria.*

La dimostrazione del teorema 4.5 utilizza i lemmi seguenti:

4.8 LEMMA. *Esiste un'applicazione differenziabile $\xi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ tale che*

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } \|x\| \leq 1, \\ 1 & \text{per } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Dimostrazione. La funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{per } t > 0, \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

è differenziabile. Si può allora prendere

$$\xi(x) = \frac{h(\|x\| - 1)}{h(\|x\| - 1) + h(2 - \|x\|)}. \qquad \text{c.v.d.}$$

4.9 LEMMA. *Sia U un aperto relativamente compatto di $\mathbb{R}^m$, e sia V un aperto di $\mathbb{R}^m$ contenente $\overline{U}$. Esiste una funzione differenziabile $\zeta : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ tale che*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \overline{U}, \\ 0 & \text{per } x \notin V. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si possono trovare una successione finita $a_1, \ldots, a_p$ di punti di $\mathbb{R}^m$ e una successione finita $r_1, \ldots, r_p$ di numeri positivi tali che le palle chiuse $D_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - a_i\| \leq 2r_i\}$ siano contenute in V e le palle aperte $B_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - a_i\| < r_i\}$ ricoprano $\overline{U}$. Si pone allora

$$\zeta(x) = 1 - \xi\left(\frac{x - a_1}{r_1}\right) \cdots \xi\left(\frac{x - a_p}{r_p}\right). \qquad \text{c.v.d.}$$

4.10 LEMMA. *Esistono una famiglia numerabile $(U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ di carte locali di M e una famiglia numerabile $(V_p, \psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ di carte locali di N aventi le proprietà seguenti:*

i) U_p (risp. V_p) è un aperto relativamente compatto di M (risp. N);

ii) φ_p (risp. ψ_p) è un diffeomorfismo di U_p (risp. V_p) su $\mathbb{R}^m$ o H^m (risp. $\mathbb{R}^n$ o H^n);

iii) $f(U_p) \subset V_p$;

iv) $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di M;

v) $M = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p$, dove $D_p = \varphi_p^{-1}(D^m)$.

Inoltre, se f è propria, si può supporre che, per ogni compatto K di N, l'insieme degli interi $p \in \mathbb{N}$ tali che $K \cap V_p \neq \varnothing$ sia finito.

Dimostrazione. Sia (W_i, θ_i) una famiglia di carte locali di N aventi le proprietà seguenti:

i) W_i è un aperto relativamente compatto di N;

ii) (W_i) è un ricoprimento aperto localmente finito di N;

iii) θ_i è un diffeomorfismo di W_i su $\mathbb{R}^n$ o H^n.

Si può trovare una famiglia numerabile $(U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ di carte locali di M aventi le proprietà seguenti:

i) U_p è un aperto relativamente compatto di M;

ii) $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di M;

iii) φ_p è un diffeomorfismo di U_p su $\mathbb{R}^m$ o H^m;

iv) $M = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p$, dove $D_p = \varphi_p^{-1}(D^m)$;

v) per ogni p esiste un indice $i(p)$ tale che $f(U_p) \subset W_{i(p)} = V_p$.

Le famiglie (U_p, φ_p) e (V_p, ψ_p), dove $\psi_p = \theta_{i(p)}$, hanno allora le proprietà richieste. c.v.d.

Dimostrazione del teorema 4.5. Siano, con le notazioni del lemma 4.10, $A_0 = F$ e $A_p = A_{p-1} \cup D_p$ per $p \geq 1$.

A partire dall'applicazione continua $H_0 : (x,t) \mapsto f(x)$ di $M \times I$ in N, costruiremo per induzione una successione $(H_p)_{p\geq 0}$ di applicazioni continue di $M \times I$ in N aventi le proprietà seguenti:

i) $H_p = H_{p-1}$ su $A_{p-1} \times I \subset M \times I$;

ii) $H_p(x,0) = f(x)$;

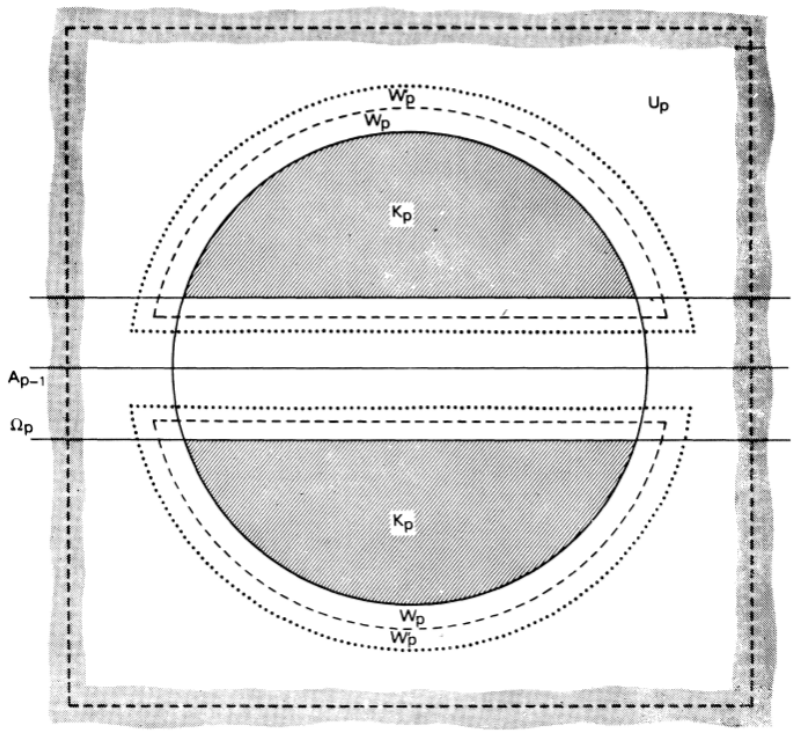
iii) $x \mapsto H_p(x,1)$ è differenziabile su A_p.

Supponiamo che l'applicazione $x \mapsto H_{p-1}(x,1)$ sia differenziabile su un

intorno aperto Ω_p di A_{p-1}, e sia $K_p = D_p - (D_p \cap \Omega_p)$. Si possono trovare due aperti W_p e W'_p di M aventi le proprietà seguenti:

i) $K_p \subset W_p \subset \overline{W}_p \subset W'_p \subset \overline{W'_p} \subset U_p$;

ii) $\overline{W'_p} \cap A_{p-1} = \varnothing$.



Sia allora (lemma 4.9) ζ_p una funzione differenziabile su U_p, uguale a 1 su $\overline{W}_p$ e a 0 su $U_p - W'_p$. L'applicazione H_p di $M \times I$ in N definita da

$$H_p(x,t) = \begin{cases} H_{p-1}(x,t) & \text{per } x \notin \overline{W'_p}, \\ \psi_p^{-1}[(1 - t\zeta_p(x))\psi_p(H_{p-1}(x,t))] & \text{per } x \in U_p \end{cases}$$

soddisfa le condizioni richieste (in particolare $x \mapsto H_p(x,1)$ è differenziabile su A_p).

Poiché il ricoprimento $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ è localmente finito, si può definire un'applicazione continua H di $M \times I$ in N mediante

$$H(x,t) = \lim_{p\to\infty} H_p(x,t).$$

Questa applicazione è allora un'omotopia relativamente a F di f a un'applicazione differenziabile $g : x \mapsto H(x,1)$ di M in N.

Supponiamo ora f propria. Se K è un compatto di N, l'insieme P degli interi p tali che $V_p \cap K \neq \varnothing$ è finito. Si ha allora

$$H^{-1}(K) \subset \left(\bigcup_{p \in P} U_p \right) \times I;$$

di conseguenza H è propria. c.v.d.

4.11 COROLLARIO. *Due applicazioni differenziabili f e g di M in N (continuamente) omotope sono differenziabilmente omotope.*

Dimostrazione. Sia α un'applicazione continua di $\mathbb{R}$ in $[0,1]$, uguale a 0 per $t \leq \frac{1}{4}$ e a 1 per $t \geq \frac{3}{4}$.

Se $H : M \times I \to N$ è un'omotopia di f a g, l'applicazione $H' : (x,t) \mapsto H(x,\alpha(t))$ di $M \times \mathbb{R}$ in N è differenziabile sul chiuso $F = M \times (]-\infty,0] \cup [1,+\infty[)$: essa verifica

$$H'(x,t) = f(x) \quad \text{per } t \leq 0, \qquad H'(x,t) = g(x) \quad \text{per } t \geq 1.$$

Esiste dunque un'applicazione differenziabile $K : M \times \mathbb{R} \to N$ uguale a H' su F: K è allora un'omotopia differenziabile di f a g. c.v.d.

Si verifica in modo analogo il risultato seguente:

4.12 COROLLARIO. *Due applicazioni differenziabili proprie e propriamente omotope di M in N sono differenziabilmente e propriamente omotope.*

Esercizio. Sia M^m una varietà differenziabile di dimensione m. Per $n > m$, ogni applicazione continua di M^m nella sfera S^n è omotopa a un'applicazione costante (l'immagine di un'applicazione differenziabile di M^m in S^n ha misura nulla).

In particolare, per $n > 1$, ogni applicazione continua del cerchio S^1 in S^n è omotopa a un'applicazione costante (cap. VI, cor. 4.3).

5. Spazi di applicazioni

Se X e Y sono due spazi topologici, si indica con

– $\mathscr{C}(X,Y)$ l'insieme delle applicazioni continue di X in Y,

– $W(C,U)$, per $C \subset X$ e $U \subset Y$, l'insieme delle applicazioni $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ tali che $f(C) \subset U$.

5.1 DEFINIZIONE. *La topologia della convergenza compatta su $\mathscr{C}(X,Y)$ è la topologia generata dai sottoinsiemi $W(C,U)$, dove C è un compatto di X e U un aperto di Y.*

Ogni aperto di $\mathscr{C}(X,Y)$ è dunque un'unione (finita o no) di intersezioni finite di insiemi $W(C,U)$.

5.2 *Esercizi.*

i) Se la topologia di Y è definita da una metrica, la topologia della convergenza compatta coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di X.

ii) Se Y è separato, $\mathscr{C}(X,Y)$ è separato.

iii) Se $(U_i)_{i\in I}$ è una famiglia di aperti di Y che genera la topologia di Y, gli aperti $W(K,U_i)$, K compatto di X, generano la topologia della convergenza compatta su $\mathscr{C}(X,Y)$.

iv) Se Y è separato, la corrispondenza che a $y \in Y$ associa l'applicazione costante di X su y è un omeomorfismo di Y su un sottospazio chiuso (indicato ancora con Y) di $\mathscr{C}(X,Y)$.

Inoltre, per ogni punto $x \in X$, l'applicazione $f \mapsto f(x)$ è una retrazione di $\mathscr{C}(X,Y)$ su Y.

v) Se X è localmente compatto, l'applicazione $(x,f) \mapsto f(x)$ di $X \times \mathscr{C}(X,Y)$ in Y è continua.

Si considerano ora tre spazi topologici X, Y e Z, e si suppone che X e Y siano separati.

Per ogni applicazione continua $f : X \times Y \to Z$ e per ogni punto y di Y, si indica con f_y l'applicazione parziale $x \mapsto f(x,y)$ di X in Z. Si ha allora:

5.3 LEMMA. *Per ogni applicazione $f \in \mathscr{C}(X \times Y,Z)$, l'applicazione $\Phi_f : y \mapsto f_y$ di Y in $\mathscr{C}(X,Z)$ è continua.*

5.4 LEMMA. *L'applicazione $\Phi : f \mapsto \Phi_f$ è un'applicazione continua di $\mathscr{C}(X \times Y,Z)$ in $\mathscr{C}(Y,\mathscr{C}(X,Z))$.*

Le verifiche di questi due lemmi non presentano difficoltà.

5.5 LEMMA. *Se X è localmente compatto, l'applicazione*

$$\Phi : \mathscr{C}(X \times Y,Z) \longrightarrow \mathscr{C}(Y,\mathscr{C}(X,Z))$$

è una biiezione.

Essa è manifestamente iniettiva.

D'altra parte, se f è un'applicazione di Y in $\mathscr{C}(X,Z)$, $\psi(f) : (x,y) \mapsto f(y)(x)$ è un'applicazione continua di $X \times Y$ in Z

tale che $\Phi(\psi(f)) = f$: infatti $\psi(f)$ è la composta delle applicazioni $(x,y) \mapsto (x, f(y))$ di $X \times Y$ in $X \times \mathscr{C}(X,Z)$ e $(x,g) \mapsto g(x)$ di $X \times \mathscr{C}(X,Z)$ in Z (esercizio v) di 5.2).

5.6 TEOREMA. *Se X è localmente compatto, Φ è un omeomorfismo di $\mathscr{C}(X \times Y, Z)$ su $\mathscr{C}(Y, \mathscr{C}(X,Z))$.*

Poiché Φ è continua e biiettiva, basta verificare che sia aperta.

Ora si ha $\Phi(W(C_1 \times C_2, U)) = W(C_2, W(C_1, U))$; basta dunque mostrare che gli aperti $W(C_1 \times C_2, U)$, con C_1 compatto di X, C_2 compatto di Y e U aperto di Z, generano la topologia della convergenza compatta su $\mathscr{C}(X \times Y, Z)$. Si lascia questa verifica per esercizio (l'ipotesi di compattezza locale di X non interviene, del resto, in questo punto).

5.7 COROLLARIO. *Sia X uno spazio localmente compatto. Affinché due applicazioni continue f e g di X in uno spazio Y siano omotope, è necessario e sufficiente che esista un cammino in $\mathscr{C}(X,Y)$ che congiunga f a g.*

Infatti $\mathscr{C}(X \times I, Y)$ è omeomorfo a $\mathscr{C}(I, \mathscr{C}(X,Y))$.

5.8 COROLLARIO. *Se X è uno spazio localmente compatto, l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni di X in Y è uguale all'insieme delle componenti connesse per archi di $\mathscr{C}(X,Y)$.*

CAPITOLO V

Gruppo fondamentale

Si indica qui con X uno spazio topologico.

1. Omotopia dei cammini

Si ricorda (cap. I, §2) che un cammino in X è un'applicazione continua $c : I \to X$ del segmento $I = [0,1]$ in X; $c(0)$ è l'*origine* del cammino c e $c(1)$ il suo *estremo finale*.

Per ogni punto x di X si indica con c_x il cammino costante di origine ed estremo finale x: $c_x(t) = x$ per ogni $t \in I$.

Se $c : I \to X$ è un cammino che congiunge x a y, si indica con $\bar{c}$ il cammino di origine y ed estremo finale x definito da $\bar{c}(t) = c(1-t)$: $\bar{c}$ è il cammino inverso di c.

Infine, se c congiunge x a y e c' congiunge y a z, si indica con cc' il cammino di origine x ed estremo finale z definito da

$$(cc')(t) = \begin{cases} c(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ c'(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$$

cc' è il cammino composto di c e c'.

1.1 DEFINIZIONE. *Due cammini c e c' in X aventi la stessa origine x e lo stesso estremo finale y sono omotopi se le applicazioni c e c' sono omotope relativamente agli estremi $\{0,1\}$ del segmento $I = [0,1]$.*

In altri termini, c e c' sono omotopi se esiste un'applicazione continua H del quadrato $I \times I$ in X con le proprietà seguenti:

i) $H(t,0) = c(t)$ e $H(t,1) = c'(t)$ per ogni $t \in I$;

ii) $H(0,s) = x$ e $H(1,s) = y$ per ogni $s \in I$.

Si ha dunque (cap. IV, §2.1):

1.2 PROPOSIZIONE. *La relazione di omotopia è una relazione di equivalenza nell'insieme dei cammini che congiungono x a y.*

Si chiamano allora classi di omotopia di cammini di origine x ed estremo finale y le classi di equivalenza di questa relazione.

1.3 TEOREMA. *Siano c e γ due cammini omotopi che congiungono x a y, e siano c' e γ' due cammini omotopi che congiungono y a z. Allora:*

i) *i cammini inversi $\bar{c}$ e $\bar{\gamma}$ sono omotopi;*

ii) *i cammini composti cc' e $\gamma\gamma'$ sono omotopi.*

Si può dunque dire che la relazione di omotopia è compatibile con il passaggio all'inverso e la composizione dei cammini.

Dimostrazione. Sia F (risp. G) un'omotopia da c a γ (risp. da c' a γ'). L'applicazione $(t,s) \mapsto F(1-t,s)$ è un'omotopia da $\bar{c}$ a $\bar{\gamma}$. L'applicazione $H : I \times I \to X$ definita da

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(2t-1,s) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

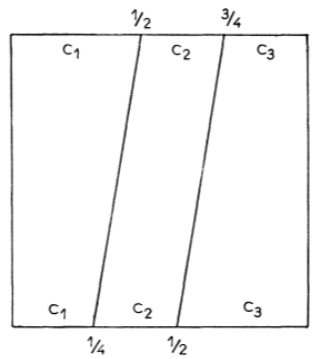
è un'omotopia da cc' a $\gamma\gamma'$. c.v.d.

1.4 TEOREMA. *Siano c_1 un cammino che congiunge x a y, c_2 un cammino che congiunge y a z e c_3 un cammino che congiunge z a u. I cammini $(c_1c_2)c_3$ e $c_1(c_2c_3)$ sono omotopi.*

Si potrà dunque dire che la composizione dei cammini, che non è associativa, è «omotopicamente associativa».

Dimostrazione. Sia F l'applicazione di $I \times I$ in X definita da

$$F(t,s) = \begin{cases} c_1\left(\dfrac{4t}{1+s}\right) & 0 \le t \le \dfrac{1+s}{4}, \\ c_2(4t-s-1) & \dfrac{1+s}{4} \le t \le \dfrac{2+s}{4}, \\ c_3\left(\dfrac{4t-s-2}{2-s}\right) & \dfrac{2+s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$



Si ha

$$F(t,0) = [(c_1c_2)c_3](t), \quad F(t,1) = [c_1(c_2c_3)](t),$$
$$F(0,s) = x, \qquad\qquad F(1,s) = u.$$

Di conseguenza F è un'omotopia da $(c_1c_2)c_3$ a $c_1(c_2c_3)$.[V.1] c.v.d.

Si dimostrerebbe in modo analogo la proposizione seguente:

1.5 PROPOSIZIONE. *Sia (c_i), $i = 1,\dots,n$, una famiglia di cammini in X tali che l'origine di c_{i+1} sia l'estremo finale di c_i, $1 \le i \le n-1$, e sia*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

una successione crescente di numeri di I. Il cammino c definito da

$$c(t) = c_i\left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) \quad \text{per } t_{i-1} \le t \le t_i,$$

è omotopo al cammino composto $c_1(c_2(c_3(\cdots)))$.

Inoltre, se γ_i, $i = 1,\dots,n$, è un cammino omotopo a c_i, il cammino γ definito da

$$\gamma(t) = \gamma_i\left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) \quad \text{per } t_{i-1} \le t \le t_i,$$

è omotopo a c.

Si potrà dunque parlare (a meno di omotopia) del cammino composto $c_1c_2\cdots c_n$ senza precisare le posizioni delle parentesi né il modo in cui si suddivide l'intervallo I.

1.6 TEOREMA. *Sia c un cammino che congiunge x a y. I cammini cc_y e c_xc sono entrambi omotopi a c.*

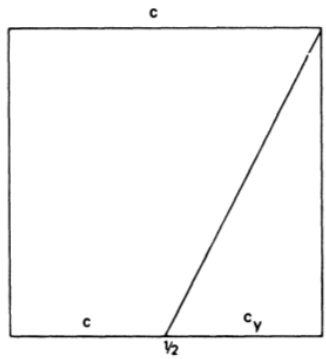
Si potrà dunque dire che i cammini costanti sono «omotopicamente elementi neutri» per la composizione dei cammini.

Dimostrazione. Sia F l'applicazione di $I \times I$ in X definita da

$$F(t,s) = \begin{cases} c\left(\dfrac{2t}{1+s}\right) & 0 \le t \le \dfrac{1+s}{2}, \\ y & \dfrac{1+s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Si ha $F(t,0) = (cc_y)(t)$, $F(t,1) = c(t)$, $F(0,s) = x$, $F(1,s) = y$.

Di conseguenza F è un'omotopia da cc_y a c. Si costruisce allo stesso modo un'omotopia da $c_x c$ a c.



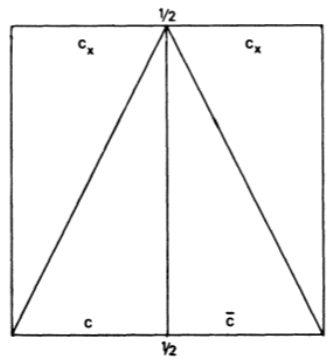
c.v.d.

1.7 TEOREMA. *Sia c un cammino che congiunge x a y. I cammini $c\bar{c}$ e $\bar{c}c$ sono rispettivamente omotopi ai cammini costanti c_x e c_y.*

Si potrà dunque dire che $\bar{c}$ è «omotopicamente inverso» di c.

Dimostrazione. Sia F l'applicazione di $I \times I$ in X definita da

$$F(t,s) = \begin{cases} x & 0 \le t \le \dfrac{s}{2}, \\ c(2t-s) & \dfrac{s}{2} \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ c(2-2t-s) & \dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{2-s}{2}, \\ x & \dfrac{2-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$



Si ha $F(t,0) = (c\bar{c})(t)$, $F(t,1) = F(0,s) = F(1,s) = x$.

Di conseguenza F è un'omotopia da $c\bar{c}$ a c_x. Si costruisce allo stesso modo un'omotopia da $\bar{c}c$ a c_y. c.v.d.

1.8 Si possono ora riassumere così i risultati precedenti:

Sia $\Pi_{x,y}(X)$ l'insieme delle classi di omotopia di cammini in X di origine x ed estremo finale y. Se c congiunge x a y, si indica con $[c]$ la sua classe di omotopia in $\Pi_{x,y}(X)$.

Sia $\Pi(X)$ l'unione dei $\Pi_{x,y}(X)$ al variare di x e y in X. Il teorema 1.3 permette di definire un'applicazione dell'unione

$$\bigcup_{x,y,z\in X} \Pi_{x,y}(X) \times \Pi_{y,z}(X) \subset \Pi(X) \times \Pi(X)$$

in $\Pi(X)$. Si dice che questa applicazione è una legge di composizione in $\Pi(X)$ (benché non sia ovunque definita), e si scrive questa legge moltiplicativamente. Si ha dunque $[c][c'] = [cc']$.

Questa legge di composizione possiede le proprietà seguenti:

i) *associatività*: i composti $(\alpha\beta)\gamma$ e $\alpha(\beta\gamma)$ sono definiti simultaneamente e, quando sono definiti, sono uguali (teor. 1.4);

ii) *elementi neutri*: per ogni coppia di punti x e y di X, $[c_x]$ (risp. $[c_y]$) è elemento neutro a sinistra (risp. a destra) per gli elementi di $\Pi_{x,y}(X)$ (teor. 1.6);

iii) *elementi inversi*: $[\bar{c}]$ è l'inverso di $[c]$: se c congiunge x a y, $[c][\bar{c}] = [c_x]$ e $[\bar{c}][c] = [c_y]$ (teor. 1.7).

Queste proprietà presentano alcune somiglianze con gli assiomi che definiscono la struttura di gruppo. Per questo si dice che $\Pi(X)$ è il gruppoide fondamentale, o il gruppoide di Poincaré, dello spazio X.

2. Gruppo fondamentale

2.1 DEFINIZIONE. *Sia x un punto di X. Un laccio di base x in X è un cammino di origine ed estremo finale x in X.*

Si indica con $\pi_1(X,x)$ l'insieme $\Pi_{x,x}(X)$ delle classi di omotopia di lacci di base x in X. Riprendendo i risultati di 1.8, si può enunciare:

2.2 TEOREMA. *La composizione dei cammini induce una struttura di gruppo sull'insieme $\pi_1(X,x)$ delle classi di omotopia di lacci di base x in X.*

Per questa struttura di gruppo $[c_x]$ è l'elemento neutro e $[\bar{c}]$ l'inverso di $[c]$.

2.3 PROPOSIZIONE. *Sia c un cammino di origine x ed estremo finale y in X. L'applicazione $\alpha_c : [\gamma] \mapsto [c\gamma\bar{c}]$ è un isomorfismo del gruppo $\pi_1(X,y)$ sul gruppo $\pi_1(X,x)$ che dipende soltanto dalla classe di omotopia di c.*

Se c' è un secondo cammino che congiunge x a y, gli isomorfismi α_c e $\alpha_{c'}$ sono coniugati in $\pi_1(X,x)$.

Dimostrazione. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
\alpha_c([\gamma]) &= [c][\gamma][\bar{c}],\\
\alpha_c([\gamma][\gamma']) &= [c][\gamma][\gamma'][\bar{c}]\\
&= ([c][\gamma][\bar{c}])([c][\gamma'][\bar{c}])\\
&= \alpha_c([\gamma])\alpha_c([\gamma']),\\
\alpha_{\bar{c}} &= (\alpha_c)^{-1};\\
\alpha_{c'}([\gamma]) &= [c'][\gamma][\bar{c}']\\
&= [c'\bar{c}]\,\alpha_c([\gamma])\,[c'\bar{c}]^{-1}.
\end{aligned}$$

c.v.d.

In particolare, se $\pi_1(X,x)$ è commutativo, l'isomorfismo α_c di $\pi_1(X,y)$ su $\pi_1(X,x)$ è indipendente dalla scelta del cammino c che congiunge x a y.

2.4 COROLLARIO. *Se x e y sono in una stessa componente connessa per archi di X, i gruppi $\pi_1(X,x)$ e $\pi_1(X,y)$ sono isomorfi.*

Sono inoltre canonicamente isomorfi se $\pi_1(X,x)$ è commutativo.

2.5 DEFINIZIONE. *Il gruppo $\pi_1(X,x)$ si chiama gruppo fondamentale, o gruppo di Poincaré, di X nel punto x.*

Quando X è connesso per archi tutti i suoi gruppi fondamentali sono isomorfi. Benché in generale questi gruppi non siano canonicamente isomorfi, si parla tuttavia del gruppo fondamentale di X, che si indica con $\pi_1(X)$ (senza riferimento al punto base).

3. Gruppo fondamentale e applicazioni continue

Sia f un'applicazione continua di X in uno spazio Y. Se c è un cammino che congiunge x a y in X, $f \circ c$ congiunge $f(x)$ a $f(y)$ in Y. La composizione $c \mapsto f \circ c$ è allora compatibile:

i) con l'omotopia dei cammini: se $[c] = [c']$, $[f \circ c] = [f \circ c']$;

ii) con la composizione dei cammini: $f \circ (cc') = (f \circ c)(f \circ c')$.

L'applicazione f induce dunque un'applicazione $f_* : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ tale che $f_*(\alpha\beta) = f_*(\alpha)f_*(\beta)$ (quando il prodotto $\alpha\beta$ è definito). Di conseguenza:

3.1 PROPOSIZIONE. *Un'applicazione continua $f : X \to Y$ induce un omomorfismo f_* del gruppo fondamentale $\pi_1(X,x)$ nel gruppo fondamentale $\pi_1(Y, f(x))$.*

Inoltre:

i) se f è l'applicazione identica di X, f_* è l'isomorfismo identico di $\pi_1(X,x)$;

ii) se g è un'applicazione continua di Y in uno spazio Z, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

3.2 COROLLARIO: INVARIANZA TOPOLOGICA DEL GRUPPO FONDAMENTALE. *Se f è un omeomorfismo di X su Y, f_* è un isomorfismo di $\pi_1(X,x)$ su $\pi_1(Y, f(x))$, e si ha $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.*

Per gli spazi connessi per archi il gruppo fondamentale è dunque un invariante topologico: due spazi connessi per archi e omeomorfi hanno gruppi fondamentali isomorfi.

3.3 PROPOSIZIONE. *Sia C la componente connessa per archi di x in X. L'iniezione canonica $i : C \to X$ induce un isomorfismo i_* di $\pi_1(C,x)$ su $\pi_1(X,x)$.*

Infatti ogni laccio di base x in X è contenuto in C; l'omomorfismo i_* è dunque suriettivo. D'altra parte, se un laccio c di base x (in C) è omotopo in X al laccio costante c_x, l'immagine dell'omotopia da c a c_x è contenuta in C. Di conseguenza c è già omotopo a c_x in C; e pertanto i_* è iniettivo.

3.4 TEOREMA. *Sia f un'equivalenza omotopica da X a uno spazio Y. L'omomorfismo f_* è un isomorfismo di $\pi_1(X,x)$ su $\pi_1(Y, f(x))$.*

La dimostrazione del teorema 3.4 utilizza il lemma seguente:

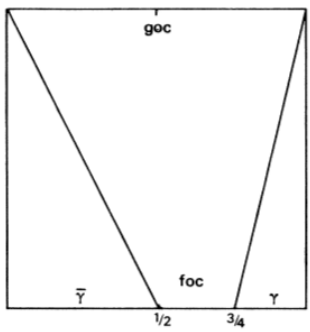
3.5 LEMMA. *Siano f e g due applicazioni continue e omotope di X in uno spazio Y, $F : X \times I \to Y$ un'omotopia da f a g e γ il cammino in Y (di origine $f(x)$ ed estremo finale $g(x)$) definito da $t \mapsto F(x,t)$. Si ha allora $g_* = \alpha_{\bar\gamma} \circ f_*$.*

Dimostrazione del lemma 3.5. Sia c un laccio di base x in X, e sia G l'applicazione di $I \times I$ in Y[V.2] definita da

$$G(t,s) = \begin{cases} \bar\gamma(2t) = \gamma(1-2t) & 0 \le t \le \dfrac{1-s}{2}, \\ F\left(c\left(\dfrac{4t+2s-2}{3s+1}\right), s\right) & \dfrac{1-s}{2} \le t \le \dfrac{s+3}{4}, \\ \gamma(4t-3) & \dfrac{s+3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

Si ha

$$G(t,0) = [\bar{\gamma}(f \circ c)\gamma](t),$$
$$G(t,1) = (g \circ c)(t),$$
$$G(0,s) = G(1,s) = g(x).$$



Di conseguenza G è un'omotopia da $\bar{\gamma}(f \circ c)\gamma$ a $g \circ c$, e

$$\alpha_{\bar{\gamma}}(f_*([c])) = g_*([c]).$$

c.v.d.

Dimostrazione del teorema 3.4. Sia $g : Y \to X$ un inverso omotopico di f: le applicazioni $g \circ f$ e $f \circ g$ sono rispettivamente omotope alle applicazioni identiche di X e di Y.

Esiste dunque un cammino γ di origine $g(f(x))$ ed estremo finale x in X tale che $(g \circ f)_* = \alpha_\gamma$ (lemma 3.5); e di conseguenza f_* è iniettivo e g_* suriettivo.

Analogamente g_* è iniettivo e f_* suriettivo. c.v.d.

Si può del resto osservare che g_* non è in generale l'inverso di f_*.

3.6 COROLLARIO: INVARIANZA OMOTOPICA DEL GRUPPO FONDAMENTALE. *Per gli spazi connessi per archi il gruppo fondamentale è un invariante del tipo di omotopia: due spazi connessi per archi aventi lo stesso tipo di omotopia hanno gruppi fondamentali isomorfi.*

3.7 COROLLARIO. *Uno spazio contraibile ha gruppo fondamentale banale.*

Infatti uno spazio contraibile ha lo stesso tipo di omotopia di un punto, dunque gruppo fondamentale isomorfo a quello di uno spazio ridotto a un punto. Ma in un tale spazio vi è un solo laccio: il laccio costante!

4. Spazi semplicemente connessi

Si indica con p la proiezione $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ del segmento $I = [0,1]$ sul cerchio S^1, e con e il punto $p(0) = p(1)$ di S^1.

Sia x un punto di X. La corrispondenza $\hat{c} \mapsto c = \hat{c} \circ p$[V.3] stabilisce una biiezione tra l'insieme delle applicazioni continue $\hat{c}$ di S^1 in X tali che $\hat{c}(e) = x$ e l'insieme dei lacci di base x in X.

4.1 PROPOSIZIONE. *Sia c un laccio di base x in X e sia $\hat{c}$ l'applicazione corrispondente di S^1 in X. Le proprietà seguenti sono equivalenti:*

i) *c è omotopo al laccio costante c_x;*

ii) *$\hat{c}$ è omotopa relativamente a $\{e\}$ all'applicazione costante di S^1 su x;*

iii) *$\hat{c}$ è omotopa a un'applicazione costante;*

iv) *$\hat{c}$ si estende a un'applicazione continua del disco D^2 in X.*

Dimostrazione. i $\Longleftrightarrow$ ii) Sia H un'omotopia da c al laccio costante c_x. Si ha $H(t,0) = c(t)$ e $H(t,1) = H(0,s) = H(1,s) = x$. L'applicazione H è dunque compatibile con la proiezione q del quadrato $I \times I$ sul cilindro $S^1 \times I$, e determina un'applicazione continua $\hat{H}$ di $S^1 \times I$ in X tale che $\hat{H}(z,0) = \hat{c}(z)$ e $\hat{H}(z,1) = \hat{H}(e,s) = x$; $\hat{H}$ è dunque un'omotopia relativamente a $\{e\}$ da $\hat{c}$ all'applicazione costante di S^1 su x.

Viceversa, se $\hat{H}$ è una tale omotopia, $H = \hat{H} \circ q$ è un'omotopia da c a c_x.

ii $\Longrightarrow$ iii) Ovviamente.

iii $\Longrightarrow$ iv) Sia $F : S^1 \times I \to X$ un'omotopia da $\hat{c}$ all'applicazione costante di S^1 su un punto y di X. L'applicazione $C : D^2 \to X$ definita da

$$C(z) = \begin{cases} y & 0 \le |z| \le \dfrac{1}{2}, \\ F\left(\dfrac{z}{|z|}, 2-2|z|\right) & \dfrac{1}{2} \le |z| \le 1, \end{cases}$$

è allora un'estensione continua di $\hat{c}$ al disco D^2.

iv $\Longrightarrow$ ii) Sia C un'estensione continua di $\hat{c}$ a D^2. L'applicazione $F : S^1 \times I \to X$ definita da

$$F(z,t) = C((1-t)z + te)$$

è un'omotopia relativamente a $\{e\}$ da $\hat{c}$ all'applicazione costante di S^1 su x. c.v.d.

Esercizi.

Siano $\hat{c}$ e $\hat{\gamma}$ due applicazioni continue di S^1 in X tali che $\hat{c}(e) = \hat{\gamma}(e) = x$, e siano c e γ i lacci di base x corrispondenti. Se $\hat{c}$ e $\hat{\gamma}$ sono omotope relativamente a $\{e\}$, le classi di omotopia $[c]$ e $[\gamma]$ sono uguali in $\pi_1(X,x)$.

Se $\hat{c}$ e $\hat{\gamma}$ sono omotope, le classi di omotopia $[c]$ e $[\gamma]$ sono coniugate in $\pi_1(X,x)$.

4.2 DEFINIZIONE. *Uno spazio X è semplicemente connesso se è connesso per archi e se tutti i suoi gruppi fondamentali $\pi_1(X,x)$, $x \in X$, sono banali.*

È allora sufficiente che uno solo di questi gruppi fondamentali sia banale (cor. 2.4).

Esempi.

i) Uno spazio contraibile è semplicemente connesso (cor. 3.7).

In particolare lo spazio $\mathbb{R}^m$, la palla D^m e, più in generale, tutti i sottospazi convessi di $\mathbb{R}^m$ sono semplicemente connessi.

ii) Uno spazio avente lo stesso tipo di omotopia di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso (teor. 3.4).

Riformulando la proposizione 4.1, si ottiene:

4.3 PROPOSIZIONE. *Affinché uno spazio X connesso per archi sia semplicemente connesso è necessario e sufficiente che ogni applicazione continua del cerchio S^1 in X si estenda a un'applicazione continua del disco D^2 in X.*

4.4 COROLLARIO. *Un albero K è uno spazio contraibile.*

Dimostrazione. Sia s un vertice di K. Per ogni vertice r di K esiste un albero finito $L \subset K$ contenente r e s (cap. III, lemma 3.3 e proposizione 3.6). Si può dunque definire un'applicazione continua $H_0 : K^0 \times I \to K$ avente le proprietà seguenti:

$$H_0(r,0) = r \quad \text{e} \quad H_0(r,1) = s \quad \text{per ogni } r \in K^0,$$
$$H_0(s,t) = s \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Estenderemo ora H_0 a un'omotopia $H : K \times I \to K$ dall'applicazione identica di K all'applicazione costante di K su s. A tal fine (cap. IV, lemma 3.1) basta estendere indipendentemente H_0 all'aderenza $\bar{e}$ di ogni spigolo e di K.

Sia dunque e uno spigolo di K di estremi r e r', e sia $L \subset K$ un albero contenente e, $H_0(\{r\} \times I)$ e $H_0(\{r'\} \times I)$. Il prodotto $\bar{e} \times I$ è omeomorfo al quadrato $I \times I$, e l'applicazione H è determinata sul suo bordo dalle condizioni seguenti:

$$H(r,t) = H_0(r,t), \quad H(r',t) = H_0(r',t) \quad (t \in I),$$
$$H(x,0) = x, \quad H(x,1) = s \quad (x \in \bar{e}).$$

Ma, poiché L è contraibile (cap. IV, prop. 3.5), esso è semplicemente connesso; e pertanto H si estende a un'applicazione continua di $\bar{e} \times I$ in L. c.v.d.

4.5 COROLLARIO. *Un albero è uno spazio semplicemente connesso.*

4.6 PROPOSIZIONE. *Se X è uno spazio connesso per archi, le due proprietà seguenti sono equivalenti:*

i) *X è semplicemente connesso;*

ii) *due cammini in X aventi la stessa origine e lo stesso estremo finale sono omotopi.*

Dimostrazione. Supponiamo X semplicemente connesso, e siano c e c' due cammini in X aventi la stessa origine x e lo stesso estremo finale y. Si ha $[\bar{c}'c'] = [c_y]$ e $[c\bar{c}'] = [c_x]$. Di conseguenza

$$[c] = [c][\bar{c}'c'] = [c\bar{c}'][c'] = [c_x][c'] = [c'].$$

Viceversa, la condizione ii) implica che ogni laccio di base x sia omotopo al laccio costante c_x; dunque che X sia semplicemente connesso. c.v.d.

5. Gruppo fondamentale dei gruppi topologici

Sia G un gruppo topologico di cui si indica con e l'elemento neutro.

Se c e c' sono due cammini in G, l'applicazione $c \cdot c' : t \mapsto c(t)c'(t)$ (prodotto nel gruppo G) è un cammino in G: $c \cdot c'$ è il cammino prodotto di c e c'.

In particolare, se c e c' sono due lacci di base e, il loro prodotto $c \cdot c'$ è ancora un laccio di base e.

5.1 PROPOSIZIONE. *Siano c e c' due cammini in G,*[V.4] *e siano γ e γ' due cammini omotopi rispettivamente a c e c'. I cammini prodotti $c \cdot c'$ e $\gamma \cdot \gamma'$ sono omotopi.*

Infatti, se F (risp. G) è un'omotopia da c a γ (risp. da c' a γ'), l'applicazione $H : (t,s) \mapsto F(t,s)G(t,s)$ è un'omotopia da $c \cdot c'$ a $\gamma \cdot \gamma'$.

5.2 PROPOSIZIONE. *Siano c e c' due lacci di base e in G. I lacci $c \cdot c'$, cc', $c'c$ e $c' \cdot c$ sono omotopi.*

La legge di composizione nel gruppo fondamentale $\pi_1(G,e)$ è dunque indotta anche dal prodotto dei lacci.

Dimostrazione. Siano F un'omotopia da c a cc_e, G un'omotopia da c a $c_e c$, H un'omotopia da c' a $c_e c'$, K un'omotopia da c' a $c'c_e$.

Allora $F \cdot H$ è un'omotopia da $c \cdot c'$ a $(cc_e) \cdot (c_e c') = cc'$;

$G \cdot K$ è un'omotopia da $c \cdot c'$ a $(c_e c) \cdot (c'c_e) = c'c$;

$K \cdot G$ è un'omotopia da $c' \cdot c$ a $(c'c_e) \cdot (c_e c) = c'c$. c.v.d.

5.3 COROLLARIO. *Il laccio $c^{-1} : t \mapsto c(t)^{-1}$ è omotopo al laccio inverso $\bar{c} : t \mapsto c(1-t)$.*

Si deduce immediatamente dalla proposizione 5.2 la conseguenza seguente:

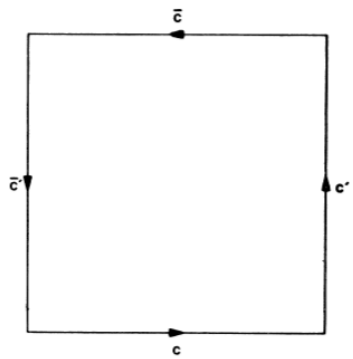
5.4 TEOREMA. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(G,e)$ è commutativo.*

Se G è connesso per archi, tutti i gruppi fondamentali $\pi_1(G,g)$ sono dunque anch'essi commutativi e canonicamente isomorfi.

Se G non è connesso per archi, la componente connessa per archi G_0 di e in G è un sottogruppo di G, e ogni componente connessa per archi di G è omeomorfa a G_0. Tutti i gruppi fondamentali $\pi_1(G,g)$, $g \in G$, sono dunque ancora commutativi e isomorfi.

Osservazione. Si può anche dimostrare direttamente che $\pi_1(G,e)$ è commutativo verificando che ogni commutatore $\alpha = [c][c'][\bar{c}][\bar{c}']$ è uguale all'elemento unità. Sia γ il laccio definito da

$$\gamma(t) = \begin{cases} c(4t) & 0 \le t \le \dfrac{1}{4}, \\ c'(4t-1) & \dfrac{1}{4} \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ c(3-4t) & \dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{3}{4}, \\ c'(4-4t) & \dfrac{3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$



Questo laccio γ, che rappresenta il commutatore α, determina un'applicazione continua φ del bordo del quadrato $I \times I$ in G.[V.4] Si può allora estendere φ al quadrato ponendo $\Phi(t,s) = c(t)c'(s)$. Di conseguenza il laccio γ è omotopo al laccio costante c_e (prop. 4.1).

6. Spazi di cammini e di lacci

Si munisce lo spazio $\mathscr{C}(I,X)$ dei cammini in X della topologia della convergenza compatta (cap. IV, §5), e si indica con

$$E_x \subset \mathscr{C}(I,X) \quad \text{l'insieme dei cammini in } X \text{ di origine } x,$$

$$\Omega_x \subset E_x \quad \text{l'insieme dei lacci di base } x \text{ in } X.$$

Esercizi.

i) Lo spazio E_x è contraibile.

ii) Sia π l'applicazione $c \mapsto (c(0), c(1))$ di $\mathscr{C}(I,X)$ in $X \times X$. Affinché X sia localmente connesso per archi è necessario e sufficiente che π sia aperta.

iii) La composizione dei lacci è un'applicazione continua di $\Omega_x \times \Omega_x$ in Ω_x.

L'applicazione $c \mapsto \bar{c}$ è un omeomorfismo di Ω_x su sé stesso.

iv) Le applicazioni $(c_1,c_2,c_3) \mapsto (c_1c_2)c_3$ e $(c_1,c_2,c_3) \mapsto c_1(c_2c_3)$ di $\Omega_x \times \Omega_x \times \Omega_x$ in Ω_x sono omotope.

Le applicazioni $c \mapsto cc_x$ e $c \mapsto c_xc$ di Ω_x in sé stesso sono entrambe omotope all'applicazione identica di Ω_x.

Le applicazioni $c \mapsto c\bar{c}$ e $c \mapsto \bar{c}c$ di Ω_x in sé stesso sono entrambe omotope all'applicazione costante di Ω_x su c_x.

Tenuto conto di queste proprietà, si dice che la composizione dei lacci definisce su Ω_x una struttura di H-spazio (una struttura in cui gli assiomi dei gruppi sono verificati a meno di omotopia).

v) La struttura di H-spazio di Ω_x induce su $\pi_0(\Omega_x)$ una struttura di gruppo, e questa struttura è identica a quella del gruppo $\pi_1(X,x)$ (cap. IV, cor. 5.8).

CAPITOLO VI

Calcolo del gruppo fondamentale

1. Prodotti e retratti

1.1 PROPOSIZIONE. *Siano X e Y due spazi topologici, p_1 (risp. p_2) la proiezione del prodotto $X \times Y$ su X (risp. Y), e (x,y) un punto di $X \times Y$. L'applicazione $(p_1)_* \times (p_2)_*$ è un isomorfismo di $\pi_1(X \times Y,(x,y))$ su $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.*

Dimostrazione. L'omomorfismo $(p_1)_* \times (p_2)_*$ è suriettivo: infatti, se c_1 è un laccio di base x in X e c_2 un laccio di base y in Y, $\gamma = c_1 \times c_2$ è un laccio di base (x,y) in $X \times Y$ tale che

$$((p_1)_* \times (p_2)_*)[\gamma] = ([c_1],[c_2]).$$

È anche iniettivo: sia infatti c un laccio di base (x,y) in $X \times Y$ per il quale esistano un'omotopia H_1 da $p_1 \circ c$ a c_x e un'omotopia H_2 da $p_2 \circ c$ a c_y. L'applicazione $H = H_1 \times H_2$ è allora un'omotopia da c a $c_{(x,y)}$. c.v.d.

Si può osservare che, se i_1 (risp. i_2) indica l'iniezione $a \mapsto (a,y)$ (risp. $b \mapsto (x,b)$) di X (risp. Y) in $X \times Y$, l'applicazione

$$([c_1],[c_2]) \longmapsto ((i_1)_*[c_1])((i_2)_*[c_2])$$

è l'isomorfismo inverso di $(p_1)_* \times (p_2)_*$.

1.2 COROLLARIO. *Se Y è semplicemente connesso, la proiezione $p_1 : X \times Y \to X$ induce un isomorfismo $(p_1)_*$ di $\pi_1(X \times Y,(x,y))$ su $\pi_1(X,x)$.*

L'isomorfismo inverso di $(p_1)_*$ è allora $(i_1)_*$.

1.3 COROLLARIO. *Se X e Y sono semplicemente connessi, anche il loro prodotto $X \times Y$ è semplicemente connesso.*

1.4 PROPOSIZIONE. *Siano Y un sottospazio di uno spazio X, i l'iniezione di Y in X e x un punto di Y. Se Y è un retratto di X, l'omomorfismo $i_* : \pi_1(Y,x) \to \pi_1(X,x)$ è iniettivo.*

Sia infatti r una retrazione di X su Y. Il composto $r \circ i$ è l'applicazione identica di Y. Quindi $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ è l'automorfismo identico di $\pi_1(Y,x)$; ciò implica che i_* sia iniettivo.

1.5 COROLLARIO. *Se X è uno spazio semplicemente connesso e $Y \subset X$ è un retratto di X, anche Y è semplicemente connesso.*

1.6 PROPOSIZIONE. *Siano Y un sottospazio di uno spazio X, i l'iniezione di Y in X e x un punto di Y. Se Y è un retratto per deformazione di X, l'omomorfismo $i_* : \pi_1(Y,x) \to \pi_1(X,x)$ è un isomorfismo.*

Infatti (cap. IV, §2.3) l'iniezione $i : Y \to X$ è allora un'equivalenza omotopica; quindi $i_* : \pi_1(Y,x) \to \pi_1(X,x)$ è un isomorfismo (cap. V, teor. 3.4).

Esercizi.

Si può anche dimostrare direttamente la proposizione 1.6 usando 1.4 per l'iniettività di i_* e l'esistenza di un'omotopia da r all'applicazione identica di X per la suriettività di i_*.

1.7 Esempi.

i) Sia x un punto della sfera S^{m-1}. L'iniezione di S^{m-1} in $\mathbb{R}^m - \{0\}$ induce un isomorfismo di $\pi_1(S^{m-1},x)$ su $\pi_1(\mathbb{R}^m - \{0\},x)$.

ii) Gli spazi $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$ e S^{m-n-1}, $n \leq m-2$, hanno gruppi fondamentali isomorfi ($\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$ è omeomorfo al prodotto $(\mathbb{R}^{m-n} - \{0\}) \times \mathbb{R}^n$).

iii) Gli spazi $\mathbb{C}^2 - \mathbb{C}$ e S^1 hanno gruppi fondamentali isomorfi ($\mathbb{C}^2 - \mathbb{C}$ è omeomorfo a $(\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$).

2. Gruppo fondamentale del cerchio S^1

Ricordiamo che $p : \mathbb{R} \to S^1$ indica la proiezione $t \mapsto \exp(2\pi i t)$, e che e è il punto $p(0)$ di S^1.

Per ogni intero n si indica con γ_n il laccio di base e in S^1 definito da $\gamma_n(t) = p(nt)$, $t \in I$. L'applicazione corrispondente $\hat{\gamma}_n : S^1 \to S^1$ è allora $z \mapsto z^n$ (cap. V, §4).

2.1 TEOREMA. *La corrispondenza $n \mapsto [\gamma_n]$ è un isomorfismo di $\mathbb{Z}$ su $\pi_1(S^1,e)$.*

L'applicazione identica di S^1 su sé stesso determina dunque un generatore di $\pi_1(S^1,e)$; il generatore opposto corrisponde alla simmetria di S^1 rispetto all'asse reale.

La dimostrazione del teorema 2.1 utilizza i due lemmi seguenti (questi

due lemmi sono in realtà casi particolari delle proposizioni 2.1 e 2.2 del capitolo IX). Il teorema è allora una conseguenza immediata delle proposizioni 2.4 e 2.5.

2.2 LEMMA. *Sia $c : I \to S^1$ un laccio di base e in S^1. Esiste uno e un solo cammino $\tilde{c}$ in $\mathbb{R}$ avente origine 0 e proiezione c ($\tilde{c}(0) = 0$ e $p \circ \tilde{c} = c$).*

L'estremo finale $\tilde{c}(1)$ di $\tilde{c}$ è allora un intero chiamato grado del laccio c. In particolare il grado di γ_n è n.

Dimostrazione. Per ogni numero reale a, la proiezione $p : \mathbb{R} \to S^1$ determina un omeomorfismo dell'intervallo $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ sull'aperto $S^1 - \{-p(a)\}$. Di conseguenza due applicazioni aventi le proprietà dell'enunciato sono uguali (se assumono lo stesso valore in un punto coincidono in un intorno di quel punto). Questo dimostra l'unicità del cammino $\tilde{c}$.

Indichiamo ora con q l'omeomorfismo dell'aperto $S^1 - \{-e\}$ sull'intervallo $]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$ inverso della restrizione di p a tale intervallo, e sia n un intero positivo tale che $|c(t) - c(t')| \leq 1$ per $|t - t'| \leq 1/n$ (continuità uniforme). Si ha allora $c(t)\overline{c(t')} \neq -e$ per $|t - t'| \leq 1/n$; si può definire un'applicazione $\tilde{c}$ di I in $\mathbb{R}$ mediante

$$\tilde{c}(t) = q\big(c(t)\overline{c(j/n)}\big) + \sum_{i=1}^{j} q\big(c(i/n)\overline{c((i-1)/n)}\big)$$

per $j/n \leq t \leq (j+1)/n$. Questa applicazione è continua e verifica $\tilde{c}(0) = 0$ e $p \circ \tilde{c} = c$. c.v.d.

Si dimostra in modo analogo:

2.3 LEMMA. *Sia H un'applicazione continua di $I \times I$ in S^1 tale che $H(0,0) = e$. Esiste una e una sola applicazione continua $\tilde{H}$ di $I \times I$ in $\mathbb{R}$ avente le proprietà seguenti:*

i) $\tilde{H}(0,0) = 0$;

ii) $p \circ \tilde{H} = H$.

Si dice che $\tilde{c}$ e $\tilde{H}$ sono i sollevamenti di c e H.

2.4 PROPOSIZIONE. *Affinché due lacci c e γ di base e in S^1 siano omotopi è necessario e sufficiente che abbiano lo stesso grado.*

Dimostrazione. Se c e γ hanno lo stesso grado, i loro sollevamenti $\tilde{c}$ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso estremo finale. Sono dunque due cammini omotopi di $\mathbb{R}$ (cap. V, prop. 4.6), e quindi c e γ sono due lacci omotopi.

Viceversa, se H è un'omotopia da c a γ e $\tilde{H}$ è il sollevamento di H,

$\tilde{H}(\{1\}\times I)$ è ridotto a un punto (è contenuto in $\mathbb{Z}$); di conseguenza i sollevamenti $\tilde{c}: t\mapsto \tilde{H}(t,0)$ e $\tilde{\gamma}: t\mapsto \tilde{H}(t,1)$ hanno lo stesso estremo finale. c.v.d.

2.5 PROPOSIZIONE. *Siano c e γ due lacci di base e in S^1. Il grado del laccio composto $c\gamma$ è la somma dei gradi di c e γ.*

Infatti, se $\tilde{c}$ e $\tilde{\gamma}$ sono i sollevamenti di c e γ, l'applicazione $\sigma: I\to\mathbb{R}$ definita da

$$\sigma(t)=\begin{cases}\tilde{c}(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ \tilde{\gamma}(2t-1)+\tilde{c}(1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

è un sollevamento di $c\gamma$.

Di conseguenza:

L'applicazione di $\pi_1(S^1,e)$ in $\mathbb{Z}$ che alla classe di omotopia $[c]$ di un laccio c associa il grado di c è un isomorfismo avente per inversa l'applicazione $n\mapsto[\gamma_n]$.

2.6 COROLLARIO. *Il gruppo fondamentale del toro T^m è isomorfo a $\mathbb{Z}^m$.*

Questo corollario si ottiene per induzione su m usando la proposizione 1.1. Una base di $\pi_1(T^m,(e,\dots,e))$ è allora data dalle m iniezioni

$$z\mapsto(z,e,\dots,e),\quad z\mapsto(e,z,e,\dots,e),\quad \dots,\quad z\mapsto(e,\dots,e,z)$$

di S^1 in T^m.

Esercizi.

i) Se il laccio $c: I\to S^1$ è dato da un'applicazione differenziabile di I in $\mathbb{R}^2$ avente componenti $x(t)$ e $y(t)$, il grado di c è uguale all'integrale[VI.1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}\,dt.$$

ii) Sia $A\in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ una matrice a coefficienti interi e sia $h: T^n\to T^n$ l'applicazione corrispondente (cap. II, §1.9). La matrice dell'omomorfismo $h_*:\pi_1(T^n)\to\pi_1(T^n)$ nella base di 2.6 è la matrice A.

iii) I gruppi fondamentali dei cilindri $S^1\times I$ e $S^1\times\mathbb{R}$, del nastro di Möbius e della banda di Möbius sono isomorfi a $\mathbb{Z}$.

iv) Sia X il complementare in $\mathbb{C}^2$ di due rette complesse concorrenti. Il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

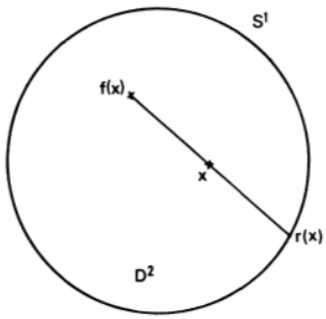
2.7 PROPOSIZIONE. *Il cerchio S^1 non è un retratto del disco D^2.*

Infatti (cor. 1.5) D^2 è semplicemente connesso e S^1 non lo è.

2.8 TEOREMA DI BROUWER. *Ogni applicazione continua f del disco D^2 in sé stesso ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia un'applicazione continua senza punti fissi di D^2 in sé stesso: $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$.

Si può allora definire una retrazione r di D^2 su S^1 associando a x l'intersezione con S^1 della semiretta di origine $f(x)$ passante per x. Ciò è impossibile. c.v.d.



3. Applicazione: teoria dell'indice

Sia f un'applicazione continua del cerchio S^1 nel piano $\mathbb{R}^2$, e sia x un punto di $\mathbb{R}^2 - f(S^1)$. Si indica con $\hat{f}_x : S^1 \to S^1$ l'applicazione definita da

$$\hat{f}_x(z) = \frac{f(z)-x}{|f(z)-x|} \left(\frac{f(e)-x}{|f(e)-x|} \right)^{-1}.$$

Questa applicazione $\hat{f}_x$ corrisponde a un laccio f_x di base e in S^1.

3.1 DEFINIZIONE. *L'indice del punto x rispetto all'applicazione continua $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ è il grado del laccio f_x.*

Si indica questo indice con $I_x(f)$.

Esempi.

i) Se f è l'applicazione costante di S^1 su un punto y di $\mathbb{R}^2$, l'indice $I_x(f)$ è definito per ogni punto $x \neq y$ ed è nullo.

ii) Se f è un'applicazione di S^1 in $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, l'indice $I_0(f)$ è uguale al grado di f.

3.2 PROPOSIZIONE. *Se x e y sono nella stessa componente connessa per archi di $\mathbb{R}^2 - f(S^1)$, gli indici $I_x(f)$ e $I_y(f)$ sono uguali.*

Infatti, se c è un cammino che congiunge x a y in $\mathbb{R}^2 - f(S^1)$, l'applicazione

$$(z,t) \longmapsto \frac{f(z)-c(t)}{|f(z)-c(t)|}\left(\frac{f(e)-c(t)}{|f(e)-c(t)|}\right)^{-1}$$

è un'omotopia relativamente a $\{e\}$ da $\hat{f}_x$ a $\hat{f}_y$.

3.3 PROPOSIZIONE. *Sia x un punto di $\mathbb{R}^2$ e siano f e g due applicazioni continue di S^1 in $\mathbb{R}^2 - \{x\}$. Se f e g sono omotope in $\mathbb{R}^2 - \{x\}$, gli indici $I_x(f)$ e $I_x(g)$ sono uguali.*

Infatti, se $F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2 - \{x\}$ è un'omotopia da f a g, l'applicazione

$$(z,t) \longmapsto \frac{F(z,t)-x}{|F(z,t)-x|}\left(\frac{F(e,t)-x}{|F(e,t)-x|}\right)^{-1}$$

è un'omotopia relativamente a $\{e\}$ da $\hat{f}_x$ a $\hat{g}_x$.

3.4 COROLLARIO. *Per ogni applicazione continua $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^2$ tale che, per ogni punto $x \in \mathbb{R}^2 - K$, l'indice $I_x(f)$ sia definito e nullo.*

Infatti, se F è un'estensione continua di f al disco D^2 (cap. V, prop. 4.3), si può prendere $K = F(D^2)$.

Esercizi.

i) Se l'applicazione $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile e ha componenti $x(t)$ e $y(t)$, e se 0 non appartiene a $f(S^1)$, si ha[VI.1]

$$I_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{xy' - yx'}{x^2+y^2}\,dt.$$

ii) Se $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ è una curva di Jordan in $\mathbb{R}^2$ (cap. II, §5.4), si ha $I_x(f) = \pm 1$ se x è interno a $f(S^1)$ e $I_x(f) = 0$ se x non è interno a $f(S^1)$ (la curva f è omotopa in $\mathbb{R}^2 - \{x\}$ a una curva poligonale).

3.5 TEOREMA DI D'ALEMBERT. *Ogni polinomio di grado n, $n \geq 1$, a coefficienti complessi ha una radice.*

Dimostrazione. Sia $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi, e supponiamo che P non abbia radici.

Per ogni $r \geq 0$ (risp. $r > 0$) indichiamo con f_r (risp. g_r) l'applicazione continua di S^1 in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ definita da $z \mapsto P(rz)$ (risp. $z \mapsto r^n z^n$).

Ogni applicazione f_r è omotopa in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ all'applicazione costante f_0. Di conseguenza tutti gli indici $I_0(f_r)$ sono nulli.

Analogamente ogni applicazione g_r è omotopa in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ all'applicazione g_1. Di conseguenza (teor. 2.1) tutti gli indici $I_0(g_r)$ sono uguali a n.

Ora, quando r è maggiore di $c = 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$, si ha $|g_r(z) - f_r(z)| < r^n$ per ogni $z \in S^1$. Quindi per $r \geq c$ le applicazioni f_r e g_r sono omotope in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (l'applicazione $(z,t) \mapsto (1-t)f_r(z) + tg_r(z)$ è una tale omotopia), e si ha $I_0(f_r) = I_0(g_r)$. Ciò è assurdo. c.v.d.

3.6 Esercizio: indice di Poincaré.

Sia $x \mapsto X(x)$ un campo di vettori sul piano $\mathbb{R}^2$, e sia c un'applicazione continua del cerchio S^1 nell'aperto $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid X(x) \neq 0\}$. L'applicazione

$$\frac{X(c(z))}{|X(c(z))|} \left(\frac{X(c(e))}{|X(c(e))|} \right)^{-1}$$

corrisponde a un laccio c_X di base e in S^1. Il grado $I_X(c)$ di c_X si chiama allora *indice del campo di vettori X su c*.

i) Se $c : S^1 \to U$ e $c' : S^1 \to U$ sono omotope in U, gli indici $I_X(c)$ e $I_X(c')$ sono uguali. Se $c : S^1 \to U$ è costante, l'indice è nullo.

ii) Se c è una curva integrale di X, l'indice $I_X(c)$ è uguale a ± 1.

iii) Se c è una curva di Jordan il cui interno è contenuto in U, l'indice $I_X(c)$ è nullo.

iv) Un campo di vettori senza singolarità non possiede curve integrali compatte (periodiche): teorema di Poincaré.

4. Teorema di Van Kampen

Si considera in questo paragrafo uno spazio X connesso per archi, unione di due aperti non vuoti connessi per archi X_1 e X_2, la cui intersezione $X_0 = X_1 \cap X_2$ è anch'essa non vuota e connessa per archi.

Sia x un punto di X_0. Si indicano con

— $\pi_1(X_a)$, $a = 0,1,2$, e $\pi_1(X)$ i gruppi fondamentali $\pi_1(X_a,x)$ e $\pi_1(X,x)$;

— j_a, $a = 1,2$, l'omomorfismo di $\pi_1(X_0)$ in $\pi_1(X_a)$ indotto dall'iniezione di X_0 in X_a;

— k_a, $a = 0,1,2$, l'omomorfismo di $\pi_1(X_a)$ in $\pi_1(X)$ indotto dall'iniezione di X_a in X.

Si ha dunque il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(X_1) \\ {\scriptstyle j_2}\downarrow & \searrow^{k_0} & \downarrow{\scriptstyle k_1} \\ \pi_1(X_2) & \xrightarrow[k_2]{} & \pi_1(X) \end{array}$$

4.1 PROPOSIZIONE. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ è generato dalle immagini di k_1 e k_2.*

Dimostrazione. Sia c un laccio di base x in X. Si può trovare (cap. IX, lemma 1.3) una successione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$ tale che, per ogni $i = 0,1,\ldots,n$, il cammino c_i definito dalla restrizione di c a $[t_i, t_{i+1}]$, ossia $c_i(t) = c((t_{i+1} - t_i)t + t_i)$, abbia immagine contenuta in uno dei due aperti X_1 e X_2 e origine $c_i(0) = c(t_i)$ in X_0.

Per ogni $i = 1,\ldots,n$ si può trovare un cammino γ_i che congiunge x a $c(t_i)$ in X_0. Si ha allora

$$\begin{aligned} &= [c_0] \cdots [c_n] \\ &= [c_0][\bar{\gamma}_1\gamma_1][c_1] \cdots [\bar{\gamma}_n\gamma_n][c_n] \\ &= [c_0\bar{\gamma}_1][\gamma_1 c_1 \bar{\gamma}_2] \cdots [\gamma_n c_n], \end{aligned}$$

e ciascuno dei lacci $c_0\bar{\gamma}_1$, $\gamma_1 c_1 \bar{\gamma}_2$, …, $\gamma_n c_n$ è contenuto in uno dei due aperti X_1 e X_2.c.v.d.

Esercizi.

Il gruppo fondamentale di una varietà topologica compatta connessa possiede un sistema finito di generatori.

4.2 COROLLARIO. *Se X_1 e X_2 sono semplicemente connessi, anche $X = X_1 \cup X_2$ è semplicemente connesso.*

4.3 COROLLARIO. *Per $m \geq 2$ la sfera S^m è semplicemente connessa.*

Infatti, se n e s sono i punti $(0,\dots,0,1)$ e $(0,\dots,0,-1)$ di S^m, gli aperti $X_1 = S^m - \{n\}$ e $X_2 = S^m - \{s\}$ sono omeomorfi a $\mathbb{R}^m$ e hanno intersezione omeomorfa a $\mathbb{R}^m - \{0\}$, dunque connessa per archi per $m \geq 2$.

Esempi. Gli spazi $\mathbb{R}^m - \{0\}$, $m \geq 3$, e $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$, $n \leq m-3$, sono semplicemente connessi (esempi 1.7).

4.4 COROLLARIO. *Per $m \geq 2$ la sfera S^m non è omeomorfa al cerchio S^1.*

Più precisamente: per $m \geq 2$ la sfera S^m non ha il tipo di omotopia del cerchio S^1.

4.5 COROLLARIO. *Per $m \geq 3$ un aperto di $\mathbb{R}^m$ non è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^2$.*

Dimostrazione. Siano X un aperto di $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, Y un aperto di $\mathbb{R}^2$, h un omeomorfismo di X su Y e x un punto di X.

Siano W una palla aperta di centro $y = h(x)$ contenuta in Y, V una palla aperta di centro x contenuta in X e tale che $h(V) \subset W$, e W' una palla aperta di centro y contenuta in $h(V)$.

Indichiamo allora con z un punto di $W' - \{y\}$, con i l'iniezione di W' in $h(V)$ e con j l'iniezione di $h(V)$ in W.

I gruppi $\pi_1(W' - \{y\}, z)$ e $\pi_1(W - \{y\}, z)$ sono isomorfi a $\mathbb{Z}$, e l'applicazione $(j \circ i)_*$ tra questi gruppi è un isomorfismo. Ciò è impossibile, poiché l'omomorfismo $i_* : \pi_1(W' - \{y\}, z) \to \pi_1(h(V) - \{y\}, z)$ è banale ($h(V) - \{y\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m - \{0\}$, dunque semplicemente connesso). c.v.d.

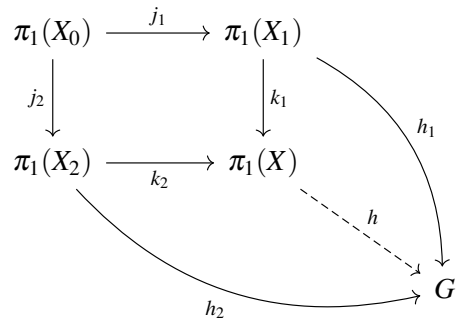
Esercizi.

Per $m \geq 2$ un aperto di $\mathbb{R}^m$ non è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}$.

Questi due risultati sono in realtà casi particolari del teorema di invarianza del dominio: per $n \neq m$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$ (cap. XIV, teor. 4.1). Si intendono aperti non vuoti.

4.6 TEOREMA DI VAN KAMPEN. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ possiede la proprietà seguente: se h_a, $a = 1,2$, è un omomorfismo di $\pi_1(X_a)$ in un gruppo G, e se $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, esiste uno e un solo omomorfismo h di $\pi_1(X)$ in G tale che $h \circ k_a = h_a$, $a = 1,2$.*

Il teorema di Van Kampen esprime dunque la commutatività del diagramma seguente:



L'unicità di h è una conseguenza immediata della proposizione 4.1.

L'esistenza di h sarà dimostrata nel capitolo X usando la teoria dei rivestimenti. La dimostrazione sarà peraltro data sotto alcune ipotesi locali: X localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso (cap. IX, def. 5.2). Queste ipotesi saranno però soddisfatte in tutte le applicazioni del teorema di Van Kampen (X sarà un complesso cellulare localmente finito, oppure una varietà topologica, ecc.).

4.7 COROLLARIO. *Se $X_0 = X_1 \cap X_2$ è semplicemente connesso, il gruppo fondamentale di X è isomorfo al prodotto libero dei gruppi $\pi_1(X_1)$ e $\pi_1(X_2)$.*

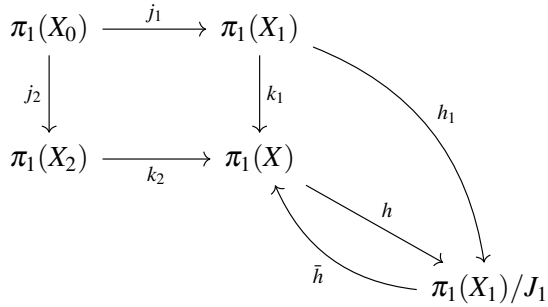
Infatti (teorema 4.1 dell'appendice), se $\pi_1(X_0) = 1$, la proprietà 4.6 caratterizza il prodotto libero $\pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

4.8 COROLLARIO. *Se X_2 è semplicemente connesso e J_1 è il sottogruppo normale di $\pi_1(X_1)$ generato dall'immagine di j_1, il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo quoziente $\pi_1(X_1)/J_1$.*

Più precisamente l'omomorfismo $k_1 : \pi_1(X_1) \to \pi_1(X)$ induce un isomorfismo di $\pi_1(X_1)/J_1$ su $\pi_1(X)$.

Dimostrazione. Poiché il nucleo di k_1 contiene J_1 ($k_1 \circ j_1 = k_2 \circ j_2$), k_1 induce un omomorfismo $\bar{h}$ di $\pi_1(X_1)/J_1$ in $\pi_1(X)$. D'altra parte (teor. 4.6),

la proiezione h_1 di $\pi_1(X_1)$ su $\pi_1(X_1)/J_1$ determina un omomorfismo h di $\pi_1(X)$ in $\pi_1(X_1)/J_1$ tale che $h \circ k_1 = h_1$.



Si ha allora

$$(\bar{h} \circ h) \circ k_1 = \bar{h} \circ h_1 = k_1;$$

di conseguenza (unicità in 4.6) $\bar{h} \circ h$ è l'automorfismo identico di $\pi_1(X)$. L'omomorfismo h è dunque iniettivo; è anche suriettivo ($h \circ k_1 = h_1$). Pertanto è un isomorfismo di $\pi_1(X)$ su $\pi_1(X_1)/J_1$, e $\bar{h}$ è il suo inverso. c.v.d.

Esercizi.

i) Sia E l'unione in $\mathbb{R}^3$ di un punto e di una retta non passante per tale punto. Il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - E$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

ii) Il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - S^1$ ($S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$) è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Sia E l'unione in $\mathbb{R}^3$ del cerchio S^1 ($S^1 \subset \mathbb{R}^2$) e di una retta Δ che non incontra S^1. Il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - E$ è

— un gruppo libero su due generatori se Δ non incontra il disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$;

— un gruppo abeliano libero su due generatori se Δ incontra il disco D^2 (osservare, usando l'esempio 1.10 del capitolo II, che $\mathbb{R}^3 - E$ ha lo stesso tipo di omotopia del toro T^2).

iv) Il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^2$ di p punti distinti è un gruppo libero su p generatori (cap. II, §5.6).

Di conseguenza, per $p \neq q$, un disco con p buchi non è omeomorfo a un disco con q buchi (corollario 3.4 dell'appendice).

5. Gruppo fondamentale dei complessi cellulari

Sia K un complesso cellulare localmente finito e sia x un punto di K. Si ha immediatamente:

5.1 LEMMA. *Per ogni elemento $\alpha \in \pi_1(K,x)$ esistono un sottocomplesso finito L di K contenente x e un elemento $\beta \in \pi_1(L,x)$ tali che $i_*(\beta) = \alpha$, dove i indica l'iniezione di L in K.*

5.2 LEMMA. *Sia L un sottocomplesso finito di K contenente x e sia α un elemento di $\pi_1(L,x)$ tale che $i_*(\alpha) = 1$, dove i indica l'iniezione di L in K. Esiste un sottocomplesso finito M di K contenente L tale che, indicando con j l'iniezione di L in M, si abbia $j_*(\alpha) = 1$.*

Esercizi.

Il gruppo fondamentale $\pi_1(K,x)$ è isomorfo al limite induttivo dei gruppi fondamentali dei sottocomplessi finiti di K contenenti x.

5.3 TEOREMA. *Sia K un complesso cellulare localmente finito e sia x un punto dello scheletro K^2. L'iniezione i di K^2 in K induce un isomorfismo di $\pi_1(K^2,x)$ su $\pi_1(K,x)$.*

Dimostrazione. I lemmi 5.1 e 5.2 permettono di ricondursi al caso di un complesso finito K. Si può inoltre supporre K connesso.

La dimostrazione si fa allora per induzione sul numero p di celle di K, osservando che, se $p = 1$, K è ridotto a un punto.

Supponiamo $p > 1$ e sia e una cella di dimensione massima m di K. Se $m \leq 2$, K è uguale a K^2 e il teorema è banalmente verificato. Se $m > 2$, siano z un punto di e e $U = K - \{z\}$.

L'aperto U contiene lo scheletro K^2; è anche connesso per archi ($e - \{z\}$ lo è per $m > 2$). Inoltre $K - e$ è un retratto per deformazione di U. Di conseguenza l'iniezione $K^2 \to U$ induce un isomorfismo di $\pi_1(K^2,x)$ su $\pi_1(U,x)$.

D'altra parte e e $U \cap e$ sono aperti semplicemente connessi di K. Si deduce dunque (cor. 4.8) che l'iniezione $U \to K$ induce un isomorfismo di $\pi_1(U,x)$ su $\pi_1(K,x)$. c.v.d.

5.4 COROLLARIO. *Lo spazio proiettivo complesso* $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$*,* $m \geq 0$*, è semplicemente connesso.*

Infatti, per $m = 0$ è ridotto a un punto e, per $m > 0$, lo scheletro di dimensione 2 di $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$ (per la decomposizione cellulare determinata dalla successione $\mathrm{P}\mathbb{C}_0 \subset \mathrm{P}\mathbb{C}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{P}\mathbb{C}_m$) è la retta proiettiva $\mathrm{P}\mathbb{C}_1$, omeomorfa alla sfera S^2 (cap. II, cor. 4.7 e cor. 4.3).

5.5 PROPOSIZIONE. *Siano K un complesso cellulare localmente finito, x un punto dello scheletro K^1, $c : I \to K^1$ un laccio di base x in K^1 e $L = K \cup_{\hat{c}} D^2$ il complesso cellulare ottenuto incollando a K una cella di dimensione 2 mediante $\hat{c}$. Se $((c))$ indica il sottogruppo normale di $\pi_1(K,x)$ generato da $[c]$, l'iniezione $i : K \to L$ induce un isomorfismo di $\pi_1(K,x)/((c))$ su $\pi_1(L,x)$.*

Dimostrazione. Si può supporre K connesso.

Siano q la proiezione di $K \sqcup D^2$ su L, γ il laccio di base $y = q(1/2)$ definito dall'applicazione $z \mapsto q(z/2)$, $z \in S^1$, e r la retrazione dell'aperto $U = L - \{q(0)\}$ su K indotta dalla retrazione di $D^2 - \{0\}$ su S^1. Questa retrazione induce un isomorfismo di $\pi_1(U,y)$ su $\pi_1(K,x)$.

Gli aperti U, $V = L - K$ e $U \cap V$ sono connessi per archi; inoltre V è semplicemente connesso. Quindi l'iniezione $U \to L$ induce un isomorfismo di $\pi_1(U,y)/J$ su $\pi_1(L,y)$, dove J è il sottogruppo normale di $\pi_1(U,y)$ generato dall'immagine di $\pi_1(U \cap V,y)$.

Ma, poiché il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1,e) & \xrightarrow{\hat{\gamma}_*} & \pi_1(U \cap V,y) \\ {\scriptstyle \hat{c}_*}\downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(K,x) & \xleftarrow{r_*} & \pi_1(U,y) \end{array}$$

è commutativo e $\hat{\gamma}_*$ è un isomorfismo, $r_*(J)$ è il sottogruppo normale di $\pi_1(K,x)$ generato dalla classe di omotopia di c. c.v.d.

5.6 COROLLARIO. *Sia x il punto $\mathrm{P}\mathbb{R}^0$ dello spazio proiettivo reale $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$. Il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^1,x)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Per $m \geq 2$, $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^m,x)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, e l'omomorfismo $i_* : \pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^1,x) \to \pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^m,x)$ indotto dall'iniezione è suriettivo.*

Quindi, per $n \geq m \geq 2$, l'iniezione $\mathrm{P}\mathbb{R}^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^n$ induce un isomorfismo dei gruppi fondamentali.

Dimostrazione. Si considera la decomposizione cellulare determinata dalla successione $\mathrm{P}\mathbb{R}^0 \subset \mathrm{P}\mathbb{R}^1 \subset \cdots \subset \mathrm{P}\mathbb{R}^m$. Per $m = 1$, $\mathrm{P}\mathbb{R}^1$ è omeomorfo a S^1; quindi $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^1,x) \simeq \mathbb{Z}$.

Per $m = 2$, $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$ è omeomorfo al complesso ottenuto incollando al cerchio S^1 una cella di dimensione 2 mediante $\hat{c} : z \mapsto z^2$ (cap. II, prop. 3.5). Il sottogruppo normale di $\pi_1(S^1, e)$ generato da $[c]$ è allora $2\pi_1(S^1, e)$ (teor. 2.1). Quindi l'iniezione $\mathrm{P}\mathbb{R}^1 \to \mathrm{P}\mathbb{R}^2$ induce un isomorfismo di $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^1, x)/2\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^1, x)$, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, su $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^2, x)$ (prop. 5.5).

Per $m > 2$ lo scheletro di dimensione 2 di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$. L'iniezione $\mathrm{P}\mathbb{R}^2 \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ induce dunque un isomorfismo dei gruppi fondamentali (teor. 5.3). c.v.d.

5.7 TEOREMA. *Sia K un grafo finito connesso di connettività $c(K)$ e sia x un punto di K. Il gruppo $\pi_1(K, x)$ è un gruppo libero su $c(K)$ generatori.*

Dimostrazione. Si può supporre che ogni spigolo di K abbia estremi distinti. Si procede per induzione su $c(K)$, osservando che, se $c(K) = 0$, K è un albero (cap. III, def. 3.7), dunque uno spazio semplicemente connesso (cap. IV, prop. 3.5).

Se $c(K) \geq 1$, sia e uno spigolo tale che $L = K - e$ sia connesso. Esiste una catena C in L che congiunge gli estremi x e y di e; si può supporre che i suoi vertici $x = e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}, e_p = y$ siano a due a due distinti. Il grafo C è allora contraibile e $C \cup e$ è omeomorfo a S^1.

Sia z un punto di e e sia $U = K - \{z\}$. Il grafo L è un retratto per deformazione di U, quindi l'iniezione $L \to U$ induce un isomorfismo di $\pi_1(L, x)$ su $\pi_1(U, x)$.

Sia ora W l'unione degli spigoli di K aventi un estremo in C; W contiene tutti gli spigoli di $C \cup e$. Si può trovare un intorno aperto V di C in W tale che, per ogni spigolo ε di W, si abbia:

$\varepsilon \subset V$ se ε è contenuto in $C \cup e$;

$\varepsilon \subset V$ se ε ha un solo estremo in C;

$\varepsilon - (\varepsilon \cap V)$ è ridotto a un punto se ε ha entrambi gli estremi in C senza essere contenuto in $C \cup e$.

Il grafo $C \cup e$ è allora un retratto per deformazione di V. Analogamente C è un retratto per deformazione di $U \cap V$. Quindi (cor. 4.7) $\pi_1(K, x)$ è isomorfo al prodotto libero di $\pi_1(U, x)$ e $\pi_1(V, x)$.

Ma $\pi_1(U, x) \simeq \pi_1(L, x)$ è libero su $c(L) = c(K) - 1$ generatori, e $\pi_1(V, x) \simeq \pi_1(C \cup e, x)$ è libero su un generatore. Pertanto $\pi_1(K, x)$ è libero su $c(K)$ generatori (corollario 4.2 dell'appendice). c.v.d.

Si può anche dedurre dalla dimostrazione precedente il risultato seguente:

5.8 PROPOSIZIONE. *Sia K un grafo finito connesso e sia L un sottografo connesso di K. Se x è un punto di L, l'iniezione di L in K induce un omomorfismo iniettivo di $\pi_1(L,x)$ in $\pi_1(K,x)$.*

Basta infatti, quando $c(L) \geq 1$, prendere nella dimostrazione precedente e in L.

Esercizi.

Sia L il sottocomplesso del toro T^m unione degli m sottocomplessi $L_1 = S^1 \times \{e\} \times \cdots \times \{e\}$, $L_2 = \{e\} \times S^1 \times \{e\} \times \cdots \times \{e\}$, ..., $L_m = \{e\} \times \cdots \times \{e\} \times S^1$; L è un grafo di connettività m.

Il gruppo fondamentale $\pi_1(L,(e,\ldots,e))$ è allora il gruppo libero su m generatori, prodotto libero dei gruppi ciclici $\pi_1(L_1,(e,\ldots,e)),\ldots,\pi_1(L_m,(e,\ldots,e))$.

5.9 COROLLARIO. *Sia K un grafo finito connesso avente b_0 vertici e b_1 spigoli. Il gruppo fondamentale di K è un gruppo libero su $b_1 - b_0 + 1$ generatori.*

Infatti (cap. III, teor. 3.9) $c(K) = 1 - \chi(K) = 1 - b_0 + b_1$.

5.10 COROLLARIO. *Il gruppo fondamentale di un grafo connesso K è un gruppo libero.*

Infatti (prop. 5.8, lemmi 5.1 e 5.2) si può scrivere $\pi_1(K,x)$ come unione di sottogruppi che sono gruppi liberi.[VI.2]

Si ha analogamente:

5.11 COROLLARIO. *Se L è un sottografo connesso di un grafo connesso K, e se x è un punto di L, l'iniezione di L in K induce un omomorfismo iniettivo di $\pi_1(L,x)$ in $\pi_1(K,x)$.*

5.12 COROLLARIO. *Affinché un grafo connesso sia un albero è necessario e sufficiente che sia semplicemente connesso.*

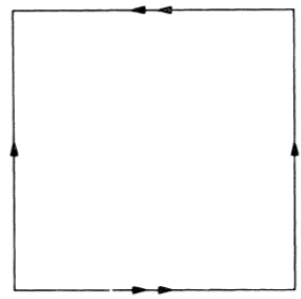
5.13 TEOREMA. *Il gruppo fondamentale di un complesso cellulare connesso finito K è un gruppo a presentazione finita.*

Si può anzitutto supporre che K sia di dimensione 2 (teor. 5.3).

Siano allora m la connettività dello scheletro K^1 e n il numero di celle di dimensione 2 di K. Il gruppo fondamentale di K^1 è libero su m generatori e (prop. 5.5) ogni cella di dimensione 2 introduce una relazione in $\pi_1(K^1)$. Quindi $\pi_1(K^2)$ è un gruppo su m generatori che soddisfano n relazioni.

Esercizi.

i) Il gruppo fondamentale del toro di Klein T è un gruppo con due generatori a e b e una relazione $bab = a$ (non è dunque abeliano). Di conseguenza il toro di Klein T non è omeomorfo al toro T^2.



ii) Sia G un gruppo a presentazione finita. Esiste un complesso cellulare connesso finito (di dimensione 2) K tale che $\pi_1(K)$ sia isomorfo a G (usare l'esercizio 5.8).

6. Gruppo fondamentale dei gruppi classici

6.1 TEOREMA. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(SO(2,\mathbb{R}),1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Per $m \geq 3$, il gruppo $\pi_1(SO(m,\mathbb{R}),1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, e l'omomorfismo $i_* : \pi_1(SO(2,\mathbb{R}),1) \to \pi_1(SO(m,\mathbb{R}),1)$ indotto dall'iniezione è suriettivo.*

Di conseguenza, per $m \geq n \geq 3$, l'iniezione $SO(n,\mathbb{R}) \to SO(m,\mathbb{R})$ induce un isomorfismo dei gruppi fondamentali.

Dimostrazione. Poiché $SO(2,\mathbb{R})$ è isomorfo a S^1, $\pi_1(SO(2,\mathbb{R}),1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

L'omeomorfismo di $\mathrm{P}\mathbb{R}^3$ su $SO(3,\mathbb{R})$ dato nella dimostrazione della proposizione 3.8 del capitolo II manda $\mathrm{P}\mathbb{R}^1$ su $SO(2,\mathbb{R})$. Quindi (cor. 5.6) $\pi_1(SO(3,\mathbb{R}),1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ e l'omomorfismo $i_* : \pi_1(SO(2,\mathbb{R}),1) \to \pi_1(SO(3,\mathbb{R}),1)$ è suriettivo.

Supponiamo ora $m > 3$ e $\pi_1(SO(m-1,\mathbb{R}),1) \simeq \mathbb{Z}_2$. Siano n il punto $(0,\ldots,0,1)$ di S^{m-1}, U e V gli aperti $S^{m-1} - \{-n\}$

e $S^{m-1} - \{n\}$, e sia q la proiezione di $SO(m,\mathbb{R})$ su S^{m-1} definita da $\alpha \mapsto \alpha(n)$.

Sia s l'applicazione continua di U in $SO(m,\mathbb{R})$ che associa a ogni punto $x = (x_1,\dots,x_m)$ di U la rotazione nel piano (orientato) generato da n e x che trasforma n in x. Si ha, ponendo $x' = (x_1,\dots,x_{m-1})^t$,

$$s(x) = \begin{pmatrix} I_{m-1} - \dfrac{x'(x')^t}{1+x_m} & x' \\ -(x')^t & x_m \end{pmatrix}.$$

Si pone $\rho = [s(0,\dots,0,1,0)]^2$: $\rho^2 = 1$.

Le applicazioni $\Phi_1 : U \times SO(m-1,\mathbb{R}) \to SO(m,\mathbb{R})$ e $\Phi_2 : V \times SO(m-1,\mathbb{R}) \to SO(m,\mathbb{R})$ definite da

$$\Phi_1(x,\alpha) = s(x)\alpha, \qquad \Phi_2(x,\alpha) = \rho s(\rho x)\alpha,$$

verificano $q\Phi_1(x,\alpha) = x$, $q\Phi_2(x,\alpha) = x$ e sono omeomorfismi rispettivamente su $q^{-1}(U)$ e $q^{-1}(V)$ (si ha $\Phi_1^{-1} : \alpha \mapsto (q(\alpha), s(q(\alpha))^{-1}\alpha)$ e $\Phi_2^{-1} : \alpha \mapsto (q(\alpha), s(\rho q(\alpha))^{-1}\rho\alpha)$).

Ora gli omomorfismi dei gruppi fondamentali indotti dalle inclusioni

$$(U \cap V) \times SO(m-1,\mathbb{R}) \longrightarrow U \times SO(m-1,\mathbb{R}),$$
$$(U \cap V) \times SO(m-1,\mathbb{R}) \longrightarrow V \times SO(m-1,\mathbb{R})$$

sono isomorfismi ($m \geq 4$). Lo stesso vale dunque per gli omomorfismi

$$j_1 : \pi_1(q^{-1}(U \cap V)) \longrightarrow \pi_1(q^{-1}(U)),$$
$$j_2 : \pi_1(q^{-1}(U \cap V)) \longrightarrow \pi_1(q^{-1}(V));$$

e di conseguenza anche $k_1 : \pi_1(q^{-1}(U)) \to \pi_1(SO(m,\mathbb{R}))$ è un isomorfismo (teor. 4.6).

Ma, poiché l'iniezione di $SO(m-1,\mathbb{R})$ in $q^{-1}(U) = \Phi_1(U \times SO(m-1,\mathbb{R}))$ induce un isomorfismo dei gruppi fondamentali, l'omomorfismo $i_* : \pi_1(SO(m-1,\mathbb{R}),1) \to \pi_1(SO(m,\mathbb{R}),1)$ è un isomorfismo. c.v.d.

6.2 TEOREMA. *Il gruppo $SU(m,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso per ogni $m \geq 0$.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 6.1, usando l'applicazione s di $S^{2m-1} - \{-n\}$ in $SU(m,\mathbb{C})$ definita da

$$s(z) = \begin{pmatrix} & & z_1 \\ & \boxed{\delta_{ij} - \dfrac{z_i \bar{z}_j}{1 + \bar{z}_m}} & \vdots \\ & & z_{m-1} \\ -bz_1 & \cdots\cdots\cdots & -bz_{m-1} \quad z_m \end{pmatrix}$$

dove $b = \dfrac{1 + z_m}{1 + \bar{z}_m}$.[VI.3]

6.3 COROLLARIO. *Per ogni $m \geq 1$, il gruppo fondamentale $\pi_1(U(m,\mathbb{C}),1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Infatti $U(m,\mathbb{C})$ è isomorfo al gruppo prodotto $S^1 \times SU(m,\mathbb{C})$.[VI.4]

Per $n \geq m$, l'iniezione $U(m,\mathbb{C}) \to U(n,\mathbb{C})$ induce dunque un isomorfismo di $\pi_1(U(m,\mathbb{C}),1)$ su $\pi_1(U(n,\mathbb{C}),1)$.

Parte seconda

Rivestimenti

CAPITOLO VII

Rivestimenti

Tutti gli spazi topologici considerati in questa parte sono separati.

1. Omeomorfismi locali

1.1 DEFINIZIONE. *Siano E e B due spazi topologici. Un'applicazione continua $p : E \to B$ è un omeomorfismo locale se per ogni punto x di E esistono un intorno aperto U di x e un intorno aperto V di $b = p(x)$ tali che $p|_U$ sia un omeomorfismo di U su V.*

Di conseguenza:

i) un omeomorfismo locale è un'applicazione aperta;

ii) se $p : E \to B$ è un omeomorfismo locale e A è un sottospazio di B, $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ è un omeomorfismo locale.

In particolare, per ogni punto b di B, $p^{-1}(b)$ è un sottospazio discreto di E;

iii) se $p : E \to B$ è un omeomorfismo locale, E e B hanno le stesse proprietà locali: connessione locale, compattezza locale, ecc.[VII.1]

Esempio. Siano M^m e N^m due varietà differenziabili della stessa dimensione m. Un'applicazione differenziabile $p : M \to N$ di rango massimo m in ogni punto di M è un omeomorfismo locale (teorema del Jacobiano).

Esercizi.

Sia $p : E \to I$ un omeomorfismo locale di uno spazio connesso E nel segmento $I = [0,1]$. Se p è suriettivo, è un omeomorfismo.

1.2 PROPOSIZIONE. *Sia E uno spazio localmente connesso e sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale. Se C è una componente connessa di E, $p|_C : C \to B$ è un omeomorfismo locale.*

Infatti, se E è localmente connesso, C è aperto in E e $p(C)$ è aperto in B.

1.3 DEFINIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un'applicazione continua. Una sezione di p sopra un sottospazio A di B è un'applicazione continua s di A in E tale che $p \circ s$ sia l'applicazione identica di A.*

Una sezione è dunque un'applicazione iniettiva.

1.4 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale. Per ogni punto b di B e ogni punto x di $p^{-1}(b)$ esistono un intorno aperto V di b e una sezione s di p sopra V tale che $s(b) = x$.*

Infatti, se p è un omeomorfismo di un intorno aperto U di x su un intorno aperto V di b, $s = (p|_U)^{-1}$ è una sezione di p sopra V tale che $s(b) = x$.

1.5 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale e sia s una sezione di p sopra un sottospazio A di B. L'applicazione s è un omeomorfismo di A su $s(A)$.*

Infatti s è continua, iniettiva e aperta sulla propria immagine.

1.6 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale e siano s e s' due sezioni di p sopra B. Se s e s' sono uguali in un punto b, coincidono in un intorno di b.*

Infatti, se p è un omeomorfismo di un intorno aperto U di $x = s(b) = s'(b)$ su un intorno aperto V di b, si ha necessariamente $s = s' = (p|_U)^{-1}$ su $s^{-1}(U) \cap (s')^{-1}(U) \cap V$.

1.7 COROLLARIO. *Sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale e sia A un sottospazio connesso di B. Se due sezioni s e s' di p sopra A coincidono in un punto di A, sono uguali.*

Infatti (E è separato) le due sezioni coincidono su un sottospazio aperto e chiuso non vuoto di A.

Esercizi.

Sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale e sia s una sezione di p sopra B. Se B è localmente connesso, $s(B)$ è aperto e chiuso in E.

2. Rivestimenti

2.1 DEFINIZIONE. *Sia B uno spazio topologico. Un rivestimento di B consiste in uno spazio topologico E e in un'applicazione continua $p : E \to B$ avente la seguente proprietà di trivialità locale: per ogni punto b di B esistono un intorno V di b, uno spazio discreto non vuoto F e un omeomorfismo $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ tali che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi} & V \times F \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & V & \end{array}$$

sia commutativo.

Si dice anche che $p : E \to B$ (o persino E) è un rivestimento di B, e che: B è la *base* del rivestimento; E lo *spazio totale*; p la *proiezione*; $p^{-1}(b)$ la *fibra* sopra il punto b di B; V un *intorno distinto* di b; Φ una *trivializzazione* di p sopra V.

Un rivestimento $p : E \to B$ si dice connesso (risp. compatto, semplicemente connesso, ecc.) se lo spazio totale E è connesso (risp. compatto, semplicemente connesso, ecc.).

Osservazioni.

i) La proiezione p di un rivestimento è suriettiva (ogni fibra $p^{-1}(b)$ è non vuota); quindi, se E è compatto, connesso o connesso per archi, lo stesso vale per B.

ii) La separazione di B e l'ipotesi di trivialità locale di 2.1 implicano la separazione di E.

2.2 PROPOSIZIONE. *Affinché un'applicazione continua $p : E \to B$ sia un rivestimento è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente: per ogni punto b di B esistono un intorno V di b e una famiglia non vuota $(s_i)_{i\in I}$ di sezioni di p sopra V avente le proprietà seguenti:*

i) *per ogni $i \in I$, $s_i(V)$ è aperto in $p^{-1}(V)$;*

ii) *$s_i(V) \cap s_j(V) = \varnothing$ per $i \neq j$;*

iii) *$p^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} s_i(V)$.*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Infatti, se V è un intorno distinto di b e $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ è una trivializzazione di p sopra V, le applicazioni $s_f : x \mapsto \Phi^{-1}(x, f)$, $f \in F$, costituiscono una famiglia di sezioni con le proprietà di 2.2.

Viceversa si definisce un omeomorfismo $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times I$, dove I ha la topologia discreta, ponendo $\Phi(x) = (p(x), i)$ se $x \in s_i(V)$; l'applicazione inversa è $(x, i) \mapsto s_i(x)$. c.v.d.

Esempi.

i) *Rivestimento banale.* Sia F uno spazio discreto non vuoto. La proiezione $p_1 : B \times F \to B$ è un rivestimento di B.

Più generalmente, un rivestimento $p : E \to B$ si dice banale se possiede una trivializzazione $\Phi : E \to B \times F$ sopra B.

ii) *Rivestimento indotto.* Siano $p : E \to B$ un rivestimento e A un sottospazio di B; $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ è un rivestimento di A: il rivestimento indotto sopra A.

iii) *Rivestimento prodotto.* Se $p : E \to B$ e $p' : E' \to B'$ sono due rivestimenti, $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ è un rivestimento di $B \times B'$: il rivestimento prodotto.

iv) La proiezione $p : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ della sfera S^m sullo spazio proiettivo reale $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è un rivestimento. Per $n \leq m$, il rivestimento indotto sopra $\mathrm{P}\mathbb{R}^n \subset \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è $p : S^n \to \mathrm{P}\mathbb{R}^n$.

2.3 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento. Se B è connesso, tutte le fibre $p^{-1}(b)$, $b \in B$, hanno la stessa cardinalità.*

Infatti l'insieme dei punti b di B tali che $p^{-1}(b)$ abbia una cardinalità data è aperto in B; è dunque anche chiuso.

Se questa cardinalità è un intero m, si dice che E è un rivestimento a m fogli di B.

Esercizi.

i) Se $p : E \to B$ è un rivestimento a un foglio, p è un omeomorfismo.

ii) Sia $p : E \to B$ un rivestimento con base B compatta. Affinché abbia un numero finito di fogli è necessario e sufficiente che E sia compatto.

2.4 PROPOSIZIONE. *La proiezione di un rivestimento è un omeomorfismo locale.*

Siano infatti $p : E \to B$ un rivestimento, x un punto di E, V un intorno aperto distinto di $b = p(x)$ e $s : V \to E$ una sezione di p sopra V tale che $s(b) = x$ (prop. 2.2). La restrizione $p|_{s(V)}$ è allora un omeomorfismo di $s(V)$ su V.

Il viceversa della proposizione 2.4 è evidentemente falso. Tuttavia:

2.5 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un omeomorfismo locale tale che tutti i sottospazi $p^{-1}(b)$, $b \in B$, siano finiti e abbiano lo stesso numero positivo di elementi. Allora $p : E \to B$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Sia b un punto di B. Per ogni punto x di $p^{-1}(b)$ esistono un intorno aperto V_x di b e una sezione s_x di p sopra V_x tale che $s_x(b) = x$ (prop. 1.4). Poiché $p^{-1}(b)$ è finito, si può supporre che gli aperti $U_x = s_x(V_x)$ siano a due a due disgiunti.

L'intersezione $V = \bigcap_{x \in p^{-1}(b)} V_x$ è allora un intorno aperto di b; le sezioni $\sigma_x = s_x|_V$ hanno le proprietà della proposizione 2.2. c.v.d.

2.6 COROLLARIO. *Siano M e N due varietà differenziabili connesse compatte della stessa dimensione. Se p è un'applicazione differenziabile di M in N di rango massimo in ogni punto di M, $p : M \to N$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. L'applicazione p è un omeomorfismo locale. È dunque suriettiva; per ogni punto x di N, $p^{-1}(x)$ è un sottospazio chiuso discreto, dunque finito, non vuoto di M. Basta quindi verificare che tutte le fibre abbiano lo stesso numero di elementi.

Sia x un punto di N e siano $y_1, \ldots, y_n$ i punti di $p^{-1}(x)$. Si possono trovare un intorno aperto U di x e, per ogni $i = 1, \ldots, n$, un intorno aperto V_i di y_i tali che:

i) $V_i \cap V_j = \varnothing$ per $i \neq j$;

ii) $p|_{V_i}$ sia un omeomorfismo di V_i su U.

Per ogni punto z di U la cardinalità di $p^{-1}(z)$ è allora almeno n. Supponiamo che non sia costante in un intorno di x. Si possono trovare una successione $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ di punti di U tendente a x e una successione $(v_q)_{q\in\mathbb{N}}$ di punti di $M - \bigcup_i V_i$ tali che $p(v_q) = u_q$. Se v è un punto di accumulazione di (v_q), si ha $p(v) = x$ e $v \notin \bigcup_i V_i$. Ciò è assurdo.

Quindi la cardinalità delle fibre è localmente costante, dunque costante su N. c.v.d.

2.7 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento di uno spazio B connesso e localmente connesso, e sia C una componente connessa di E. L'applicazione $p|_C : C \to B$ è un rivestimento di B.*

Dimostrazione. Siano b un punto di B, V un intorno distinto connesso di b e $(s_i)_{i\in I}$ una famiglia di sezioni sopra V con le proprietà di 2.2. Per ogni $i \in I$ si ha $s_i(V) \cap C = \varnothing$ oppure $s_i(V) \subset C$. Quindi, se I' indica l'insieme degli i tali che $s_i(V) \cap C \neq \varnothing$, la famiglia $(s_i)_{i\in I'}$ ha le proprietà di 2.2.

Resta da verificare che per ogni b l'insieme I' sia non vuoto. Ma, come in 2.3, si mostra che gli insiemi $p^{-1}(b) \cap C$, $b \in B$, hanno tutti la stessa cardinalità. c.v.d.

2.8 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso di uno spazio localmente connesso B. Affinché p sia un omeomorfismo è necessario e sufficiente che esista una sezione s di p sopra B.*

La condizione è evidentemente necessaria. Viceversa, se $s : B \to E$ è una sezione, s è un omeomorfismo di B sulla sua immagine $s(B)$, e $s(B)$ è aperto e chiuso in E.

3. Gruppi discreti che operano propriamente e liberamente

3.1 TEOREMA. *Sia G un gruppo discreto che opera propriamente e liberamente su uno spazio localmente compatto E, e sia p la proiezione di E sullo spazio E/G delle orbite di G. L'applicazione $p : E \to E/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Poiché E è localmente compatto, E/G è separato (cap. I, teor. 6.7). Inoltre ogni punto x di E possiede un intorno aperto U tale che $gU \cap U = \varnothing$ per $g \neq e$ (cap. I, prop. 6.9). La proiezione p è allora un omeomorfismo di U sull'aperto $V = p(U)$ di E/G.

Per ogni elemento g di G, l'applicazione $s_g : y \mapsto g((p|_U)^{-1}y)$ è una sezione di p sopra V, e la famiglia $(s_g)_{g\in G}$ possiede le proprietà della proposizione 2.2. c.v.d.

Ogni fibra $p^{-1}(b)$, $b \in E/G$, ha allora la stessa cardinalità di G.

Si dimostra analogamente (cap. I, prop. 6.1 e 6.2):

3.2 PROPOSIZIONE. *Sia H un sottogruppo discreto di un gruppo topologico separato G. La proiezione $p : G \to G/H$ è un rivestimento.*

3.3 Esempi.

i) La proiezione $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ è un rivestimento la cui base è omeomorfa al toro T^m.

In particolare, per $m = 1$, la proiezione $q_0 : t \mapsto e^{2\pi it}$ di $\mathbb{R}$ su $S^1 \subset \mathbb{C}$ induce un omeomorfismo h di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ su S^1 tale che $q_0 = h \circ p$. Quindi $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$ è un rivestimento.

ii) Sia $H \subset S^1$ il sottogruppo delle radici n-esime dell'unità. La proiezione $p : S^1 \to S^1/H$ è un rivestimento.

L'applicazione $q_n : z \mapsto z^n$ induce un omeomorfismo h di S^1/H su S^1 tale che $q_n = h \circ p$. Quindi $q_n : S^1 \to S^1$ è un rivestimento a n fogli.

iii) La proiezione $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z})$ è un rivestimento.[VII.2]

L'applicazione $\exp : z \mapsto e^z$ di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ induce un omeomorfismo h di $\mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z})$ su $\mathbb{C}^*$ tale che $\exp = h \circ p$. Quindi $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ è un rivestimento.

iv) Il gruppo $\mathbb{Z}_2$ opera propriamente e liberamente sulla sfera S^m mediante la simmetria $x \mapsto -x$. La proiezione $p : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è dunque un rivestimento a due fogli.

v) La proiezione $p : S^{2m+1} \to L_p^{2m+1}$ della sfera sullo spazio lenticolare di gruppo $\mathbb{Z}_p$ è un rivestimento a p fogli (cap. II, esercizio 1.7).

vi) La proiezione $p : \mathbb{R}^2 \to M$ di $\mathbb{R}^2$ sul nastro di Möbius è un rivestimento (cap. II, §5.2).

vii) La proiezione $p : \mathbb{R}^2 \to T$ di $\mathbb{R}^2$ sul toro di Klein è un rivestimento (cap. II, §5.3).

3.4 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo discreto che opera propriamente e liberamente su uno spazio E localmente connesso e localmente compatto, e sia H un sottogruppo di G. La proiezione canonica $q : E/H \to E/G$ è un rivestimento.*

Si ha infatti un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & E/H \\ & \searrow^{p} & \downarrow q \\ & & E/G \end{array}$$

e, se $(g_i)_{i\in I}$ è una famiglia di rappresentanti delle classi laterali di H, le applicazioni $\sigma_i = \pi \circ s_{g_i}$ (notazioni della dimostrazione di 3.1) costituiscono una famiglia di sezioni di q sopra V con le proprietà della proposizione 2.2.

3.5 Osservazione. L'ipotesi di compattezza locale in 3.1 e 3.4 serve soltanto ad assicurare la separazione dei quozienti. Quindi, se si sa per altra via che tali quozienti sono separati, si può sopprimere questa ipotesi.

4. Omomorfismi di rivestimenti

4.1 DEFINIZIONE. *Siano $p : E \to B$ e $p' : E' \to B'$ due rivestimenti. Un omomorfismo del rivestimento E nel rivestimento E' è una coppia (H,h) di applicazioni continue $H : E \to E'$ e $h : B \to B'$ tali che $p' \circ H = h \circ p$.*

In altri termini, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow[h]{} & B' \end{array}$$

è commutativo. L'applicazione H manda dunque la fibra $p^{-1}(b)$, $b \in B$, nella fibra $(p')^{-1}(h(b))$.

Si dice anche che $H : E \to E'$ è un omomorfismo sopra h; e, semplicemente, un omomorfismo se $B = B'$ e h è l'applicazione identica.

La coppia (identità, identità) è un omomorfismo del rivestimento $p : E \to B$: l'omomorfismo identico.

Se $H : E \to E'$ è un omomorfismo sopra $h : B \to B'$ e $H' : E' \to E''$ è un omomorfismo sopra $h' : B' \to B''$, $H' \circ H : E \to E''$ è un omomorfismo sopra $h' \circ h : B \to B''$: l'omomorfismo composto.

Esempio. Siano m,n,r,s quattro interi positivi tali che $ms = nr$. Con le notazioni dell'esempio ii) di 3.3, $q_r : S^1 \to S^1$ è un omomorfismo del rivestimento $q_m : S^1 \to S^1$ nel rivestimento $q_n : S^1 \to S^1$ sopra $q_s : S^1 \to S^1$.

4.2 DEFINIZIONE. *Siano $p : E \to B$ e $p' : E' \to B'$ due rivestimenti. Un isomorfismo del rivestimento E sul rivestimento E' è un omomorfismo (H,h) per il quale H e h sono omeomorfismi.*

La coppia (H^{-1},h^{-1}) è allora un isomorfismo di E' su E: l'isomorfismo inverso.

Esercizi.

Affinché un omomorfismo (H,h) sia un isomorfismo è necessario e sufficiente che H sia un omeomorfismo.[VII.3]

4.3 PROPOSIZIONE. *Siano $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ due rivestimenti connessi della stessa base B, e sia H un omomorfismo di E in E'. Se B è localmente connesso, $H : E \to E'$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Siano x' un punto di E', V un intorno connesso di $b = p'(x')$ distinto per entrambi i rivestimenti, $s_y : V \to E$, $y \in p^{-1}(b)$, e $s'_z : V \to E'$, $z \in (p')^{-1}(b)$, due famiglie di sezioni sopra V con le proprietà di 2.2 e tali che $s_y(b) = y$ e $s'_z(b) = z$.

Si ha $H \circ s_x = s'_{x'}$ per ogni $x \in H^{-1}(x')$: sono infatti due sezioni di p' sopra V che assumono lo stesso valore in b.

Sia $U = s'_{x'}(V)$ e, per ogni $x \in H^{-1}(x')$, sia $\sigma_x = s_x \circ p' : U \to E$. Le applicazioni σ_x sono sezioni di H sopra U, e la famiglia $(\sigma_x)_{x \in H^{-1}(x')}$ verifica la proprietà di 2.2. c.v.d.

In particolare (quando la base è localmente connessa):

i) un omomorfismo di rivestimenti connessi è suriettivo;

ii) un omomorfismo di rivestimenti, connessi o no, è un omeomorfismo locale, dunque un'applicazione aperta.

4.4 DEFINIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento. Un endomorfismo (risp. automorfismo) del rivestimento E è un omomorfismo (risp. isomorfismo) H di E in sé stesso.*

L'insieme $\mathrm{Aut}\,E$ degli automorfismi di E è allora un gruppo discreto che opera continuamente su E e su ogni fibra $p^{-1}(b)$, $b \in B$.

Esempio. Sia G un gruppo discreto che opera propriamente e liberamente su uno spazio localmente compatto E. Ogni omeomorfismo $x \mapsto gx$, $g \in G$, di E è un automorfismo del rivestimento $p : E \to E/G$.

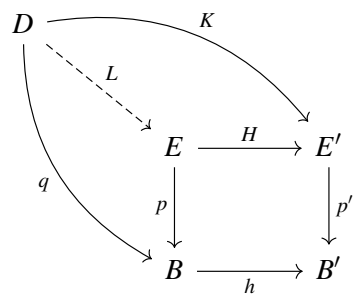
4.5 TEOREMA. *Sia $p' : E' \to B'$ un rivestimento e sia h un'applicazione continua di uno spazio B in B'. Esistono un rivestimento $p : E \to B$ e un'applicazione continua $H : E \to E'$ con le proprietà seguenti:*

i) *(H,h) è un omomorfismo di rivestimenti;*

ii) *se $q : D \to B$ è un rivestimento di B e K è un omomorfismo di D in E' sopra h, esiste uno e un solo omomorfismo di rivestimenti $L : D \to E$ tale che $K = H \circ L$.*

Inoltre il rivestimento $p : E \to B$, così come l'omomorfismo H, è determinato a meno di isomorfismo da queste due condizioni.

Questo teorema esprime dunque la commutatività del diagramma seguente:



Dimostrazione. Siano

$$E = \{(b,x') \in B \times E' \mid h(b) = p'(x')\},$$

$p : E \to B$ la prima proiezione $(b,x') \mapsto b$ e $H : E \to E'$ la seconda proiezione $(b,x') \mapsto x'$. Si ha evidentemente $p' \circ H = h \circ p$.

Siano b un punto di B, V' un intorno distinto di $b' = h(b)$ e

$\Phi' : (p')^{-1}(V') \to V' \times F$ una trivializzazione di p' sopra V'. Sia $V = h^{-1}(V')$; l'applicazione

$$\Phi : (a, x') \longmapsto (a, p_2\Phi'(x'))$$

è una trivializzazione di p sopra V; l'inversa è $(a, f) \mapsto (a, (\Phi')^{-1}(h(a), f))$. Quindi $p : E \to B$ è un rivestimento e H è un omomorfismo di E in E' sopra h.

Nelle ipotesi di ii), $L : x \mapsto (q(x), K(x))$ è il solo omomorfismo di D in E tale che $K = H \circ L$.

Infine, se un rivestimento $\tilde{p} : \tilde{E} \to B$ e un omomorfismo $\tilde{H} : \tilde{E} \to E'$ verificano i) e ii), esistono omomorfismi $L : \tilde{E} \to E$ e $\tilde{L} : E \to \tilde{E}$ tali che $\tilde{H} = H \circ L$ e $H = \tilde{H} \circ \tilde{L}$. Si ha allora $H = H \circ (L \circ \tilde{L})$ e $\tilde{H} = \tilde{H} \circ (\tilde{L} \circ L)$. Quindi, per l'unicità in ii), $L \circ \tilde{L}$ e $\tilde{L} \circ L$ sono gli automorfismi identici; L è un isomorfismo. c.v.d.

Si dice che $p : E \to B$, o E, è il rivestimento immagine inversa di E' mediante h. Si indica anche E con h^*E'.

Esercizi.

i) Se h è l'applicazione identica, h^*E' è isomorfo a E'.

ii) Se $h = k \circ l$, h^*E' è isomorfo a $l^*(k^*E')$.

iii) Se B è un sottospazio di B' e h è l'iniezione, h^*E' è isomorfo alla restrizione di E' a B.

5. Costruzione dei rivestimenti per incollamento

Sia $p : E \to B$ un rivestimento di uno spazio connesso B. Tutte le fibre hanno la stessa cardinalità di un insieme F.

Si può trovare un ricoprimento $(V_i)_{i \in I}$ di B mediante aperti distinti sui quali esistano trivializzazioni $\Phi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F$. Se $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, si ha allora

$$\Phi_j \Phi_i^{-1}(x, f) = (x, g_{ji}(x) f), \quad (x, f) \in (V_i \cap V_j) \times F,$$

dove g_{ji} è un'applicazione continua, ossia localmente costante, di $V_i \cap V_j$ nel gruppo discreto $\mathfrak{S}_F$ delle permutazioni di F. Si ha

$$g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \quad (x \in V_i \cap V_j \cap V_k).$$

In particolare $g_{ii}(x) = \mathrm{id}$ per $x \in V_i$ e $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$ per $x \in V_i \cap V_j$.

Viceversa, sia $(V_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio B e sia, per ogni coppia (i,j) tale che $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, g_{ji} un'applicazione localmente costante di $V_i \cap V_j$ nel gruppo discreto $\mathfrak{S}_F$ delle permutazioni di un insieme F. Si suppone inoltre che

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \quad (x \in V_i \cap V_j \cap V_k).$$

In queste condizioni:

5.1 TEOREMA. *Esiste un rivestimento $p : E \to B$ che possiede trivializzazioni $\Phi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F$ tali che*

$$\Phi_j \Phi_i^{-1}(x,f) = (x, g_{ji}(x)f), \qquad (x,f) \in (V_i \cap V_j) \times F.$$

Inoltre due rivestimenti aventi questa proprietà sono isomorfi.

Dimostrazione. Sia S la somma topologica dei prodotti $V_i \times F$ e sia R la relazione di equivalenza su S che identifica $(x,f) \in V_i \times F$ con $(x',f') \in V_j \times F$ quando $x' = x$ e $f' = g_{ji}(x)f$. Le condizioni imposte ai g_{ji} assicurano che R sia una relazione di equivalenza; essa è aperta.

Sia π la proiezione di S sul quoziente $E = S/R$. L'applicazione continua di S su B definita dalle prime proiezioni $V_i \times F \to V_i$ è compatibile con R; determina dunque un'applicazione continua e suriettiva $p : E \to B$.

Questa è un rivestimento (in particolare E è separato). Infatti la restrizione π_i di π a $V_i \times F$ è un omeomorfismo su $p^{-1}(V_i)$ tale che $p \circ \pi_i(x,f) = x$; $\Phi_i = \pi_i^{-1}$ è dunque una trivializzazione e $\Phi_j \Phi_i^{-1}(x,f) = (x, g_{ji}(x)f)$.

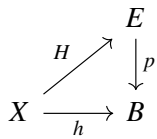
Sia ora $p' : E' \to B$ un rivestimento con trivializzazioni $\Phi'_i : (p')^{-1}(V_i) \to V_i \times F$ aventi le stesse transizioni. L'applicazione continua e aperta H di S in E', uguale a $(\Phi'_i)^{-1}$ su $V_i \times F$, è compatibile con R e determina un isomorfismo di E su E'. c.v.d.

Si dice allora che $p : E \to B$ è il rivestimento di B ottenuto incollando i $V_i \times F$ mediante le applicazioni di transizione $g_{ij} : V_i \cap V_j \to \mathfrak{S}_F$.

6. Sollevamenti delle applicazioni

6.1 DEFINIZIONE. *Siano $p : E \to B$ e $h : X \to B$ due applicazioni continue. Un sollevamento di h è un'applicazione continua $H : X \to E$ tale che $p \circ H = h$.*

Un sollevamento H di h rende dunque commutativo il diagramma seguente:



Esempi.

i) Una sezione $s : B \to E$ di p è un sollevamento dell'applicazione identica di B.

ii) Siano $p : E \to B$ e $p' : E' \to B'$ due rivestimenti e sia $h : B \to B'$ continua. Un omomorfismo di E in E' sopra h è un sollevamento di $h \circ p : E \to B'$.

In particolare un endomorfismo di un rivestimento $p : E \to B$ è un sollevamento della proiezione p.

6.2 PROPOSIZIONE. *Siano $p' : E' \to B'$ un rivestimento, $h : B \to B'$ un'applicazione continua, $p : E \to B$ il rivestimento immagine inversa di E' mediante h, e H l'omomorfismo di E in E' sopra h. La composizione $s \mapsto H \circ s$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le sezioni s di p sopra B e i sollevamenti $K : B \to E'$ di h.*

Infatti, se $s : B \to E$ è una sezione, $H \circ s$ è un sollevamento di h; e, se $K : B \to E'$ è un sollevamento, $s : x \mapsto (x, K(x))$ è una sezione di p tale che $H \circ s = K$.

6.3 COROLLARIO. *Siano $p : E \to B$ un rivestimento e $h : X \to B$ un'applicazione continua. Se X è connesso, due sollevamenti di h che coincidono in un punto sono uguali.*

Infatti (cor. 1.7) due sezioni che coincidono in un punto sono uguali.

Ciò assicura dunque l'unicità dei sollevamenti che assumono un valore dato in un punto dato. Il problema della loro esistenza sarà studiato nel capitolo IX.

6.4 COROLLARIO. *Siano $p : E \to B$, $p' : E' \to B'$ due rivestimenti e $h : B \to B'$ un'applicazione continua. Se E è connesso, due omomorfismi di E in E' sopra h che coincidono in un punto sono uguali.*

6.5 COROLLARIO. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso. Il gruppo* Aut$E$ *degli automorfismi di E opera liberamente su E.*

6.6 COROLLARIO. *Sia G un gruppo discreto che opera propriamente e liberamente su uno spazio E connesso e localmente compatto. Il gruppo degli automorfismi del rivestimento $p : E \to E/G$ è isomorfo a G.*

Infatti ogni elemento g di G determina un automorfismo del rivestimento. Viceversa, se h è un automorfismo di E e x è un punto di E, esiste un elemento $g \in G$ tale che $h(x) = gx$. Si ha allora (cor. 6.4) $h = g$.

Osservazione. Il ragionamento precedente mostra anche che, in questo caso, ogni endomorfismo del rivestimento $p : E \to E/G$ è un automorfismo.

Esercizi.

i) Il gruppo degli automorfismi del rivestimento $p : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

ii) Il gruppo degli automorfismi del rivestimento $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Il gruppo degli automorfismi del rivestimento $q_n : S^1 \to S^1$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

CAPITOLO VIII

Rivestimenti galoisiani[5]

Tutti gli spazi considerati in questo capitolo sono localmente connessi.

1. Rivestimenti galoisiani

Sia $p : E \to B$ un rivestimento. Poiché B è localmente connesso, si può supporre che il rivestimento sia connesso (cap. VII, prop. 2.7). Il gruppo $\operatorname{Aut} E$ degli automorfismi di E opera allora liberamente su E (cap. VII, cor. 6.5). In realtà:

1.1 TEOREMA. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso. Il gruppo $\operatorname{Aut} E$ degli automorfismi di E opera propriamente e liberamente su E.*

Dimostrazione. Supponiamo che C sia un compatto di E tale che $\{g \in \operatorname{Aut} E \mid gC \cap C \neq \varnothing\}$ sia infinito. Si possono trovare una successione $g_1, g_2, \ldots$ di elementi distinti di $\operatorname{Aut} E$ e una successione $x_1, x_2, \ldots$ di punti di C tali che $y_i = g_i x_i$ sia una successione di punti di C convergente a un punto y. Si può inoltre supporre che $x_1, x_2, \ldots$ converga a un punto x di C.[VIII.1] In queste condizioni $p(x) = p(y) = b$.

Sia allora V un intorno distinto connesso di b, e sia $(s_z)_{z \in p^{-1}(b)}$ una famiglia di sezioni sopra V tali che:

i) $s_z(b) = z$;

ii) $s_z(V) \cap s_{z'}(V) = \varnothing$ per $z \neq z'$.

Esistono due indici distinti i e j tali che x_i e x_j appartengano a $s_x(V)$ e $g_i x_i$ e $g_j x_j$ a $s_y(V)$; ciò implica $g_i x = g_j x = y$ con $g_i \neq g_j$. Si ha dunque una contraddizione, poiché $\operatorname{Aut} E$ opera liberamente su $p^{-1}(b)$. c.v.d.

1.2 COROLLARIO. *Se $p : E \to B$ è un rivestimento connesso, la proiezione $q : E \to E/\operatorname{Aut} E$ è un rivestimento.*

1.3 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso e sia π la proiezione di $E/\operatorname{Aut} E$ su B indotta da p; $\pi : E/\operatorname{Aut} E \to B$ è un rivestimento.*

[5] In prima lettura si potranno omettere i paragrafi 3 e 4 di questo capitolo.

Dimostrazione. Siano b un punto di B, V un intorno distinto connesso di b e $(s_x)_{x\in p^{-1}(b)}$ una famiglia di sezioni sopra V con le proprietà seguenti:

i) $s_x(b) = x$;

ii) $s_x(V) \cap s_y(V) = \varnothing$ per $x \neq y$;

iii) $p^{-1}(V) = \bigcup_{x\in p^{-1}(b)} s_x(V)$.

Per ogni punto x di $p^{-1}(b)$, $q \circ s_x$ è un omeomorfismo di V sull'aperto $U = q(s_x(V))$ di $\pi^{-1}(V)$. Quindi, scegliendo per ogni $y \in \pi^{-1}(b)$ un punto $z \in q^{-1}(y)$, si ottiene una famiglia $(\sigma_y)_{y\in\pi^{-1}(b)}$, $\sigma_y = q \circ s_z$, di sezioni di π sopra V con proprietà analoghe a i), ii) e iii). c.v.d.

Per ogni b la fibra $\pi^{-1}(b)$ è isomorfa allo spazio delle orbite $p^{-1}(b)/\operatorname{Aut}E$. Di conseguenza (cap. VII, prop. 2.3):

1.4 COROLLARIO. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso. Affinché* $\operatorname{Aut}E$ *operi transitivamente su ogni fibra $p^{-1}(b)$ è necessario e sufficiente che esista una fibra $p^{-1}(b_0)$ su cui operi transitivamente.*

1.5 DEFINIZIONE. *Un rivestimento $p : E \to B$ è galoisiano (o regolare) se possiede le due proprietà seguenti:*

i) *E è connesso;*

ii) $\operatorname{Aut}E$ *opera transitivamente su ogni fibra $p^{-1}(b)$, $b \in B$.*

Si dice anche che $p : E \to B$ è un rivestimento galoisiano di gruppo $G = \operatorname{Aut}E$.

In queste condizioni $\pi : E/\operatorname{Aut}E \to B$ è un omeomorfismo e il rivestimento $p : E \to B$ è isomorfo a quello definito dal gruppo $\operatorname{Aut}E$ che opera propriamente e liberamente su E.

Viceversa (cap. VII, cor. 6.6):

1.6 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo discreto che opera propriamente e liberamente su uno spazio connesso e localmente compatto E. Il rivestimento $p : E \to E/G$ è galoisiano di gruppo G.*

1.7 PROPOSIZIONE. *Ogni endomorfismo di un rivestimento galoisiano è un automorfismo.*

Siano infatti h un endomorfismo di un rivestimento galoisiano $p : E \to B$ e x un punto di E. Esiste $g \in \operatorname{Aut}E$ tale che $h(x) = gx$. Si ha allora (cap. VII, cor. 6.4) $g = h$.

2. Rivestimenti associati a un rivestimento galoisiano

Sia $p : E \to B$ un rivestimento galoisiano di gruppo $G = \mathrm{Aut}\,E$ e sia F uno spazio discreto sul quale G opera a sinistra. Il gruppo G opera allora continuamente a sinistra su $E \times F$ mediante $g : (x, f) \mapsto (gx, gf)$.

2.1 LEMMA. *Il gruppo G opera propriamente e liberamente su $E \times F$.*

Infatti, se K è un compatto di E e A una parte finita di F, si ha

$$g(K \times A) \cap (K \times A) = (gK \cap K) \times (gA \cap A).$$

Inoltre lo spazio delle orbite $(E \times F)/G$ è separato. Siano infatti (x, f) e (x', f') due punti con orbite distinte. Se $b = p(x)$ e $b' = p(x')$ sono distinti, si possono trovare intorni aperti distinti V e V' di b e b' tali che $V \cap V' = \varnothing$. Gli aperti $p^{-1}(V) \times Gf$ e $p^{-1}(V') \times Gf'$ sono allora intorni disgiunti e invarianti per G delle due orbite. Se $p(x) = p(x')$, esiste $\gamma \in G$ tale che $x' = \gamma x$, e si può trovare un intorno aperto U di x tale che le restrizioni di p a U e $U' = \gamma U$ siano omeomorfismi. Gli aperti

$$W = \bigcup_{g \in G} gU \times \{gf\}, \qquad W' = \bigcup_{g \in G} gU' \times \{gf'\}$$

sono allora intorni disgiunti e invarianti per G delle due orbite.

Di conseguenza:

2.2 LEMMA. *La proiezione $\pi_F : E \times F \to E_F = (E \times F)/G$ è un rivestimento.*

La proiezione $(x, f) \mapsto p(x)$ di $E \times F$ su B è compatibile con le operazioni di G. Determina dunque un'applicazione continua $p_F : E_F \to B$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{p_1} & E \\ {\scriptstyle \pi_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ E_F & \xrightarrow[p_F]{} & B \end{array}$$

sia commutativo. Si ha allora:

2.3 PROPOSIZIONE. *L'applicazione $p_F : E_F \to B$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Siano $b \in B$, $x \in p^{-1}(b)$, V un intorno distinto connesso di b e s una sezione sopra V tale che $s(b) = x$. Per ogni $f \in F$ sia $\sigma_f : V \to E_F$ definita da $y \mapsto \pi_F(s(y), f)$. Sono verificate le proprietà seguenti:

i) σ_f è una sezione di p_F sopra V;

ii) $\sigma_f(V)$ è aperto in $p_F^{-1}(V)$: $\pi_F^{-1}(\sigma_f(V)) = G(s(V) \times \{f\})$;

iii) $\sigma_f(V) \cap \sigma_{f'}(V) = \varnothing$ per $f \neq f'$: se $\sigma_f(y) = \sigma_{f'}(z)$, allora $y = p_F(\sigma_f(y)) = p_F(\sigma_{f'}(z)) = z$, e $\pi_F(s(y), f) = \pi_F(s(y), f')$ implica $f = f'$;

iv) $p_F^{-1}(V) = \bigcup_{f \in F} \sigma_f(V)$: se $\pi_F(y, f) \in p_F^{-1}(V)$, esiste $g \in G$ tale che $gy \in s(V)$, e allora $\pi_F(y, f) = \sigma_{gf}(p(y))$.

Pertanto $p_F : E_F \to B$ è un rivestimento. c.v.d.

La sua fibra è isomorfa a F. Si dice che $p_F : E_F \to B$ è il rivestimento di fibra F associato al rivestimento galoisiano $p : E \to B$ mediante l'azione di G su F.

2.4 PROPOSIZIONE. *Affinché il rivestimento E_F associato a E sia connesso è necessario e sufficiente che G operi transitivamente su F.*

Dimostrazione. Se F' è un sottospazio di F invariante per G ($GF' \subset F'$), $E \times F'$ è aperto e chiuso in $E \times F$ e stabile per G; quindi $\pi_F(E \times F')$ è aperto e chiuso in E_F. Ciò mostra che, se G non opera transitivamente, E_F non è connesso.

Viceversa supponiamo che G operi transitivamente. Se f e f' sono due punti di F, esiste $g \in G$ tale che $f' = gf$. Si ha dunque $E_F = \pi_F(E \times \{f\})$, e quindi E_F è connesso. c.v.d.

2.5 Un caso particolare importante è quello in cui F è lo spazio omogeneo G/H associato a un sottogruppo H di G. Indicando con $k : E \to E \times G/H$ l'applicazione $x \mapsto (x, H)$, con $\omega_H : E \to E/H$ la proiezione canonica, con $h : E/H \to E_{G/H}$ l'applicazione indotta da k e con $q_H : E/H \to B$ quella indotta da p, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{k} & E \times G/H \\ {\scriptstyle \omega_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{G/H}} \\ E/H & \xrightarrow{h} & E_{G/H} \\ & {\scriptstyle q_H}\searrow & \downarrow{\scriptstyle p_{G/H}} \\ & & B \end{array}$$

è commutativo. Inoltre (cap. VII, prop. 3.4) $q_H : E/H \to B$ è un rivestimento. Si ha allora:

2.6 TEOREMA. *L'applicazione h è un isomorfismo del rivestimento $q_H : E/H \to B$ sul rivestimento associato $p_{G/H} : E_{G/H} \to B$.*

Dimostrazione. L'applicazione h è continua e aperta. Basta dunque verificare che sia biiettiva. È suriettiva, poiché ogni elemento di $E_{G/H}$ è della forma $\pi_{G/H}(x,H) = h\omega_H(x)$. È anche iniettiva: se $h\omega_H(x) = h\omega_H(y)$, si ha $\pi_{G/H}(x,H) = \pi_{G/H}(y,H)$; esiste quindi $g \in H$ tale che $y = gx$, e pertanto $\omega_H(x) = \omega_H(y)$. c.v.d.

2.7 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento galoisiano di gruppo G e sia $q : D \to B$ un rivestimento connesso di B. Affinché D sia isomorfo a un rivestimento $q_H : E/H \to B$, con H sottogruppo di G, è necessario e sufficiente che esista un omomorfismo h di E in D.*

Dimostrazione. La condizione è evidentemente necessaria.

Viceversa, se $h : E \to D$ è un omomorfismo di rivestimenti, è un rivestimento di D (cap. VII, prop. 4.3) il cui gruppo degli automorfismi è il sottogruppo $H = \{g \in G \mid h(gx) = h(x) \text{ per ogni } x \in E\}$. Basta mostrare che $h : E \to D$ è galoisiano di gruppo H.

Siano dunque $d \in D$, $x, y \in h^{-1}(d)$ e $g \in G$ tale che $y = gx$. Si ha $q \circ h \circ g = p \circ g = p = q \circ h$. Quindi hg e h sono due sollevamenti di $p : E \to B$ che assumono lo stesso valore in x. Sono uguali; dunque $g \in H$. Ciò mostra che H opera transitivamente su $h^{-1}(d)$. c.v.d.

3. Classificazione dei rivestimenti associati a un rivestimento galoisiano

Se F e F' sono due spazi discreti su cui opera un gruppo discreto G, un'applicazione (risp. biiezione) $h : F \to F'$ si dirà omomorfismo (risp. isomorfismo) se è compatibile con le azioni di G: $h(gf) = gh(f)$. Si indicheranno con $\mathrm{Hom}_G(F,F')$ ($\mathrm{End}_G(F)$ se $F = F'$) l'insieme degli omomorfismi e con $\mathrm{Iso}_G(F,F')$ ($\mathrm{Aut}_G(F)$ se $F = F'$) quello degli isomorfismi.

3.1 Sia $p : E \to B$ galoisiano di gruppo G. La proposizione 2.3 associa a ogni spazio discreto F su cui opera G un rivestimento $p_F : E_F \to B$:

— E_F è lo spazio delle orbite di G che opera su $E \times F$ mediante $g : (x,f) \mapsto (gx, gf)$;

— p_F è l'applicazione indotta dalla proiezione $(x,f)\mapsto p(x)$ di $E\times F$ su B.

Di conseguenza, se h è un omomorfismo di F in uno spazio F' su cui opera G, l'applicazione $(x,f)\mapsto(x,h(f))$ induce $\bar h : E_F \to E_{F'}$, con $\bar h\pi_F(x,f)=\pi_{F'}(x,h(f))$. Si ha dunque $p_{F'}\circ\bar h = p_F$: $\bar h$ è un omomorfismo dei rivestimenti associati.

Se h è suriettivo (risp. iniettivo), anche $\bar h$ lo è. Si ha inoltre:

3.2 PROPOSIZIONE. *La corrispondenza $h\mapsto\bar h$ è una biiezione di* $\mathrm{Hom}_G(F,F')$ *sull'insieme* $\mathrm{Hom}_B(E_F,E_{F'})$ *degli omomorfismi di E_F in $E_{F'}$.*

Inoltre, se h è l'identità di F, $\bar h$ è l'identità di E_F. Se $k : F' \to F''$ è un secondo omomorfismo, $\overline{k\circ h}=\bar k\circ\bar h$. Quindi, se h è un isomorfismo, anche $\bar h$ lo è e $\overline{h^{-1}}=(\bar h)^{-1}$.

Dimostrazione. La corrispondenza è iniettiva: $\bar h\pi_F(x,f)=\bar k\pi_F(x,f)$ implica $\pi_{F'}(x,h(f))=\pi_{F'}(x,k(f))$, e quindi $h(f)=k(f)$ per ogni f.

Viceversa sia k un omomorfismo di E_F in $E_{F'}$. Per ogni $(x,f)\in E\times F$ esiste uno e un solo punto $h_x(f)\in F'$ tale che $k\pi_F(x,f)=\pi_{F'}(x,h_x(f))$.

Si ottiene così un'applicazione $h : E\times F\to F'$, che è continua. Infatti, se U è un intorno connesso di x in E tale che $gU\cap U=\varnothing$ per $g\neq e$, π_F è un omeomorfismo di $U\times\{f\}$ su $V=\pi_F(U\times\{f\})$, $\pi_{F'}$ è un omeomorfismo di $U\times\{h_x(f)\}$ su $W=\pi_{F'}(U\times\{h_x(f)\})$, e k è un omeomorfismo di V su W. Quindi $h_x(f)=h_y(f)$ per ogni $y\in U$, mostrando la continuità di h.

Poiché E è connesso, ogni applicazione $x\mapsto h_x(f)$ è costante. Si determina dunque un'applicazione, ancora indicata con h, di F in F', caratterizzata da

$$k\pi_F(x,f)=\pi_{F'}(x,h(f)).$$

Questa è un omomorfismo. Infatti

$$\begin{aligned}\pi_{F'}(x,h(gf)) &= k\pi_F(x,gf)=k\pi_F(g^{-1}x,f)\\ &= \pi_{F'}(g^{-1}x,h(f))=\pi_{F'}(x,gh(f)).\end{aligned}$$

Infine $\bar h=k$, mostrando la suriettività della corrispondenza. c.v.d.

Questa proposizione permette dunque di ricondurre la classificazione a meno di isomorfismo dei rivestimenti associati a $p : E \to B$, e la determinazione degli omomorfismi tra due di essi, ai problemi analoghi per gli spazi su cui opera G.[6]

3.3 Se E_F è un rivestimento connesso associato a E, ossia se G opera transitivamente su F (prop. 2.4), E_F è isomorfo a $q_H : E/H \to B$, dove H è lo stabilizzatore di un punto di F (prop. 3.2 e teor. 2.6).

Se inoltre $E_{F'}$ è un secondo rivestimento connesso associato a E, isomorfo a $q_{H'} : E/H' \to B$, la determinazione di $\mathrm{Hom}_B(E_F, E_{F'})$ si riconduce a quella di $\mathrm{Hom}_G(G/H, G/H')$, oggetto del prossimo paragrafo.

3.4 Osservazione. Se E_F è associato a E, ogni sua componente connessa corrisponde a un'orbita di G in F (prop. 2.4). Quindi, affinché un rivestimento $q : D \to B$ sia isomorfo a un rivestimento associato a E, è necessario e sufficiente che, per ogni componente connessa C di D, esista un omomorfismo di E su C (prop. 2.7 e cap. VII, prop. 2.7).

4. Omomorfismi di spazi omogenei

Sia G un gruppo discreto e siano H e K due sottogruppi.

Se α è un omomorfismo di G/H in G/K, si ha $\alpha(H) = \gamma K$, $\gamma \in G$, e α è l'applicazione $gH \mapsto g\gamma K$. Si deve avere in particolare $h\gamma K = \gamma K$ per ogni $h \in H$, ossia $\gamma^{-1} H \gamma \subset K$.

Viceversa, se $\gamma \in G$ soddisfa quest'inclusione, si ha $gh\gamma K = g\gamma K$ per ogni $g \in G$ e $h \in H$. Quindi $\alpha_\gamma : gH \mapsto g\gamma K$ è un omomorfismo.

Infine, per due elementi γ, γ' con K contenente $\gamma^{-1} H \gamma$ e $(\gamma')^{-1} H \gamma'$, si ha $\alpha_\gamma = \alpha_{\gamma'}$ se e solo se $\gamma K = \gamma' K$. Si è dunque dimostrato:

4.1 TEOREMA. *La corrispondenza $\gamma K \mapsto \alpha_\gamma$, dove $\alpha_\gamma : gH \mapsto g\gamma K$, è una biiezione tra le classi sinistre γK di G/K tali che $\gamma^{-1} H \gamma \subset K$ e* $\mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$.

4.2 COROLLARIO. *L'insieme* $\mathrm{End}_G(G/H)$ *è in corrispondenza biunivoca con le classi sinistre γH tali che $\gamma^{-1} H \gamma \subset H$.*

[6] In termini di categorie: «la categoria dei rivestimenti associati a un rivestimento galoisiano $p : E \to B$ di gruppo G è equivalente alla categoria degli spazi discreti su cui G opera a sinistra».

Osservazioni.

i) Ogni omomorfismo di G/H in G/K è suriettivo.

ii) Se H ha indice finito in G, ogni endomorfismo di G/H è un automorfismo.

iii) Due omomorfismi di G/H in G/K che coincidono in un punto sono uguali.

4.3 PROPOSIZIONE. *Affinché un omomorfismo $\alpha_\gamma : gH \mapsto g\gamma K$ di G/H in G/K sia un isomorfismo è necessario e sufficiente che $\gamma^{-1}H\gamma = K$.*

Dimostrazione. Se $\gamma^{-1}H\gamma = K$, l'applicazione $\beta_{\gamma^{-1}} : gK \mapsto g\gamma^{-1}H$ è l'isomorfismo inverso di α_γ.

Viceversa, se α_γ è un isomorfismo, il suo inverso è della forma $\beta_{\gamma'} : gK \mapsto g\gamma' H$, con $(\gamma')^{-1}K\gamma' \subset H$. Si ha allora $\gamma\gamma' H = H$; dunque esiste $h \in H$ con $\gamma' = \gamma^{-1}h$. Ne segue $h^{-1}\gamma K\gamma^{-1}h \subset H$, ossia $K \subset \gamma^{-1}H\gamma$. c.v.d.

4.4 COROLLARIO. *Affinché esista un isomorfismo di G/H su G/K è necessario e sufficiente che H e K siano sottogruppi coniugati di G.*

4.5 COROLLARIO. *Se H è un sottogruppo di G, il gruppo* $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ *degli automorfismi di G/H è isomorfo al quoziente del normalizzatore di H per H.*

[7]

4.6 PROPOSIZIONE. *Affinché* $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ *operi transitivamente su G/H è necessario e sufficiente che H sia normale in G.*

In questo caso $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ è isomorfo a G/H che opera su sé stesso mediante le traslazioni a sinistra.[VIII.2]

Dimostrazione. Se H è normale, si ha $\alpha_{g^{-1}h}(gH) = hH$. Il gruppo degli automorfismi opera dunque transitivamente.

Viceversa, se opera transitivamente, per ogni $g \in G$ esiste $\gamma \in G$ tale che $\gamma^{-1}H\gamma = H$ e $\alpha_\gamma(H) = \gamma H = gH$. Si ha allora $g = \gamma h$ e quindi $gHg^{-1} = H$. c.v.d.

Interpretando questi risultati mediante 3.2 e 3.3, si ottiene:

[7] Il normalizzatore $N_G(H)$ è l'insieme dei $g \in G$ tali che $gHg^{-1} = H$. È un sottogruppo di G, e H è normale in $N_G(H)$; è il più grande sottogruppo di G che contiene H come sottogruppo normale. H è normale in G se e solo se $N_G(H) = G$.

4.7 TEOREMA. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento galoisiano di gruppo G.*

i) *L'insieme delle classi di isomorfismo dei rivestimenti connessi associati a E è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi di sottogruppi coniugati di G.*

ii) *Un rivestimento connesso associato a E è galoisiano se e solo se corrisponde a un sottogruppo normale H di G. Il suo gruppo degli automorfismi è allora isomorfo a G/H.*

Osservazione. Questo teorema giustifica il termine «galoisiano» attribuito ai rivestimenti. Mostra infatti che la classificazione dei rivestimenti connessi associati a un rivestimento galoisiano è formalmente analoga alla classificazione delle estensioni intermedie di un'estensione galoisiana di un campo perfetto K. Giustifica anche la terminologia «rivestimento normale», talvolta usata per rivestimento galoisiano.

Esercizi.

Sia $p : E \to B$ un rivestimento galoisiano e sia $q : D \to B$ un rivestimento connesso associato a E. Se il numero di fogli di D è finito, ogni endomorfismo di D è un automorfismo.[VIII.3]

5. Rivestimenti universali

5.1 DEFINIZIONE. *Un rivestimento universale di uno spazio B è un rivestimento galoisiano $p : E \to B$ tale che ogni rivestimento di B sia isomorfo a un rivestimento associato a E.*

Un rivestimento universale di B è dunque un rivestimento galoisiano $p : E \to B$ tale che per ogni rivestimento connesso $q : D \to B$ esista un omomorfismo di E su D (prop. 2.7).

In queste condizioni i paragrafi 3 e 4 precedenti permettono di dare una classificazione completa delle classi di isomorfismo dei rivestimenti di B.

5.2 PROPOSIZIONE. *Due rivestimenti universali di B sono isomorfi.*

Infatti (prop. 2.7), se $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ sono due rivestimenti universali, esistono un omomorfismo h di E su E' e un omomorfismo h' di E' su E. Ma allora (prop. 1.7) $h' \circ h$ è un automorfismo di E e $h \circ h'$ un automorfismo di E'. Di conseguenza h e h' sono isomorfismi.

Nel capitolo seguente si mostrerà che, sotto opportune ipotesi locali, uno spazio B possiede un rivestimento universale.

CAPITOLO IX

Rivestimenti e gruppo fondamentale

1. Due lemmi fondamentali

1.1 LEMMA. *Ogni rivestimento del segmento $I = [0,1]$ è banale.*

1.2 LEMMA. *Ogni rivestimento del quadrato $I \times I$ è banale.*

Le dimostrazioni di questi due lemmi utilizzano il risultato seguente:

1.3 LEMMA: NUMERO DI LEBESGUE DI UN RICOPRIMENTO. *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $(U_j)_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di X. Esiste un numero $\lambda > 0$ tale che ogni sottospazio di X di diametro minore di λ sia contenuto in almeno uno degli aperti U_j.*

Dimostrazione. Supponiamo che per ogni intero n esista una palla chiusa B_n di centro x_n e raggio $1/n$ in X non contenuta in alcun aperto del ricoprimento, e sia x un punto di accumulazione di (x_n). Se U_j contiene x, esiste un intero M tale che la palla chiusa B di centro x e raggio $1/M$ sia contenuta in U_j. Passando a una sottosuccessione convergente a x, si può trovare $N \geq 2M$ tale che per $n \geq N$ la distanza di x_n da x sia minore di $1/(2M)$. Allora $B_n \subset B \subset U_j$, assurdo.

Esiste dunque $\lambda > 0$ tale che ogni palla chiusa di raggio minore di λ, e a maggior ragione ogni sottospazio di diametro minore di λ, sia contenuto in almeno uno degli aperti U_j. c.v.d.

Dimostrazione del lemma 1.1. Sia $p : E \to I$ un rivestimento. Esiste $n > 0$ tale che il rivestimento sia banale sopra ciascun intervallo $S_i = [i/n, (i+1)/n]$, $0 \leq i \leq n-1$. Sia $\Phi_i : p^{-1}(S_i) \to S_i \times F_i$ una trivializzazione.

Esiste una biiezione $g : F_1 \to F_0$ tale che $\Phi_0(x) = (p(x), gp_2\Phi_1(x))$ per ogni $x \in p^{-1}(1/n)$. Si può allora definire una trivializzazione Ψ di p sopra

$S_1 \cup S_0$ ponendo

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Phi_0(x) & p(x) \in S_0, \\ (p(x), g p_2 \Phi_1(x)) & p(x) \in S_1. \end{cases}$$

Si ottiene così, passo dopo passo, una trivializzazione sopra I. c.v.d.

Dimostrazione del lemma 1.2. Sia $p : E \to I \times I$ un rivestimento. Come prima, esiste $n > 0$ tale che sia banale sopra ciascun quadrato

$$S_{ij} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right].$$

Sia $\Phi_{ij} : p^{-1}(S_{ij}) \to S_{ij} \times F_{ij}$ una trivializzazione. Poiché $S_{00} \cap S_{10}$ è connesso, esiste una biiezione $g : F_{10} \to F_{00}$ tale che $\Phi_{00}(x) = (p(x), g p_2 \Phi_{10}(x))$ per ogni $x \in p^{-1}(S_{10} \cap S_{00})$. Come in 1.1, si costruisce una trivializzazione sopra $S_{00} \cup S_{10}$, poi, procedendo per righe, sopra $I \times I$. c.v.d.

2. Gruppo fondamentale di un rivestimento

Sia $p : E \to B$ un rivestimento e sia b un punto di B.

2.1 PROPOSIZIONE. *Per ogni cammino $c : I \to B$ di origine b e ogni punto $x \in p^{-1}(b)$ esiste uno e un solo sollevamento $\gamma : I \to E$ di c tale che $\gamma(0) = x$.*

Dimostrazione. Siano $q : D \to I$ il rivestimento immagine inversa di E mediante c e C l'omomorfismo di D in E sopra c.

Il rivestimento D è banale; esiste dunque una sezione s di q sopra I tale che $s(0) = (0,x)$. Il cammino $\gamma = C \circ s$ è allora un sollevamento di c con origine x. Poiché I è connesso, tale sollevamento è unico. c.v.d.

2.2 PROPOSIZIONE. *Siano c e c' due cammini di origine b in B aventi lo stesso estremo finale, e siano γ e γ' i loro sollevamenti di origine $x \in p^{-1}(b)$. Se c e c' sono omotopi, γ e γ' hanno lo stesso estremo finale e sono omotopi.*

Dimostrazione. Sia $h : I \times I \to B$ un'omotopia da c a c':

$$h(t,0) = c(t), \quad h(t,1) = c'(t), \quad h(0,s) = b, \quad h(1,s) = c(1) = c'(1).$$

Si costruisce come in 2.1 un sollevamento $H : I \times I \to E$ di h con $H(0,0) = x$. Per l'unicità in 2.1 si ha

$$H(t,0) = \gamma(t), \qquad H(t,1) = \gamma'(t),$$
$$H(0,s) = x, \qquad H(1,s) = \gamma(1) = \gamma'(1).$$

Quindi γ e γ' hanno lo stesso estremo finale e sono omotopi. c.v.d.

2.3 COROLLARIO. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso per archi. Le due proprietà seguenti sono equivalenti:*

i) *E è semplicemente connesso;*

ii) *due lacci c e c' di base b in B sono omotopi se, per un punto x di $p^{-1}(b)$, i loro sollevamenti di origine x hanno lo stesso estremo finale.*

[IX.1] Infatti, se E è semplicemente connesso, due cammini in E con gli stessi estremi sono omotopi (cap. V, prop. 4.6).

Viceversa, se c è un laccio di base x in E, $p \circ c$ è omotopo al laccio costante $c_b = p \circ c_x$. Quindi c è omotopo a c_x ed E è semplicemente connesso.

Si ottiene analogamente il teorema seguente:

2.4 TEOREMA. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento, e siano $x \in E$ e $b = p(x)$. L'omomorfismo $p_* : \pi_1(E,x) \to \pi_1(B,b)$ è iniettivo.*

2.5 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento e siano $x, x' \in p^{-1}(b)$. Se x e x' appartengono alla stessa componente connessa per archi di E, i sottogruppi $p_*\pi_1(E,x)$ e $p_*\pi_1(E,x')$ sono coniugati in $\pi_1(B,b)$.*

Sia infatti γ un cammino in E da x' a x. L'applicazione $c = p \circ \gamma$ è un laccio di base b. Il cammino γ determina un isomorfismo di $\pi_1(E,x)$ su $\pi_1(E,x')$ (cap. V, prop. 2.3) che, per proiezione, diventa la coniugazione $\alpha \mapsto [c]\alpha[\bar{c}]$.

Viceversa:

2.6 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento e siano $x \in E$, $b = p(x)$. Per ogni sottogruppo H di $\pi_1(B,b)$ coniugato a $p_*\pi_1(E,x)$ esiste $x' \in p^{-1}(b)$ tale che $H = p_*\pi_1(E,x')$.*

Supponiamo infatti $H = [c]^{-1}(p_*\pi_1(E,x))[c]$ e sia γ il sollevamento di c di origine x. Se x' è l'estremo finale di γ, si ha (prop. 2.5) $H = p_*\pi_1(E,x')$.

2.7 PROPOSIZIONE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso per archi e siano $x \in E$, $b = p(x)$. Siano c, c' due lacci di base b e γ, γ' i loro sollevamenti di origine x. Affinché i sollevamenti abbiano lo stesso estremo finale è necessario e sufficiente che $[c][c']^{-1} \in p_*\pi_1(E,x)$.*

Infatti, se γ e γ' hanno lo stesso estremo finale, $\gamma\bar{\gamma}'$ è un laccio di base x la cui proiezione è $c\bar{c}'$. Viceversa, se $[c\bar{c}'] \in p_*\pi_1(E,x)$, $c\bar{c}'$ è la proiezione di un laccio λ di base x (prop. 2.2); si ha allora $\lambda(1/2) = \gamma(1) = \gamma'(1)$.

Si può anche osservare che per ogni $x' \in p^{-1}(b)$ esiste un laccio di base b il cui sollevamento di origine x termina in x'. Di conseguenza:

2.8 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 2.7, la fibra $p^{-1}(b)$ ha la stessa cardinalità dello spazio delle classi laterali di $p_*\pi_1(E,x)$ in $\pi_1(B,b)$.*

In particolare E è un rivestimento a n fogli se e solo se $p_*\pi_1(E,x)$ ha indice finito n. Si ha dunque:

2.9 TEOREMA. *Sia B uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semplicemente connesso. Ogni rivestimento di B è banale.*

Infatti, se $p : E \to B$ è un rivestimento, ogni componente connessa per archi C di E è un rivestimento connesso per archi di B (cap. VII, prop. 2.7). Ma allora (cor. 2.8) $p : C \to B$ ha un foglio, e p è un omeomorfismo di C su B.

Esempi. Tutti i rivestimenti di $\mathbb{R}^m$, di D^m (e più generalmente di uno spazio contraibile localmente connesso per archi), di S^m per $m \geq 2$, dello spazio proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$, ecc., sono banali.

3. Sollevamenti delle applicazioni

3.1 LEMMA FONDAMENTALE. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento connesso per archi e siano $x \in E$, $b = p(x)$. Affinché p sia un omeomorfismo è necessario e sufficiente che p_* sia un isomorfismo di $\pi_1(E,x)$ su $\pi_1(B,b)$.*

Infatti (cor. 2.8) entrambe le proprietà equivalgono al fatto che p sia un rivestimento a un foglio.

3.2 TEOREMA. *Siano $p : E \to B$ un rivestimento, X uno spazio connesso e localmente connesso per archi e $f : X \to B$ un'applicazione continua. Siano $x \in X$, $b = f(x)$ e $y \in p^{-1}(b)$. Esiste un sollevamento $F : X \to E$ di f con $F(x) = y$ se e solo se*

$$f_*\pi_1(X,x) \subset p_*\pi_1(E,y).$$

Il sollevamento è allora unico (cap. VII, cor. 6.3).

Dimostrazione. La condizione è necessaria, poiché da $f = p \circ F$ segue $f_* = p_* \circ F_*$.

Supponiamo viceversa che valga l'inclusione. Siano $q : D \to X$ il rivestimento immagine inversa di E mediante f e Φ l'omomorfismo di D in E sopra f. La componente connessa per archi C del punto (x,y) in D è un rivestimento connesso per archi di X.

Sia c un laccio di base x in X. Poiché $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_*$, esiste un laccio γ di base y in E tale che $f \circ c = p \circ \gamma$ (prop. 2.1 e 2.2). L'applicazione $\lambda : t \mapsto (c(t), \gamma(t))$ è un laccio di base (x,y) in C con $q \circ \lambda = c$. Quindi $q_* : \pi_1(C,(x,y)) \to \pi_1(X,x)$ è suriettivo.

Pertanto (teor. 2.4 e lemma 3.1) $q|_C$ è un omeomorfismo di C su X, e $F = \Phi \circ (q|_C)^{-1}$ è un sollevamento di f con $F(x) = y$. c.v.d.

3.3 COROLLARIO. *Siano $p : E \to B$ un rivestimento, X uno spazio localmente connesso per archi e semplicemente connesso e $f : X \to B$ continua. Per ogni $x \in X$ e $y \in p^{-1}(f(x))$ esiste uno e un solo sollevamento $F : X \to E$ di f con $F(x) = y$.*

3.4 COROLLARIO: TEOREMA DI BORSUK–ULAM. *Sia f un'applicazione continua della sfera S^m, $m \geq 2$, in $\mathbb{R}^2$. Esiste un punto $x \in S^m$ tale che $f(x) = f(-x)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $f(x) \neq f(-x)$ per ogni x. L'applicazione continua

$$g : S^m \to S^1, \qquad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

verifica $g(-x) = -g(x)$. Determina dunque un'applicazione continua $h : \mathrm{P}\mathbb{R}^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^1$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\ g\ } & S^1 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{P}\mathbb{R}^m & \xrightarrow[\ h\ ]{} & \mathrm{P}\mathbb{R}^1 \end{array}$$

sia commutativo. Poiché $m \geq 2$, $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^m, q(x)) = \mathbb{Z}_2$; dunque h_* verso $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^1, h(q(x))) \simeq \mathbb{Z}$ è nullo. Esiste quindi un sollevamento $H : \mathrm{P}\mathbb{R}^m \to S^1$ di h con $H(q(x)) = g(x)$.

Ma g e $H \circ q$ sono due sollevamenti di $h \circ q$ coincidenti in x, dunque uguali. È assurdo, perché $g(x) = H(q(x)) = H(q(-x)) = g(-x) = -g(x)$. c.v.d.

Esercizi.

Si ha un risultato analogo per le applicazioni continue di S^m, $m \geq 1$, in $\mathbb{R}$.

Ipotesi. Nel seguito del capitolo B indica uno spazio connesso e localmente connesso per archi.

3.5 PROPOSIZIONE. *Siano $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ due rivestimenti connessi, $b \in B$, $x \in p^{-1}(b)$ e $x' \in (p')^{-1}(b)$. Esiste un omomorfismo $h : E \to E'$ con $h(x) = x'$ se e solo se $p_*\pi_1(E,x) \subset p'_*\pi_1(E',x')$.*

Infatti un omomorfismo $h : E \to E'$ è un sollevamento della proiezione $p : E \to B$.

3.6 COROLLARIO. *Siano $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ due rivestimenti connessi, $h : E \to E'$ un omomorfismo, $x \in E$ e $x' = h(x)$. Affinché h sia un isomorfismo è necessario e sufficiente che $p_*\pi_1(E,x) = p'_*\pi_1(E',x')$.*

3.7 COROLLARIO. *Due rivestimenti connessi $p : E \to B$ e $p' : E' \to B$ sono isomorfi se e solo se i sottogruppi $p_*\pi_1(E,x)$, $x \in p^{-1}(b)$, e $p'_*\pi_1(E',x')$, $x' \in (p')^{-1}(b)$, sono coniugati in $\pi_1(B,b)$.*

Esercizi.

Nelle ipotesi di 3.5, siano $G = \pi_1(B,b)$, $H = p_*\pi_1(E,x)$ e $K = p'_*\pi_1(E',x')$. L'insieme $\mathrm{Hom}_B(E,E')$ è isomorfo a $\mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$ (cap. VIII, §4). L'insieme degli isomorfismi di E su E' è isomorfo a $\mathrm{Iso}_G(G/H, G/K)$.

4. Automorfismi di rivestimenti

4.1 TEOREMA. *Siano $p : E \to B$ un rivestimento connesso, $x \in E$, $b = p(x)$ e N il normalizzatore di $p_*\pi_1(E,x)$ in $\pi_1(B,b)$. Esiste uno e un solo omomorfismo h di N sul gruppo* $\mathrm{Aut}E$ *con la proprietà seguente: se c è un laccio di base b con $[c] \in N$ e γ è il suo sollevamento di origine x, l'automorfismo $h([c])$ trasforma x nell'estremo finale $\gamma(1)$.*

Dimostrazione. Siano c un tale laccio, γ il sollevamento e $y = \gamma(1)$. Il punto y dipende soltanto da $[c]$, e si ha

$$p_*\pi_1(E,y) = [c]^{-1}(p_*\pi_1(E,x))[c] = p_*\pi_1(E,x),$$

poiché $[c]$ appartiene al normalizzatore

di $p_*\pi_1(E,x)$. Esiste quindi un unico automorfismo $h([c])$ che trasforma x in y (prop. 3.5 e cor. 3.6).

Viceversa, se k è un automorfismo di E, esiste un cammino γ da x a $y = k(x)$. Si ha

$$\begin{aligned}[p\circ\gamma]^{-1}(p_*\pi_1(E,x))[p\circ\gamma] &= p_*\pi_1(E,y)\\ &= p_*\pi_1(E,k(x))\\ &= p_*k_*\pi_1(E,x) = p_*\pi_1(E,x).\end{aligned}$$

Dunque $[p\circ\gamma]\in N$ e $k = h([p\circ\gamma])$.

Infine, se c' è un secondo laccio con $[c']\in N$ e γ' il suo sollevamento di origine x, $\gamma(h([c])\gamma')$ è il sollevamento di cc' di origine x. Quindi

$$h([c][c'])(x) = h([c])\gamma'(1) = h([c])h([c'])(x).$$

Ne segue $h([c][c']) = h([c])h([c'])$: h è un omomorfismo di N su $\mathrm{Aut}\,E$. c.v.d.

4.2 PROPOSIZIONE. *Nelle ipotesi di 4.1, il nucleo dell'omomorfismo $h : N \to \mathrm{Aut}\,E$ è $p_*\pi_1(E,x)$.*

Infatti un laccio c di base b si solleva a un laccio di base x se e solo se $[c]\in p_*\pi_1(E,x)$.

4.3 TEOREMA. *Un rivestimento connesso $p : E \to B$ è galoisiano se e solo se, per ogni $b\in B$ e ogni $x\in p^{-1}(b)$, $p_*\pi_1(E,x)$ è normale in $\pi_1(B,b)$.*

Basta peraltro che la condizione sia soddisfatta per una scelta di b e x (prop. 2.5).

Dimostrazione. Supponiamo E galoisiano e sia c un laccio di base b. Se γ è il sollevamento di origine x, esiste un automorfismo k che trasforma x in $y = \gamma(1)$. Allora

$$[c]^{-1}(p_*\pi_1(E,x))[c] = p_*\pi_1(E,y) = p_*\pi_1(E,k(x)) = (p\circ k)_*\pi_1(E,x) = p_*\pi_1(E,x).$$

Ciò mostra la normalità.

Viceversa, se il sottogruppo è normale, il suo normalizzatore è $\pi_1(B,b)$. Se $y\in p^{-1}(b)$ e c è un laccio il cui sollevamento di origine x termina in y, $h([c])$ trasforma x in y. Quindi $\mathrm{Aut}\,E$ opera transitivamente sulla fibra. c.v.d.

4.4 COROLLARIO. *Se $\pi_1(B,b)$ è commutativo, ogni rivestimento connesso di B è galoisiano.*

4.5 COROLLARIO. *Sia $p : E \to B$ galoisiano, $x \in E$ e $b = p(x)$. L'omomorfismo h di 4.2 induce un isomorfismo di $\pi_1(B,b)/p_*\pi_1(E,x)$ su* $\mathrm{Aut}\,E$.

4.6 COROLLARIO. *Se $p : E \to B$ è un rivestimento connesso ed E è semplicemente connesso, il rivestimento è galoisiano e il suo gruppo degli automorfismi è isomorfo a $\pi_1(B,b)$.*

Questo corollario permette di determinare il gruppo fondamentale di uno spazio B connesso e localmente connesso per archi conoscendo gli automorfismi di un suo rivestimento semplicemente connesso: se $x \in p^{-1}(b)$, $k \in \mathrm{Aut}\,E$ e γ è un cammino da x a $k(x)$, a k corrisponde la classe $[p \circ \gamma]$.

In particolare, se G è discreto e opera propriamente e liberamente su uno spazio E localmente compatto, localmente connesso per archi e semplicemente connesso, il gruppo fondamentale di E/G è isomorfo a G: $p : E \to E/G$ è infatti galoisiano di gruppo G.

4.7 Esempi.

i) Il rivestimento $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$ (cap. VII, esempio 3.3) è semplicemente connesso; i suoi automorfismi sono le traslazioni $x \mapsto x+n$, $n \in \mathbb{Z}$. Dunque $\pi_1(S^1, e) \simeq \mathbb{Z}$, e la classe del laccio $t \mapsto e^{2\pi i t}$ genera il gruppo (cap. VI, teor. 2.1).

ii) Per $m \geq 2$, $p : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è semplicemente connesso. Quindi $\pi_1(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{Z}_2$ (cap. VI, cor. 5.6).

iii) Sia L_p^{2m+1} lo spazio lenticolare di dimensione $2m+1$ e gruppo $\mathbb{Z}_p$ (cap. II, esercizio 1.7). Per $m \geq 1$, $p : S^{2m+1} \to L_p^{2m+1}$ è semplicemente connesso, dunque $\pi_1(L_p^{2m+1}) \simeq \mathbb{Z}_p$.

iv) Sia T il toro di Klein; $p : \mathbb{R}^2 \to T$ è semplicemente connesso. Quindi $\pi_1(T)$ è un gruppo su due generatori t, s con relazione $tst = s$ (cap. VI, esercizio 5.13).

4.8 TEOREMA. *Un rivestimento semplicemente connesso $p : E \to B$ è un rivestimento universale.*

Infatti E è galoisiano. Basta verificare che per ogni rivestimento connesso $q : D \to B$ esista un omomorfismo di E su D (cap. VIII, osservazione 3.4), conseguenza immediata della proposizione 3.5.

Il prossimo paragrafo cerca una condizione necessaria e sufficiente perché uno spazio B connesso e localmente connesso per archi possieda un rivestimento semplicemente connesso, dunque universale.

5. Rivestimenti semplicemente connessi

5.1 PROPOSIZIONE. *Affinché B possieda un rivestimento semplicemente connesso è necessario che ogni punto b abbia un intorno V tale che ogni laccio di base b in V sia omotopo in B al laccio costante c_b.*

Infatti, se $p : E \to B$ è semplicemente connesso e s è una sezione sopra un intorno V di b, l'iniezione $i : V \to B$ è $p \circ s$. Induce dunque un omomorfismo banale di $\pi_1(V,b)$ in $\pi_1(B,b)$.

5.2 DEFINIZIONE. *Uno spazio X è semilocalmente semplicemente connesso se ogni punto x ha un intorno U_x tale che ogni laccio di base x in U_x sia omotopo in X al laccio costante c_x.*

Se U_x è connesso per archi, ogni laccio c in U_x è allora omotopo in X al laccio costante $c_{c(0)}$.

Esempi. Uno spazio localmente contraibile è semilocalmente semplicemente connesso. In particolare lo sono le varietà topologiche e i complessi cellulari localmente finiti.

5.3 TEOREMA. *Uno spazio B connesso e localmente connesso per archi possiede un rivestimento semplicemente connesso se e solo se è semilocalmente semplicemente connesso.*

Resta da verificare la sufficienza della condizione (prop. 5.1).

Dimostrazione. Diremo distinto un aperto V di B connesso per archi e tale che ogni laccio c in V sia omotopo in B al laccio costante $c_{c(0)}$. Per l'ipotesi, questi aperti ricoprono B.

Sia $b \in B$ e sia E l'insieme delle classi di omotopia dei cammini di origine b in B. La corrispondenza $c \mapsto c(1)$ determina un'applicazione p di E su B, che è connesso per archi.

Per ogni aperto distinto V scegliamo un punto $b_V \in V$ e poniamo $F_V = p^{-1}(b_V) \subset E$. Considereremo questi sottoinsiemi non vuoti come spazi discreti.

Se c è un cammino di origine b che termina in V, esistono un cammino λ da b_V a $c(1)$ in V e un cammino γ da b a b_V in B tali che $[c] = [\gamma\lambda]$. Si ha $[\gamma] = [c][\bar{\lambda}]$; poiché V è distinto, la classe $[\gamma] \in F_V$ è indipendente dalle scelte di γ e λ. Si può dunque definire

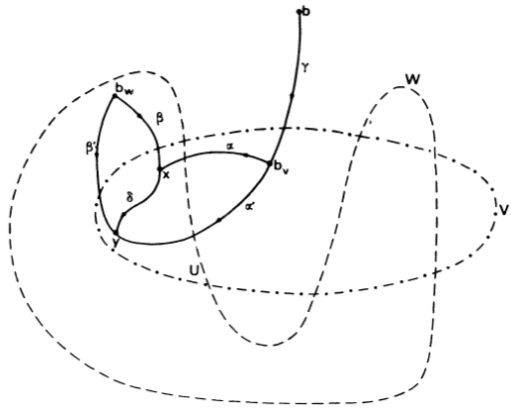
$$\Phi_V : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times F_V, \qquad \Phi_V([c]) = (p([c]), [\gamma]).$$

È una biiezione: Φ_V^{-1} associa a $(x, [\gamma])$ la classe $[\gamma\lambda]$, dove λ è un cammino in V da b_V a x.

Se W è un secondo aperto distinto, l'applicazione

$$\Phi_W \Phi_V^{-1} : (V \cap W) \times F_V \longrightarrow (V \cap W) \times F_W$$

è continua. Basta infatti verificare che per ogni $[\gamma] \in F_V$, l'applicazione $p_2 \Phi_W \Phi_V^{-1}$ su $(V \cap W) \times \{[\gamma]\}$ sia localmente costante. Ciò risulta immediatamente dalla figura e dalle relazioni seguenti, dove x e y appartengono alla stessa componente connessa di $V \cap W$:



$$\begin{aligned} p_2 \Phi_W \Phi_V^{-1}(x, [\gamma]) &= [\gamma\alpha\beta] = [\gamma][\alpha\beta], \\ p_2 \Phi_W \Phi_V^{-1}(y, [\gamma]) &= [\gamma\alpha'\beta'] = [\gamma][\alpha'\beta'], \\ &= [\alpha\delta\bar{\delta}\beta] = [\alpha'\bar{\delta}\beta] = [\alpha'\beta']. \end{aligned}$$

Esiste dunque una e una sola topologia su E avente, per ogni aperto distinto V, le proprietà seguenti:

i) $p^{-1}(V)$ è aperto in E;

ii) Φ_V è un omeomorfismo di $p^{-1}(V)$ su $V \times F_V$.

Allora:

iii) E è uno spazio separato;

iv) $p : E \to B$ è continua;

v) $p : E \to B$ è un rivestimento.

Resta da verificare che E sia semplicemente connesso.

Sia c un cammino di origine b. Per $t \in I$ indichiamo con c_t il cammino $s \mapsto c(ts)$: ha origine b ed estremo finale $c(t)$, e $c_0 = c_b$, $c_1 = c$. L'applicazione $\gamma : t \mapsto [c_t]$ è un cammino in E. Infatti, fissati $t \in I$ e un aperto distinto V contenente $c(t)$, γ coincide in un intorno di t con $t' \mapsto \Phi_V^{-1}(c(t'), p_2\Phi_V([c_t]))$. È dunque il sollevamento di c di origine $[c_b]$. Per ogni punto $[c] \in E$ esiste quindi un cammino da $[c_b]$ a $[c]$, sicché E è connesso per archi.

Se ne deduce anche (cor. 2.3) che E è semplicemente connesso. c.v.d.

6. Classificazione dei rivestimenti

Sia B uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso, e sia $b \in B$. Riunendo i risultati di questo capitolo e dei precedenti si ottiene:

6.1 TEOREMA. *Lo spazio B possiede un rivestimento semplicemente connesso $p : E \to B$. Questo è un rivestimento universale, e $G = \mathrm{Aut}E$ è isomorfo a $\pi_1(B,b)$. Se H è un sottogruppo di G, $q_H : E/H \to B$ è un rivestimento connesso di B. Il gruppo fondamentale di E/H è isomorfo a H.*

6.2 TEOREMA. *Sia $q : D \to B$ un rivestimento di B.*

i) *Il gruppo $\pi_1(B,b)$ opera, mediante sollevamento dei cammini, sulla fibra $q^{-1}(b)$.*

ii) *D è connesso se e solo se l'azione è transitiva. In tal caso, se H è lo stabilizzatore di $x \in q^{-1}(b)$, $H = q_*\pi_1(D,x)$ e $q : D \to B$ è isomorfo a $q_H : E/H \to B$.*

iii) *$q : D \to B$ è isomorfo a un rivestimento associato a quello universale mediante questa azione di $\pi_1(B,b)$ su $q^{-1}(b)$.*

iv) *Un rivestimento $q' : D' \to B$ è isomorfo a $q : D \to B$ se e solo se le azioni di $\pi_1(B,b)$ sulle due fibre sono isomorfe.*

6.3 TEOREMA. *Siano H e K due sottogruppi di $G = \mathrm{Aut}\,E$.*

i) *$q_H : E/H \to B$ è galoisiano se e solo se H è normale in G. Il suo gruppo degli automorfismi è allora isomorfo a G/H.*

ii) *I rivestimenti $q_H : E/H \to B$ e $q_K : E/K \to B$ sono isomorfi se e solo se H e K sono coniugati in G.*

iii) *L'insieme $\mathrm{Hom}_B(E/H, E/K)$ degli omomorfismi dei rivestimenti è isomorfo a $\mathrm{Hom}_G(G/H, G/K)$.*

[8] *Esempio.* Per $m \geq 2$ la sfera S^m è semplicemente connessa. Quindi ogni rivestimento connesso non banale di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è isomorfo a $p : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

6.4 Esempio: classificazione dei rivestimenti connessi di S^1.

Il rivestimento $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$ è semplicemente connesso e il suo gruppo degli automorfismi è quello delle traslazioni $x \mapsto x + n$, $n \in \mathbb{Z}$. Quindi ogni rivestimento connesso di S^1 è galoisiano ed è isomorfo a q_0 oppure a uno dei rivestimenti $q_n : S^1 \to S^1$ (cap. VII, esempio 3.3).

Più precisamente:

i) un rivestimento connesso non compatto di S^1 è isomorfo a $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$;

ii) un rivestimento connesso compatto a n fogli è isomorfo a $q_n : S^1 \to S^1$.

Il gruppo degli automorfismi di q_n, $n > 0$, è quello delle trasformazioni $z \mapsto z\exp(2\pi im/n)$, $m \in \mathbb{Z}$, ed è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

Ogni omomorfismo di $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$ in $q_n : S^1 \to S^1$ è l'applicazione $t \mapsto \exp(2\pi i(t + k)/n)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.[IX.2]

Per $n > 0$ non esistono omomorfismi di q_n in q_0.

Se n non è multiplo di m, non esistono omomorfismi di q_n in q_m.

Se $n = mp$, ogni omomorfismo di q_n in q_m è il composto di $q_p : S^1 \to S^1$ con un automorfismo del rivestimento q_m.

[8] In termini di categorie: «la categoria dei rivestimenti di B è equivalente alla categoria degli spazi discreti sui quali opera il gruppo fondamentale $\pi_1(B, b)$».

6.5 Esercizio: classificazione dei rivestimenti connessi del toro di Klein.

Sia G il gruppo di trasformazioni del piano $\mathbb{R}^2$ generato da $a : (x,y) \mapsto (-x, y+1)$ e dalla traslazione $b : (x,y) \mapsto (x+1, y)$; G ha due generatori a, b e una relazione $bab = a$.

Il gruppo opera propriamente e liberamente su $\mathbb{R}^2$ e lo spazio delle orbite $T = \mathbb{R}^2/G$ è il toro di Klein; $p : \mathbb{R}^2 \to T$ è dunque un rivestimento semplicemente connesso di gruppo G.

i) Ogni elemento di G si scrive in modo unico $a^m b^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Si ha

$$a^m b^n a^r b^s = a^{m+r} b^{(-1)^r n + s}, \qquad (a^m b^n)^{-1} = a^{-m} b^{(-1)^{m+1} n}.$$

ii) Il sottogruppo Γ generato da b è normale e isomorfo a $\mathbb{Z}$. Il quoziente G/Γ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Ogni sottogruppo di G è ciclico, $H_{m,n} = \langle a^m b^n \rangle$, oppure ha due generatori, $K_{m,n,p} = \langle a^m b^n, b^p \rangle$, con $m \neq 0$, $p > 0$ e $0 \leq n < p$.

iv) Affinché $H_{m,n}$ e $K_{m,n,p}$ siano normali in G è necessario e sufficiente che m sia pari.[IX.3]

v) I rivestimenti $q_{m,n} : E_{m,n} = \mathbb{R}^2/H_{m,n} \to T$ e $q_{m,n,p} : E_{m,n,p} = \mathbb{R}^2/K_{m,n,p} \to T$ sono galoisiani per m pari.[IX.3]

vi) $E_{m,n}$ è omeomorfo al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ per m pari e al nastro di Möbius M per m dispari. $E_{m,n,p}$ è omeomorfo al toro T^2 per m pari e al toro di Klein T per m dispari.

vii) Il rivestimento $q_{m,n,p}$ ha $|m|p$ fogli.[IX.4]

6.6 Esercizio: teorema di d'Alembert.

Sia K un'estensione algebrica di grado finito n del campo $\mathbb{C}$.

i) Per ogni $x \in K$ la serie $\exp x = \sum_{p=0}^{\infty} x^p/p!$ è sommabile (esiste una norma su K con $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$). L'applicazione exp è un omomorfismo del gruppo additivo K nel gruppo moltiplicativo $K^* = K - \{0\}$. Il suo nucleo N non è banale.

ii) L'applicazione $\exp : K \to K^*$ è differenziabile e di rango massimo $2n$ in ogni punto di K.

È dunque suriettiva (cap. I, esercizio iii) di 1.9); il suo nucleo è un sottogruppo discreto chiuso di K.

iii) $\exp : K \to K^*$ è un rivestimento. Il gruppo fondamentale di K^* è isomorfo a N, dunque non banale.

iv) Poiché K^* ha lo stesso tipo di omotopia della sfera S^{2n-1}, si ha $n = 1$.

Di conseguenza $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso: ogni polinomio a coefficienti complessi di grado almeno 1 ha una radice.

CAPITOLO X

Applicazioni dei rivestimenti

1. Teorema di Van Kampen: dimostrazione

I teoremi 6.1 e 6.2 del capitolo precedente permettono di dimostrare il teorema di Van Kampen (cap. VI, teor. 4.6) quando X è connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso.

Siano X_1 e X_2 due aperti connessi non vuoti che ricoprono X, con intersezione $X_0 = X_1 \cap X_2$ connessa non vuota. Fissato $x \in X_0$, si indicano con

— $\pi_1(X_a)$, $a = 0,1,2$, e $\pi_1(X)$ i gruppi $\pi_1(X_a,x)$ e $\pi_1(X,x)$;

— j_a, $a = 1,2$, l'omomorfismo di $\pi_1(X_0)$ in $\pi_1(X_a)$ indotto dall'iniezione;

— k_a, $a = 0,1,2$, l'omomorfismo di $\pi_1(X_a)$ in $\pi_1(X)$ indotto dall'iniezione.

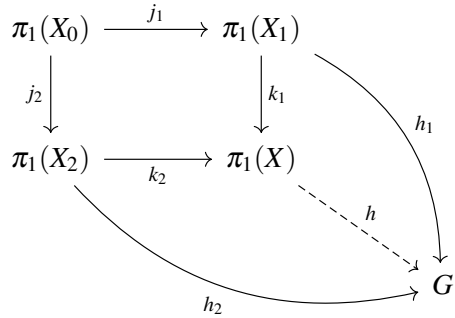
Si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(X_1) \\ {\scriptstyle j_2}\downarrow & \searrow^{k_0} & \downarrow{\scriptstyle k_1} \\ \pi_1(X_2) & \xrightarrow[k_2]{} & \pi_1(X) \end{array}$$

e $\pi_1(X)$ è generato dalle immagini di k_1 e k_2 (cap. VI, prop. 4.1).

1.1 TEOREMA DI VAN KAMPEN. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ possiede la proprietà seguente: se h_a, $a = 1,2$, è un omomorfismo di $\pi_1(X_a)$ in un gruppo G e $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, esiste uno e un solo omomorfismo $h : \pi_1(X) \to G$ tale che $h_1 = h \circ k_1$ e $h_2 = h \circ k_2$.*

Il teorema esprime dunque la commutatività del diagramma



Poiché $\pi_1(X)$ è generato dalle immagini di k_1 e k_2, un tale h è unico. Resta da dimostrarne l'esistenza.

Dimostrazione. Il gruppo $\pi_1(X_1)$ (risp. $\pi_1(X_2)$) opera su G mediante le traslazioni a sinistra $g \mapsto h_1(\alpha)g$, $\alpha \in \pi_1(X_1)$ (risp. $g \mapsto h_2(\beta)g$). Esistono dunque un rivestimento $p_1 : E_1 \to X_1$ (risp. $p_2 : E_2 \to X_2$) e un isomorfismo $r : G \to p_1^{-1}(x)$ (risp. $s : G \to p_2^{-1}(x)$) compatibili con le azioni.

Poiché $h_1 \circ j_1 = h_2 \circ j_2$, i rivestimenti $p_1 : D_1 = p_1^{-1}(X_0) \to X_0$ e $p_2 : D_2 = p_2^{-1}(X_0) \to X_0$ sono isomorfi, ed esiste un isomorfismo $t : D_2 \to D_1$ la cui restrizione alla fibra è $r \circ s^{-1}$.

Sia E lo spazio ottenuto incollando E_2 a E_1 mediante t. Le proiezioni p_1, p_2 determinano un'applicazione continua $p : E \to X$, che è un rivestimento. Se $q : E_1 \sqcup E_2 \to E$ è la proiezione, le restrizioni di q sono isomorfismi di E_1, E_2 sui rivestimenti indotti sopra X_1, X_2.

Il rivestimento $p : E \to X$ determina un omomorfismo $\tilde{h}$ di $\pi_1(X)$ nel gruppo delle permutazioni di $p^{-1}(x)$ e, tenendo conto degli isomorfismi precedenti, si ha

$$\tilde{h}(k_1(\alpha)) \circ (q \circ r) = (q \circ r) \circ h_1(\alpha),$$
$$\tilde{h}(k_2(\beta)) \circ (q \circ s) = (q \circ s) \circ h_2(\beta).$$

Pertanto, se $\pi = q \circ s = q \circ t \circ s = q \circ r$, la corrispondenza $\gamma \mapsto \pi^{-1} \circ \tilde{h}(\gamma) \circ \pi$ determina un omomorfismo $\bar{h}$ di $\pi_1(X)$ nel gruppo delle permutazioni di G tale che

$$\bar{h}(k_1(\alpha))g = h_1(\alpha)g, \qquad \bar{h}(k_2(\beta))g = h_2(\beta)g.$$

Poiché $\pi_1(X)$ è generato dalle immagini di k_1, k_2, ogni permutazione $\bar{h}(\gamma)$ è una traslazione a sinistra per un elemento $h(\gamma) \in G$; $\gamma \mapsto h(\gamma)$ è l'omomorfismo cercato. c.v.d.

Esercizi.

Si ha un risultato analogo quando X è un complesso cellulare localmente finito e X_1, X_2 sono sottocomplessi connessi che lo ricoprono e hanno intersezione connessa.

2. Gruppo fondamentale nelle varietà

Siano M^m una varietà differenziabile connessa senza bordo, N^n una sottovarietà chiusa di M, $x \in M - N$ e i l'iniezione di $U = M - N$ in M.

Se N ha codimensione almeno 2 ($m - n \geq 2$), U è connesso (cap. I, teor. 3.1).[X.1]

2.1 PROPOSIZIONE. *Siano $p : E \to M$, $p' : E' \to M$ due rivestimenti e $k : D = p^{-1}(M - N) \to D' = (p')^{-1}(M - N)$ un omomorfismo dei rivestimenti indotti sopra $M - N$. Se la codimensione di N è almeno 2, k si estende in modo unico a un omomorfismo $h : E \to E'$. Se k è un isomorfismo, anche h lo è.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in N$ si può trovare un intorno aperto V in M e un omeomorfismo $f : V \to \mathbb{R}^m$ tale che $f(V \cap N) = \mathbb{R}^n$. I rivestimenti $E_V \to V$ e $E'_V \to V$ sono banali. Poiché $V - (V \cap N)$ è connesso, la restrizione di k ai rivestimenti D_V, D'_V sopra tale aperto si estende in modo unico a un omomorfismo $k_V : E_V \to E'_V$.

Se (V_i) è una famiglia di aperti con queste proprietà che ricopre N, si estende k a $h : E \to E'$ ponendo $h|_{E_{V_i}} = k_{V_i}$. Infine, se k è un isomorfismo, lo è anche h. c.v.d.

2.2 PROPOSIZIONE. *Sia $q : D \to M - N$ un rivestimento. Se N ha codimensione almeno 3, esiste un rivestimento $p : E \to M$ tale che D sia isomorfo al rivestimento indotto da E sopra $M - N$.*

Questo rivestimento è allora unico a meno di isomorfismo (prop. 2.1).

Dimostrazione. Per ogni $x \in N$ si trova V e un omeomorfismo $f : V \to \mathbb{R}^m$ con $f(V \cap N) = \mathbb{R}^n$. Il rivestimento $q_V : D_V \to V - (V \cap N)$ è banale, poiché $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso per $m - n \geq 3$. Esiste dunque un rivestimento $p_V : E_V \to V$ che induce D_V.

Sia (V_i) una famiglia di tali aperti che ricopre N, con rivestimenti $p_i : E_i \to V_i$ che inducono le restrizioni di D. Se $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, gli isomorfismi determinano in modo unico un isomorfismo di $p_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ su $p_j^{-1}(V_i \cap V_j)$. Incollando a D i rivestimenti E_i si ottiene $p : E \to M$ con la restrizione voluta. c.v.d.

2.3 TEOREMA. *Siano M^m una varietà differenziabile connessa senza bordo, N^n una sottovarietà chiusa, $x \in M - N$ e $i : M - N \to M$ l'iniezione.*

i) *Se N ha codimensione almeno 2, $i_* : \pi_1(M - N, x) \to \pi_1(M, x)$ è suriettivo.*

ii) *Se N ha codimensione almeno 3, i_* è un isomorfismo.*

Il teorema seguirà dalle considerazioni algebriche seguenti.

Siano H, K due gruppi discreti e $h : H \to K$ un omomorfismo. Se K opera su uno spazio discreto F, la formula $x \mapsto h(g)x$, $x \in F$, $g \in H$, determina un'azione di H su F: l'azione associata mediante h all'azione di K.

Se F' è un altro spazio discreto su cui opera K, una biiezione $F \to F'$ compatibile con K è compatibile anche con le azioni associate di H. Si ha allora:

2.4 LEMMA. *L'omomorfismo $h : H \to K$ è suriettivo se e solo se vale la condizione seguente: per due spazi discreti F, F' su cui opera K, ogni biiezione $F \to F'$ compatibile con le azioni associate di H è compatibile anche con le azioni di K.*

Per il viceversa si prendono $F = K/h(H)$ e F' uguale allo stesso insieme con azione banale di K.[X.2]

2.5 LEMMA. *Sia $h : H \to K$ suriettivo. Affinché sia iniettivo è necessario e sufficiente che ogni azione di H su uno spazio discreto F sia associata mediante h a un'azione di K su F.*

Per il viceversa si fa operare H su sé stesso mediante le traslazioni a sinistra.

Traducendo questi lemmi in termini di rivestimenti (cap. IX, teor. 6.2) si ottiene:

2.6 LEMMA. *L'omomorfismo $i_* : \pi_1(M - N, x) \to \pi_1(M, x)$ è suriettivo se e solo se ogni isomorfismo tra le restrizioni a $M - N$ di due rivestimenti di M si estende a un isomorfismo dei rivestimenti.*

[X.2]

2.7 LEMMA. *Affinché i_*, già suriettivo, sia iniettivo è necessario e sufficiente che ogni rivestimento di $M - N$ sia indotto da un rivestimento di M.*

Tenendo conto di questi ultimi lemmi, il teorema 2.3 segue immediatamente dalle proposizioni 2.1 e 2.2.

Esercizi.

Sia M una varietà differenziabile connessa con bordo e sia $x \in M - \partial M$. L'iniezione $i : M - \partial M \to M$ induce un isomorfismo di $\pi_1(M - \partial M, x)$ su $\pi_1(M, x)$.

3. Rivestimenti delle varietà

Nel caso delle varietà si possono caratterizzare i rivestimenti, tra gli omeomorfismi locali, mediante una semplice proprietà di sollevamento dei cammini.

3.1 TEOREMA. *Siano M^m, N^m due varietà topologiche connesse della stessa dimensione e sia $p : M \to N$ un omeomorfismo locale. Affinché sia un rivestimento*

è necessario e sufficiente che per ogni cammino $c : I \to N$ e ogni punto $y \in p^{-1}(c(0))$ esista un sollevamento $\gamma : I \to M$ di c con $\gamma(0) = y$. La condizione è necessaria (cap. IX, prop. 2.1). La dimostrazione del viceversa utilizza i due lemmi seguenti.

3.2 LEMMA. *Siano X connesso, $f : X \to N$ continua e φ, φ' due sollevamenti. Se coincidono in un punto, sono uguali.*

L'insieme in cui coincidono è chiuso, ma è anche aperto: se $\varphi(x) = \varphi'(x)$ e s è una sezione locale passante per quel punto, si ha $\varphi = \varphi' = s \circ f$ in un intorno di x.

3.3 LEMMA. *Per ogni applicazione continua $f : I \times I \to N$ e ogni $y \in p^{-1}(f(0,0))$ esiste un sollevamento $\varphi : I \times I \to M$ con $\varphi(0,0) = y$.*

Di conseguenza, se c, c' sono cammini omotopi e γ, γ' loro sollevamenti con la stessa origine, questi hanno lo stesso estremo finale.

Dimostrazione del lemma 3.3. Sia S l'insieme degli $s \in I$ per cui esiste un sollevamento $\psi_s : I \times [0,s] \to M$ di f con $\psi_s(0,0) = y$. Per $r \leq s$ si ha $\psi_r = \psi_s|_{I \times [0,r]}$ (lemma 3.2).

S non è vuoto, poiché si può sollevare il cammino $t \mapsto f(t,0)$. È aperto: se $s \in S$, si trovano (cap. IX, lemma 1.3) una suddivisione $0 = t_0 < \cdots < t_p = 1$ e $\varepsilon > 0$ tali che ogni $f([t_i, t_{i+1}] \times [a, s+\varepsilon])$, $a = \max(0, s-\varepsilon)$, sia contenuto in un aperto U_i sopra cui esiste una sezione σ_i con $\sigma_i(f(t_i,s)) = \psi_s(t_i,s)$. Si ha $\psi_s = \sigma_i \circ f$ su $[t_i, t_{i+1}] \times [a,s]$ e $\sigma_i \circ f = \sigma_{i+1} \circ f$ su $\{t_{i+1}\} \times [a, s+\varepsilon]$. Si estende dunque ψ_s ponendo $\psi_{s+\varepsilon} = \sigma_i \circ f$ su ciascun rettangolo superiore.

Infine S è chiuso. Sia $r = \sup S$. Si trovano una suddivisione $0 = t_0 < \cdots < t_p = 1$ e $0 < \varepsilon < r$ tali che $f([t_i, t_{i+1}] \times [r-\varepsilon, r])$ sia contenuto in un aperto U_i sopra cui esista una sezione σ_i con $\sigma_i(f(t_i, r-\varepsilon)) = \psi_{r-\varepsilon}(t_i)$. Le sezioni coincidono con $\psi_{r-\varepsilon}$ sul bordo inferiore e fra loro sui lati comuni. Si estende quindi $\psi_{r-\varepsilon}$ a $I \times [0,r]$ ponendo $\psi_r = \sigma_i \circ f$ sui rettangoli. c.v.d.

Dimostrazione del teorema 3.1. Siano $x \in N$, U un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^m$ (o al semispazio H^m) e $y \in p^{-1}(x)$. Basta costruire una sezione $s : U \to M$ con $s(x) = y$ (cap. VII, cor. 1.7 e prop. 2.2).

Se W, W' sono aperti connessi di U contenenti x e σ, σ' sono sezioni con $\sigma(x) = \sigma'(x) = y$,

si ha $\sigma = \sigma'$ su $W \cap W'$: U è semplicemente connesso e si applica il lemma 3.3. Esiste dunque un massimo aperto connesso $V \subset U$ contenente x sopra cui esiste una sezione σ con $\sigma(x) = y$.

Sia $\bar{V}$ l'aderenza di V in U. Per ogni $z \in \bar{V} - V$ esiste un cammino c da x a z in U. Come nella dimostrazione del lemma 3.3, si estende la sezione a un intorno aperto di $c(I)$ insieme a V; quindi $V = U$. c.v.d.

Esercizi.

Il teorema 3.1 dà una nuova dimostrazione del corollario 2.6 del capitolo VII.

Se N^n è una varietà topologica e $p : M \to N$ è un rivestimento, anche M è una varietà topologica di dimensione n, e $\partial M = p^{-1}(\partial N)$. Inoltre:

3.4 PROPOSIZIONE. *Sia N^n una varietà differenziabile e sia $p : M \to N$ un rivestimento. Esiste su M una e una sola struttura differenziabile per la quale p sia differenziabile e di rango massimo n.*

Dimostrazione. Sia (U_i) un ricoprimento di N mediante aperti distinti, con trivializzazioni $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F_i$. Su ogni intersezione non vuota,

$$\Phi_j \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F_i \to (U_i \cap U_j) \times F_j$$

è un diffeomorfismo. Esiste dunque una sola struttura differenziabile su M per cui le Φ_i siano diffeomorfismi. Per essa p ha rango massimo in ogni punto.

Se esistesse una seconda struttura per cui p ha rango massimo, l'identità sarebbe un diffeomorfismo dalla prima alla seconda. Le strutture sono dunque uguali. c.v.d.

Si munirà sempre M della struttura così caratterizzata, e si dirà che $p : M \to N$ è un rivestimento differenziabile. Si ha immediatamente:

3.5 COROLLARIO. *Sia $p : M \to N$ un rivestimento differenziabile e sia $f : X \to N$ un'applicazione differenziabile di una varietà X. Ogni sollevamento $F : X \to M$ di f è differenziabile.*

In particolare:

i) una sezione di p sopra un aperto U di N è differenziabile;

ii) un endomorfismo (risp. automorfismo) $h : M \to M$ del rivestimento è differenziabile (risp. un diffeomorfismo).

Il gruppo degli automorfismi di un rivestimento differenziabile opera dunque differenziabilmente su M: ogni trasformazione $x \mapsto gx$ è un diffeomorfismo. Viceversa:

3.6 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo discreto che opera differenziabilmente, propriamente e liberamente su una varietà differenziabile M. Esiste su M/G una e una sola struttura differenziabile tale che $p : M \to M/G$ sia un rivestimento differenziabile.*

Dimostrazione. Sia (U_i) un ricoprimento di M/G mediante aperti distinti, e sia $s_i : U_i \to M$ una sezione. Per ogni $x \in U_i \cap U_j$ esiste $g \in G$ tale che $s_j(x) = g s_i(x)$. Si ha allora $s_j \circ s_i^{-1} = g$ sulla componente connessa di $s_i(U_i \cap U_j)$ contenente $s_i(x)$; quindi il cambiamento è un diffeomorfismo. Esiste una sola struttura differenziabile su M/G per cui gli omeomorfismi $s_i : U_i \to s_i(U_i)$ siano diffeomorfismi. Per essa p è differenziabile e di rango massimo. Come prima, quest'ultima proprietà caratterizza univocamente la struttura. c.v.d.

Si munirà M/G della struttura differenziabile così definita.

Esempi.

i) Esiste una sola struttura differenziabile sul nastro di Möbius M (risp. sulla banda B) per cui $p : \mathbb{R}^2 \to M$ (risp. $p : I \times \mathbb{R} \to B$) sia un rivestimento differenziabile.

ii) Esiste una sola struttura differenziabile sul toro di Klein T per cui $p : \mathbb{R}^2 \to T$ sia un rivestimento differenziabile.

Se $p : M \to N$ è differenziabile e $\beta \in A(N)$ è una forma differenziale, $\alpha = p^*\beta \in A(M)$ è invariante per gli endomorfismi del rivestimento: $h^*\alpha = \alpha$. Viceversa:

3.7 PROPOSIZIONE. *Sia $p : M \to N$ un rivestimento differenziabile galoisiano di gruppo G, e sia $\alpha \in A(M)$ una forma differenziale invariante per G. Esiste una e una sola forma differenziale β su N tale che $\alpha = p^*\beta$.*

La verifica è immediata.

4. Rivestimenti e orientazione delle varietà

Una varietà differenziabile M^m è orientabile se possiede una delle proprietà equivalenti seguenti:

i) esiste una forma volume su M, ossia una forma differenziale di grado m che non si annulla;

ii) esiste un atlante differenziabile $\{(U_i, \varphi_i)\}$ i cui cambiamenti di carte $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ hanno Jacobiano ovunque positivo.

Di conseguenza:

4.1 PROPOSIZIONE. *Sia $p : M \to N$ un rivestimento differenziabile. Se N è orientabile, anche M lo è.*

Infatti, se α è una forma volume su N, $\beta = p^*\alpha$ è una forma volume su M, invariante per tutti gli automorfismi del rivestimento. Questi conservano dunque l'orientazione di M.

Viceversa:

4.2 TEOREMA. *Sia G un gruppo discreto che opera differenziabilmente, propriamente e liberamente su una varietà differenziabile orientata M. Se tutti i diffeomorfismi di G conservano l'orientazione, la varietà quoziente M/G è orientabile.*

La verifica è immediata (prop. 3.6).

Esempi.

i) Il cerchio S^1 e il toro T^n sono orientabili.

ii) Il nastro di Möbius, la banda di Möbius e il toro di Klein non sono orientabili.

iii) Lo spazio proiettivo $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è orientabile se e solo se m è dispari (per $m \geq 1$).

iv) Gli spazi lenticolari L_p^{2m+1} sono orientabili.

4.3 Sia $\{(U_i, \varphi_i)\}$ l'atlante massimo di M. Per $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ si definisce un'applicazione localmente costante g_{ji} nel gruppo $\{-1, +1\}$, identificato al proprio gruppo delle permutazioni, ponendo

$$g_{ji}(x) = \frac{\mathrm{Jac}(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))}{|\mathrm{Jac}(\varphi_j \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x))|}.$$

Si ha $g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$ sulle intersezioni triple. Esiste dunque (cap. VII, teor. 5.1) un rivestimento differenziabile a due

fogli $p : \widetilde{M} \to M$, con trivializzazioni $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \{-1,+1\}$ tali che

$$\Phi_j \Phi_i^{-1}(x,\varepsilon) = (x, g_{ji}(x)\varepsilon).$$

Si chiama $p : \widetilde{M} \to M$ il rivestimento delle orientazioni di M.

Si verifica facilmente che, partendo da un qualsiasi atlante differenziabile, la costruzione conduce a un rivestimento isomorfo.

4.4 PROPOSIZIONE. *La varietà $\widetilde{M}$ del rivestimento differenziabile delle orientazioni è orientabile.*

Dimostrazione. Con le notazioni del §5 del capitolo VII, sia $V_{i,\varepsilon} = \pi_i(U_i \times \{\varepsilon\})$. Indicando con σ la simmetria di $\mathbb{R}^m$ (o di H^m) rispetto all'iperpiano $x_1 = 0$, si definisce

$$\psi_{i,\varepsilon}(\pi_i(x,\varepsilon)) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \varepsilon = +1, \\ \sigma\varphi_i(x) & \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Si ottiene un atlante differenziabile di $\widetilde{M}$. In un intorno di $y = \pi_i(x,\varepsilon) = \pi_j(x,\eta)$ si ha

$$\psi_{j,\eta}\psi_{i,\varepsilon}^{-1} = \begin{cases} \varphi_j\varphi_i^{-1} & \varepsilon = \eta = +1, \\ \sigma\varphi_j\varphi_i^{-1}\sigma & \varepsilon = \eta = -1, \\ \varphi_j\varphi_i^{-1}\sigma & \varepsilon = -1,\ \eta = +1, \\ \sigma\varphi_j\varphi_i^{-1} & \varepsilon = +1,\ \eta = -1. \end{cases}$$

Poiché $\eta = g_{ji}(x)\varepsilon$, il Jacobiano del cambiamento è ovunque positivo. Quindi $\widetilde{M}$ è orientabile. c.v.d.

Esercizi.

Il rivestimento delle orientazioni è caratterizzato dalla proprietà seguente: per un rivestimento differenziabile $q : N \to M$, la varietà N è orientabile se e solo se esiste un omomorfismo $h : N \to \widetilde{M}$, con $p \circ h = q$.

Per questa ragione, e per la proposizione 4.4, si chiama anche $\widetilde{M}$ il rivestimento orientabile a due fogli di M.

4.5 COROLLARIO. *Una varietà differenziabile M è orientabile se e solo se il suo rivestimento delle orientazioni è banale.*

Infatti, se è banale, $\widetilde{M}$ è diffeomorfo a $M \times \{-1,+1\}$, dunque M è orientabile.

Viceversa, se M è orientabile, si costruisce il rivestimento da un atlante con Jacobiani positivi. Le applicazioni g_{ji} sono allora costanti uguali a $+1$ e il rivestimento è banale.

4.6 COROLLARIO. *Una varietà differenziabile semplicemente connessa è orientabile.*

4.7 COROLLARIO. *Sia M una varietà differenziabile connessa non orientabile e sia $x \in M$. Il gruppo $\pi_1(M,x)$ contiene un sottogruppo normale di indice 2.*

In questo caso il rivestimento delle orientazioni è dunque galoisiano.

Esempi.

i) La sfera S^m e lo spazio proiettivo complesso $\mathrm{P}\mathbb{C}_m$ sono orientabili.

ii) Per m pari positivo, il rivestimento delle orientazioni di $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è isomorfo a $p : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$.

Esercizi.

i) Il rivestimento orientabile a due fogli del nastro di Möbius è diffeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

ii) Il rivestimento orientabile a due fogli del toro di Klein è diffeomorfo a T^2.

5. Rivestimenti dei complessi cellulari

5.1 PROPOSIZIONE. *Sia $(e_i)_{i\in I}$ una decomposizione cellulare di K e sia $p : L \to K$ un rivestimento. Le componenti connesse delle immagini inverse $p^{-1}(e_i)$ delle celle di K determinano una decomposizione cellulare di L.*

Si munirà sempre L della decomposizione così definita.

Dimostrazione. Il rivestimento è banale sopra ogni cella. Le componenti connesse delle immagini inverse determinano dunque una partizione in celle di L per cui $L^m = p^{-1}(K^m)$.

Si ottiene una decomposizione cellulare. Infatti, siano e una cella di dimensione m, $f : D^m \to K^m$ un'applicazione di attacco e ε una cella di $p^{-1}(e)$. Esiste un sollevamento $g : D^m \to L^m$ di f con le proprietà:

i) $g(S^{m-1}) \subset L^{m-1}$;

ii) $g|_{D^m - S^{m-1}}$ è un omeomorfismo su ε.

c.v.d.

5.2 COROLLARIO. *Ogni rivestimento di un complesso cellulare di dimensione finita n è un complesso cellulare di dimensione n.*

5.3 PROPOSIZIONE. *Ogni rivestimento L di un complesso cellulare localmente finito K è localmente finito.*

Infatti ogni $x \in L$ possiede un intorno che incontra soltanto un numero finito di celle. L'aderenza $\bar{e}$ di una cella di dimensione n incontra dunque un numero finito di celle, tutte di dimensione minore di n tranne e. Si può quindi costruire un sottocomplesso finito di L che contiene x nel proprio interno.

5.4 COROLLARIO. *Ogni rivestimento di un grafo è un grafo.*

5.5 COROLLARIO. *Se K è un grafo finito e $p : L \to K$ è un rivestimento a n fogli, la caratteristica di Eulero $\chi(L)$ è uguale a $n\chi(K)$.*

Per grafi connessi la connettività $c(L)$ (cap. III, def. 3.7) è allora $nc(K) - n + 1$.

5.6 TEOREMA DI NIELSEN–SCHREIER. *Ogni sottogruppo di un gruppo libero è un gruppo libero.*

Si darà qui la dimostrazione per gruppi liberi con un numero finito di generatori. Il caso generale si dimostra analogamente; l'unica difficoltà è costruire un grafo con il gruppo fondamentale libero assegnato.

Dimostrazione. Sia G libero su m generatori. È isomorfo al gruppo fondamentale del grafo

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} \{e\}^{i-1} \times S^1 \times \{e\}^{m-i} \subset T^m.$$

Sia $H \subset G$. Esiste un rivestimento $p : L \to K$ tale che $\pi_1(L) \simeq H$ (cap. IX, teor. 6.1). Quindi (cap. VI, cor. 5.10) H è libero. c.v.d.

Più precisamente (cap. VI, teor. 5.7 e cor. 5.5):

5.7 PROPOSIZIONE. *Sia G libero su n generatori. Un sottogruppo di indice finito m è libero su $m(n-1)+1$ generatori.*

Esempio. Sia G libero su α, β e sia H il sottogruppo normale generato da α^m e β. H è libero su $m+1$ generatori; invece il sottogruppo generato da α^m, β è libero su due generatori.

Quindi, diversamente dai gruppi abeliani liberi, l'insieme dei generatori di un sottogruppo di un gruppo libero può avere cardinalità maggiore di quella dell'insieme dei generatori del gruppo.

6. Rivestimenti dei gruppi topologici

6.1 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi. Ogni rivestimento connesso di G è galoisiano.*

Infatti (cap. V, teor. 5.4), indicando con e l'elemento neutro, $\pi_1(G,e)$ è commutativo.

6.2 TEOREMA. *Sia G un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi e sia $p:\Gamma\to G$ un rivestimento connesso. Esiste su Γ una struttura di gruppo topologico, unica a meno di isomorfismo, per cui p sia un omomorfismo. Fissato l'elemento neutro $\varepsilon\in p^{-1}(e)$, la struttura è unica.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon\in p^{-1}(e)$ e sia $m:\Gamma\times\Gamma\to G$ l'applicazione $(\alpha,\beta)\mapsto p(\alpha)p(\beta)$. Si ha

$$m(\varepsilon,\varepsilon)=e,$$

$$m_*\pi_1(\Gamma\times\Gamma,(\varepsilon,\varepsilon))=p_*\pi_1(\Gamma,\varepsilon)\,p_*\pi_1(\Gamma,\varepsilon)\subset p_*\pi_1(\Gamma,\varepsilon).$$

Infatti $p_*\pi_1(\Gamma,\varepsilon)$ è un sottogruppo di $\pi_1(G,e)$, e la struttura di gruppo di quest'ultimo è definita anche dal prodotto dei lacci in G (cap. V, prop. 5.2).

Esiste quindi un unico sollevamento $M:\Gamma\times\Gamma\to\Gamma$ di m con $M(\varepsilon,\varepsilon)=\varepsilon$ (cap. IX, teor. 3.2). Analogamente $i:\Gamma\to G$, $\alpha\mapsto p(\alpha)^{-1}$, ha un unico sollevamento $I:\Gamma\to\Gamma$ con $I(\varepsilon)=\varepsilon$.

M e I definiscono una struttura di gruppo topologico su Γ, di elemento neutro ε, per cui p è un omomorfismo. Infatti le applicazioni $(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto M(M(\alpha,\beta),\gamma)$ e $(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto M(\alpha,M(\beta,\gamma))$ sono sollevamenti di $(\alpha,\beta,\gamma)\mapsto p(\alpha)p(\beta)p(\gamma)$ coincidenti in $(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$; sono dunque uguali, e M è associativa. Gli altri assiomi si verificano allo stesso modo.

La scelta di ε determina dunque la struttura voluta, che è unica: il prodotto e l'inverso devono essere i sollevamenti appena costruiti.

Se ε' è un secondo punto di $p^{-1}(e)$, esiste un automorfismo g del rivestimento con $g(\varepsilon)=\varepsilon'$ (prop. 6.1). Per l'unicità dei sollevamenti, g è anche un isomorfismo dei gruppi. c.v.d.

6.3 COROLLARIO. *Il nucleo di $p:\Gamma\to G$ è un sottogruppo normale, chiuso e discreto, contenuto nel centro di* Γ.

Infatti (cap. I, esercizio 6.2), $p^{-1}(e)$ è un sottogruppo normale discreto del gruppo connesso Γ.

6.4 Esempio. Per $m\geq 3$, $SO(m,\mathbb{R})$ è compatto, connesso e localmente contraibile, con gruppo fondamentale $\mathbb{Z}_2$. Esistono dunque un gruppo compatto semplicemente connesso $\mathrm{Spin}(m)$ e un omomorfismo $p:\mathrm{Spin}(m)\to SO(m,\mathbb{R})$ che è un rivestimento a due fogli. $\mathrm{Spin}(m)$ si chiama gruppo degli spinori di ordine m; $\mathrm{Spin}(3)$ è isomorfo al gruppo S^3 dei quaternioni di norma 1 (cap. II, prop. 3.8).

6.5 Esercizio. Costruzione del rivestimento universale di un gruppo topologico.

Sia G connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Siano E_G lo spazio dei cammini di origine e in G (cap. V, §6) e $p:E_G\to G$, $c\mapsto c(1)$.

i) p è continua e aperta.

ii) Il prodotto dei cammini definisce su E_G una struttura di gruppo topologico per cui p è un omomorfismo.

iii) Il nucleo $\Omega=p^{-1}(e)$ è chiuso e normale; la componente connessa per archi Ω_0 del cammino costante c_e in Ω è aperta in Ω.

iv) $E=E_G/\Omega_0$ è separato e p induce un'applicazione continua $q:E\to G$.

v) $q:E\to G$ è un rivestimento.

vi) E è semplicemente connesso.

6.6 DEFINIZIONE. *Due gruppi topologici G,G' sono localmente isomorfi se esistono intorni aperti U,U' degli elementi neutri e,e' e un omeomorfismo $h:U\to U'$ tali che:*

i) *se $x,y,xy\in U$, $h(xy)=h(x)h(y)$;*

ii) *se $x',y',x'y'\in U'$, $h^{-1}(x'y')=h^{-1}(x')h^{-1}(y')$.*

Si dice che h è un isomorfismo locale. Si ha $h(e)=e'$ e $h(x^{-1})=h(x)^{-1}$ quando $x,x^{-1}\in U$.

Esempi.

i) Un isomorfismo è un isomorfismo locale.

ii) La proiezione $p:\mathbb{R}\to S^1$ determina un isomorfismo locale.

iii) La proiezione $p : S^3 \to SO(3,\mathbb{R})$ determina un isomorfismo locale.

iv) Più generalmente, un omomorfismo di gruppi $p : \Gamma \to G$ che sia un rivestimento determina un isomorfismo locale.

6.7 TEOREMA. *Siano G, G' due gruppi topologici connessi localmente isomorfi. Esistono un gruppo topologico H e omomorfismi suriettivi $p : H \to G$ e $p' : H \to G'$ che siano rivestimenti.*

Se inoltre G è localmente connesso per archi, si può supporre H connesso (cap. VII, prop. 2.7).

Dimostrazione. Sia $h : U \to U'$ un isomorfismo locale. Si può supporre $U = U^{-1}$, restringendosi altrimenti a $U \cap U^{-1}$.

Sia H il sottogruppo di $G \times G'$ generato da $V = \{(x, h(x)) \mid x \in U\}$. Si definisce su H una nuova topologia: se $(U_i)_{i\in I}$ è un sistema fondamentale di intorni di e in G, tutti contenuti in U, gli insiemi $V_i = (U_i \times h(U_i)) \cap V$ formano un sistema fondamentale di intorni di (e, e') in H:

i) $(e, e') \in V_i$ per ogni i;

ii) per ogni i esiste j tale che $V_j \subset V_i^{-1}$;

iii) per ogni i esiste j tale che $V_j V_j \subset V_i$;

iv) per ogni $a \in H$ e ogni i esiste j tale che $aV_j a^{-1} \subset V_i$.

Le verifiche sono lasciate per esercizio.

Le proiezioni $p : H \to G$ e $p' : H \to G'$ sono continue e hanno nuclei discreti normali. Sono inoltre aperte, dunque suriettive, essendo G, G' connessi. Pertanto sono rivestimenti. c.v.d.

6.8 COROLLARIO. *Siano G, G' connessi e localmente connessi per archi e sia $p : \Gamma \to G$ un rivestimento universale. Se h è un isomorfismo locale da G a G', esiste un omomorfismo $k : \Gamma \to G'$ tale che $h \circ p = k$ in un intorno dell'elemento neutro di Γ.*

L'applicazione k è allora un rivestimento.

6.9 COROLLARIO. *Due gruppi topologici connessi, localmente connessi per archi e semilocalmente semplicemente connessi, localmente isomorfi, hanno rivestimenti universali isomorfi.*

In particolare, se entrambi sono semplicemente connessi, sono isomorfi.

Parte terza

Coomologie delle forme differenziali

CAPITOLO XI

Coomologie delle varietà differenziabili[9]

1. Algebra di coomologia di de Rham

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m.

Si indica con $A^p(M)$ lo spazio delle forme differenziali di grado p su M; $A^0(M) = \mathscr{D}(M)$ è l'algebra delle funzioni differenziabili su M, e $A^p(M) = 0$ per $p > m$. Si conviene di porre $A^p(M) = 0$ anche per $p < 0$.

Il prodotto esterno $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ è un'applicazione bilineare di $A^p(M) \times A^q(M)$ in $A^{p+q}(M)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, avente le proprietà:

i) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$, $\alpha \in A^p(M)$, $\beta \in A^q(M)$: anticommutatività;

ii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$: associatività.

Per bilinearità esso definisce una struttura di algebra reale graduata, unitaria, associativa e anticommutativa sulla somma diretta $A(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p(M)$: $A(M)$ è l'algebra delle forme differenziali su M.

La differenziazione esterna è un'applicazione lineare su $\mathbb{R}$, $d : A(M) \to A(M)$, con le proprietà:

i) $d(A^p(M)) \subset A^{p+1}(M)$;

ii) $d \circ d = 0$;

iii) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, $\alpha \in A^p(M)$, $\beta \in A(M)$.

Una forma α è chiusa se $d\alpha = 0$; è esatta se appartiene all'immagine di d. Una forma esatta è dunque chiusa.

Il nucleo $Z(M)$ di d è una sottoalgebra unitaria di $A(M)$, somma diretta degli $Z^p(M) = Z(M) \cap A^p(M)$: se $\alpha \in Z^p(M)$ e $\beta \in Z(M)$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta = 0$.

[9] In tutta questa parte, il riferimento implicito per le varietà differenziabili e il loro calcolo differenziale è [1].

L'immagine $B(M)$ di d è un ideale bilatero di $Z(M)$, somma diretta degli $B^p(M) = B(M) \cap A^p(M)$: se $\alpha = d\gamma$ e $\beta \in Z(M)$, $\alpha \wedge \beta = d(\gamma \wedge \beta)$.

Il quoziente $H(M) = Z(M)/B(M)$ è dunque un'algebra reale unitaria, associativa e anticommutativa, graduata dai sottospazi $H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$:

$H(M)$ è l'algebra di coomologia di de Rham, o di coomologia reale, della varietà M;[10]

$H^p(M)$ è lo spazio di coomologia di de Rham di dimensione p di M.

Se α è una forma chiusa (risp. chiusa di grado p), $\alpha + B(M)$ (risp. $\alpha + B^p(M)$) è la sua classe di coomologia in $H(M)$ (risp. $H^p(M)$). Due forme chiuse α, β sono coomologhe se appartengono alla stessa classe, ossia se $\alpha - \beta$ è esatta.

1.1 PROPOSIZIONE. *Si ha $H^p(M) = 0$ per $p < 0$ e $p > m$.*

Infatti in questi casi $Z^p(M) = 0$.

1.2 PROPOSIZIONE. *Sia M la varietà somma di una famiglia $(M_i)_{i \in I}$ di varietà differenziabili. L'algebra $H(M)$ è isomorfa al prodotto diretto $\prod_{i \in I} H(M_i)$.*

Infatti $A(M)$ è isomorfa al prodotto diretto $\prod_i A(M_i)$: a una forma $\alpha_i \in A(M_i)$ corrisponde la forma uguale ad α_i su M_i e a zero su M_j, $j \neq i$.

1.3 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 1.2, $H^p(M) \simeq \prod_{i \in I} H^p(M_i)$.*

1.4 PROPOSIZIONE. *Se M è connessa, $H^0(M)$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Infatti $B^0(M) = 0$ e, se M è connessa, una funzione $f \in A^0(M)$ ha differenziale nullo se e solo se è costante. Quindi $H^0(M)$ è isomorfo all'algebra delle funzioni costanti su M.

1.5 COROLLARIO. *Se M è ridotta a un punto, $H^p(M) = 0$ per $p \neq 0$ e $H^0(M) = \mathbb{R}$.*
[11]

1.6 COROLLARIO. *Se J è l'insieme delle componenti connesse di M, $H^0(M) = \mathbb{R}^J$.*

In questo caso $H^0(M)$ è isomorfa all'algebra delle funzioni localmente costanti su M.

[10] Se M è vuota, si conviene di porre $H(M) = (0)$.

[11] Nel seguito si indicherà spesso con il segno $=$ l'isomorfismo di due spazi vettoriali.

2. Applicazioni e omotopie differenziabili

Un'applicazione differenziabile $f : M \to N$ determina un omomorfismo di algebre graduate unitarie $f^* : A(N) \to A(M)$ che commuta con d: $f^* \circ d = d \circ f^*$. Quindi $f^*Z(N) \subset Z(M)$, $f^*B(N) \subset B(M)$, e f^* induce un omomorfismo unitario, ancora indicato con f^*, da $H(N)$ a $H(M)$, con $f^*H^p(N) \subset H^p(M)$ e $f^*(1) = 1$.

Se f è l'identità, f^* è l'identità di $H(M)$. Se $g : N \to P$ è differenziabile, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Di conseguenza:

2.1 PROPOSIZIONE. *Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, $f^* : H(N) \to H(M)$ è un isomorfismo e $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.*

Due varietà diffeomorfe hanno dunque algebre di coomologia isomorfe.

2.2 PROPOSIZIONE. *Se $f : M \to N$ è costante, l'omomorfismo $f^* : H^p(N) \to H^p(M)$ è nullo per $p \neq 0$.*

Infatti f si fattorizza attraverso l'iniezione del punto $f(M)$ in N, e $H^p(f(M)) = 0$ per $p \neq 0$.

2.3 PROPOSIZIONE. *Se $f : M \to N$ è differenziabile e M, N sono connesse, $f^* : H^0(N) \to H^0(M)$ è un isomorfismo.*

2.4 PROPOSIZIONE. *Sia $p : M \to N$ un rivestimento differenziabile galoisiano di gruppo finito G. L'omomorfismo $p^* : H(N) \to H(M)$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Sia r l'ordine di G e sia $\alpha \in Z(N)$ tale che $p^*\alpha = d\beta$, $\beta \in A(M)$. La forma

$$\bar{\beta} = \frac{1}{r} \sum_{g \in G} g^*\beta$$

è invariante per G e ha differenziale $p^*\alpha$. Esiste dunque (cap. X, prop. 3.7) $\gamma \in A(N)$ tale che $p^*\gamma = \bar{\beta}$ e $d\gamma = \alpha$. Quindi α è esatta. c.v.d.

Ricordiamo (cap. IV, def. 4.1) che due applicazioni differenziabili $f, g : M \to N$ sono differenziabilmente omotope se esiste $H : M \times \mathbb{R} \to N$ differenziabile con $H(x,t) = f(x)$ per $t \leq 0$ e $H(x,t) = g(x)$ per $t \geq 1$.

2.5 TEOREMA. *Se $f,g : M \to N$ sono differenziabilmente omotope, gli omomorfismi $f^*, g^* : H(N) \to H(M)$ sono uguali.*

La dimostrazione utilizza la proposizione seguente:

2.6 PROPOSIZIONE. *Sia $J_t : M \to M \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (x,t)$. Esiste un'applicazione lineare $K : A(M \times \mathbb{R}) \to A(M)$ tale che:*

i) $K(A^p(M \times \mathbb{R})) \subset A^{p-1}(M)$;

ii) $dK + Kd = J_1^* - J_0^*$.

Dimostrazione. Per $M = \mathbb{R}^m$ (o H^m) si pone

$$\begin{aligned} &Kf = 0 && \text{per } f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}),\\ &K\alpha = 0 && \text{per } \alpha = a\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},\\ &K\beta = \left(\int_0^1 b\,dt\right) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{p-1}} && \text{per } \beta = b\,dt \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{p-1}}. \end{aligned}$$

Si ha allora $K(A^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})) \subset A^{p-1}(\mathbb{R}^m)$ e

$$\begin{aligned} &dKf = 0, \quad Kdf = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = (J_1^* - J_0^*)f,\\ &dK\alpha = 0, \quad Kd\alpha = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}\,dt\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = (J_1^* - J_0^*)\alpha. \end{aligned}$$

Inoltre $J_1^*\beta = J_0^*\beta = 0$ e

$$\begin{aligned} dK\beta &= \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i}\,dt\right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{p-1}},\\ Kd\beta &= -\sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i}\,dt\right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{p-1}}. \end{aligned}$$

Si è così ottenuto K con le proprietà volute. Inoltre, se h è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$ (risp. H^m) e $k(x,t) = (h(x),t)$, si ha $K(k^*\gamma) = h^*K(\gamma)$.

Nel caso generale si prendono un atlante (U_i, h_i) di M tale che (U_i) sia localmente finito e ogni h_i sia un diffeomorfismo su $\mathbb{R}^m$ o H^m, e una partizione differenziabile dell'unità (φ_i) subordinata al ricoprimento.

La famiglia $(U_i \times \mathbb{R}, k_i)$, con $k_i(x,t) = (h_i(x),t)$, è un atlante di $M \times \mathbb{R}$, e $\psi_i(x,t) = \varphi_i(x)$ è una partizione dell'unità subordinata. Con abuso di scrittura si pone

$$K(\alpha) = \sum_i h_i^* K((k_i^{-1})^*(\psi_i \alpha)).$$

Se α ha supporto in $U_i \times \mathbb{R}$, si ha $K(\alpha) = h_i^* K((k_i^{-1})^* \alpha)$. Allora:

i) $K(A^p(M \times \mathbb{R})) \subset A^{p-1}(M)$;

ii) $dK\alpha + Kd\alpha = \sum_i (dK(\psi_i \alpha) + Kd(\psi_i \alpha))$

$$= \sum_i h_i^*(J_1^* - J_0^*)(k_i^{-1})^*(\psi_i \alpha) = \sum_i (J_1^* - J_0^*)(\psi_i \alpha) = J_1^* \alpha - J_0^* \alpha.$$

c.v.d.

Dimostrazione del teorema 2.5. Se H è un'omotopia differenziabile da f a g, $H \circ J_0 = f$ e $H \circ J_1 = g$. Per ogni forma chiusa α su N,

$$g^* \alpha - f^* \alpha = J_1^* H^* \alpha - J_0^* H^* \alpha = dK(H^* \alpha) + Kd(H^* \alpha) = d(KH^* \alpha).$$

Le forme $f^* \alpha, g^* \alpha$ sono dunque coomologhe, e gli omomorfismi indotti sono uguali. c.v.d.

2.7 COROLLARIO. *$H^p(\mathbb{R}^m) = 0$ per $p \neq 0$ e $H^0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia φ differenziabile su $\mathbb{R}$, uguale a 1 per $t \leq 0$ e a 0 per $t \geq 1$. L'applicazione $(x,t) \mapsto \varphi(t)x$ è un'omotopia differenziabile dall'identità alla costante 0. Quindi (teor. 2.5 e prop. 2.2) $H^p(\mathbb{R}^m) = 0$ per $p \neq 0$. Infine $H^0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$ per 1.4. c.v.d.

Analogamente:

2.8 COROLLARIO. *$H^p(H^m) = 0$ e $H^p(D^m) = 0$ per $p \neq 0$; $H^0(H^m) = H^0(D^m) = \mathbb{R}$.*

2.9 COROLLARIO: LEMMA DI POINCARÉ. *Ogni forma chiusa di grado $p \geq 1$ su $\mathbb{R}^m$ (risp. H^m) è esatta.*

3. Applicazioni continue

Ricordiamo (cap. IV, prop. 4.6 e cor. 4.11) che ogni applicazione continua $M \to N$ è omotopa a una differenziabile, e che due applicazioni differenziabili continuamente omotope sono differenziabilmente omotope.

Quindi, se $f : M \to N$ è continua e $\hat{f}$ è differenziabile e omotopa a f, l'omomorfismo $\hat{f}^* : H(N) \to H(M)$ è indipendente dalla scelta di $\hat{f}$ (teor. 2.5). Si può dunque dire che f determina un omomorfismo $f^* : H(N) \to H(M)$.

3.1 PROPOSIZIONE. *Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ sono continue, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Infatti, se $\hat{f}, \hat{g}$ sono differenziabili e omotope a f, g, $\hat{g} \circ \hat{f}$ è differenziabile e omotopa a $g \circ f$.

3.2 COROLLARIO: INVARIANZA TOPOLOGICA DELL'ALGEBRA DI COOMOLOGIA. *Due varietà omeomorfe hanno algebre di coomologia isomorfe.*

In particolare l'algebra di coomologia di una varietà differenziabile è indipendente dalla struttura differenziabile.

3.3 PROPOSIZIONE. *Se $f, g : M \to N$ sono continue e omotope, $f^* = g^*$.*

3.4 COROLLARIO: INVARIANZA OMOTOPICA DELL'ALGEBRA DI COOMOLOGIA. *Due varietà con lo stesso tipo di omotopia hanno algebre di coomologia isomorfe.*

Infatti, se $f : M \to N$ è un'equivalenza omotopica e $g : N \to M$ un inverso omotopico, $f^* g^* = 1$ e $g^* f^* = 1$; quindi f^* è un isomorfismo con inverso g^*.

Esempio. Il nastro e la banda di Möbius hanno la stessa algebra di coomologia di S^1.

3.5 COROLLARIO. *Sia V una sottovarietà di W e sia $i : V \to W$ l'iniezione. Se V è un retratto (risp. retratto per deformazione) di W, $i^* : H(W) \to H(V)$ è suriettivo (risp. biiettivo).*

Infatti, se r è una retrazione, $r \circ i$ è l'identità di V. Se inoltre è un retratto per deformazione, i è un'equivalenza omotopica.

3.6 Esempio. Per $W = M \times \mathbb{R}^n$ (risp. $M \times D^n$) e $V = M \times \{0\}$, l'iniezione induce un isomorfismo $i^* : H(W) \to H(V)$ con inverso l'omomorfismo indotto dalla proiezione $p : W \to V$.

In particolare il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ ha la stessa algebra di coomologia del cerchio S^1.

3.7 TEOREMA. *Sia M una varietà con bordo, $U = M - \partial M$ il suo interno e $i : U \to M$ l'iniezione. L'omomorfismo $i^* : H(M) \to H(U)$ è un isomorfismo.*

La dimostrazione usa il risultato seguente (Munkres [7], p. 51; cap. XIII, cor. 1.4):

3.8 TEOREMA: INTORNO COLLARE DEL BORDO. *Sia M una varietà con bordo. Esiste un embedding $k : \partial M \times I \to M$ tale che $k(x,0) = x$ per ogni $x \in \partial M$.*

Dimostrazione di 3.7. Sia $N = M - k(\partial M \times [0,1[)$ e si definisca $H : M \times I \to M$ mediante

$$H(y,s) = \begin{cases} y & y \in N, \\ k(x,(1-s)t+s) & y = k(x,t). \end{cases}$$

L'applicazione $y \mapsto H(y,1)$ è una retrazione per deformazione di M (e di U) su N. Le iniezioni $j : N \to M$ e $\hat{j} : N \to U$ inducono dunque isomorfismi in coomologia. Poiché $j = i \circ \hat{j}$, anche i^* è un isomorfismo. c.v.d.

4. Algebra di coomologia a supporto compatto

Il supporto di $\alpha \in A(M)$ è l'aderenza dell'insieme dei punti x in cui $\alpha(x) \neq 0$. Il complementare è dunque il massimo aperto su cui α è nulla.

Si indica con $A_c(M)$ l'insieme delle forme differenziali a supporto compatto: è una sottoalgebra, anzi un ideale, di $A(M)$, somma diretta degli $A_c^p(M) = A_c(M) \cap A^p(M)$. Se M non è compatta, l'algebra non è unitaria.

$A_c(M)$ è stabile per differenziazione esterna: se α si annulla su un aperto, anche $d\alpha$ vi si annulla. Si indica ancora con d la restrizione ad $A_c(M)$.

Il nucleo $Z_c(M)$ di $d : A_c(M) \to A_c(M)$ è una sottoalgebra, somma diretta degli $Z_c^p(M) = Z_c(M) \cap A_c^p(M)$. L'immagine $B_c(M) = d(A_c(M))$ è un ideale di $Z_c(M)$, somma diretta degli $B_c^p(M) = B_c(M) \cap A_c^p(M)$.

Il quoziente $H_c(M) = Z_c(M)/B_c(M)$ è un'algebra reale associativa e anticommutativa, graduata dagli $H_c^p(M) = Z_c^p(M)/B_c^p(M)$: $H_c(M)$ è l'algebra di coomologia di de Rham, o reale, a supporto compatto di M; $H_c^p(M)$ è lo spazio di coomologia a supporto compatto di dimensione p.[12]

[12] L'algebra $H(M)$ si chiama anche algebra di coomologia a supporti chiusi della varietà M.

4.1 PROPOSIZIONE. *$H_c^p(M) = 0$ per $p < 0$ e $p > m$.*

4.2 PROPOSIZIONE. *Se M è la varietà somma di $(M_i)_{i\in I}$, $H_c(M)$ è isomorfa alla somma diretta $\bigoplus_{i\in I} H_c(M_i)$.*

4.3 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 4.2, $H_c^p(M) \simeq \bigoplus_i H_c^p(M_i)$.*

4.4 PROPOSIZIONE. *Se M è connessa non compatta, $H_c^0(M) = 0$.*

Infatti una funzione costante non nulla non ha supporto compatto; quindi $Z_c^0(M) = 0$.

4.5 COROLLARIO. *Se M non ha componenti connesse compatte, $H_c^0(M) = 0$.*

4.6 Osservazioni.

i) Se M è compatta, $H_c(M) = H(M)$.

ii) Le inclusioni $Z_c(M) \subset Z(M)$ e $B_c(M) \subset B(M)$ determinano un omomorfismo $i : H_c(M) \to H(M)$.

iii) Poiché $Z_c(M)$ è un ideale di $Z(M)$, il prodotto $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$, $\alpha \in Z(M)$, $\beta \in Z_c(M)$, determina su $H_c(M)$ una struttura di algebra su $H(M)$.

5. Applicazioni e omotopie proprie

Se $f : M \to N$ è differenziabile e propria, $f^*(A_c(N)) \subset A_c(M)$. Si indica ancora con f^* la restrizione dell'omomorfismo sulle forme.

$f^* : A_c(N) \to A_c(M)$ commuta con d, quindi manda $Z_c(N)$ in $Z_c(M)$ e $B_c(N)$ in $B_c(M)$; induce un omomorfismo, ancora indicato con f^*, dell'algebra graduata $H_c(N)$ in $H_c(M)$.

L'identità induce l'identità. Per $g : N \to P$ differenziabile e propria si ha $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Dunque:

5.1 PROPOSIZIONE. *Se $f : M \to N$ è un diffeomorfismo, $f^* : H_c(N) \to H_c(M)$ è un isomorfismo e $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.*

Due varietà diffeomorfe hanno dunque algebre di coomologia a supporto compatto isomorfe.

Ricordiamo (cap. IV, def. 4.3) che due applicazioni differenziabili proprie $f, g : M \to N$ sono differenziabilmente e propriamente omotope se esiste un'omotopia differenziabile $H : M \times \mathbb{R} \to N$ da f a g la cui restrizione a $M \times I$ sia propria.

5.2 TEOREMA. *Se $f, g : M \to N$ sono differenziabilmente e propriamente omotope, gli omomorfismi $f^*, g^* : H_c(N) \to H_c(M)$ sono uguali.*

Tenendo conto della proposizione seguente, la dimostrazione è identica a quella di 2.5.

5.3 PROPOSIZIONE. *Sia $J_t : x \mapsto (x,t)$ l'iniezione di M in $M \times \mathbb{R}$ e sia $A_1(M \times \mathbb{R})$ lo spazio delle forme il cui supporto ha proiezione compatta su M. Esiste un'applicazione lineare $K : A_1(M \times \mathbb{R}) \to A_c(M)$ tale che:*

i) $K(A_1^p(M \times \mathbb{R})) \subset A_c^{p-1}(M)$;

ii) $dK + Kd = J_1^* - J_0^*$.

Infatti, scegliendo nella dimostrazione di 2.6 un ricoprimento di M mediante aperti relativamente compatti, l'omomorfismo K ottenuto ha le proprietà volute.

Ricordiamo inoltre (cap. IV, prop. 4.7 e cor. 4.12) che ogni applicazione continua propria è propriamente omotopa a una differenziabile propria, e che due applicazioni differenziabili proprie propriamente omotope sono differenziabilmente e propriamente omotope.

Quindi, per $f : M \to N$ continua propria e $\hat{f}$ differenziabile propria propriamente omotopa a f, l'omomorfismo $\hat{f}^* : H_c(N) \to H_c(M)$ è indipendente dalla scelta di $\hat{f}$ (teor. 5.2). Si può dunque dire che f determina un omomorfismo $f^* : H_c(N) \to H_c(M)$.

5.4 PROPOSIZIONE. *Per applicazioni continue proprie $f : M \to N$ e $g : N \to P$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

5.5 COROLLARIO: INVARIANZA TOPOLOGICA DELLA COOMOLOGIA A SUPPORTO COMPATTO. *Due varietà omeomorfe hanno algebre di coomologia a supporto compatto isomorfe.*

In particolare questa algebra è indipendente dalla struttura differenziabile.

5.6 PROPOSIZIONE. *Se $f, g : M \to N$ sono continue, proprie e propriamente omotope, $f^* = g^*$.*

5.7 Osservazione. Diversamente dalla coomologia a supporti chiusi, quella a supporto compatto non è un invariante del tipo di omotopia: ad esempio $H^0_c(\mathbb{R}^m) = 0$ per $m > 0$, mentre $\mathbb{R}^m$ è contraibile.

6. Coomologia a supporto compatto degli aperti

Siano $U \subset V$ due aperti di M. Se α è una forma a supporto compatto su U, estendendola per zero su $V - U$ si ottiene una forma a supporto compatto su V. Si definisce così un omomorfismo $\omega_{V,U} : A_c(U) \to A_c(V)$ di algebre graduate.

Esso commuta con d; manda dunque $Z_c(U)$ in $Z_c(V)$ e $B_c(U)$ in $B_c(V)$, e induce un omomorfismo, ancora indicato con $\omega_{V,U}$, di $H_c(U)$ in $H_c(V)$.

Se W è un aperto contenente V, si ha $\omega_{W,V} \circ \omega_{V,U} = \omega_{W,U}$.

6.1 TEOREMA. *L'algebra di coomologia a supporto compatto di M è isomorfa al limite induttivo del sistema $\{H_c(U), \omega_{V,U}\}$.*

La verifica è immediata.

CAPITOLO XII

Coomologie relative

Per sottovarietà chiusa di dimensione n di M si intende qui un sottospazio chiuso N tale che, per ogni $x \in N$, esistano un intorno aperto U in M e un diffeomorfismo φ di U su $\mathbb{R}^m$ o H^m con le proprietà seguenti:

i) per $n < m-1$, $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$ e $\varphi(U \cap N) = \mathbb{R}^n$;

ii) per $n = m-1$, $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$ oppure H^m e $\varphi(U \cap N) = \mathbb{R}^{m-1}$;

iii) per $n = m$, $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$ oppure H^m e $\varphi(U \cap N) = \mathbb{R}^m$ oppure H^m.

Esiste dunque, per $N \neq \varnothing$, una sola struttura di varietà differenziabile di dimensione n su N per cui l'iniezione $i : N \to M$ sia un embedding, ossia un'applicazione differenziabile iniettiva di rango n in ogni punto.

Ogni componente connessa di N è allora:

i) per $n < m-1$, una varietà senza bordo contenuta nell'interno $M - \partial M$;

ii) per $n = m-1$, una varietà senza bordo contenuta nell'interno di M oppure nel bordo, del quale è allora una componente connessa;

iii) per $n = m$, una varietà di cui ogni componente connessa del bordo ha una delle proprietà precedenti.

Si indicano con $A(M,N)$ e $A_c(M,N)$ gli insiemi delle forme $\alpha \in A(M)$ e $\alpha \in A_c(M)$ nulle su N, cioè tali che $i^*\alpha = 0$. Sono ideali delle rispettive algebre, somme dirette dei sottospazi $A^p(M,N) = A(M,N) \cap A^p(M)$ e $A_c^p(M,N) = A_c(M,N) \cap A^p(M)$.

Si possono anche considerare $A(M)$ e $A_c(M)$ come $A(M,\varnothing)$ e $A_c(M,\varnothing)$. Poiché i^* commuta con d, queste sottoalgebre sono stabili per differenziazione esterna; si indica ancora con d la sua restrizione.

Se $f : M \to V$ è differenziabile (risp. differenziabile propria) e manda N in una sottovarietà chiusa W di V,[13] si ha $f^*A(V,W) \subset A(M,N)$ (risp. $f^*A_c(V,W) \subset A_c(M,N)$). Si indica ancora con f^* la restrizione corrispondente.

1. Algebre di coomologia relativa

Il nucleo $Z(M,N)$ di $d : A(M,N) \to A(M,N)$ è una sottoalgebra, somma diretta degli $Z^p(M,N) = Z(M,N) \cap A^p(M)$. L'immagine $B(M,N) = d(A(M,N))$ è un ideale, somma diretta degli $B^p(M,N) = B(M,N) \cap A^p(M)$.

Il quoziente $H(M,N) = Z(M,N)/B(M,N)$ è quindi un'algebra reale associativa e anticommutativa, graduata dagli $H^p(M,N) = Z^p(M,N)/B^p(M,N)$:

$H(M,N)$ è l'algebra di coomologia relativa di M modulo N;

$H^p(M,N)$ è lo spazio di coomologia relativa di dimensione p di M modulo N.

Si definiscono analogamente $Z_c(M,N)$, $Z_c^p(M,N)$, $B_c(M,N)$, $B_c^p(M,N)$, $H_c(M,N)$ e $H_c^p(M,N)$:

$H_c(M,N)$ è l'algebra di coomologia relativa a supporto compatto di M modulo N;

$H_c^p(M,N)$ è lo spazio di coomologia relativa a supporto compatto di dimensione p.

1.1 PROPOSIZIONE. *$H^p(M,N) = H_c^p(M,N) = 0$ per $p < 0$ e $p > m$.*

1.2 PROPOSIZIONE. *$H(M,M) = H_c(M,M) = 0$.*

1.3 PROPOSIZIONE. *Sia M la varietà somma di $(M_i)_{i\in I}$, N una sottovarietà chiusa e $N_i = N \cap M_i$. L'algebra $H(M,N)$ è isomorfa al prodotto diretto $\prod_i H(M_i,N_i)$; $H_c(M,N)$ è isomorfa alla somma diretta $\bigoplus_i H_c(M_i,N_i)$.*

1.4 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 1.3, $H^p(M,N) \simeq \prod_i H^p(M_i,N_i)$ e $H_c^p(M,N) \simeq \bigoplus_i H_c^p(M_i,N_i)$.*

[13] Si indicherà spesso una tale applicazione con $f : (M,N) \to (V,W)$.

1.5 PROPOSIZIONE. *Se M è connessa e N non vuota, $H^0(M,N) = H^0_c(M,N) = 0$.*

Infatti una funzione costante nulla su N è nulla su M; quindi $Z^0(M,N) = Z^0_c(M,N) = 0$.

1.6 Osservazione. Poiché $Z(M,N)$ e $Z_c(M,N)$ sono ideali delle rispettive algebre assolute, il prodotto delle forme induce su $H(M,N)$ una struttura di algebra su $H(M)$ e su $H_c(M,N)$ una struttura di algebra su $H_c(M)$. Inoltre (cap. XI, osservazione 4.6) induce su $H_c(M,N)$ una struttura di algebra su $H(M)$.

2. Applicazioni e omotopie differenziabili

Sia $f : M \to V$ differenziabile con $f(N) \subset W$, sottovarietà chiusa. L'omomorfismo $f^* : A(V,W) \to A(M,N)$ manda forme chiuse in forme chiuse e forme esatte in forme esatte; induce quindi un omomorfismo, ancora indicato con f^*, da $H(V,W)$ a $H(M,N)$.

Se f è l'identità, f^* è l'identità. Se $g : V \to X$ è differenziabile e $g(W) \subset Y$, sottovarietà chiusa di X, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

2.1 PROPOSIZIONE. *Sia $j : (M,\varnothing) \to (M,N)$ l'iniezione. Gli omomorfismi $j^* : H^p(M,N) \to H^p(M)$ e $j^* : H^p_c(M,N) \to H^p_c(M)$ sono isomorfismi per $p > n+1$.*

Infatti una forma di grado $p > n$ su M ha restrizione nulla a N, quindi $Z^p(M,N) = Z^p(M)$ e $Z^p_c(M,N) = Z^p_c(M)$. Analogamente $B^q(M,N) = B^q(M)$ e $B^q_c(M,N) = B^q_c(M)$ per $q > n+1$.

2.2 TEOREMA DI ESCISSIONE. *Siano N una sottovarietà chiusa di dimensione m di M e P una sottovarietà chiusa di dimensione m contenuta nell'interno di N, e sia U l'interno di P.*[14] *L'inclusione $j : (M-U, N-U) \to (M,N)$ induce isomorfismi nelle coomologie relative, con e senza supporto compatto.*

Infatti la restrizione $A(M) \to A(M-U)$ induce isomorfismi da $A(M,N)$ su $A(M-U,N-U)$ e da $A_c(M,N)$ su $A_c(M-U,N-U)$.

[14] L'interno si intende qui in senso topologico, non come complementare del bordo.

2.3 DEFINIZIONE. *Siano $f,g : M \to V$ differenziabili, con $f(N), g(N) \subset W$. Si dice che f è differenziabilmente omotopa a g relativamente a N e W se esiste $K : M \times \mathbb{R} \to V$ differenziabile tale che:*

i) $K(x,t) = f(x)$ per $t \leq 0$;

ii) $K(x,t) = g(x)$ per $t \geq 1$;

iii) $K(N \times \mathbb{R}) \subset W$.

Si chiama K un'omotopia differenziabile relativamente a N, W, e si scrive $K : (M,N) \times \mathbb{R} \to (V,W)$.

Questa è una relazione di equivalenza nell'insieme delle applicazioni differenziabili che mandano N in W.

2.4 TEOREMA. *Se f,g sono differenziabilmente omotope relativamente a N,W, gli omomorfismi $f^*, g^* : H(V,W) \to H(M,N)$ sono uguali.*

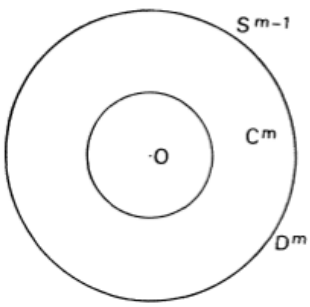
La dimostrazione, analoga a quella del teorema 2.5 del capitolo XI, è lasciata per esercizio.

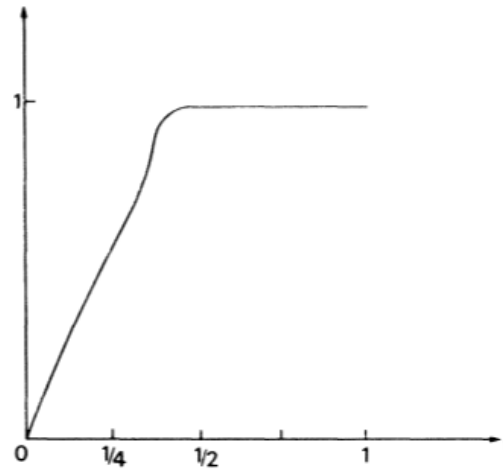
2.5 Esempio. Sia $C^m \subset D^m$ la corona $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1$, e sia $\varphi : I \to I$ differenziabile tale che:

i) $t \leq \varphi(t) \leq 1$ per ogni t;

ii) $\varphi(t) = 2t$ per $t \leq 1/4$;

iii) $\varphi(t) = 1$ per $t \geq 1/2$.





Si definisce $k : D^m \to D^m$ differenziabile mediante

$$k(x) = \begin{cases} 2x & \|x\| \leq 1/4, \\ \dfrac{\varphi(\|x\|)}{\|x\|} x & \|x\| > 0. \end{cases}$$

Si ha $k(C^m) \subset S^{m-1}$.

Sia $\psi : \mathbb{R} \to I$ differenziabile, uguale a 1 per $t \leq 0$ e a 0 per $t \geq 1$. L'applicazione

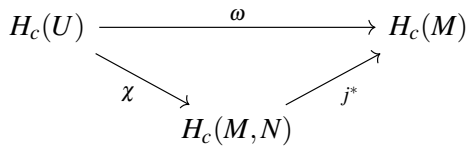
$$K : (x,t) \longmapsto \psi(t)k(x) + (1 - \psi(t))x$$

è un'omotopia differenziabile da k all'identità, con $K(C^m \times \mathbb{R}) \subset C^m$ e $K(S^{m-1} \times \mathbb{R}) \subset S^{m-1}$.

Sia infine $j : (D^m, S^{m-1}) \to (D^m, C^m)$ l'inclusione. Considerata sulle due coppie, K è un'omotopia da $j \circ k$, rispettivamente $k \circ j$, all'identità. Quindi $j^* : H(D^m, C^m) \to H(D^m, S^{m-1})$ è un isomorfismo con inverso k^*.

3. Coomologia relativa a supporto compatto

Sia $U = M - N$. L'omomorfismo $\omega : A_c(U) \to A_c(M)$ di estensione per zero ha immagine in $A_c(M,N)$. Pertanto $\omega : H_c(U) \to H_c(M)$ si fattorizza in $\chi : H_c(U) \to H_c(M,N)$ seguito da $j^* : H_c(M,N) \to H_c(M)$:



3.1 TEOREMA DI ESCISSIONE FORTE. *L'omomorfismo $\chi : H_c(U) \to H_c(M,N)$ è un isomorfismo.*

La dimostrazione usa il risultato seguente, che si ammetterà (Munkres [7]):

3.2 TEOREMA DELL'INTORNO TUBOLARE. *Sia N una sottovarietà chiusa di M. Esistono una sottovarietà chiusa T di dimensione m contenente N e una retrazione differenziabile $r : T \to N$ tali che:*

i) *N sia contenuta nell'interno topologico di T;*

ii) *r sia propria;*

iii) *indicando con $j : N \to T$ l'iniezione, $j \circ r$ sia differenziabilmente e propriamente omotopa all'identità di T.*

In queste condizioni $j^* : H_c(T) \to H_c(N)$ è un isomorfismo.

3.3 Esercizio. Dimostrare 3.2 nei casi:

i) $M = S^m$ e $N = \{(0,\dots,0,1)\}$;

ii) $M = \mathrm{P}\mathbb{R}^m$ e $N = \mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}$;

iii) $M = \mathrm{P}\mathbb{C}_m$ e $N = \mathrm{P}\mathbb{C}_{m-1}$.

Dimostrazione di 3.1. Si usano le notazioni di 3.2.

i) χ è suriettivo. Sia $\alpha \in Z_c(M,N)$. Poiché è nulla su N, esiste $\beta \in A_c(T)$ con $\alpha = d\beta$ su T. Sia $\gamma \in A_c(M)$ un'estensione di β (teor. 4.1). La forma $\alpha' = \alpha - d\gamma$ è chiusa, a supporto compatto, coomologa ad α e nulla su T; appartiene dunque a $Z_c(U)$.

ii) χ è iniettivo. Siano $\alpha \in Z_c(U)$ e $\beta \in A_c(M,N)$ con $\omega(\alpha) = d\beta$. Si può scegliere T disgiunto dal supporto di α. Allora $d\beta$ è nulla su T e, poiché β è nulla su N, esiste $\gamma \in A_c(T)$ con $\beta = d\gamma$ su T. Estendendo γ a $\tilde{\gamma} \in A_c(M)$, la forma $\beta' = \beta - d\tilde{\gamma}$ è nulla su T, dunque appartiene ad $A_c(U)$ e soddisfa $d\beta' = \alpha$ su U.

c.v.d.

4. Omomorfismi cobordo

4.1 TEOREMA. *Siano M una varietà differenziabile di dimensione m, N una sottovarietà chiusa di dimensione n e $i : N \to M$ l'iniezione. Per ogni forma differenziale α di grado p su N esiste una forma β dello stesso grado su M con $i^*\beta = \alpha$. Se α ha supporto compatto in N, si può scegliere β a supporto compatto in M.*

Dimostrazione. Sia (U_j, φ_j) una famiglia di carte di M tale che:

i) U_j sia relativamente compatto;

ii) ogni compatto incontri soltanto un numero finito di U_j;

iii) $N \subset \bigcup_j U_j$;

iv) $\varphi_j(U_j) = \mathbb{R}^m$, oppure H^m se $n = m-1$ o $n = m$;

v) $\varphi_j(U_j \cap N) = \mathbb{R}^n$, oppure H^m se $n = m$.

I $V_j = U_j \cap N$ formano un ricoprimento aperto localmente finito di N e $\psi_j = \varphi_j|_{V_j}$ è un diffeomorfismo sull'opportuno spazio modello.

Sia ω_j la forma su $\psi_j(V_j)$ tale che $\psi_j^* \omega_j = \alpha|_{V_j}$. Se r_j è una retrazione per deformazione differenziabile di $\varphi_j(U_j)$ su $\psi_j(V_j)$, $\bar{\omega}_j = r_j^* \omega_j$ estende ω_j; se $\omega_j = 0$, anche $\bar{\omega}_j = 0$.

Sia (θ_j) una partizione differenziabile dell'unità subordinata a (U_j) sull'aperto $U = \bigcup_j U_j$. Estendendo per zero la forma $(\theta_j|_{U_j})\varphi_j^* \bar{\omega}_j$, si ottiene una forma β_j su M con supporto in U_j. La famiglia è localmente finita e $\beta = \sum_j \beta_j$ soddisfa $i^*\beta = \alpha$.

Se α ha supporto compatto, solo un numero finito di ω_j è non nullo. La somma è allora finita e β ha supporto compatto. c.v.d.

Siano ora N non vuota e P una sottovarietà chiusa, eventualmente vuota, di N. Per $\alpha \in Z^p(N,P)$ si scelga $\beta \in A^p(M)$ con $i^*\beta = \alpha$. Si ha $i^* d\beta = d i^* \beta = d\alpha = 0$, dunque $d\beta \in Z^{p+1}(M,N)$.

4.2 LEMMA. *La classe di $d\beta$ in $H^{p+1}(M,N)$ dipende soltanto dalla classe di α in $H^p(N,P)$.*

Si indicherà con $\delta : H^p(N,P) \to H^{p+1}(M,N)$ questa corrispondenza.

Dimostrazione. Se γ è una seconda estensione di α, $d\beta = d\gamma + d(\beta - \gamma)$, con $\beta - \gamma \in A^p(M,N)$. La classe è quindi indipendente dall'estensione.

Se $\alpha' = \alpha + d\rho$, $\rho \in A^{p-1}(N,P)$, ed $\sigma \in A^{p-1}(M)$ estende ρ, si ha $i^*(\beta + d\sigma) = \alpha'$ e $d(\beta + d\sigma) = d\beta$. c.v.d.

4.3 LEMMA. *$\delta : H^p(N,P) \to H^{p+1}(M,N)$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.*

Quando N e P sono vuote, si prende per δ l'omomorfismo nullo da $H^p(N,P) = (0)$ a $H^{p+1}(M)$.

4.4 DEFINIZIONE. *$\delta : H^p(N,P) \to H^{p+1}(M,N)$ si chiama omomorfismo cobordo della terna (M,N,P).*

Quando P è vuota, si parla di omomorfismo cobordo della coppia (M,N).

4.5 PROPOSIZIONE. *Sia $f : M \to V$ differenziabile, con $f(N) \subset W$ e $f(P) \subset X$, dove W è una sottovarietà chiusa di V e X una sottovarietà chiusa di W. Il diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H^p(W,X) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(V,W) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^p(N,P) & \xrightarrow[\delta]{} & H^{p+1}(M,N) \end{array}$$

Infatti, se $j : W \to V$ è l'inclusione, α è chiusa di grado p su W e nulla su X, e $j^*\beta = \alpha$, allora $i^*(f^*\beta) = f^*(j^*\beta) = f^*\alpha$ e $d(f^*\beta) = f^*(d\beta)$.

Si definisce analogamente un omomorfismo cobordo

$$\delta : H_c^p(N,P) \to H_c^{p+1}(M,N).$$

Nelle ipotesi di 4.5, se inoltre f è propria, è commutativo anche il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(W,X) & \xrightarrow{\delta} & H_c^{p+1}(V,W) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H_c^p(N,P) & \xrightarrow[\delta]{} & H_c^{p+1}(M,N) \end{array}$$

5. Successioni esatte di coomologia

Sia $j : (M,P) \to (M,N)$ l'iniezione.

5.1 TEOREMA. *È esatta la successione*[15]

$$\cdots \to H^p(M,N) \xrightarrow{j^*} H^p(M,P) \xrightarrow{i^*} H^p(N,P) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(M,N) \xrightarrow{j^*} \cdots .$$

[15] Le nozioni necessarie sulle successioni esatte si trovano nell'appendice a questo capitolo.

Dimostrazione. Il risultato è banale per N vuota; supponiamo quindi $N \neq \varnothing$.

i) $\ker i^* \supset \operatorname{Im} j^*$: una forma in $A^p(M,N)$ è nulla su N.

ii) $\ker \delta \supset \operatorname{Im} i^*$: se $\alpha = i^*\beta$ con β chiusa, $d\beta = 0$.

iii) $\ker j^* \supset \operatorname{Im} \delta$: se $\alpha = i^*\beta$, $d\beta$ è esatta in $Z^{p+1}(M,P)$.

iv) $\ker i^* \subset \operatorname{Im} j^*$: se $\alpha \in Z^p(M,P)$ e $i^*\alpha = d\beta$, $\beta \in A^{p-1}(N,P)$, si estende β a $\gamma \in A^{p-1}(M)$. Allora $\alpha' = \alpha - d\gamma \in Z^p(M,N)$ e $j^*\alpha'$ è coomologa ad α in $H^p(M,P)$.

v) $\ker \delta \subset \operatorname{Im} i^*$: siano $\alpha \in Z^p(N,P)$, $i^*\beta = \alpha$ e $\gamma \in A^p(M,N)$ con $d\beta = d\gamma$. Si ha $d(\beta - \gamma) = 0$ e $i^*(\beta - \gamma) = \alpha$.

vi) $\ker j^* \subset \operatorname{Im} \delta$: se $\alpha \in Z^{p+1}(M,N)$ e $\beta \in A^p(M,P)$ soddisfano $\alpha = d\beta$, allora $i^*\beta \in Z^p(N,P)$.

c.v.d.

5.2 Osservazione. La dimostrazione usa soltanto l'esattezza di

$$0 \to A(M,N) \xrightarrow{j^*} A(M,P) \xrightarrow{i^*} A(N,P) \to 0.$$

Si dimostra analogamente:

5.3 TEOREMA. *È esatta la successione*

$$\cdots \to H_c^p(M,N) \xrightarrow{j^*} H_c^p(M,P) \xrightarrow{i^*} H_c^p(N,P) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(M,N) \to \cdots.$$

Sono le successioni esatte di coomologia e di coomologia a supporto compatto della terna (M,N,P).

5.4 Nelle ipotesi di 4.5 si ha un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(V,W) & \longrightarrow & H^p(V,X) & \longrightarrow & H^p(W,X) & \longrightarrow & H^{p+1}(V,W) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^p(M,N) & \longrightarrow & H^p(M,P) & \longrightarrow & H^p(N,P) & \longrightarrow & H^{p+1}(M,N) \end{array}$$

Il diagramma prosegue in entrambi i sensi. Per f propria si ha il diagramma analogo con supporti compatti.

Quando P è vuota si ottiene:

5.5 TEOREMA. *È esatta la successione*

$$\cdots \to H^p(M,N) \xrightarrow{j^*} H^p(M) \xrightarrow{i^*} H^p(N) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(M,N) \to \cdots.$$

5.6 TEOREMA. *È esatta la successione*

$$\cdots \to H_c^p(M,N) \xrightarrow{j^*} H_c^p(M) \xrightarrow{i^*} H_c^p(N) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(M,N) \to \cdots .$$

Di conseguenza (teor. 3.1):

5.7 TEOREMA. *Sia $U = M - N$. È esatta la successione*

$$\cdots \to H_c^p(U) \xrightarrow{\omega} H_c^p(M) \xrightarrow{i^*} H_c^p(N) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(U) \to \cdots ,$$

dove δ indica qui $\chi^{-1} \circ \delta$.

Le successioni di 5.5, 5.6 e 5.7 si chiamano successioni esatte di coomologia e di coomologia a supporto compatto della coppia (M,N).

5.8 COROLLARIO. *Se l'iniezione $i : N \to M$ è un'equivalenza omotopica, $H(M,N) = 0$.*

Infatti (cap. XI, cor. 3.5) $i^* : H(M) \to H(N)$ è allora un isomorfismo.

5.9 Esempio. Con le notazioni di 2.5 si ha il diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{p-1}(D^m) & \longrightarrow & H^{p-1}(C^m) & \longrightarrow & H^p(D^m,C^m) & \longrightarrow & H^p(D^m) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^*} & & \downarrow \\
H^{p-1}(D^m) & \longrightarrow & H^{p-1}(S^{m-1}) & \longrightarrow & H^p(D^m,S^{m-1}) & \longrightarrow & H^p(D^m)
\end{array}$$

seguito a destra da $H^p(C^m) \to H^p(S^{m-1})$. Poiché S^{m-1} è un retratto per deformazione di $C^m \simeq S^{m-1} \times I$, l'omomorfismo $H(C^m) \to H(S^{m-1})$ è un isomorfismo. Per il lemma dei cinque (A.4), anche $j^* : H^p(D^m,C^m) \to H^p(D^m,S^{m-1})$ lo è. Si potrebbe anche usare $H^p(D^m) = 0$ per $p > 0$.

5.10 Esercizio: successione esatta di Mayer–Vietoris.

Siano U,V aperti di M con $M = U \cup V$, $i : U \to M$, $j : V \to M$, $k : U \cap V \to U$, $l : U \cap V \to V$ le iniezioni. Si pongano $\lambda(\alpha) = (i^*\alpha, j^*\alpha)$ e $\mu(\beta,\gamma) = k^*\beta - l^*\gamma$.

i) La successione $0 \to A(M) \xrightarrow{\lambda} A(U) \oplus A(V) \xrightarrow{\mu} A(U \cap V) \to 0$ è esatta (usare una partizione dell'unità subordinata a U,V).

ii) Si ha una successione esatta, detta di Mayer–Vietoris,

$$\cdots \to H^p(M) \to H^p(U) \oplus H^p(V) \to H^p(U \cap V) \to H^{p+1}(M) \to \cdots .$$

iii) Essa permette di calcolare $H^p(S^m)$ (cfr. teor. 6.1).

6. Coomologia delle sfere. Applicazioni

6.1 TEOREMA. *Si ha* $H^p(S^m) = 0$ *per* $p \neq 0, m$; $H^0(S^0) = \mathbb{R}^2$; $H^0(S^m) = H^m(S^m) = \mathbb{R}$ *per* $m \geq 1$.

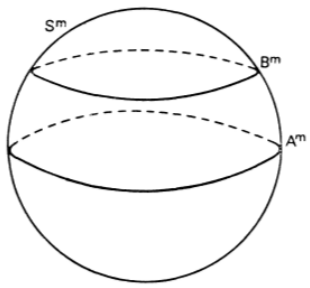
Dimostrazione. S^0 è una varietà di dimensione 0 con due componenti connesse. Quindi (cap. XI, prop. 1.1 e cor. 1.6) $H^0(S^0) = \mathbb{R}^2$ e $H^p(S^0) = 0$ per $p \neq 0$.

Si ha inoltre $H^0(S^m) = \mathbb{R}$ per $m \geq 1$ e $H^p(S^m) = 0$ per $p < 0$ o $p > m$.

Sia $B^m \subset S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ l'emisfero definito da $x_{m+1} \geq 0$, e sia $A^m = \{x \in S^m \mid x_{m+1} \leq 1/2\}$. Si hanno gli isomorfismi:

$$\begin{aligned} H^p(S^m, B^m) &= H^p(A^m, A^m \cap B^m) && \text{(escissione, 2.2)}, \\ H^p(A^m, A^m \cap B^m) &= H^p(D^m, C^m) && \text{(notazioni di 2.5)}, \\ H^p(D^m, C^m) &= H^p(D^m, S^{m-1}) && \text{(esempi 2.5 o 5.9)}. \end{aligned}$$

Dunque $H^p(S^m, B^m) \simeq H^p(D^m, S^{m-1})$.



Per $m = 1$ si hanno le due successioni esatte

$$H^0(S^1) \to H^0(B^1) \to H^1(S^1, B^1) \to H^1(S^1) \to H^1(B^1),$$

$$H^0(D^1, S^0) \to H^0(D^1) \to H^0(S^0) \to H^1(D^1, S^0) \to H^1(D^1).$$

Se ne deduce (cap. XI, prop. 2.3 e cor. 2.8; prop. 1.5) che $H^1(S^1) \simeq H^1(S^1, B^1) \simeq H^1(D^1, S^0)$, e che quest'ultimo spazio ha dimensione 1. Quindi $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$.

Si conclude per induzione su $m > 1$. Poiché $H^0(S^m) \to H^0(B^m)$ è un isomorfismo, dalle successioni

$$H^0(S^m) \to H^0(B^m) \to H^1(S^m, B^m) \to H^1(S^m) \to H^1(B^m),$$

$$H^{p-1}(B^m) \to H^p(S^m, B^m) \to H^p(S^m) \to H^p(B^m), \quad p \geq 2,$$

segue che per $p \geq 1$ $H^p(S^m)$ è isomorfo a $H^p(S^m, B^m)$ e quindi a $H^p(D^m, S^{m-1})$.

Analogamente, dalla successione

$$H^{p-1}(D^m) \to H^{p-1}(S^{m-1}) \to H^p(D^m, S^{m-1}) \to H^p(D^m)$$

segue $H^1(D^m, S^{m-1}) = 0$ e, per $p \geq 2$, $H^p(D^m, S^{m-1}) \simeq H^{p-1}(S^{m-1})$. Dunque

$$\begin{aligned} &H^1(S^m) = 0, \\ &H^p(S^m) = H^{p-1}(S^{m-1}) = 0 \qquad 2 \leq p < m, \\ &H^m(S^m) = H^{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c.v.d.

6.2 COROLLARIO. *Per $n \neq m$, S^n non ha il tipo di omotopia di S^m.*

In particolare le due sfere non sono omeomorfe.

Nel corso della dimostrazione si è ottenuto anche:

6.3 PROPOSIZIONE. *$H^p(D^m, S^{m-1}) = 0$ per $p \neq m$, e $H^m(D^m, S^{m-1}) = \mathbb{R}$ per $m \geq 1$.*

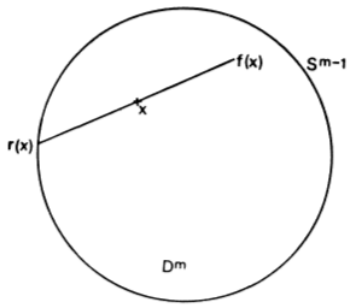
6.4 PROPOSIZIONE. *La sfera S^m non è un retratto della palla D^{m+1}.*

Infatti (cap. XI, cor. 3.5), $i^* : H^m(D^{m+1}) \to H^m(S^m)$ non è suriettivo (anche per $m = 0$, quando è la diagonale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$).

6.5 TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER. *Ogni applicazione continua della palla D^m in sé stessa ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f : D^m \to D^m$ sia continua e senza punti fissi. L'applicazione $r : D^m \to S^{m-1}$ definita dallo

schema seguente è allora una retrazione di D^m su S^{m-1}, il che è impossibile. c.v.d.



6.6 Osservazione. Questi risultati generalizzano in ogni dimensione quelli analoghi in dimensione 2 (cap. VI, prop. 2.7 e teor. 2.8), ottenuti con ragionamenti identici ma usando i gruppi fondamentali invece degli spazi di coomologia.

6.7 TEOREMA. *$H_c^p(\mathbb{R}^m) = 0$ per $p \neq m$, e $H_c^m(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per $m > 0$, $H_c^p(\mathbb{R}^m) = 0$ per $p < 0$, $p > m$ e $p = 0$ (cap. XI, prop. 4.1 e 4.4). Sia N il punto $(0,\dots,0,1)$ di S^m; $U = S^m - N$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$. Dalla successione esatta

$$H^{p-1}(S^m) \to H^{p-1}(N) \to H_c^p(U) \xrightarrow{\chi} H^p(S^m) \to H^p(N)$$

segue che χ è un isomorfismo per $p \geq 1$. Il caso $m = 0$ è immediato. c.v.d.

6.8 COROLLARIO. *Per $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$.*

Appendice. Successioni esatte

Sia $(E_j)_{j\in J}$ una famiglia di spazi vettoriali reali indicizzata da un intervallo J di $\mathbb{Z}$, e per ogni $j, j+1 \in J$ sia $h_j : E_j \to E_{j+1}$ un omomorfismo. Si rappresenterà la situazione con

$$\cdots \xrightarrow{h_{j-1}} E_j \xrightarrow{h_j} E_{j+1} \xrightarrow{h_{j+1}} E_{j+2} \xrightarrow{h_{j+2}} \cdots,$$

omettendo spesso gli indici.

A.1 DEFINIZIONE. *La successione è esatta se per ogni j con $j+2 \in J$ si ha* $\ker h_{j+1} = \operatorname{Im} h_j$.

Esempio. Se $F \subset E$ è un sottospazio vettoriale, $i : F \to E$ l'iniezione e $p : E \to E/F$ la proiezione, la successione $0 \to F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/F \to 0$ è esatta; le frecce agli estremi sono gli omomorfismi nulli.

A.2 PROPOSIZIONE. *Sia $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ esatta. Se A, C hanno dimensione finita, anche B ha dimensione finita.*

Infatti l'immagine e il nucleo di g hanno dimensione finita.

A.3 PROPOSIZIONE. *Se $0 \to E_1 \xrightarrow{h_1} E_2 \to \cdots \to E_n \to 0$ è esatta e gli E_i hanno dimensione finita, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= \dim h_1(E_1), \\ \dim E_2 &= \dim h_2(E_2) + \dim h_1(E_1), \\ &\vdots \\ \dim E_n &= \dim h_{n-1}(E_{n-1}). \end{aligned}$$

La somma alternata si annulla. c.v.d.

A.4 PROPOSIZIONE: LEMMA DEI CINQUE. *Sia commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ A' & \xrightarrow[a']{} & B' & \xrightarrow[b']{} & C' & \xrightarrow[c']{} & D' & \xrightarrow[d']{} & E' \end{array}$$

con righe esatte. Se f, g, i, j sono isomorfismi, anche h è un isomorfismo.

Dimostrazione.

i) h è suriettivo. Per $u' \in C'$ si trova $v \in D$ con $i(v) = c'(u')$. Allora $j(d(v)) = d'(i(v)) = 0$, dunque $d(v) = 0$ per l'iniettività di j. Sia $u \in C$ con $c(u) = v$. Poiché $c'(h(u) - u') = 0$, esiste $w' \in B'$ con $b'(w') = h(u) - u'$, ed esiste $w \in B$ con $g(w) = w'$. Quindi $u' = h(u - b(w))$.

ii) h è iniettivo. Se $h(u) = 0$, $i(c(u)) = c'(h(u)) = 0$, dunque $c(u) = 0$. Sia $v \in B$ con $u = b(v)$. Si ha $b'(g(v)) = 0$, quindi esiste $w' \in A'$ con $g(v) = a'(w')$, ed esiste $w \in A$ con $f(w) = w'$. Allora $g(a(w)) = a'(w') = g(v)$, dunque $v = a(w)$. Infine $u = b(a(w)) = 0$.

c.v.d.

CAPITOLO XIII

Coomologia e funzioni di Morse

1. Elementi di teoria di Morse[16]

Sia M una varietà differenziabile e $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Un punto x è un *punto critico* di f se il rango di f in x è nullo (o, equivalentemente, se df è nulla in x). Un numero reale c è un *valore critico* (risp. *regolare*) se $f^{-1}(c)$ contiene un punto critico (risp. non ne contiene alcuno). In particolare ogni numero che non appartiene all'immagine di f è un valore regolare.

Sia x un punto critico e $(x_1, \dots, x_m)$ un sistema di coordinate locali vicino a x. La matrice

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_x$$

definisce su $T_x(M)$ una forma bilineare simmetrica indipendente dalle coordinate scelte. È l'*hessiano* di f in x, indicato con $\mathrm{Hess}_x(f)$.

L'*indice* di x è la dimensione del più grande sottospazio di $T_x(M)$ sul quale l'hessiano è definito negativo; è anche il numero degli autovalori strettamente negativi della matrice precedente.

Il punto critico è *non degenere* se l'hessiano è una forma bilineare non degenere, ossia se il determinante della matrice precedente è diverso da zero.

1.1 LEMMA DI MORSE. *Sia $x \in M - \partial M$ un punto critico non degenere di indice p. Esiste un sistema $(y_1, \dots, y_m)$ di coordinate locali su un intorno aperto U di x tale che:*

i) $y_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$;

ii) $f|_U = f(x) - y_1^2 - \cdots - y_p^2 + y_{p+1}^2 + \cdots + y_m^2$.

I punti critici non degeneri sono dunque isolati. Se tutti i punti critici sono non degeneri, ogni compatto ne contiene soltanto un numero finito.[XIII.1]

[16] Questo paragrafo non contiene dimostrazioni. Lo si potrà completare mediante il capitolo I di [4] e i paragrafi 2 e 3 di [5].

1.2 TEOREMA. *Sia M una varietà differenziabile con bordo compatto. Esiste una funzione differenziabile f su M avente le proprietà seguenti:*

i) f è propria;

ii) 0 è un valore regolare;

iii) $f^{-1}(0) = \partial M$;

iv) i punti critici sono non degeneri;

v) punti critici distinti hanno valori critici distinti.

Si dice che f è una *funzione di Morse* su M. Se M è connessa, f è positiva o negativa.

Supponiamo ora f positiva. I valori critici sono allora isolati e strettamente positivi. Per ogni numero a indichiamo con M_a e M^a rispettivamente $f^{-1}([0,a])$ e $f^{-1}(a)$. Se $a \in f(M)$ è regolare e strettamente positivo, M_a è una sottovarietà compatta di dimensione m con bordo $\partial M \cup M^a$.

1.3 TEOREMA. *Sia $[a,b] \subset f(M)$ un intervallo compatto privo di valori critici. Esiste un diffeomorfismo $h : M^a \times [a,b] \to f^{-1}([a,b])$ tale che $f(h(x,t)) = t$.*

Le sottovarietà M^a e M^b sono dunque diffeomorfe.

1.4 COROLLARIO: INTORNO COLLARE DEL BORDO. *Esiste un embedding $k : \partial M \times [0,1] \to M$ tale che $k(x,0) = x$.*

1.5 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 1.3, se inoltre $a \neq 0$, le sottovarietà M_a e M_b sono diffeomorfe e l'inclusione $M_a \to M_b$ è un'equivalenza omotopica.*

Sia ora x un punto critico di indice p e sia $c = f(x)$. Si possono trovare $\varepsilon > 0$ e coordinate $(y_1, \ldots, y_m)$ su un intorno aperto $U \subset M - \partial M$ tali che:

i) $c - \varepsilon > 0$;

ii) c sia l'unico valore critico in $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$;

iii) $y_i(x) = 0$ e $y_i(U) =]-\varepsilon, +\varepsilon[$;

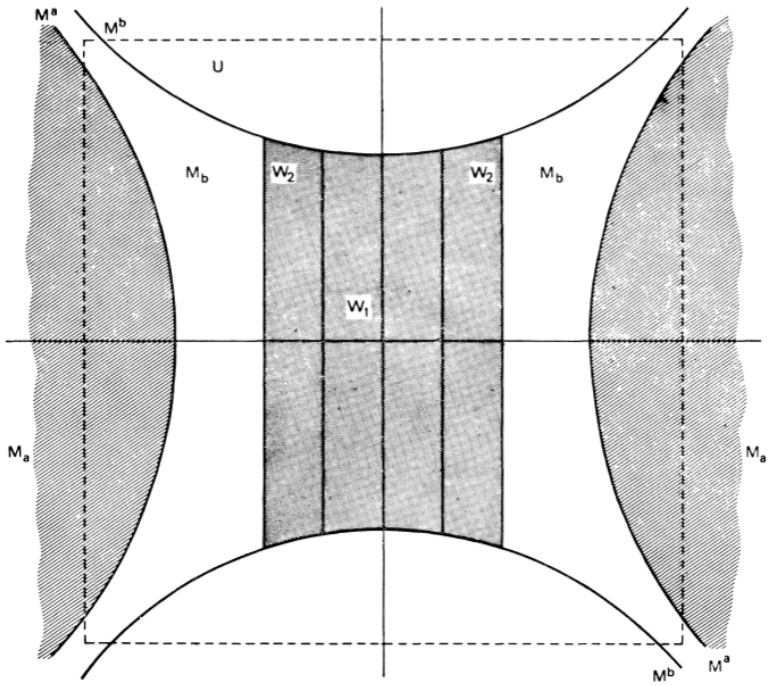
iv) $f|_U = c - y_1^2 - \cdots - y_p^2 + y_{p+1}^2 + \cdots + y_m^2$.

Si pongono $a = c - \varepsilon/2$ e $b = c + \varepsilon/2$.

1.6 PROPOSIZIONE. *Se $p = 0$, M_b è diffeomorfa alla varietà somma di M_a e di una palla chiusa D^m.*

Se $p \neq 0$ si pongono:

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_b &= M_b - M^b,\\
V_1 &= \widetilde{M}_b - \{z \in U \cap \widetilde{M}_b : \textstyle\sum_{i=1}^p y_i^2(z) < \varepsilon/4\},\\
V_2 &= \widetilde{M}_b - \{z \in U \cap \widetilde{M}_b : \textstyle\sum_{i=1}^p y_i^2(z) < \varepsilon/8\},\\
W_1 &= \{z \in U \cap \widetilde{M}_b : \textstyle\sum_{i=1}^p y_i^2(z) \leq \varepsilon/4\},\\
W_2 &= \{z \in U \cap \widetilde{M}_b : \varepsilon/8 \leq \textstyle\sum_{i=1}^p y_i^2(z) \leq \varepsilon/4\}.
\end{aligned}$$



Allora $\widetilde{M}_b$ è una sottovarietà aperta di M_b;

V_2 è una sottovarietà chiusa di $\widetilde{M}_b$;

V_1 è una sottovarietà chiusa di $\widetilde{M}_b$ contenuta nell'interno topologico di V_2;

(W_1, W_2) è diffeomorfa a $(D^p \times \mathbb{R}^{m-p}, C^p \times \mathbb{R}^{m-p})$, con la notazione dell'esempio 2.5 del capitolo XII.

1.7 TEOREMA. *L'inclusione di M_a in V_2 è un'equivalenza omotopica.*

2. Coomologia delle varietà compatte

Sia M una varietà differenziabile con bordo compatto e f una funzione di Morse positiva.

2.1 PROPOSIZIONE. *Se $[a,b] \subset f(M)$ è compatto e non contiene valori critici, $H(M_b, M_a) = 0$.*

Infatti (teorema 1.3 o corollario 1.5; cap. XII, cor. 5.7) l'inclusione di M_a in M_b è un'equivalenza omotopica.

2.2 PROPOSIZIONE. *Se $[a,b] \subset f(M)$ contiene un solo valore critico c, con $a < c < b$, e p è l'indice del punto critico corrispondente, allora*

$$H^q(M_b, M_a) = \begin{cases} 0 & q \neq p, \\ \mathbb{R} & q = p. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per 2.1 e la successione esatta della terna, si possono prendere per a, b i numeri di 1.6 e 1.7. Se $p = 0$, la decomposizione $M_b \simeq M_a \sqcup D^m$ dà $H^0(M_b, M_a) = \mathbb{R}$ e gli altri gruppi nulli (cap. XII, prop. 1.3). Se $p \neq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} H^q(M_b, M_a) &\simeq H^q(\widetilde{M}_b, M_a) && \text{(XI, 3.8)}, \\ &\simeq H^q(\widetilde{M}_b, V_2) && \text{(1.7; XII, 5.8)}, \\ &\simeq H^q(W_1, W_2) && \text{(escissione: XII, 2.2)}, \\ &\simeq H^q(D^p, C^p) && \text{(XI, es. 3.7)}, \\ &\simeq H^q(D^p, S^{p-1}). \end{aligned}$$

L'ultimo spazio è $\mathbb{R}$ per $q = p$, nullo altrimenti. c.v.d.

2.3 COROLLARIO. *Se tutti gli $H^q(M_a)$ hanno dimensione finita, lo stesso vale per gli $H^q(M_b)$.*

Ciò segue dalla proposizione A.2 del capitolo XII.

2.4 COROLLARIO. *Per $q \neq p-1, p$ l'inclusione induce un isomorfismo $H^q(M_b) \to H^q(M_a)$.*

Si usa infatti la successione esatta

$$H^q(M_b, M_a) \to H^q(M_b) \to H^q(M_a) \to H^{q+1}(M_b, M_a).$$

2.5 COROLLARIO. *Si ha:*

$$\begin{aligned} p=0: &\quad \dim H^0(M_b) = \dim H^0(M_a) + 1; \\ p>0: &\quad \dim H^{p-1}(M_b) = \dim H^{p-1}(M_a) - \varepsilon, \\ &\quad \dim H^p(M_b) = \dim H^p(M_a) + (1-\varepsilon), \quad \varepsilon = 0 \text{ o } 1. \end{aligned}$$

Dalla successione esatta

$$0 \to H^{p-1}(M_b) \to H^{p-1}(M_a) \to H^p(M_b, M_a) \to H^p(M_b) \to H^p(M_a) \to 0$$

si deducono $\dim H^{p-1}(M_b) \leq \dim H^{p-1}(M_a)$, $\dim H^p(M_b) \geq \dim H^p(M_a)$ e

$$(\dim H^{p-1}(M_a) - \dim H^{p-1}(M_b)) + (\dim H^p(M_b) - \dim H^p(M_a)) = 1.$$

2.6 TEOREMA DI FINITEZZA. *Gli spazi di coomologia di una varietà compatta hanno dimensione finita.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su $m = \dim M$, essendo il risultato immediato per $m = 0$. Sia f di Morse positiva; siano $0 < c_1 < \cdots < c_r$ i valori critici e si scelgano

$$0 < a_0 < c_1 < a_1 < \cdots < a_{r-1} < c_r < a_r.$$

La varietà M_{a_0}, eventualmente vuota, ha il tipo di omotopia di ∂M; ha dunque coomologia di dimensione finita. Per 2.3 lo stesso vale per tutte le M_{a_i}, in particolare per $M = M_{a_r}$. c.v.d.

2.7 COROLLARIO. *Se M è compatta e N è una sua sottovarietà chiusa, gli spazi $H^q(M,N)$ hanno dimensione finita.*

In particolare ciò vale per $H^q(M, \partial M)$. Il corollario giustifica le definizioni seguenti.

2.8 DEFINIZIONE. *La dimensione $b_q(M,N)$ di $H^q(M,N)$ si chiama q-esimo numero di Betti di M modulo N.*

Se $N = \varnothing$, $b_q(M) = b_q(M, \varnothing)$ è il q-esimo numero di Betti di M.

2.9 DEFINIZIONE. *La somma alternata*

$$\chi(M,N) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q b_q(M,N)$$

si chiama caratteristica di Eulero–Poincaré di M modulo N.

Se $N = \varnothing$, $\chi(M) = \sum_{q=0}^{m}(-1)^q b_q(M)$ è la caratteristica di Eulero–Poincaré di M.

Esempi. $\chi(D^m) = 1$, $\chi(S^m) = 1 + (-1)^m$, $\chi(D^m, S^{m-1}) = (-1)^m$.

2.10 PROPOSIZIONE. *La caratteristica di Eulero–Poincaré di una varietà differenziabile compatta è un invariante del tipo di omotopia.*

2.11 Esercizi.

i) $\chi(M,N) = \chi(M) - \chi(N)$; in particolare $\chi(M,\partial M) = \chi(M) - \chi(\partial M)$.

ii) Siano V, W sottovarietà chiuse di dimensione m di una varietà compatta M, con $V \cup W = M$ e $N = V \cap W$ sottovarietà chiusa di dimensione $m-1$ oppure m. Allora $\chi(M) = \chi(V) + \chi(W) - \chi(N)$.

2.12 Esercizio: coomologia delle varietà di livello.

i) Nelle ipotesi di 2.2 si hanno le relazioni seguenti, con $\varepsilon, \eta \in \{0,1\}$. Si ha $b_q(M^b) = b_q(M^a)$ per $q \neq p-1, p, m-p-1, m-p$. Per gli altri gradi:

$$\left.\begin{aligned} b_{p-1}(M^b) &= b_{p-1}(M^a) - \varepsilon \\ b_p(M^b) &= b_p(M^a) + 1 - \varepsilon \\ b_{m-p-1}(M^b) &= b_{m-p-1}(M^a) + \eta \\ b_{m-p}(M^b) &= b_{m-p}(M^a) - 1 + \eta \end{aligned}\right\} \quad p \neq m-p-1, m-p, m-p+1;$$

$$\left.\begin{aligned} b_{p-1}(M^b) &= b_{p-1}(M^a) - \varepsilon \\ b_p(M^b) &= b_p(M^a) + 1 - \varepsilon + \eta \\ b_{p+1}(M^b) &= b_{p+1}(M^a) - 1 + \eta \end{aligned}\right\} \quad p = m-p-1;$$

$$\left.\begin{aligned} b_{p-1}(M^b) &= b_{p-1}(M^a) + \eta - \varepsilon \\ b_p(M^b) &= b_p(M^a) + \eta - \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad p = m-p;$$

$$\left.\begin{aligned} b_{p-2}(M^b) &= b_{p-2}(M^a) + \eta \\ b_{p-1}(M^b) &= b_{p-1}(M^a) - 1 + \eta - \varepsilon \\ b_p(M^b) &= b_p(M^a) + 1 - \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad p = m-p+1.$$

ii) $\chi(M^b) = \chi(M^a) + (-1)^p + (-1)^{m-p-1}$. In particolare, per $m = 2p$ le caratteristiche sono uguali; per $m = 2p \pm 1$, $\chi(M^b) = \chi(M^a) + 2(-1)^p$.

iii) Se M è orientabile, $\eta = 1 - \varepsilon$ per $m \neq 2p$ (cap. XV, cor. 4.4).

3. Disuguaglianze di Morse

Sia M compatta e f di Morse positiva. Indichiamo con C_q il numero dei punti critici di indice q.

3.1 TEOREMA: DISUGUAGLIANZE DI MORSE. *$b_q(M, \partial M) \leq C_q$ per ogni q.*

Dimostrazione. Siano $0 < c_1 < \cdots < c_r$ i valori critici e

$$0 < a_0 < c_1 < a_1 < \cdots < a_{r-1} < c_r < a_r.$$

Si procede per induzione su i, osservando che $b_q(M_{a_0}, \partial M) = 0$ per ogni q. Poniamo $a = a_{i-1}$, $b = a_i$ e indichiamo con $C_q(a), C_q(b)$ i numeri dei punti critici di indice q delle restrizioni corrispondenti. Se il punto critico di valore c_i ha indice p, allora

$$C_q(b) = C_q(a) \ (q \neq p), \qquad C_p(b) = C_p(a) + 1.$$

Dalla successione esatta

$$H^q(M_b, M_a) \to H^q(M_b, \partial M) \to H^q(M_a, \partial M) \to H^{q+1}(M_b, M_a)$$

segue l'uguaglianza dei numeri di Betti relativi per $q \neq p-1, p$. La successione

$$\begin{aligned} 0 \to H^{p-1}(M_b, \partial M) \to H^{p-1}(M_a, \partial M) \to H^p(M_b, M_a) \\ \to H^p(M_b, \partial M) \to H^p(M_a, \partial M) \to 0 \end{aligned}$$

dà, per $\varepsilon = 0$ oppure 1,

$$\begin{aligned} b_{p-1}(M_b, \partial M) &= b_{p-1}(M_a, \partial M) - \varepsilon, \\ b_p(M_b, \partial M) &= b_p(M_a, \partial M) + 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto per $q \neq p-1, p$ si ha $b_q(M_b, \partial M) = b_q(M_a, \partial M) \leq C_q(a) = C_q(b)$; inoltre

$$\begin{aligned} b_{p-1}(M_b, \partial M) &\leq b_{p-1}(M_a, \partial M) \leq C_{p-1}(b), \\ b_p(M_b, \partial M) &\leq b_p(M_a, \partial M) + 1 \leq C_p(a) + 1 = C_p(b). \end{aligned}$$

c.v.d.

Esercizio. Il numero ε della dimostrazione di 3.1 è uguale a quello del corollario 2.5.

3.2 TEOREMA. $\chi(M,\partial M) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q C_q$.

Dimostrazione. Con le notazioni precedenti,

$$\chi(M_{a_0},\partial M) = 0 = \sum_q (-1)^q C_q(a_0).$$

Attraversando un punto critico di indice p, tutti i numeri di Betti restano invariati tranne quelli di gradi $p-1, p$, le cui variazioni sono $-\varepsilon$ e $1-\varepsilon$. Dunque, supponendo la formula vera per M_a,

$$\begin{aligned}\chi(M_b,\partial M) &= \chi(M_a,\partial M) - (-1)^{p-1}\varepsilon + (-1)^p(1-\varepsilon)\\ &= \chi(M_a,\partial M) + (-1)^p\\ &= \sum_q (-1)^q C_q(a) + (-1)^p = \sum_q (-1)^q C_q(b).\end{aligned}$$

c.v.d.

3.3 COROLLARIO. *Una varietà differenziabile compatta senza bordo di dimensione dispari ha caratteristica di Eulero–Poincaré nulla.*

Infatti $g = -f + \sup_M f$ è una funzione di Morse con C_{m-q} punti critici di indice q.[XIII.2] Pertanto

$$\chi(M) = \sum_q (-1)^q C_{m-q} = -\sum_q (-1)^{m-q} C_{m-q} = -\chi(M).$$

3.4 Esercizio: disuguaglianze di Morse forti. Con le notazioni di 3.1,

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^{n-q} b_q(M,\partial M) \le \sum_{q=0}^{n} (-1)^{n-q} C_q, \qquad 0 \le n \le m.$$

Se ne può dedurre che, se $C_{n+1} = C_{n-1} = 0$, allora

$$b_{n+1}(M, \partial M) = b_{n-1}(M, \partial M) = 0, \qquad b_n(M, \partial M) = C_n.$$

3.5 Esercizio: coomologia degli spazi proiettivi complessi.

i) Sia $q : S^{2m+1} \to \mathbb{PC}^m$ la proiezione, con $S^{2m+1} = \{(z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} : \sum |z_j|^2 = 1\}$. Si definisce $f(x) = \sum_{j=0}^{m} (j+1)|z_j|^2$ se $x = q(z_0, \dots, z_m)$.

ii) f è di Morse, non ha punti critici di indice dispari e ha, per ogni $p = 0, \dots, m$, un punto critico di indice $2p$: $x_p = q(\delta_{0p}, \dots, \delta_{mp})$.

iii) $H^{2q}(\mathbb{PC}^m) = \mathbb{R}$ per $0 \le q \le m$, e $H^p(\mathbb{PC}^m) = 0$ negli altri gradi.

iv) $\chi(\mathbb{PC}^m) = m + 1$.

3.6 Esercizio: doppio di una varietà con bordo.

i) Se M è compatta con bordo, lo spazio $N = M \cup_{\partial M} M$ ammette una struttura differenziabile per cui le due inclusioni sono embedding: N è il *doppio* di M.

ii) $\chi(N) = 2\chi(M) - \chi(\partial M)$ (es. 2.11).

iii) Per m dispari, $\chi(\partial M) = 2\chi(M)$.

iv) Nessuna varietà compatta di dimensione 3 ha per bordo $\mathrm{P}\mathbb{R}^2$ (cap. XIV, th. 7.1; cor. 3.10).

v) Per m pari, nessuna varietà compatta ha per bordo $\mathbb{PC}^m$ (cap. XIV, th. 7.2; es. 3.4).

vi) $\chi(M, \partial M) = (-1)^m \chi(M)$.

3.7 TEOREMA. *Se M, N sono compatte e $\partial N = \varnothing$, allora*

$$\chi(N \times M, N \times \partial M) = \chi(N)\chi(M, \partial M).$$

Dimostrazione. Siano f, g funzioni di Morse positive su M, N, con punti critici x_i, y_j e valori critici c_i, d_j. Si può supporre che i prodotti $c_i d_j$ siano tutti distinti. La funzione $h(y,x) = g(y)f(x)$ è allora di Morse su $N \times M$, con punti critici (y_j, x_i). Se y_j ha indice q e x_i indice p, la coppia ha indice $p + q$.

Se C_p, D_q sono i rispettivi numeri di punti critici, quello di indice r per h è $E_r = \sum_{p+q=r} C_p D_q$. Quindi

$$\begin{aligned}\chi(N\times M, N\times \partial M) &= \sum_r (-1)^r E_r \\ &= \left(\sum_p (-1)^p C_p\right)\left(\sum_q (-1)^q D_q\right) \\ &= \chi(N)\chi(M,\partial M).\end{aligned}$$

c.v.d.

Esempi.

i) Per il toro $T^m = (S^1)^m$, $m > 0$, si ha $\chi(T^m) = 0$.

ii) $\chi(S^p \times S^q) = 1 + (-1)^p + (-1)^q + (-1)^{p+q}$. Per n pari, S^n non è dunque omeomorfa a un prodotto di due sfere.

3.8 PROPOSIZIONE. *Se N è compatta e $p : M \to N$ è un rivestimento a n fogli, $\chi(M,\partial M) = n\chi(N,\partial N)$.*

Dimostrazione. Per una funzione di Morse g su N, $f = g \circ p$ ha tutti i punti critici non degeneri, ma ogni valore critico corrisponde a n punti dello stesso indice. Come in 2.2 si dimostra allora

$$H^q(M_b, M_a) = \begin{cases} 0 & q \neq p, \\ \mathbb{R}^n & q = p. \end{cases}$$

La dimostrazione procede poi come quella di 3.2. c.v.d.

3.9 COROLLARIO. *L'ordine di un gruppo finito che agisce differenziabilmente e liberamente su una varietà compatta senza bordo M divide $\chi(M)$.*

Esempi.

i) Un gruppo finito non banale che agisce così su S^{2n} ha ordine 2.

ii) Poiché $\chi(\mathrm{P}\mathbb{R}^2) = 1$ (3.10; cap. XIV, th. 7.2), nessun gruppo finito non banale agisce così sul piano proiettivo reale.

3.10 COROLLARIO. *Per $m > 0$,*

$$H^0(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}, \quad H^p(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = 0 \ (p \neq 0, m), \quad H^m(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \begin{cases} 0 & m \text{ pari}, \\ \mathbb{R} & m \text{ dispari}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per la proiezione $q : S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$, $q^* : H(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) \to H(S^m)$ è iniettivo (cap. XI, prop. 2.4). Dunque la coomologia è nulla nei gradi diversi da $0, m$, e $H^0(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$ per connessione. Infine, per 3.8,

$$\chi(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \tfrac{1}{2}\chi(S^m) = \begin{cases} 0 & m \text{ dispari}, \\ 1 & m \text{ pari}, \end{cases}$$

da cui $b_m = 0$ per m pari e $b_m = 1$ per m dispari. c.v.d.

Esercizio. Per lo spazio lenticolare L_p^{2m+1} di gruppo $\mathbb{Z}_p$ (cap. II, §1.7), $H^0(L_p^{2m+1}) = H^{2m+1}(L_p^{2m+1}) = \mathbb{R}$, e gli altri gruppi sono nulli.

4. Teorema di Künneth

Siano $A = \bigoplus_p A_p$ e $B = \bigoplus_q B_q$ due algebre reali graduate e anticommutative. Il prodotto tensoriale[17] ha la graduazione

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q.$$

Vi si definisce una struttura di algebra reale graduata anticommutativa ponendo

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{qp'}(aa') \otimes (bb'), \qquad b \in B_q,\ a' \in A_{p'};$$

è l'*algebra prodotto tensoriale* delle algebre graduate A, B.

Se $C = \bigoplus C_r$ è un'altra algebra del genere e $g : A \to C$, $h : B \to C$ sono omomorfismi che rispettano i gradi, esiste un unico omomorfismo $\varphi : A \otimes B \to C$ tale che $\varphi(a \otimes b) = g(a)h(b)$.

Siano N una varietà differenziabile senza bordo, M una varietà con o senza bordo e P una sottovarietà chiusa di M. Il prodotto $P \times N$ è una sottovarietà chiusa di $M \times N$. Indichiamo con p_1, p_2 le proiezioni su M, N.

[17] Per le nozioni sul prodotto tensoriale si può consultare [3].

4.1 LEMMA. *Esiste un omomorfismo* $K : H(M,P) \otimes H(N) \to H(M \times N, P \times N)$ *tale che* $K(\alpha \otimes \beta) = (p_1^*\alpha)(p_2^*\beta)$.

Si ha $K(H^p(M,P) \otimes H^q(N)) \subset H^{p+q}(M \times N, P \times N)$. Se $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$ è una somma finita e $P_i = P \cap M_i$, allora

$$H(M,P) = \bigoplus_i H(M_i,P_i),$$
$$H(M,P) \otimes H(N) = \bigoplus_i H(M_i,P_i) \otimes H(N),$$
$$H(M \times N, P \times N) = \bigoplus_i H(M_i \times N, P_i \times N),$$

e $K = \bigoplus_i K_i$.

4.2 LEMMA. *Il diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H(P) \otimes H(N) & \xrightarrow{K} & H(P \times N) \\ {\scriptstyle \delta \otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ H(M,P) \otimes H(N) & \xrightarrow{K} & H(M \times N, P \times N). \end{array}$$

4.3 LEMMA. *Siano* W *senza bordo,* V *con o senza bordo e* X *una sottovarietà chiusa di* V. *Per applicazioni differenziabili* $f : (M,P) \to (V,X)$ *e* $g : N \to W$, *il diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H(V,X) \otimes H(W) & \xrightarrow{K} & H(V \times W, X \times W) \\ {\scriptstyle f^* \otimes g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f \times g)^*} \\ H(M,P) \otimes H(N) & \xrightarrow{K} & H(M \times N, P \times N). \end{array}$$

4.4 LEMMA. *Per l'applicazione diagonale* $D : N \to N \times N$, $D^*(K(\alpha \otimes \beta)) = \alpha\beta$.

4.5 LEMMA. *Sia* $\pi : H(N) \to H(D^m) \otimes H(N)$ *l'isomorfismo* $\alpha \mapsto 1 \otimes \alpha$. *Allora* $K = p_2^* \circ \pi^{-1}$.

Dunque $K : H(D^m) \otimes H(N) \to H(D^m \times N)$ è un isomorfismo. Le verifiche dei cinque lemmi non presentano difficoltà.

4.6 TEOREMA DI KÜNNETH. *L'omomorfismo* $K : H(M,P) \otimes H(N) \to H(M \times N, P \times N)$ *è un isomorfismo.*

[XIII.3]

Nel paragrafo seguente si dimostrerà il teorema nei casi: i) M compatta (5.5); ii) N compatta (5.6).

4.7 COROLLARIO. *Se M,N sono compatte,*

$$b_q(M\times N,P\times N)=\sum_{r+s=q} b_r(M,P)b_s(N),\qquad \chi(M\times N,P\times N)=\chi(M,P)\chi(N).$$

4.8 COROLLARIO. *Per il toro $T^m=(S^1)^m$, $b_q(T^m)=\binom{m}{q}$.*

Poiché $b_0(S^1)=b_1(S^1)=1$ e gli altri numeri di Betti sono nulli, ciò segue per induzione da 4.7.

4.9 COROLLARIO. *La sfera S^m non ha il tipo di omotopia di un prodotto di sfere.*

Dimostrazione. Se lo avesse per $S^p\times S^q$, $p\le q$, da 4.7 seguirebbe $p+q=m$. Se $m=0$, allora $p=q=0$, ma $b_0(S^0)=2$ mentre $b_0(S^0\times S^0)=4$. Se $m>0$, anche $p>0$ perché $b_0(S^m)=1$; ma $0=b_p(S^m)$ dovrebbe essere uguale a 1 per $p<q$ o a 2 per $p=q$. Assurdo. c.v.d.

5. Teorema di Künneth: dimostrazione

5.1 TEOREMA. *Se M è compatta, $K:H(M)\otimes H(N)\to H(M\times N)$ è un isomorfismo.*

Si procede per induzione su $m=\dim M$, con caso $m=0$ immediato. Per una funzione di Morse positiva f basta, come nella prova di 2.6, verificare quanto segue.

5.2 PROPOSIZIONE. *Sia $[a,b]\subset[0,+\infty[$ un intervallo compatto contenente un solo valore critico c, $a<c<b$. Se $K:H(M_a)\otimes H(N)\to H(M_a\times N)$ è un isomorfismo, lo stesso vale per M_b.*

La dimostrazione usa i due lemmi seguenti.

5.3 LEMMA. *Per ogni $p > 0$ e ogni q è esatta la successione*

$$0 \to H^q(D^p \times N) \to H^q(S^{p-1} \times N) \to H^{q+1}(D^p \times N, S^{p-1} \times N) \to 0.$$

Dimostrazione. La proiezione $p_2 : S^{p-1} \times N \to N$ ammette una sezione; perciò p_2^* è iniettivo. Nel diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H(D^p \times N) & \longrightarrow & H(S^{p-1} \times N) \\ & {\scriptstyle \simeq}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle p_2^*} & \\ & {\scriptstyle p_2^*}\nwarrow \quad \nearrow & \\ & H(N) & \end{array}$$

anche la freccia orizzontale è iniettiva. Il lemma segue dalla successione esatta della coppia. c.v.d.

5.4 LEMMA. *Per $0 < p \leq m$ e ogni q, $K : H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \to H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Si considera il diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{p-1}(D^p) \otimes H^{q-p}(N) & \longrightarrow & H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) & \longrightarrow & H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow K & & \downarrow K & & \downarrow K & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{q-1}(D^p \times N) & \longrightarrow & H^{q-1}(S^{p-1} \times N) & \longrightarrow & H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Per l'ipotesi induttiva, se $p > 1$, K identifica

$$H^0(S^{p-1}) \otimes H^{q-1}(N) \oplus H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N)$$

con $H^{q-1}(S^{p-1} \times N)$; se $p = 1$ basta il secondo termine. Pertanto:

i) per $p = 1$, le prime due frecce verticali sono isomorfismi (4.5), quindi lo è la terza;

ii) per $p > 1$, è un isomorfismo la freccia $H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \to H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N)$,

come pure il composto

$$H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \to H^{q-1}(S^{p-1} \times N) \to H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N).$$

Lo stesso vale dunque per l'omomorfismo del lemma. c.v.d.

Dimostrazione della proposizione 5.2. Sia p l'indice del punto critico. Per $p = 0$ le decomposizioni

$$\begin{aligned} H(M_b) \otimes H(N) &\simeq (H(M_a) \otimes H(N)) \oplus (H(D^m) \otimes H(N)), \\ H(M_b \times N) &\simeq H(M_a \times N) \oplus H(D^m \times N) \end{aligned}$$

commutano con K, e il risultato segue da 4.5. Supponiamo quindi $p > 0$. Per ogni q si deve dimostrare che K identifica $\bigoplus_{r+s=q} H^r(M_b) \otimes H^s(N)$ con $H^q(M_b \times N)$.

La successione esatta della coppia (M_b, M_a) dà il diagramma seguente, a colonne esatte; in ciascuna somma gli indici soddisfano il grado indicato:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{r+s=q-1} H^r(M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^{q-1}(M_a \times N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{r+s=q} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_b \times N, M_a \times N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{r+s=q} H^r(M_b) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_b \times N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{r+s=q} H^r(M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_a \times N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{r+s=q+1} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^{q+1}(M_b \times N, M_a \times N). \end{array}$$

Per il lemma dei cinque basta verificare che

$$K : H^p(M_b, M_a) \otimes H^{q-p}(N) \to H^q(M_b \times N, M_a \times N)$$

è un isomorfismo.

Con le notazioni di 1.6 e 1.7 si ha il diagramma commutativo seguente; tutte le frecce verticali sono isomorfismi (2.2):

$$\begin{array}{ccc}
H^p(M_b,M_a)\otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M_b\times N, M_a\times N)\\
\simeq\downarrow & & \downarrow\simeq\\
H^p(\widetilde{M}_b,M_a)\otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(\widetilde{M}_b\times N, M_a\times N)\\
\simeq\uparrow & & \uparrow\simeq\\
H^p(\widetilde{M}_b,V_2)\otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(\widetilde{M}_b\times N, V_2\times N)\\
\simeq\downarrow & & \downarrow\simeq\\
H^p(W_1,W_2)\otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(W_1\times N, W_2\times N)\\
\simeq\uparrow & & \uparrow\simeq\\
H^p(D^p,S^{p-1})\otimes H^{q-p}(N) & \xrightarrow{K} & H^q(D^p\times N, S^{p-1}\times N).
\end{array}$$

Per 5.4, quindi, anche la prima freccia orizzontale è un isomorfismo. c.v.d.

5.5 TEOREMA. *Se M è compatta, $K : H(M,P)\otimes H(N)\to H(M\times N, P\times N)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Nel diagramma seguente le colonne sono esatte:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{r+s=q-1} H^r(M)\otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^{q-1}(M\times N)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{r+s=q-1} H^r(P)\otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^{q-1}(P\times N)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{r+s=q} H^r(M,P)\otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M\times N, P\times N)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{r+s=q} H^r(M)\otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(M\times N)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\bigoplus_{r+s=q} H^r(P)\otimes H^s(N) & \xrightarrow{K} & H^q(P\times N).
\end{array}$$

Il lemma dei cinque e 5.1 concludono. c.v.d.

5.6 TEOREMA. *Se N è compatta, $K : H(M,P)\otimes H(N)\to H(M\times N, P\times N)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione precedente basta il caso $P = \varnothing$. Nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} H(M)\otimes H(N) & \xrightarrow{K} & H(M\times N) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ H(M-\partial M)\otimes H(N) & \xrightarrow{K} & H((M-\partial M)\times N) \end{array}$$

le frecce verticali sono isomorfismi (cap. XI, 3.7). Quella inferiore lo è per 5.1, scambiando i fattori. c.v.d.

5.7 Esercizio: coomologia a supporto compatto di un prodotto.

i) Se α è una forma a supporto compatto su M, nulla su P, e β è a supporto compatto su N, $(p_1^*\alpha)(p_2^*\beta)$ è a supporto compatto su $M\times N$ e nulla su $P\times N$. Sulle forme chiuse questa applicazione induce un omomorfismo

$$K_c : H_c(M,P)\otimes H_c(N) \longrightarrow H_c(M\times N, P\times N).$$

Se M,N sono compatte, $K_c = K$.

ii) Il diagramma seguente è commutativo (cap. XII, 3.1):

$$\begin{array}{ccc} H_c(M-P)\otimes H_c(N) & \xrightarrow{K_c} & H_c((M-P)\times N) \\ \chi\otimes 1\downarrow & & \downarrow\chi \\ H_c(M,P)\otimes H_c(N) & \xrightarrow{K_c} & H_c(M\times N, P\times N). \end{array}$$

iii) K_c è un isomorfismo (cap. XI, 6.1).

6. Applicazione alla coomologia dei gruppi di Lie

Ricordiamo che una struttura di gruppo di Lie su una varietà differenziabile senza bordo G è una struttura di gruppo per cui il prodotto $\mu : G\times G \to G$ e l'inversione $\sigma : G \to G$ sono differenziabili.

Sia G un gruppo di Lie connesso, di elemento neutro e. Il composto $d = K^{-1}\circ\mu^*$ è un omomorfismo da $H(G)$ all'algebra prodotto tensoriale $H(G)\otimes H(G)$, con

$$d(H^p(G)) \subset \bigoplus_{r+s=p} H^r(G)\otimes H^s(G).$$

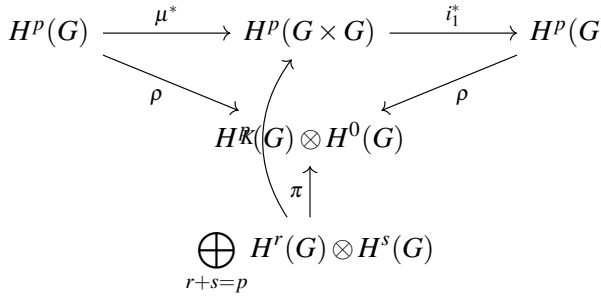
6.1 Esercizio.

i) $(d\otimes 1)\circ d = (1\otimes d)\circ d$.

ii) Sia T l'automorfismo di $H(G)\otimes H(G)$ definito da $T(\alpha\otimes\beta) = (-1)^{pq}\beta\otimes\alpha$, per $\alpha\in H^p(G)$, $\beta\in H^q(G)$. Si ha $T\circ d = d$.

6.2 LEMMA. *Per $\alpha\in H^p(G)$, la componente di $d(\alpha)$ in $H^p(G)\otimes H^0(G)$ è $\alpha\otimes 1$, e quella in $H^0(G)\otimes H^p(G)$ è $1\otimes\alpha$.*

Dimostrazione. Per $i_1 : G\to G\times G$, $i_1(g) = (g,e)$, si ha $\mu\circ i_1 = p_1\circ i_1 = \mathrm{id}_G$, mentre $p_2\circ i_1$ è costante. Se π è la proiezione di $\bigoplus_{r+s=p} H^r(G)\otimes H^s(G)$ sul termine $H^p(G)\otimes H^0(G)$ e $\rho(\alpha) = \alpha\otimes 1$, il diagramma



è commutativo. Si deduce la prima affermazione; la seconda si prova allo stesso modo. c.v.d.

6.3 PROPOSIZIONE. *Se G è un gruppo di Lie connesso e $H(G)\neq H^0(G)$, il minimo intero $q>0$ per cui $H^q(G)\neq 0$ è dispari.*

Dimostrazione. Sia p tale minimo e $0\neq\alpha\in H^p(G)$. Per 6.2, $d(\alpha) = \alpha\otimes 1 + 1\otimes\alpha$. Poiché $H^i(G) = 0$ per $i > \dim G$, esiste $r\geq 2$ con $\alpha^{r-1}\neq 0$ e $\alpha^r = 0$. Se p fosse pari,

$$0 = d(\alpha^r) = \big(\alpha\otimes 1 + 1\otimes\alpha\big)^r = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\alpha^j\otimes\alpha^{r-j},$$

assurdo: la componente $r\alpha\otimes\alpha^{r-1}$ è non nulla. Dunque p è dispari. c.v.d.

6.4 COROLLARIO. *Per m pari non nullo, la sfera S^m non ammette una struttura di gruppo di Lie.*

6.5 Osservazioni.

i) L'esistenza dell'inversione $\sigma : G \to G$ non ha qui alcun ruolo. Si avrebbero inoltre risultati analoghi sostituendo la struttura di gruppo di Lie con quella di gruppo topologico, o più generalmente di H-spazio (cap. V, §6).

ii) Si può dimostrare (teorema di Adams) che le sole sfere che ammettono una struttura di H-spazio sono S^0, S^1, S^3, S^7.

CAPITOLO XIV

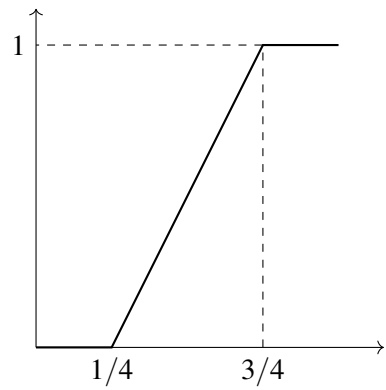
Calcoli di spazi di coomologia

1. Coomologia in dimensione 1 e gruppo fondamentale

Sia M una varietà differenziabile connessa e $x \in M$. Per ogni laccio $c : I \to M$ di base x indichiamo con $\bar{c} : S^1 \to M$ l'applicazione continua tale che $c = \bar{c} \circ q$, dove $q(t) = e^{2\pi i t}$.

1.1 LEMMA. *Ogni laccio di base x è omotopo a un laccio differenziabile costante vicino a 0 e a 1.*

Dimostrazione. Sia γ un laccio e $\varphi : I \to I$ continua e crescente, uguale a 0 per $t \leq 1/4$ e a 1 per $t \geq 3/4$.



L'applicazione $H(t,s) = \gamma(s\varphi(t) + (1-s)t)$ è un'omotopia da γ a un laccio γ' costante sugli intervalli $[0, 1/4]$ e $[3/4, 1]$.

Esiste dunque un laccio differenziabile c omotopo a γ', quindi a γ, e costante per $t \leq 1/8$ e $t \geq 7/8$ (cap. IV, th. 1.5). c.v.d.

1.2 LEMMA. *Ogni laccio di base x è omotopo a un laccio $\bar{c} \circ q$, dove $\bar{c} : S^1 \to M$ è differenziabile e costante vicino a $e = q(0)$.*

Esiste un'unica forma volume v su S^1 tale che $q^* v = dt$. L'integrazione delle forme di Pfaff su S^1 si intenderà per l'orientazione associata a v; allora $\int_{S^1} \alpha = \int_I q^* \alpha$.

1.3 LEMMA. *Se $\alpha \in Z^1(M)$ e $\bar{c}, \bar{\gamma} : S^1 \to M$ sono differenziabili e omotope, $\int_{S^1} \bar{c}^* \alpha = \int_{S^1} \bar{\gamma}^* \alpha$.*

Dimostrazione. Le forme $\bar{c}^* \alpha, \bar{\gamma}^* \alpha$ sono coomologhe (cap. XI, 5.3); la loro differenza è df per una funzione differenziabile su S^1. Per Stokes il suo integrale è nullo. c.v.d.

Se $[c] \in \pi_1(M,x)$ e $\bar{c}$ è differenziabile con $\bar{c} \circ q \in [c]$, l'integrale $I_\alpha([c]) = \int_{S^1} \bar{c}^* \alpha$ è dunque indipendente dalla scelta: è l'*integrale di α sulla classe di omotopia* $[c]$, o sul laccio c.

1.4 LEMMA. *$[c] \mapsto I_\alpha([c])$ è un omomorfismo da $\pi_1(M,x)$ a $\mathbb{R}$.*

La sua immagine è il *gruppo dei periodi* di α.

Dimostrazione. Se $\bar{c}, \bar{\gamma}$ sono uguali a x vicino a e, il prodotto $l = \gamma c$ è differenziabile e costante vicino agli estremi, dunque $l = \bar{l} \circ q$ con $\bar{l}$ differenziabile. Allora

$$\int_{S^1} \bar{l}^* \alpha = \int_I l^* \alpha = \int_I \gamma^* \alpha + \int_I c^* \alpha = \int_{S^1} \bar{\gamma}^* \alpha + \int_{S^1} \bar{c}^* \alpha.$$

c.v.d.

1.5 LEMMA. *I_α dipende soltanto dalla classe di coomologia di α in $H^1(M)$.*

Infatti se $\alpha' = \alpha + df$, per Stokes

$$\int_{S^1} \bar{c}^*\alpha' - \int_{S^1} \bar{c}^*\alpha = \int_{S^1} d(f \circ \bar{c}) = 0.$$

Si ottiene dunque un'applicazione $I : H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x), \mathbb{R})$.

1.6 LEMMA. *I è un omomorfismo di spazi vettoriali.*

Infatti l'integrale di $\bar{c}^*(\alpha+\beta)$ è la somma dei due integrali, e quello di $\bar{c}^*(\lambda\alpha)$ è λ volte quello di $\bar{c}^*\alpha$.

1.7 TEOREMA. *$I : H^1(M) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x), \mathbb{R})$ è iniettivo.*

Due forme di Pfaff chiuse sono quindi coomologhe se e solo se hanno lo stesso integrale su ogni laccio di base x: si dice anche che hanno gli stessi periodi. La dimostrazione sarà data nel paragrafo 2.

1.8 COROLLARIO. *Se M è semplicemente connessa, $H^1(M) = 0$.*

Più generalmente:

1.9 COROLLARIO. *Se il gruppo fondamentale di M è finito, $H^1(M) = 0$.*

Esempi. $H^1(\mathbb{PC}^n) = 0$ e $H^1(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = 0$ per $m \geq 2$.

1.10 COROLLARIO. *Se $\pi_1(M,x)$ è finitamente generato, $H^1(M)$ ha dimensione finita.*

1.11 Osservazioni.

i) Sia L il quoziente per il sottogruppo di torsione dell'abelianizzato

$$\pi_1(M,x)/[\pi_1(M,x), \pi_1(M,x)].$$

Lo spazio degli omomorfismi da $\pi_1(M,x)$ a $\mathbb{R}$ è isomorfo a quello degli omomorfismi da L a $\mathbb{R}$: ogni omomorfismo verso $\mathbb{R}$ si annulla sui commutatori e sulla torsione dell'abelianizzato.

ii) Per $T^m = (S^1)^m$, I è un isomorfismo, poiché $H^1(T^m) = \mathbb{R}^m$ e $\pi_1(T^m) = \mathbb{Z}^m$. In effetti si può dimostrare che I è sempre un isomorfismo: *teorema di Hurewicz*.

Esercizio. Nel caso compatto si può dimostrare il teorema usando i metodi del capitolo XIII e il teorema di Van Kampen.

Sia $f : M \to N$ continua, N connessa e $y = f(x)$. Per composizione, $f_* : \pi_1(M,x) \to \pi_1(N,y)$ induce

$$f_\# : \mathrm{Hom}(\pi_1(N,y),\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x),\mathbb{R}).$$

Se g è omotopa a f, $g_\# = f_\#$. Qui si abusa della notazione: gli spazi $\mathrm{Hom}(\pi_1(N,y),\mathbb{R})$ per diversi punti base sono canonicamente isomorfi, anche se i gruppi fondamentali non lo sono necessariamente.

1.12 PROPOSIZIONE. *Il diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H^1(N) & \xrightarrow{I} & \mathrm{Hom}(\pi_1(N,y),\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_\#} \\ H^1(M) & \xrightarrow{I} & \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x),\mathbb{R}). \end{array}$$

Dimostrazione. Si può supporre f differenziabile (cap. IV, 4.6). Per $\alpha \in Z^1(N)$ e $\bar{c} : S^1 \to M$ differenziabile,

$$\int_{S^1} \bar{c}^*(f^*\alpha) = \int_{S^1} (f \circ \bar{c})^* \alpha.$$

c.v.d.

Esempio. Per $q_n : S^1 \to S^1$, $q_n(z) = z^n$, $(q_n)_*$ moltiplica per n il gruppo fondamentale; dunque anche $(q_n)^* : H^1(S^1) \to H^1(S^1)$ è la moltiplicazione per n.

Esercizio. Una matrice intera quadrata A di ordine m definisce un endomorfismo h_A di $\mathbb{R}^m$ che conserva $\mathbb{Z}^m$, quindi un'applicazione differenziabile $\bar{h}_A : T^m \to T^m$. Ogni endomorfismo di $H^1(T^m)$ che conserva il reticolo intero è della forma $\bar{h}_A^*$.[XIV.1]

2. Rivestimento associato a una forma di Pfaff chiusa

Due funzioni differenziabili definite vicino a $y \in M$ hanno lo stesso *germe* in y se coincidono su un intorno di y. È una relazione di equivalenza; la classe della funzione f è il suo germe $f_{[y]}$.

Sia α una forma di Pfaff chiusa. L'insieme E_y dei germi di funzioni f con $df = \alpha$ vicino a y non è vuoto (lemma di Poincaré: cap. XI, 2.9). Si pongono $E = \bigcup_y E_y$ e $p : E \to M$, uguale a y su E_y. Per f differenziabile su un aperto U, con $df = \alpha|_U$, sia $\Omega(U,f) = \{f_{[y]} : y \in U\}$.

2.1 LEMMA. *Gli insiemi $\Omega(U,f)$ formano una base di aperti su E.*

Infatti $\Omega(U,f) \cap \Omega(V,g) = \bigcup_i \Omega(U_i,f)$, dove gli U_i sono le componenti connesse di $U \cap V$ su cui $f = g$: funzioni con lo stesso differenziale differiscono localmente per una costante.

Con questa topologia E è il *fascio dei germi* delle funzioni differenziabili f tali che $df = \alpha$.

2.2 LEMMA. *E è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $f_{[y]} \neq g_{[z]}$, rappresentati su intorni aperti U, V. Se $y \neq z$ si prendono U, V disgiunti: anche $\Omega(U,f), \Omega(V,g)$ sono disgiunti. Se $y = z$ si può prendere $U = V$ connesso; allora $f - g$ è una costante non nulla e $\Omega(U,f) \cap \Omega(U,g) = \varnothing$. c.v.d.

2.3 LEMMA. *p è continua e aperta.*

Dimostrazione. Se $U = \bigcup_i U_i$, con U_i diffeomorfo a $\mathbb{R}^m$ o H^m, e D_i è l'insieme delle primitive di α su U_i, allora

$$p^{-1}(U) = \bigcup_i \bigcup_{f \in D_i} \Omega(U_i, f),$$

che è aperto. Inoltre $p(\Omega(U,f)) = U$, quindi p è aperta. c.v.d.

2.4 COROLLARIO. *p è un omeomorfismo locale.*

La restrizione a $\Omega(U,f)$ è infatti biiettiva, continua e aperta su U.

2.5 PROPOSIZIONE. *$p : E \to M$ è un rivestimento.*

È il *rivestimento associato alla forma di Pfaff chiusa* α.

Dimostrazione. Sia U diffeomorfo a $\mathbb{R}^m$ o H^m, e D l'insieme delle primitive di α su U, munito della topologia discreta. Due primitive differiscono per una costante. Ogni punto di $p^{-1}(U)$ è un unico germe $f_{[y]}$ con $f \in D$, $y \in U$, e $\Phi(f_{[y]}) = (y,f)$ è un omeomorfismo su $U \times D$ con $p = p_1 \circ \Phi$. c.v.d.

2.6 COROLLARIO. *Esiste un'unica struttura differenziabile su E per cui p è un diffeomorfismo locale.*

2.7 PROPOSIZIONE. *La funzione $\varphi(f_{[y]}) = f(y)$ è differenziabile e $d\varphi = p^*\alpha$.*

Su $\Omega(U,f)$ si ha infatti $\varphi = f \circ p$ e $d\varphi = p^*(df) = p^*\alpha$.

2.8 PROPOSIZIONE. *Se N è una componente connessa di E, $p : N \to M$ è galoisiano e il suo gruppo di automorfismi è isomorfo al gruppo dei periodi di α.*

Dimostrazione. Per $f_{[x]} \in N$ basta verificare che $p_*\pi_1(N, f_{[x]}) = \ker I_\alpha$ (cap. X, 4.3 e 4.5).

i) Per $\bar{c} : S^1 \to N$ differenziabile,

$$\int_{S^1} (p \circ \bar{c})^* \alpha = \int_{S^1} \bar{c}^* d\varphi = \int_{S^1} d(\varphi \circ \bar{c}) = 0.$$

ii) Se $c : I \to M$ è differenziabile, costante vicino agli estremi e ha integrale nullo, sia γ il suo sollevamento con origine $f_{[x]}$. Allora

$$0 = \int_I c^*\alpha = \int_I \gamma^* p^* \alpha = \int_I d(\varphi \circ \gamma) = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)).$$

Poiché $p(\gamma(0)) = p(\gamma(1))$, l'uguaglianza dei valori implica quella dei germi. Dunque γ è un laccio e $[c] \in p_*\pi_1(N, f_{[x]})$.

c.v.d.

Dimostrazione del teorema 1.7. Se $I_\alpha = 0$, la proiezione di una componente N del rivestimento associato è un diffeomorfismo su M (2.8). Allora $\alpha = d(\varphi \circ (p|_N)^{-1})$.c.v.d.

2.9 Esercizio: forma di Pfaff chiusa senza singolarità. Sia α una tale forma su una varietà compatta connessa M. Essa definisce un sistema di Pfaff integrabile di rango 1, indicato con $\alpha = 0$. Sia $p : N \to M$ una componente del rivestimento associato e f una funzione su N con $df = p^*\alpha$; f non ha singolarità.

i) Per una metrica riemanniana g esiste un unico campo non singolare X con $g(X,Y) = \alpha(Y)$ per ogni Y. Sostituendo g con $g(X,X)g$ e X con $X/g(X,X)$ si può supporre $g(X,X) = \alpha(X) = 1$.

ii) Il flusso φ_t di X soddisfa $\varphi_t^*\alpha = \alpha$. Quindi, se $i : Q \to M$ è una varietà integrale di $\alpha = 0$, lo è anche $\varphi_t \circ i$.

iii) Il flusso si solleva a un gruppo a un parametro ψ_t di diffeomorfismi di N, con $p \circ \psi_t = \varphi_t \circ p$.

iv) $f(\psi_t(y)) = f(y) + t$. Per $P = f^{-1}(0)$, $h : P \times \mathbb{R} \to N$, $h(y,t) = \psi_t(y)$, è un diffeomorfismo e $f(h(y,t)) = t$.

v) Per ogni t, $i_t(y) = p(h(y,t))$ è un'immersione iniettiva di P in M, integrale di $\alpha = 0$. Viceversa una varietà integrale $j : Q \to M$ ammette un sollevamento $r : Q \to N$ la cui immagine è contenuta in una varietà di livello di f.

vi) L'omomorfismo $\pi_1(P) \to \pi_1(M)$ indotto da i_0 è iniettivo; la sua immagine è un sottogruppo normale H con $\pi_1(M)/H \simeq \mathbb{Z}^q$, $q > 0$.

3. Coomologia a supporto compatto in dimensione massima: caso orientabile

Sia M connessa, orientabile, senza bordo, di dimensione m. Indichiamo con $\int_M$ l'integrazione delle m-forme a supporto compatto per un'orientazione scelta. Si ha $Z^m(M) = A^m(M)$ e $Z_c^m(M) = A_c^m(M)$.

3.1 LEMMA. *Per $\alpha \in A_c^{m-1}(M)$, $\int_M d\alpha = 0$.*

È una conseguenza immediata del teorema di Stokes.

3.2 COROLLARIO. *L'integrazione induce un omomorfismo $I : H_c^m(M) \to \mathbb{R}$.*

3.3 PROPOSIZIONE. *Per $M = \mathbb{R}^m$, I è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Si scelga $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$. La forma

$$\alpha = f(x_1) \cdots f(x_m)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

ha supporto compatto e integrale 1. Quindi I è suriettivo, e poiché $H_c^m(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$ (cap. XII, 6.7), è biiettivo. c.v.d.

3.4 COROLLARIO. *Due m-forme a supporto compatto su $\mathbb{R}^m$ sono coomologhe a supporto compatto se e solo se hanno lo stesso integrale.*

3.5 PROPOSIZIONE. *$I : H_c^m(M) \to \mathbb{R}$ è suriettivo.*

Dimostrazione. Si prenda un aperto $U \simeq \mathbb{R}^m$ e una forma $\alpha \in A_c^m(U)$ con $\int_U \alpha = 1$, per l'orientazione indotta. L'estensione per zero $\omega(\alpha)$ ha ancora integrale 1. c.v.d.

3.6 TEOREMA. *$I : H_c^m(M) \to \mathbb{R}$ è un isomorfismo.*

L'orientazione determina dunque una classe $\mu \in H_c^m(M)$ con $I(\mu) = 1$: la *classe fondamentale* di M. Cambiando orientazione essa cambia segno. La dimostrazione usa la proposizione seguente.

3.7 PROPOSIZIONE. *Sia N connessa, senza bordo, di dimensione m, orientabile o no, e sia U un aperto non vuoto. Ogni m-forma a supporto compatto su N è coomologa a supporto compatto a una forma con supporto contenuto in U.*

Dimostrazione della proposizione 3.7. Siano (V_i) un ricoprimento localmente finito per aperti relativamente compatti diffeomorfi a $\mathbb{R}^m$ e (φ_i) una partizione differenziabile dell'unità subordinata. Per $\alpha \in A_c^m(N)$, la somma $\alpha = \sum_i \varphi_i \alpha$ è finita e ogni addendo ha supporto compatto in V_i. Basta quindi il caso in cui $\operatorname{supp}\alpha \subset V \simeq \mathbb{R}^m$.

Sia $W_1, \dots, W_r$ una successione di aperti diffeomorfi a $\mathbb{R}^m$ tale che $W_1 \subset U$, $W_r = V$ e $W_i \cap W_{i+1} \neq \varnothing$. Per 3.4 si trovano successivamente forme $\alpha_i \in Z_c^m(W_i \cap W_{i+1})$, $\beta_i \in A_c^{m-1}(W_{i+1})$ con

$$\alpha = \alpha_{r-1} + d\beta_{r-1}, \qquad \alpha_{i+1} = \alpha_i + d\beta_i \quad (i = r-2, \dots, 1).$$

Estendendo per zero si ottiene $\alpha = \alpha_1 + \sum_i d\beta_i$, con $\alpha_1 \in Z_c^m(U)$. c.v.d.

Dimostrazione del teorema 3.6. Sia $U \simeq \mathbb{R}^m$ e $\nu \in A_c^m(U)$ di integrale 1. Per 3.7, ogni $\alpha \in A_c^m(M)$ è coomologa a una forma β con supporto compatto in U. Per 3.1,

$$\int_M \alpha = \int_M \beta = \int_U \beta.$$

Per 3.4, β è coomologa in U, quindi anche in M, a $(\int_U \beta)\nu$. Pertanto α è coomologa a $(\int_M \alpha)\nu$, e l'integrazione è iniettiva. c.v.d.

3.8 COROLLARIO. *Se M è connessa, orientabile e senza bordo, $H_c^m(M) = \mathbb{R}$.*

3.9 COROLLARIO. *Due m-forme a supporto compatto su M sono coomologhe a supporto compatto se e solo se hanno lo stesso integrale.*

3.10 COROLLARIO. *Se M è compatta e α è una forma volume, la classe di α genera $H^m(M)$.*

3.11 COROLLARIO. *Se M è connessa, orientabile, di dimensione m, con bordo non vuoto, $H_c^m(M,\partial M)=\mathbb{R}$.*

Infatti questo spazio è isomorfo a $H_c^m(M-\partial M)$ (cap. XII, 3.1). L'immagine della classe fondamentale dell'interno è la *classe fondamentale di M modulo ∂M*.

Esercizio. $H_c^p(S^1\times\mathbb{R})=0$ per $p\le 0$ e $p>2$, mentre $H_c^1(S^1\times\mathbb{R})=H_c^2(S^1\times\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

4. Applicazioni

4.1 TEOREMA DELL'INVARIANZA DEL DOMINIO. *Per $n\neq m$, un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$.*

Per aperti connessi $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^m$, infatti,

$$H_c^n(U)=\mathbb{R},\quad H_c^p(U)=0\ (p>n);\qquad H_c^m(V)=\mathbb{R},\quad H_c^p(V)=0\ (p>m).$$

4.2 COROLLARIO: INVARIANZA TOPOLOGICA DELLA DIMENSIONE. *Due varietà topologiche omeomorfe hanno la stessa dimensione.*

4.3 TEOREMA. *Sia M orientabile, connessa, senza bordo, di dimensione m, e N una sottovarietà chiusa connessa orientabile di codimensione 1. Se $H_c^{m-1}(M)=0$, $U=M-N$ ha due componenti connesse.*

Dalla successione esatta

$$H_c^{m-1}(M)\to H_c^{m-1}(N)\to H_c^m(U)\to H_c^m(M)\to 0$$

si deduce infatti $H_c^m(U)=\mathbb{R}^2$, dunque il risultato.

4.4 COROLLARIO: TEOREMA DI JORDAN DIFFERENZIABILE. *Per ogni embedding $f: S^{m-1}\to\mathbb{R}^m$, $m\ge 2$, il complementare $\mathbb{R}^m-f(S^{m-1})$ ha due componenti connesse.*

4.5 COROLLARIO. *Se M è compatta, senza bordo, connessa e semplicemente connessa, e N è una sottovarietà chiusa, connessa, orientabile, di codimensione 1, $M-N$ ha due componenti connesse.*

Infatti M è orientabile e $H^{m-1}(M) = 0$ (cap. XV, 4.3). **4.6 Esercizi.**

i) La sfera S^m non ha il tipo di omotopia di un prodotto di varietà differenziabili compatte di dimensione positiva.

ii) La sfera S^m non è omeomorfa a un prodotto di varietà differenziabili di dimensione positiva.

5. Coomologia a supporto compatto in dimensione massima: caso non orientabile

5.1 TEOREMA. *Se M è connessa, senza bordo, non orientabile, di dimensione m, allora $H_c^m(M) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $p : N \to M$ il rivestimento orientabile a due fogli e r la sua involuzione canonica. N è connessa e orientabile e r inverte l'orientazione (cap. X, §4). Per $\alpha \in A_c^m(M)$, la forma $\widetilde{\alpha} = p^*\alpha$ ha supporto compatto ed è invariante per r. Dunque

$$\int_N \widetilde{\alpha} = \int_N r^*\widetilde{\alpha} = -\int_N \widetilde{\alpha}.$$

Per 3.9, $\widetilde{\alpha} = d\beta$, con $\beta \in A_c^{m-1}(N)$. La forma $\widetilde{\gamma} = (\beta + r^*\beta)/2$ è invariante e $d\widetilde{\gamma} = \widetilde{\alpha}$; discende a $\gamma \in A_c^{m-1}(M)$ (cap. X, 3.8). Si ha quindi $\alpha = d\gamma$. c.v.d.

Esempio. $H^m(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = 0$ per $m > 0$ pari, e $H^m(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$ per m dispari (cap. XIII, 3.10).

Esercizi.

i) Per il nastro di Möbius aperto M, $H_c^p(M) = 0$ per ogni p.

ii) Per la bottiglia di Klein T, $H^0(T) = H^1(T) = \mathbb{R}$ e $H^p(T) = 0$ per $p < 0$ e $p \geq 2$.

6. Coomologia a supporto chiuso in dimensione massima

6.1 TEOREMA. *Se M è connessa, non compatta, senza bordo, orientabile o no, di dimensione m, allora $H^m(M) = 0$.*

Dimostrazione. Siano $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento localmente finito per aperti relativamente compatti diffeomorfi a $\mathbb{R}^m$, con $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$, e (φ_i) una partizione dell'unità subordinata.[XIV.2] Per $\alpha \in Z^m(M)$ poniamo $\alpha_i = \varphi_i \alpha$; ogni α_i ha supporto compatto in U_i.

Per ogni i si costruiscono successivamente forme $\alpha_{i,j} \in Z^m_c(U_j \cap U_{j-1})$ e $\beta_{i,j} \in A^{m-1}_c(U_{j-1})$, $j = i+1, i+2, \ldots$, tali che

$$\alpha_i = \alpha_{i,i+1} + d\beta_{i,i+1}, \qquad \alpha_{i,j} = \alpha_{i,j+1} + d\beta_{i,j+1}.$$

La famiglia $(\beta_{i,j})_{j>i}$ è localmente finita e $\alpha_i = d\gamma_i$, dove $\gamma_i = \sum_{j>i} \beta_{i,j}$ ha supporto in $\bigcup_{j\geq i} U_j$. Anche $(\gamma_i)_i$ è localmente finita e quindi $\alpha = d(\sum_i \gamma_i)$. c.v.d.

Esercizio. Se M è connessa con bordo non vuoto e dimensione m, $H^m(M) = 0$ (cap. XI, 3.8).

7. Applicazione: coomologia degli spazi proiettivi

7.1 TEOREMA. *$H^0(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}$, $H^p(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = 0$ per $p \neq 0, m$ e, per $m > 0$,*

$$H^m(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & m \text{ dispari}, \\ 0 & m \text{ pari}. \end{cases}$$

Dimostrazione. $\mathrm{P}\mathbb{R}^0$ è un punto. Per ogni m, la coomologia è nulla fuori dai gradi $0, \ldots, m$ e $H^0 = \mathbb{R}$. Il gruppo superiore si calcola con l'orientabilità: $\mathrm{P}\mathbb{R}^m$ è orientabile esattamente per m dispari. Si conclude per induzione usando $U = \mathrm{P}\mathbb{R}^m - \mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1} \simeq \mathbb{R}^m$.

Per $0 < p < m-1$, dalla successione

$$H_c^p(U) \to H^p(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) \to H^p(\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}) \to H_c^{p+1}(U)$$

segue $H^p(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = H^p(\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}) = 0$. Per $p = m-1$ si usa

$$0 \to H^{m-1}(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) \to H^{m-1}(\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}) \to H_c^m(U) \to H^m(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) \to 0.$$

Se $m > 1$ è dispari, $H^{m-1}(\mathrm{P}\mathbb{R}^{m-1}) = 0$; se è pari, questo spazio è $\mathbb{R}$ e $H^m(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = 0$. In entrambi i casi $H^{m-1}(\mathrm{P}\mathbb{R}^m) = 0$. Il caso $m = 1$ è già quello del cerchio. c.v.d.

7.2 TEOREMA. *$H^{2p}(\mathbb{P}\mathbb{C}^m) = \mathbb{R}$ per $0 \le p \le m$; $H^q(\mathbb{P}\mathbb{C}^m) = 0$ negli altri gradi.*

Dimostrazione. Il caso $m = 0$ è un punto. Si ha $H^0 = \mathbb{R}$ e la coomologia è nulla fuori dai gradi $0, \dots, 2m$. Per induzione, poniamo $U = \mathbb{P}\mathbb{C}^m - \mathbb{P}\mathbb{C}^{m-1} \simeq \mathbb{R}^{2m}$. Per $0 < p < 2m-1$, la successione esatta

$$H_c^p(U) \to H^p(\mathbb{P}\mathbb{C}^m) \to H^p(\mathbb{P}\mathbb{C}^{m-1}) \to H_c^{p+1}(U)$$

dà l'isomorfismo dei due spazi centrali. Per $p = 2m-1$, la successione

$$H_c^{2m-1}(U) \to H^{2m-1}(\mathbb{P}\mathbb{C}^m) \to H^{2m-1}(\mathbb{P}\mathbb{C}^{m-1})$$

dà un gruppo nullo. Infine

$$H^{2m-1}(\mathbb{P}\mathbb{C}^{m-1}) \to H_c^{2m}(U) \to H^{2m}(\mathbb{P}\mathbb{C}^m) \to 0$$

dà $H^{2m}(\mathbb{P}\mathbb{C}^m) \simeq \mathbb{R}$. c.v.d.

7.3 Esercizio: algebra di coomologia di $\mathbb{P}\mathbb{C}^m$. Siano $z_0, \dots, z_m$ le coordinate omogenee complesse, e $U_\alpha = \{z_\alpha \neq 0\}$, $U_\beta = \{z_\beta \neq 0\}$. Su questi aperti si pongano $u_j = z_j/z_\alpha$, $v_j = z_j/z_\beta$ e $\varphi = \sum_j u_j \bar{u}_j$, $\psi = \sum_j v_j \bar{v}_j$. Su $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha $u_j = v_j/v_\alpha$ e $\psi = v_\alpha \bar{v}_\alpha \varphi$.

i) Si definiscono le 2-forme

$$\omega_\alpha = \frac{1}{i}\left[\frac{\sum_j du_j \wedge d\bar{u}_j}{\varphi} - \frac{\sum_{j,k} u_j \bar{u}_k \, du_k \wedge d\bar{u}_j}{\varphi^2}\right],$$

e analogamente ω_β, sostituendo u, φ con v, ψ.

ii) $\omega_\alpha = \omega_\beta$ sull'intersezione. Esiste quindi una 2-forma globale ω le cui restrizioni sono queste forme.

iii) ω è chiusa.

iv) ω^m è una forma volume su $\mathbb{PC}^m$.

v) ω non è coomologa a zero e la sua classe genera l'algebra di coomologia.

Pertanto l'algebra di coomologia reale dello spazio proiettivo complesso di dimensione m è isomorfa a $\mathbb{R}[a]/(a^{m+1})$, dove a ha grado 2. Si dice anche che è un'algebra di polinomi a un generatore di grado 2, troncata alle potenze superiori a m.

7.4 Esercizio. $S^2 \times S^4$ e $\mathbb{PC}^3$ hanno gli stessi spazi di coomologia, ma algebre diverse. Non sono dunque omeomorfe.

8. Applicazione: grado delle applicazioni

Siano M, N compatte, connesse, senza bordo e orientabili, della stessa dimensione m. Scelte le orientazioni e le classi fondamentali $\mu \in H^m(M)$, $\nu \in H^m(N)$, per $f : M \to N$ continua si ha $f^*\nu = a\mu$, $a \in \mathbb{R}$. Il numero a è il *grado* di f, indicato con $\deg(f)$.

Il valore assoluto dipende soltanto dalla classe di omotopia di f, e non dalle orientazioni. Per un'applicazione di M in se stessa il grado è indipendente dall'orientazione scelta su M.

Osservazione. Per $S^1 \to S^1$, questo grado coincide con quello definito mediante $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (cap. VI, §2; prop. 1.12).

8.1 PROPOSIZIONE. *Per $f : M \to N$, $g : N \to P$ continue, con P compatta, connessa, orientata, senza bordo, di dimensione m,* $\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g)$.

Infatti $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

8.2 TEOREMA. *Il grado di un'applicazione continua $M \to N$ è un intero.*

Si usa il seguente risultato [6]:

8.3 TEOREMA DI SARD. *Per $f : M \to N$ differenziabile, l'insieme dei valori regolari è un aperto denso di N.*

[18] *Dimostrazione di 8.2.* Si può supporre f differenziabile (cap. IV, 4.6). Se y è un valore regolare, $f^{-1}(y)$ è un sottospazio chiuso discreto del compatto M, quindi finito: $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Esistono un intorno aperto V di y e intorni aperti disgiunti U_i di x_i tali che $f|_{U_i} : U_i \to V$ sia un diffeomorfismo e $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$.

Sia α una m-forma con supporto compatto in V, appartenente alla classe fondamentale ν (3.7). La forma $\beta = f^*\alpha$ è somma di forme β_i con supporto compatto in U_i; quindi

$$\deg(f) = \int_M f^*\alpha = \sum_i \int_{U_i} \beta_i.$$

Ogni integrale è $+1$ o -1, a seconda che il diffeomorfismo $f|_{U_i}$ conservi o inverta l'orientazione. Dunque il grado è intero. c.v.d.

La dimostrazione contiene anche i risultati seguenti.

8.4 PROPOSIZIONE. *Se $f : M \to N$ non è suriettiva,* $\deg(f) = 0$.

[18] Nelle ipotesi presenti M è compatta. Un valore y è regolare se in ogni punto di $f^{-1}(y)$ il rango è massimo; un punto non appartenente all'immagine è regolare.

8.5 PROPOSIZIONE. *Se $p : M \to N$ è un rivestimento a r fogli e le orientazioni rendono p localmente compatibile con esse,* $\deg(p) = r$.

8.6 Esempi.

i) La riflessione $(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m)$ su $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ ha grado -1.

ii) L'applicazione antipodale $x \mapsto -x$ su S^m ha grado $(-1)^{m+1}$.

iii) $q_n(z) = z^n$ su S^1 ha grado n.

iv) La proiezione $S^m \to \mathrm{P}\mathbb{R}^m$, per m dispari, ha grado 2 con orientazioni compatibili.

8.7 Esercizi.

i) Un'applicazione continua di S^m in se stessa senza punti fissi ha grado $(-1)^{m+1}$ (cap. IV, es. 1.3). Non è quindi omotopa a una costante.

ii) Sulle sfere di dimensione pari non esistono campi vettoriali senza singolarità; sulle sfere di dimensione dispari ne esistono.

iii) Per ogni $f : S^{2n} \to S^{2n}$ continua esiste x con $f(x) = x$ oppure $f(x) = -x$.

iv) Se $f : S^m \to S^m$ è omotopa a una costante, esistono x, y tali che $f(x) = x$ e $f(y) = -y$.

8.8 Esercizio: invarianza del grado per sospensione.

i) S^m si ottiene da $S^{m-1} \times I$ identificando ciascuno dei due sottospazi $S^{m-1} \times \{0\}$, $S^{m-1} \times \{1\}$ a un punto.

ii) Per $f : S^{m-1} \to S^{m-1}$ continua, $(x,t) \mapsto (f(x),t)$ induce $Sf : S^m \to S^m$, la *sospensione* di f.

iii) Se f, g sono omotope, lo sono anche Sf, Sg.

iv) $\deg(Sf) = \deg(f)$.

v) Per ogni intero n e ogni $m \geq 1$ esiste un'applicazione $S^m \to S^m$ di grado n.

8.9 Esercizio: teorema di d'Alembert. Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 2$.

i) P induce un'applicazione differenziabile $f : S^2 \to S^2$, i cui punti critici sono gli zeri di P' e il punto all'infinito.

ii) $\deg(f) > 0$; di conseguenza P ha una radice.

8.10 Esercizio: grado per varietà con bordo. Sia M compatta, connessa, orientata, con bordo non vuoto, di dimensione $m \geq 1$; sia N compatta, connessa, orientata, senza bordo, della stessa dimensione, e $x \in N$. L'inclusione induce un isomorfismo $H^m(N, \{x\}) \to H^m(N)$. Pertanto $f : (M, \partial M) \to (N, x)$ continua induce un omomorfismo $f^* : H^m(N) \to H^m(M, \partial M)$. Se μ, ν sono le classi fondamentali, $f^*\nu = a\mu$: a è il grado di f. Verificare che è un intero.

8.11 Osservazione. Applicazioni omotope di una varietà compatta, connessa, orientabile, senza bordo M^m nella sfera S^m hanno lo stesso grado. Viceversa, due tali applicazioni con lo stesso grado sono omotope: *teorema di Hopf* [6].

9. Applicazione: invariante di Hopf

Sia $f : S^{2n-1} \to S^n$ differenziabile, con sfere orientate e $n \geq 2$. Sia $\omega \in A^n(S^n)$ tale che $\int_{S^n} \omega = 1$. La forma $\alpha = f^*\omega$ è chiusa; poiché $H^n(S^{2n-1}) = 0$, esiste $\beta \in A^{n-1}(S^{2n-1})$ con $d\beta = \alpha$. Il prodotto $\beta \wedge d\beta$ ha grado $2n-1$.

9.1 LEMMA. *Il numero $\gamma_f = \int_{S^{2n-1}} \beta \wedge d\beta$ non dipende dalla primitiva β scelta.*

Dimostrazione. Se $d\beta' = \alpha$, $\beta' - \beta$ è chiusa. Poiché $H^{n-1}(S^{2n-1}) = 0$, esiste $\eta \in A^{n-2}(S^{2n-1})$ con $\beta' - \beta = d\eta$.

Allora, per Stokes,

$$\int \beta' \wedge d\beta' - \int \beta \wedge d\beta = \int (d\eta) \wedge \alpha = \int d(\eta \wedge \alpha) = 0.$$

c.v.d.

9.2 LEMMA. *γ_f non dipende dalla scelta di ω con integrale 1.*

Dimostrazione. Se anche ω' ha integrale 1, per 3.9 esiste $\sigma \in A^{n-1}(S^n)$ con $\omega' - \omega = d\sigma$. Allora $\alpha' = f^*\omega' = d\beta'$ per $\beta' = \beta + f^*\sigma$. Si ha

$$\begin{aligned}
\beta' \wedge d\beta' - \beta \wedge d\beta &= \beta \wedge (\alpha' - \alpha) + (f^*\sigma) \wedge \alpha' \\
&= \beta \wedge f^*(d\sigma) + f^*(\sigma \wedge \omega') \\
&= f^*(d\sigma) \wedge \beta \\
&= d(f^*\sigma \wedge \beta) - (-1)^{n-1}(f^*\sigma) \wedge d\beta \\
&= d(f^*\sigma \wedge \beta) + (-1)^n f^*(\sigma \wedge \omega) \\
&= d(f^*\sigma \wedge \beta).
\end{aligned}$$

I prodotti su S^n di grado $2n-1 > n$ sono nulli. Integrando si ottiene l'uguaglianza voluta. c.v.d.

9.3 DEFINIZIONE. *γ_f si chiama invariante di Hopf di $f : S^{2n-1} \to S^n$.*

Esempio. Per un'applicazione costante, $\gamma_f = 0$.

Osservazione. Cambiando l'orientazione di S^{2n-1}, l'invariante cambia segno; è invece indipendente dall'orientazione di S^n.

9.4 PROPOSIZIONE. *Due applicazioni differenziabili e differenziabilmente omotope hanno lo stesso invariante di Hopf.*

Dimostrazione. Sia $F : S^{2n-1} \times \mathbb{R} \to S^n$ un'omotopia differenziabile da f_0 a f_1, H la sua restrizione a $S^{2n-1} \times I$ e $J_i(x) = (x,i)$. Per ω di integrale 1, poiché $H^n(S^{2n-1} \times I) = 0$, esiste $\widetilde{\beta}$ di grado $n-1$ con $H^*\omega = d\widetilde{\beta}$. Le forme $\beta = J_0^*\widetilde{\beta}$, $\beta' = J_1^*\widetilde{\beta}$ soddisfano $d\beta = f_0^*\omega$, $d\beta' = f_1^*\omega$.

Inoltre $d(\widetilde{\beta} \wedge d\widetilde{\beta}) = d\widetilde{\beta} \wedge d\widetilde{\beta} = H^*(\omega \wedge \omega) = 0$. Stokes dà quindi

$$0 = \int_{S^{2n-1}} J_1^*(\widetilde{\beta} \wedge d\widetilde{\beta}) - \int_{S^{2n-1}} J_0^*(\widetilde{\beta} \wedge d\widetilde{\beta}) = \gamma_{f_1} - \gamma_{f_0}.$$

c.v.d.

Per il capitolo IV, 4.6 e 4.11, si definisce dunque l'invariante di Hopf di un'applicazione continua come quello di una qualunque applicazione differenziabile a essa omotopa.

9.5 PROPOSIZIONE. *Due applicazioni continue omotope hanno lo stesso invariante di Hopf.*

In particolare un'applicazione omotopa a una costante, per esempio non suriettiva, ha invariante nullo.

9.6 PROPOSIZIONE. *Se n è dispari, ogni applicazione continua $S^{2n-1} \to S^n$ ha invariante di Hopf nullo.*

Dimostrazione. Si può supporre l'applicazione differenziabile. Per n dispari,

$$d(\beta \wedge \beta) = d\beta \wedge \beta + \beta \wedge d\beta = 2\beta \wedge d\beta.$$

L'integrale è quindi nullo per Stokes. c.v.d.

9.7 PROPOSIZIONE. *Se $f : S^{2n-1} \to S^n$ è continua e $g : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ ha grado a, $\gamma_{f\circ g} = a\gamma_f$.*

Dimostrazione. Si possono supporre f, g differenziabili. Se $f^*\omega = d\beta$, allora $(f \circ g)^*\omega = d(g^*\beta)$, e

$$\gamma_{f\circ g} = \int g^*(\beta \wedge d\beta) = a \int \beta \wedge d\beta = a\gamma_f.$$

c.v.d.

9.8 PROPOSIZIONE. *Se $h : S^n \to S^n$ ha grado b, $\gamma_{h\circ f} = b^2\gamma_f$.*

Dimostrazione. Si suppongano f, h differenziabili. Se $b \neq 0$ e $\int \omega' = 1$, la forma $\omega = b^{-1}h^*\omega'$ ha integrale 1. Per $f^*\omega = d\beta$ si ha $(h\circ f)^*\omega' = d(b\beta)$; dunque $\gamma_{h\circ f} = b^2\gamma_f$.

Se $b = 0$, $h^*\omega' = d\sigma$ per una forma σ di grado $n-1$ su S^n. Allora

$$\gamma_{h\circ f} = \int (f^*\sigma) \wedge d(f^*\sigma) = \int f^*(\sigma \wedge d\sigma) = 0.$$

c.v.d.

9.9 Esercizio: invariante di Hopf dell'applicazione di Hopf. Sia $f : S^{2n-1} \to S^n$ differenziabile; si può supporre suriettiva (9.5). Per ogni valore regolare x, $M_x = f^{-1}(x)$ è una sottovarietà compatta senza bordo di dimensione $n-1$.

i) Esistono un aperto orientato $V \subset S^n$ e una famiglia finita di diffeomorfismi $h_i : V \times \mathbb{R}^{n-1} \to U_i$, con U_i aperti orientati di S^{2n-1}, tali che:

a) V sia diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$;

b) ogni punto di V sia un valore regolare;

c) $f \circ h_i = p_1$;

d) $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$.

ii) Per ogni $x \in V$, gli h_i determinano un'orientazione di M_x.

iii) Per $x, y \in V$ distinti, $\int_{M_x} \beta = \int_{M_y} \beta$. Infatti, per il segmento D che unisce x a y in una carta di V, $N = f^{-1}(D)$ è una sottovarietà compatta di dimensione n, con bordo $M_x \cup M_y$, sulla quale $f^*\omega$ è nulla.

iv) Per ogni $x \in V$, $\gamma_f = \int_{M_x} \beta$. Si supponga $\operatorname{supp} \omega \subset V$ e si applichi Fubini.

v) Se M_x è il bordo di una sottovarietà chiusa connessa $N \subset S^{2n-1}$, γ_f è il grado di $f|_N : (N, M_x) \to (S^n, x)$ (es. 8.10). In particolare è un intero.

vi) L'applicazione di Hopf $q : S^3 \to S^2$ (cap. II, §4.3) ha invariante $+1$, per le orientazioni scelte; non è dunque omotopa a una costante.

vii) Per ogni $m \in \mathbb{Z}$ esiste un'applicazione continua $S^3 \to S^2$ con invariante di Hopf m (es. 8.8).

9.10 Osservazioni.

i) L'invariante di Hopf è in realtà sempre un intero.

ii) Due applicazioni continue $S^3 \to S^2$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso invariante di Hopf.

CAPITOLO XV

Dualità di Poincaré

1. Omomorfismo $*$ negli spazi euclidei

Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione finita m e sia g una metrica euclidea, ossia una forma bilineare simmetrica definita positiva. Indichiamo con $\gamma : E \to E^*$ l'isomorfismo determinato da g: $\gamma(x)(y) = g(x,y)$.

1.1 LEMMA. *Esiste una forma volume $v \in A^m(E)$ tale che*

$$v(x_1,\dots,x_m)v(y_1,\dots,y_m) = \det(g(x_i,y_j))$$

per ogni $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_m \in E$. Questa relazione determina v a meno del segno.

Si dice che v è una *forma volume della metrica g*.

Dimostrazione. Sia w una forma volume. Fissati gli x_i, l'applicazione $(y_1,\dots,y_m) \mapsto \det(g(x_i,y_j))$ è multilineare alternante; si scrive dunque $\lambda(x_1,\dots,x_m)w(y_1,\dots,y_m)$. Fissati gli y_j, è multilineare alternante anche negli x_i. Pertanto $\lambda \in A^m(E)$ e

$$\det(g(x_i,y_j)) = a\,w(x_1,\dots,x_m)w(y_1,\dots,y_m), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Per una base ortonormale $e_1,\dots,e_m$ si ha $1 = a\,w(e_1,\dots,e_m)^2$, quindi $a > 0$. Si deve dunque porre $v = \pm\sqrt{a}\,w$. c.v.d.

1.2 Osservazioni.

i) $v(x_1,\dots,x_m)v = \gamma(x_1)\wedge\cdots\wedge\gamma(x_m)$.

ii) Se (e_i) è ortonormale e (η_i) la base duale, $v = \pm\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_m$.

iii) Se si richiede che v corrisponda a un'orientazione assegnata, essa è completamente determinata.

Supponiamo ora scelta una forma volume con la proprietà di 1.1.

1.3 LEMMA. *Per $\alpha\in A^p(E)$ esiste un'unica forma $*\alpha\in A^{m-p}(E)$ tale che*

$$(*\alpha)(x_1,\dots,x_{m-p})v = \alpha\wedge\gamma(x_1)\wedge\cdots\wedge\gamma(x_{m-p}).$$

Il coefficiente di v al secondo membro è infatti un'applicazione multilineare alternante degli x_i, univocamente determinata.

1.4 LEMMA. *$\alpha\mapsto *\alpha$ è un omomorfismo da $A^p(E)$ ad $A^{m-p}(E)$.*

La verifica è immediata.

1.5 LEMMA. *Sia (e_i) una base ortonormale con base duale (η_i) e $v=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_m$. Per $i_1<\cdots<i_p$ e la successione complementare $j_1<\cdots<j_{m-p}$, sia $\varepsilon(i_1,\dots,i_p)$ il segno della permutazione $(i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_{m-p})$. Allora*

$$*(\eta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\eta_{i_p}) = \varepsilon(i_1,\dots,i_p)\eta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\eta_{j_{m-p}}.$$

Poiché $\gamma(e_i)=\eta_i$, la valutazione sui vettori $e_{r_1},\dots,e_{r_{m-p}}$ è nulla se gli indici non sono quelli complementari; sugli indici complementari il prodotto con v è

$$\eta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\eta_{i_p}\wedge\eta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\eta_{j_{m-p}} = \varepsilon(i_1,\dots,i_p)v.$$

1.6 PROPOSIZIONE. *Per $\alpha\in A^p(E)$, $**\alpha = (-1)^{p(m-p)}\alpha = (-1)^{p(m-1)}\alpha$.*

Infatti $\varepsilon(j_1,\dots,j_{m-p}) = (-1)^{p(m-p)}\varepsilon(i_1,\dots,i_p)$.

1.7 COROLLARIO. *$* : A^p(E) \to A^{m-p}(E)$ è un isomorfismo di inverso $(-1)^{p(m-p)}*$.*

Quindi, se m è dispari, $*^{-1} = *$ per ogni p; se m è pari, $*^{-1} = *$ per p pari e $*^{-1} = -*$ per p dispari.

1.8 PROPOSIZIONE. *Per $\alpha, \beta \in A^p(E)$, $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$.*

Dimostrazione. Per bilinearità basta prendere $\alpha = \eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_p}$ e $\beta = \eta_{r_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{r_p}$ con indici crescenti. Il prodotto $\alpha \wedge (*\beta)$ è nullo se gli insiemi degli indici sono diversi, uguale a v se coincidono. c.v.d.

La stessa dimostrazione dà:

1.9 PROPOSIZIONE. *Se $0 \neq \alpha \in A^p(E)$, $\alpha \wedge (*\alpha) = \lambda v$ con $\lambda > 0$.*

2. Omomorfismo $*$ nelle varietà riemanniane

Sia M una varietà differenziabile connessa orientabile di dimensione m, con metrica riemanniana g.[19] Indichiamo ancora con γ l'isomorfismo indotto da g dal modulo $\mathfrak{X}(M)$ dei campi vettoriali al modulo $A^1(M)$ delle forme di Pfaff. Come nel paragrafo precedente si dimostrano i lemmi seguenti.

2.1 LEMMA. *Esiste una forma volume v su M tale che*

$$v(X_1, \ldots, X_m) v(Y_1, \ldots, Y_m) = \det(g(X_i, Y_j))$$

per ogni scelta di campi vettoriali. Essa è determinata a meno del segno.

Si suppone ora scelta una delle due forme volume.

[19] Su ogni varietà differenziabile esiste una metrica riemanniana [1].

2.2 LEMMA. *Per $\alpha \in A^p(M)$ esiste un'unica $*\alpha \in A^{m-p}(M)$ tale che*

$$(*\alpha)(X_1,\dots,X_{m-p})v = \alpha \wedge \gamma(X_1) \wedge \cdots \wedge \gamma(X_{m-p}).$$

2.3 LEMMA. *$\alpha \mapsto *\alpha$ è un omomorfismo da $A^p(M)$ ad $A^{m-p}(M)$.*

La metrica g induce una metrica euclidea su ogni T_xM e $(*\alpha)(x) = *(\alpha(x))$. Pertanto:

2.4 PROPOSIZIONE. $** \alpha = (-1)^{p(m-p)}\alpha = (-1)^{p(m-1)}\alpha$.

2.5 COROLLARIO. *$* : A^p(M) \to A^{m-p}(M)$ è un isomorfismo di inverso $(-1)^{p(m-p)}*$.*

2.6 PROPOSIZIONE. *Per $\alpha, \beta \in A^p(M)$, $\alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha)$.*

2.7 PROPOSIZIONE. *Per una forma non nulla $\alpha \in A^p(M)$, $\alpha \wedge (*\alpha) = \lambda v$, dove λ è una funzione non negativa e non identicamente nulla.*

Per l'integrazione associata all'orientazione di v si ottiene:

2.8 TEOREMA. *Se M è compatta,*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge (*\beta)$$

è una forma bilineare simmetrica definita positiva sullo spazio vettoriale reale $A^p(M)$.

2.9 TEOREMA. *Se M è compatta, $*$ è unitario: $\langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$.*

Infatti

$$\begin{aligned}\langle *\alpha, *\beta \rangle &= \int_M (*\alpha) \wedge (** \beta) \\ &= (-1)^{p(m-p)} \int_M (*\alpha) \wedge \beta \\ &= \int_M \beta \wedge (*\alpha) = \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle.\end{aligned}$$

3. Forme armoniche

Per ogni p, l'applicazione $\delta = (-1)^p *^{-1} d*$ è un omomorfismo $A^p(M) \to A^{p-1}(M)$: la *codifferenziazione esterna* sulla varietà riemanniana orientata M.

3.1 PROPOSIZIONE. *δ ha quadrato nullo: $\delta \circ \delta = 0$.*

3.2 DEFINIZIONE. *L'endomorfismo $\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d$ di $A^p(M)$ si chiama operatore laplaciano.*

Esercizi.

i) $\Delta = (d+\delta)^2$, $d\Delta = \Delta d$, $\delta\Delta = \Delta\delta$.

ii) Su $\mathbb{R}^m$ con metrica e orientazione canoniche, $\Delta : A^0(\mathbb{R}^m) \to A^0(\mathbb{R}^m)$ è, a meno del segno, il laplaciano $\sum_i \partial^2/\partial x_i^2$. Ciò giustifica il nome.

3.3 DEFINIZIONE. *Una forma $\alpha \in A^p(M)$ è armonica se $\Delta\alpha = 0$.*

3.4 Ipotesi. D'ora in avanti M è compatta e senza bordo.

3.5 PROPOSIZIONE. *Per $\alpha \in A^p(M)$ e $\beta \in A^{p+1}(M)$, $\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle$.*

Gli operatori d, δ sono dunque aggiunti per il prodotto scalare.

Dimostrazione. Si ha

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^p \alpha \wedge d*\beta = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta.$$

Integrando e applicando Stokes si ottiene la formula. c.v.d.

3.6 COROLLARIO. *Per $\alpha, \beta \in A^p(M)$, $\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle$.*

Il laplaciano è quindi autoaggiunto per il prodotto scalare.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\langle \Delta\alpha, \beta \rangle &= \langle d\delta\alpha, \beta \rangle + \langle \delta d\alpha, \beta \rangle \\ &= \langle \delta\alpha, \delta\beta \rangle + \langle d\alpha, d\beta \rangle \\ &= \langle \alpha, d\delta\beta \rangle + \langle \alpha, \delta d\beta \rangle = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle.\end{aligned}$$

c.v.d.

3.7 PROPOSIZIONE. *α è armonica se e solo se $d\alpha = \delta\alpha = 0$.*

Dimostrazione. La condizione è sufficiente per definizione. Se $\Delta\alpha = 0$,

$$0 = \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle,$$

quindi entrambe le forme sono nulle per 2.8. c.v.d.

3.8 COROLLARIO. *Ogni forma armonica è chiusa.*

Indichiamo con:

$B^p(M) = d(A^{p-1}(M))$ il sottospazio delle forme esatte;

$B_p(M) = \delta(A^{p+1}(M))$ il sottospazio delle forme coesatte;

$\mathscr{H}^p(M) = \ker(\Delta : A^p(M) \to A^p(M))$ il sottospazio delle forme armoniche.

3.9 LEMMA. *α è ortogonale a $B^p(M)$ se e solo se $\delta\alpha = 0$.*

Dimostrazione. Se $\delta\alpha = 0$, per ogni $\beta \in A^{p-1}(M)$ si ha $\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle \delta\alpha, \beta \rangle = 0$. Viceversa, dall'ortogonalità segue $0 = \langle \alpha, d\delta\alpha \rangle = \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle$, quindi $\delta\alpha = 0$. c.v.d.

Analogamente:

3.10 LEMMA. *α è ortogonale a $B_p(M)$ se e solo se $d\alpha = 0$.*

3.11 PROPOSIZIONE. *I sottospazi $B^p(M)$, $B_p(M)$ e $\mathscr{H}^p(M)$ sono a due a due ortogonali.*

3.12 PROPOSIZIONE. *Una forma è nulla se e solo se è ortogonale a tutti e tre questi sottospazi.*

Infatti l'ortogonalità ai primi due implica che sia armonica; se è ortogonale anche al terzo, il suo prodotto scalare con se stessa è nullo.

Più precisamente:

3.13 TEOREMA DI HODGE–DE RHAM. *$A^p(M)$ è somma diretta di $B^p(M)$, $B_p(M)$ e $\mathscr{H}^p(M)$.*

Ammetteremo questo difficile teorema [8].

3.14 COROLLARIO. *Ogni classe di coomologia di grado p contiene un'unica forma armonica.*

Dimostrazione. Sia h il proiettore su $\mathscr{H}^p(M)$. Una forma chiusa α è ortogonale a $B_p(M)$; dunque $\alpha = h(\alpha) + d\beta$ per 3.13, ed è coomologa a una forma armonica. Due forme armoniche distinte non possono essere coomologhe, perché $\mathscr{H}^p(M)$ è ortogonale a $B^p(M)$. c.v.d.

3.15 COROLLARIO. *L'omomorfismo $\mathscr{H}^p(M) \to H^p(M)$ è un isomorfismo.*

4. Dualità di Poincaré

Se α è chiusa di grado p e β chiusa di grado $m-p$, per $\gamma \in A^{p-1}(M)$ si ha

$$\int_M (\alpha + d\gamma) \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M d(\gamma \wedge \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta .$$

Analogamente, per $\gamma' \in A^{m-p-1}(M)$, $\int_M \alpha \wedge (\beta + d\gamma') = \int_M \alpha \wedge \beta$. Quindi l'integrazione del prodotto induce una forma bilineare, indicata con $(\ ,\ )$, su $H^p(M) \times H^{m-p}(M)$.

4.1 TEOREMA. *Questa forma bilineare è non degenere.*

Si usa il seguente lemma, la cui verifica è un semplice esercizio di calcolo lasciato al lettore.

4.2 LEMMA. $*\Delta = \Delta *$.

Dimostrazione di 4.1. Una classe non nulla ha un rappresentante armonico non nullo α (3.14). Per 4.2 anche $*\alpha$ è armonica, e

$$(\alpha, *\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0.$$

Analogamente, per una forma armonica non nulla β di grado $m-p$, $(*\beta, \beta) \neq 0$. c.v.d.

4.3 COROLLARIO: DUALITÀ DI POINCARÉ. *La forma bilineare* $(\ ,\ )$ *pone in dualità* $H^p(M)$ *e* $H^{m-p}(M)$.

4.4 COROLLARIO. *Se M è senza bordo, compatta, connessa e orientabile,* $b_p(M) = b_{m-p}(M)$.

In dimensione dispari segue $\chi(M) = \sum_p (-1)^p b_p(M) = 0$ (cap. XIII, 3.3).

4.5 COROLLARIO. *Se M è senza bordo, compatta e semplicemente connessa,* $H^{m-1}(M) = 0$.

Infatti M è orientabile e $H^1(M) = 0$ (cap. XIV, 1.8).

4.6 Esempio. Una varietà compatta senza bordo, semplicemente connessa, di dimensione 3 ha $H^0(M) = H^3(M) = \mathbb{R}$ e coomologia nulla negli altri gradi. Ha dunque la stessa algebra di coomologia di S^3.

«È in realtà un problema non risolto sapere se M sia omeomorfa a S^3: congettura di Poincaré» (si può dimostrare che in dimensione 2 una tale varietà è omeomorfa a S^2).[XV.1]

4.7 Esercizio. La caratteristica di Eulero–Poincaré di una varietà senza bordo, compatta, connessa, orientabile, di dimensione $m = 4k+2$, è pari: la forma di dualità su $H^{2k+1}(M)$ è non degenere e antisimmetrica.

5. Classe e numero di Lefschetz

Sia M compatta, connessa, orientata, senza bordo. La forma di dualità $H^{m-p}(M) \times H^p(M) \to \mathbb{R}$ definisce un elemento λ_p del duale di $H^{m-p}(M) \otimes H^p(M)$, identificato con $H^p(M) \otimes H^{m-p}(M)$ mediante

$$\langle \alpha \otimes \beta \mid \alpha' \otimes \beta' \rangle = (-1)^{p^2} (\alpha, \alpha')(\beta, \beta'),$$

con $\alpha, \beta' \in H^{m-p}(M)$ e $\alpha', \beta \in H^p(M)$.

5.1 LEMMA. *Siano (β_i) una base di $H^{m-p}(M)$ e (α_j) una base di $H^p(M)$, con $(\beta_i, \alpha_j) = (-1)^{p(m-p)}\delta_{ij}$. Allora $\lambda_p = (-1)^p \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$.*

Dimostrazione. Per $\beta = \sum_i b_i \beta_i$, $\alpha = \sum_j a_j \alpha_j$, si ha $(\beta, \alpha) = (-1)^{p(m-p)} \sum_i b_i a_i$ e

$$\left\langle \beta \otimes \alpha \mid (-1)^p \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \right\rangle = \sum_i (\beta, \alpha_i)(\alpha, \beta_i)$$
$$= (-1)^{p(m-p)} \sum_i b_i a_i.$$

c.v.d.

In particolare, per la classe fondamentale $\nu \in H^m(M)$, $\lambda_0 = 1 \otimes \nu$ e $\lambda_m = (-1)^m \nu \otimes 1$.[XV.2]

Sia $K : H(M) \otimes H(M) \to H(M \times M)$ l'isomorfismo di Künneth e $D : M \to M \times M$ la diagonale.

5.2 DEFINIZIONE. *La classe $\Lambda = K(\sum_{p=0}^m \lambda_p) \in H^m(M \times M)$ si chiama classe di orientazione della varietà orientata M.*

Cambiando orientazione, Λ cambia segno.

5.3 DEFINIZIONE. *La classe $\Xi = D^*\Lambda \in H^m(M)$ si chiama classe di Eulero della varietà orientata M.*

La terminologia è giustificata dalla proposizione seguente.

5.4 PROPOSIZIONE. $\int_M \Xi = \chi(M)$.

Dimostrazione. Con le notazioni di 5.1 e il lemma 4.4 del capitolo XIII,

$$\begin{aligned}\int_M \Xi &= \sum_{p=0}^{m} \int_M D^*K(\lambda_p) \\ &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \sum_{i=1}^{b_p(M)} \int_M \alpha_i\beta_i \\ &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p b_p(M) = \chi(M).\end{aligned}$$

c.v.d.

Sia $f : M \to M$ continua e sia $F = f \times \mathrm{id}$, ossia $F(x,y) = (f(x),y)$.

5.5 DEFINIZIONE. $\Lambda_f = F^*\Lambda \in H^m(M \times M)$ *è la classe di Lefschetz di* f.

5.6 DEFINIZIONE. $\lambda_f = \int_M D^*\Lambda_f$ *è il numero di Lefschetz di* f.

5.7 LEMMA. Λ_f *e* λ_f *dipendono soltanto dalla classe di omotopia di* f.

In particolare, se f è omotopa all'identità, $\Lambda_f = \Lambda$ e $\lambda_f = \chi(M)$.

5.8 PROPOSIZIONE. *Se* τ_p *è la traccia di* $f^* : H^p(M) \to H^p(M)$, *allora* $\lambda_f = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \tau_p$.

Dimostrazione. Se $f^*\alpha_i = \sum_j a_{ji}\alpha_j$, allora $\tau_p = \sum_i a_{ii}$ e

$$(f^* \otimes \mathrm{id})(\lambda_p) = (-1)^p \sum_{i,j} a_{ji}\alpha_j \otimes \beta_i.$$

Per naturalità di K (cap. XIII, 4.3),

$$\begin{aligned}\Lambda_f &= \sum_p F^* K(\lambda_p) = \sum_p K((f^* \otimes \mathrm{id})(\lambda_p)) \\ &= \sum_p (-1)^p K\left(\sum_{i,j} a_{ji}\alpha_j \otimes \beta_i\right), \\ \lambda_f &= \sum_p (-1)^p \sum_{i,j} a_{ji} \int_M \alpha_j \beta_i = \sum_p (-1)^p \sum_i a_{ii} = \sum_p (-1)^p \tau_p.\end{aligned}$$

c.v.d.

5.9 COROLLARIO. *Se f è omotopa a una costante, $\lambda_f = 1$.*

Esempio. Per $f : S^m \to S^m$, $\lambda_f = 1 + (-1)^m \deg(f)$. Se $\lambda_f \neq 0$, ossia $\deg(f) \neq (-1)^{m+1}$, f ha un punto fisso (cap. XIV, es. 8.7). Il risultato è generale:

5.10 TEOREMA DI LEFSCHETZ. *Se $\lambda_f \neq 0$, $f : M \to M$ ha un punto fisso.*

Si usa il risultato seguente, che ammetteremo [2].

5.11 PROPOSIZIONE. *Sia $\mathscr{D} = D(M)$ e $i : U = M \times M - \mathscr{D} \to M \times M$ l'inclusione. Allora $i^*\Lambda = 0$.*

Dimostrazione di 5.10. Se f non ha punti fissi, $F(\mathscr{D}) \cap \mathscr{D} = \varnothing$. Quindi $F \circ D = i \circ k$ per una $k : M \to U$. Ne segue

$$\lambda_f = \int_M D^* F^* \Lambda = \int_M k^* i^* \Lambda = 0.$$

c.v.d.

5.12 COROLLARIO. *Se M ammette un campo vettoriale senza singolarità, $\chi(M) = 0$.*

Dimostrazione. Sia X tale campo e φ_t il suo flusso. Per $t > 0$ sufficientemente piccolo, $f = \varphi_t$ non ha punti fissi ed è omotopa all'identità.[XV.3] Dunque $\lambda_f = \chi(M) = 0$. c.v.d.

In particolare (cap. XIV, es. 8.7 ii):

5.13 COROLLARIO. *Sulle sfere di dimensione pari non esistono campi vettoriali senza singolarità.*

5.14 Osservazioni.

i) Per ogni applicazione $f : M \to M$, il numero di Lefschetz è un intero [2].

ii) Il corollario 5.12 dà in realtà una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un campo vettoriale senza singolarità su M.

Complementi di teoria dei gruppi

1. Gruppi commutativi

Un gruppo commutativo è un modulo su $\mathbb{Z}$; gli si può dunque applicare la terminologia dei moduli. Si dice, per esempio, che un gruppo commutativo G è *libero*, o *abeliano libero*, se è un modulo libero su $\mathbb{Z}$.

Esercizi.

i) Ogni gruppo commutativo è isomorfo a un quoziente di un gruppo abeliano libero.

ii) Se $H \subset G$ e G/H è libero, H è un fattore diretto di G.

1.1 TEOREMA. *Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano libero con base finita è libero.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sul numero n degli elementi di una base, con caso $n = 0$ banale. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base e $H \subset G$. L'omomorfismo $\alpha(\sum a_i e_i) = a_n$ manda H in un sottogruppo $a\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$. Se $a \neq 0$, si scelga $h \in H$ con $\alpha(h) = a$; allora

$$H = \mathbb{Z}h \oplus \big(H \cap \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle\big).$$

Se $a = 0$, H è contenuto nel sottogruppo generato dai primi $n-1$ vettori. In entrambi i casi l'ipotesi induttiva conclude.[A.1] c.v.d.

1.2 Per un gruppo commutativo G, gli elementi di ordine finito formano un sottogruppo $\mathrm{Tors}(G)$, il *sottogruppo di torsione*; i suoi elementi sono gli *elementi di torsione*. Il gruppo è *di torsione* se $\mathrm{Tors}(G) = G$, *senza torsione* se $\mathrm{Tors}(G) = 0$.

Esempi.

i) Un gruppo commutativo finito è di torsione.

ii) Un gruppo abeliano libero è senza torsione.

iii) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è di torsione.

1.3 PROPOSIZIONE. *Se $a_1,\dots,a_n$ è una famiglia libera massimale in un gruppo commutativo G, ogni famiglia libera ha al più n elementi. Tutte le famiglie libere massimali hanno dunque n elementi.*

Dimostrazione. Sia $b_1,\dots,b_m$, $m \geq n$, una famiglia libera. Per ogni i la massimalità dà una relazione

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j + \beta_i b_i = 0, \qquad \beta_i \neq 0.$$

Per i primi n indici la matrice (α_{ij}) ha determinante non nullo, altrimenti una combinazione razionale non nulla delle righe darebbe una relazione fra i b_i. Moltiplicando per la matrice aggiunta si esprimono $da_1,\dots,da_n$ mediante $b_1,\dots,b_n$, dove $d = \det(\alpha_{ij})$. Se $m > n$, la relazione per b_{n+1} renderebbe dipendenti $b_1,\dots,b_{n+1}$. Dunque $m = n$. c.v.d.

Si dice che G ha *rango finito n* se ha una famiglia libera massimale di n elementi, e *rango infinito* altrimenti.

Esempi.

i) Un gruppo di torsione ha rango 0.

ii) Un gruppo abeliano libero con base di n elementi ha rango n; ogni sua base ha dunque n elementi.

iii) Il gruppo additivo $\mathbb{Q}$ ha rango 1: è senza torsione ma non libero.

Esercizio. Se G ha rango finito m e $H \subset G$, allora: i) H ha rango finito $n \leq m$; ii) G/H ha rango finito $p \leq m$; iii) $m = n + p$.

1.4 DEFINIZIONE. *Un gruppo è di tipo finito se ammette un sistema finito di generatori.*

Un gruppo commutativo Γ generato da m elementi è quoziente di un gruppo libero con generatori $g_1,\dots,g_m$ per un sottogruppo H. Se $r_1,\dots,r_n$ generano H (1.1), si dice che Γ ha m generatori e n relazioni $r_1 = 0,\dots,r_n = 0$.

1.5 TEOREMA. *Un gruppo commutativo senza torsione e di tipo finito è libero.*

Schema di dimostrazione. Se esiste un sistema di generatori senza relazioni, il gruppo è libero. Altrimenti si scelga un sistema minimale $g_1, \dots, g_n$ con una relazione $a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = 0$, dove $a_n > 0$ è il minimo coefficiente positivo fra tutte le relazioni di tutti i sistemi minimali. Scrivendo $a_i = a_n q_i + r_i$, $0 \le r_i < a_n$, si ottiene

$$r_1 g_1 + \cdots + r_{n-1} g_{n-1} + a_n (q_1 g_1 + \cdots + q_{n-1} g_{n-1} + g_n) = 0.$$

La minimalità impone $r_i = 0$ per ogni i. Poiché il gruppo è senza torsione, $q_1 g_1 + \cdots + q_{n-1} g_{n-1} + g_n = 0$, contro la minimalità del sistema di generatori. c.v.d.

1.6 COROLLARIO. *Ogni gruppo commutativo di tipo finito è somma diretta del suo sottogruppo di torsione e di un gruppo libero H di rango finito.*

Il rango del gruppo è finito e uguale a quello di H.

2. Sottogruppo dei commutatori

Per un gruppo G, $[G,G]$ è il sottogruppo generato dagli elementi $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Questi sono i *commutatori*, e $[G,G]$ è il *sottogruppo dei commutatori*.

2.1 PROPOSIZIONE. *$[G,G]$ è normale e $G/[G,G]$ è commutativo.*

Infatti

$$g(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})g^{-1} = (g\alpha g^{-1})(g\beta g^{-1})(g\alpha g^{-1})^{-1}(g\beta g^{-1})^{-1},$$

e $\beta\alpha[G,G] = \alpha\beta[G,G]$. Il quoziente è detto anche *abelianizzato* di G.

2.2 PROPOSIZIONE. *$[G,G]$ è il più piccolo sottogruppo normale H tale che G/H sia commutativo.*

La proiezione in ogni tale quoziente annulla infatti tutti i commutatori.

2.3 COROLLARIO. *Ogni omomorfismo da G a un gruppo commutativo H induce un omomorfismo da $G/[G,G]$ a H.*

3. Gruppi liberi

3.1 TEOREMA. *Per ogni insieme A esistono un gruppo G e un'iniezione $i : A \to G$ tali che:*

i) G sia generato da $i(A)$;

ii) per ogni applicazione $f : A \to H$ in un gruppo esista un unico omomorfismo $h : G \to H$ con $f = h \circ i$.

Se G', i' hanno le stesse proprietà, esiste un isomorfismo $g : G \to G'$ con $i' = g \circ i$.

Schema di dimostrazione. Sia Γ l'insieme delle successioni finite di elementi di $A \times \{-1, +1\}$, scritte $(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_m^{\varepsilon_m})$, e sia 1 la successione vuota. La concatenazione

$$(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_m^{\varepsilon_m})(b_1^{\eta_1}, \ldots, b_n^{\eta_n}) = (c_1^{\zeta_1}, \ldots, c_{m+n}^{\zeta_{m+n}}),$$

con $c_i = a_i$, $\zeta_i = \varepsilon_i$ per $i \leq m$ e $c_i = b_{i-m}$, $\zeta_i = \eta_{i-m}$ per $i > m$, è associativa e ha elemento neutro 1.

Sia R la relazione di equivalenza compatibile con la concatenazione generata dalle cancellazioni $a^{\varepsilon} a^{-\varepsilon} = 1$. Sul quoziente $G = \Gamma/R$ si ottiene una legge di gruppo. L'applicazione $a \mapsto a^1$ induce un'iniezione $i : A \to G$; il gruppo e l'iniezione soddisfano i) e ii).

Se G', i' hanno le stesse proprietà, esistono $h : G \to G'$ e $h' : G' \to G$ con $i' = hi$ e $i = h'i'$. Per unicità, $h'h$ e hh' sono le identità, quindi h è un isomorfismo. c.v.d.

Identificando A con $i(A)$, si dice che G è il *gruppo libero generato da A*. Se A ha n elementi, si parla di gruppo libero a n generatori. Più generalmente un gruppo è libero se è isomorfo a uno di questa forma.

3.2 PROPOSIZIONE. *Ogni gruppo è isomorfo a un quoziente di un gruppo libero.*

Se A è un sistema di generatori di G, l'inclusione induce un omomorfismo suriettivo dal gruppo libero Γ su A a G.

Se G è di tipo finito si può scegliere Γ libero su $g_1,\dots,g_m$. Il nucleo K è normale e libero (cap. X, 5.6). Se K è generato, come sottogruppo normale, da $r_1,\dots,r_n$, si dice che G ha generatori $g_1,\dots,g_m$ e relazioni $r_1=1,\dots,r_n=1$, e che ha una *presentazione finita*.[A.2]

3.3 PROPOSIZIONE. *Se G è libero sull'insieme A, $G/[G,G]$ è isomorfo al gruppo abeliano libero $\mathbb{Z}^{(A)}$.*

L'applicazione di A sulla base canonica di $\mathbb{Z}^{(A)}$ induce un omomorfismo di G in quest'ultimo gruppo; passando al quoziente (2.3) si ottiene l'isomorfismo.

3.4 COROLLARIO. *Due gruppi liberi generati da insiemi finiti A,A' sono isomorfi se e solo se A,A' hanno la stessa cardinalità.*

4. Prodotto libero

4.1 TEOREMA. *Per due gruppi H_1,H_2 esistono un gruppo G e omomorfismi iniettivi $h_i : H_i \to G$ tali che:*

i) G sia generato dalle loro immagini;

ii) per ogni coppia $k_i : H_i \to K$ esista un unico omomorfismo $k : G \to K$ con $k_i = k \circ h_i$.

Questi dati sono determinati a meno di isomorfismo.

Schema di dimostrazione. Sia Γ il gruppo libero sull'unione disgiunta $H_1 \sqcup H_2$, Γ_i quello su H_i e $q_i : \Gamma_i \to H_i$ la proiezione canonica. Le inclusioni inducono $j_i : \Gamma_i \to \Gamma$. Sia Γ' il sottogruppo normale generato da $j_1(\ker q_1) \cup j_2(\ker q_2)$ e $G = \Gamma/\Gamma'$. Gli omomorfismi j_i inducono omomorfismi iniettivi $h_i : H_i \to G$ con le proprietà richieste.

L'unicità a meno di isomorfismo si dimostra come in 3.1. c.v.d.

Si dice che G è il *prodotto libero* di H_1, H_2 e si scrive $H_1 * H_2$.

4.2 COROLLARIO. *Se H_i è libero su A_i, $H_1 * H_2$ è isomorfo al gruppo libero sull'unione disgiunta $A_1 \sqcup A_2$.*

Esercizi.

i) $H_1 * (H_2 * H_3)$ e $(H_1 * H_2) * H_3$ sono isomorfi; lo sono anche $H_1 * H_2$ e $H_2 * H_1$.

ii) Un gruppo libero a n generatori è isomorfo al prodotto libero di n copie di $\mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAFIA

1. C. Godbillon. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Paris, Hermann, 1969.

2. M. Greenberg. *Lectures on algebraic topology*. New York, Benjamin, 1967.

3. S. Lang. *Algebra*. Addison Wesley, 1965.

4. J. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, 1963.

5. J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton Mathematical Notes, 1965.

6. J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. University Press of Virginia, 1965.

7. J. Munkres. *Elementary differential topology*. Princeton University Press, 1966.

8. G. de Rham. *Variétés différentiables*. Paris, Hermann, 1960.

Il lettore che desidera approfondire lo studio della topologia algebrica potrà consultare [2] e inoltre:

9. E. Spanier. *Algebraic topology*. New York, McGraw Hill, 1966.

INDICE ANALITICO

I rinvii indicano capitolo e paragrafo o enunciato; App. indica l'appendice. Le voci sono ordinate secondo la traduzione italiana.

Albero, III, 3.5.

Algebra delle forme differenziali, XI, 1.

Algebra di coomologia, XI, 1.

Algebra di coomologia a supporto chiuso, XI, 4.

Algebra di coomologia a supporto compatto, XI, 4.

Algebra di coomologia relativa, XII, 1.

Algebra di coomologia relativa a supporto compatto, XII, 1.

Algebra prodotto tensoriale, XIII, 4.

Aperto distinto di un rivestimento, VII, 2.1.

Applicazione di Hopf, II, 4.3.

Automorfismo di un rivestimento, VII, 4.4.

Base di un rivestimento, VII, 2.1.

Betti, numero di, XIII, 2.8.

Borsuk–Ulam, teorema di, IX, 3.4.

Bottiglia di Klein, II, 5.3.

Brouwer, teorema di, VI, 2.8; XII, 6.5.

Cammino, V, 1.

Cammino composto, V, 1.

Cammino costante, V, 1.

Cammino inverso, V, 1.

Cammino prodotto, V, 5.

Caratteristica di Eulero–Poincaré, III, 3.8; XIII, 2.9.

Cella, III, 1.1.

Cilindro, II, 5.1.

Classe di coomologia, XI, 1.

Classe di Eulero, XV, 5.3.

Classe di Lefschetz, XV, 5.5.

Classe di omotopia, IV, 1.2.

Classe di orientazione, XV, 5.2.

Classe fondamentale, XIV, 3.6.

Codifferenziazione esterna, XV, 3.1.

Commutatore, App., 2.

Complesso cellulare, III, 1.1.

Complesso cellulare di dimensione finita, III, 1.1.

Complesso cellulare finito, III, 1.1.

Complesso cellulare localmente finito, III, 2.1.

Complesso cellulare prodotto, III, 1.3.

Componente connessa, I, 1.9.

Componente connessa per archi, I, 2.7.

Congettura di Poincaré, XV, 4.6.

Connettività di un grafo, III, 3.7.

Coomologia di de Rham, XI, 1.

Coordinate omogenee, II, 3.6; II, 4.3.

Coordinate sferiche, II, 1.3.

d'Alembert, teorema di, VI, 3.5; IX, 6.6; XIV, 8.9.

Decomposizione cellulare, III, 1.1.

Decomposizione cellulare prodotto, III, 1.3.

Disco con p buchi, II, 5.6.

Disuguaglianze di Morse, XIII, 3.1; XIII, 3.4.

Doppio di una varietà con bordo, XIII, 3.6.

Dualità di Poincaré, XV, 4.3.

Endomorfismo di un rivestimento, VII, 4.4.

Escissione, XII, 2.2.

Escissione forte, XII, 3.1.

Estensione delle omotopie, IV, 3.1.

Eulero, formula di, III, 3.11.

Fibra di un rivestimento, VII, 2.1.

Forma armonica, XV, 3.3.

Forma differenziale chiusa, XI, 1.

Forma differenziale esatta, XI, 1.

Forma volume di una metrica, XV, 1.1.

Forme differenziali coomologhe, XI, 1.

Funzione di Morse, XIII, 1.2.

Grado di un'applicazione, VI, 2.2; XIV, 8.

Grafo, III, 3.1.

Gruppi localmente isomorfi, X, 6.6.

Gruppo abeliano libero, App., 1.1.
Gruppo che agisce a sinistra, I, 6.3.
Gruppo che agisce liberamente, I, 6.8.
Gruppo che agisce propriamente, I, 6.6.
Gruppo che agisce transitivamente, I, 6.11.
Gruppo dei periodi di una forma di Pfaff chiusa, XIV, 1.4.
Gruppo degli spinori, X, 6.4.
Gruppo di Poincaré, V, 2.5.
Gruppo di presentazione finita, App., 3.2.
Gruppo di rango finito, App., 1.3.
Gruppo di tipo finito, App., 1.4.
Gruppo di torsione, App., 1.2.
Gruppo fondamentale, V, 2.5.
Gruppo libero, App., 3.1.
Gruppo lineare complesso, II, 2.
Gruppo lineare reale, II, 2.
Gruppo ortogonale, II, 2.
Gruppo proiettivo, II, 3.7.
Gruppo senza torsione, App., 1.2.
Gruppo speciale ortogonale, II, 2.
Gruppo speciale unitario, II, 2.1.
Gruppo unitario, II, 2.
Gruppoide di Poincaré, V, 1.8.
Gruppoide fondamentale, V, 1.8.
H-spazio, V, 6.
Hessiano, XIII, 1.
Hodge–de Rham, teorema di, XV, 3.13.
Hopf, invariante di, XIV, 9.3.
Hopf, teorema di, XIV, 8.11.
Hurewicz, teorema di, XIV, 1.11.
Identificazione, I, 5.
Incollamento, I, 5.
Indice di un cammino chiuso, VI, 3.1.
Indice di un campo vettoriale piano, VI, 3.6.
Indice di un punto critico, XIII, 1.
Indice di Poincaré, VI, 3.6.
Intorno collare del bordo, IX, 3.9; XIII, 1.4.
Intorno tubolare, XII, 3.2.
Invarianza del dominio, XIV, 4.1.
Invarianza omotopica della coomologia, XI, 3.4.
Invarianza omotopica del gruppo fondamentale, V, 3.2.
Invarianza topologica della coomologia, XI, 3.2; XI, 5.5.
Invarianza topologica della dimensione, XIV, 4.2.
Invarianza topologica del gruppo fondamentale, V, 3.6.
Isomorfismo di rivestimenti, VII, 4.2.
Jordan, curva di, II, 5.4.
Jordan, teorema di, II, 5.4; XIV, 4.4.
Künneth, teorema di, XIII, 4.6.
Laccio, V, 2.1.
Laplaciano, XV, 3.2.
Lebesgue, numero di, IX, 1.
Lefschetz, numero di, XV, 5.6.
Lefschetz, teorema di, XV, 5.10.
Lemma dei cinque, XII, A.4.
Lemma di incollamento, IV, 1.
Mayer–Vietoris, successione esatta di, XII, 5.10.
Möbius, banda e nastro di, II, 5.2.
Morse, lemma di, XIII, 1.1.
Nielsen–Schreier, teorema di, X, 5.6.
Normalizzatore di un sottogruppo, VIII, 4.5.
Omeomorfismo locale, VII, 1.1.
Omomorfismo cobordo, XII, 4.4.
Omomorfismo di rivestimenti, VII, 4.1.
Omotopia, IV, 1.1.
Omotopia differenziabile, IV, 4.1.
Omotopia differenziabile e propria, IV, 4.3.
Omotopia differenziabile relativa, XII, 2.3.
Omotopia propria, IV, 1.4.
Omotopia relativa, IV, 2.1.
Orbita, I, 6.3.
Palla, II, 1.
Periodo di una forma di Pfaff chiusa, XIV, 1.4.
Piano proiettivo complesso, II, 4.1.
Piano proiettivo reale, II, 3.1.

Poincaré, lemma di, XI, 2.9.
Poincaré, teorema di, VI, 3.6.
Prodotto libero di gruppi, App., 4.1.
Proiezione di un rivestimento, VII, 2.1.
Punto critico, XIII, 1.
Punto critico non degenere, XIII, 1.
Relazione di equivalenza aperta, I, 4.3.
Relazione di equivalenza chiusa, I, 4.3.
Relazione di equivalenza separata, I, 4.5.
Retta proiettiva complessa, II, 4.1.
Retta proiettiva reale, II, 3.1.
Retratto, IV, 2.2.
Retratto per deformazione, IV, 2.3.
Rivestimento, VII, 2.1.
Rivestimento a *m* fogli, VII, 2.3.
Rivestimento associato a un rivestimento galoisiano, VIII, 2.3.
Rivestimento associato a una forma di Pfaff chiusa, XIV, 2.5.
Rivestimento delle orientazioni, X, 4.3.
Rivestimento galoisiano, VIII, 1.5.
Rivestimento immagine reciproca, VII, 4.5.
Rivestimento indotto, VII, 2.2.
Rivestimento normale, VIII, 4.7.
Rivestimento orientabile a due fogli, X, 4.4.
Rivestimento prodotto, VII, 2.2.
Rivestimento banale, VII, 2.2.
Rivestimento universale, VIII, 5.1.
Sard, teorema di, XIV, 8.3.
Schönflies, teorema di, II, 5.5.
Sezione, VII, 2.1.
Sfera, II, 1.
Sollevamento, VII, 6.1.
Sospensione, XIV, 8.8.
Sottocomplesso cellulare, III, 1.5.
Sottogruppo stabilizzatore, I, 6.3.
Sottovarietà chiusa, XII, 1.
Spazio connesso, I, 1.1.
Spazio connesso per archi, I, 2.2.
Spazio contraibile, IV, 1.8.
Spazio delle orbite, I, 6.3.
Spazio lenticolare, II, 1.7.
Spazio localmente connesso, I, 1.10.
Spazio localmente connesso per archi, I, 2.8.
Spazio omogeneo, I, 6.11.
Spazio proiettivo complesso, II, 4.1.
Spazio proiettivo reale, II, 3.1.
Spazio quoziente, I, 4.1.
Spazio semilocalmente semplicemente connesso, IX, 5.2.
Spazio semplicemente connesso, V, 4.2.
Spazio totale di un rivestimento, VII, 2.1.
Spigolo, III, 1.1.
Scheletro, III, 1.
Successione esatta, XII, A.1.
Successione esatta di una coppia, XII, 5.7.
Successione esatta di una terna, XII, 5.3.
Supporto di una forma differenziale, XI, 4.
Tipo di omotopia, IV, 1.6.
Topologia della convergenza compatta, IV, 5.1.
Topologia quoziente, I, 4.1.
Toro, II, 1.8.
Toro pieno, II, 1.10.
Traiettoria, I, 6.3.
Trivializzazione di un rivestimento, VII, 2.1.
Valore critico, XIII, 1.
Valore regolare, XIII, 1.
Van Kampen, teorema di, VI, 4.6; X, 1.1.
Vertice, III, 1.1.

Note redazionali

Queste note sono aggiunte alla traduzione e non appartengono al testo di Godbillon. I richiami in apice rimandano alle precisazioni seguenti. Le correzioni esplicite sono distinte dagli enunciati riprodotti fedelmente ma bisognosi di un'ipotesi o di una rettifica.

II.1 — p. 32, esercizio 1.2. I casi scritti nell'originale non comprendono i punti non nulli sugli assi. La formula radiale si completa ponendo $h(x,0) = (x,0)$ e $h(0,y) = (0,y)$. Per $(x,y) \neq (0,0)$ si può scrivere uniformemente

$$h(x,y) = \frac{\max(\|x\|, \|y\|)}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}}(x,y).$$

II.2 — p. 35, esempio 1.10. Il rinvio «proposizione 1.8», mantenuto nel testo, va letto «proposizione 1.7».

II.3 — p. 36, §2.1 i). L'inclusione per blocchi $A \mapsto \mathrm{diag}(A, I)$ non identifica l'algebra delle matrici con una sottoalgebra: non conserva l'addizione. Essa è invece adatta all'inclusione dei gruppi di matrici invertibili. Per un'inclusione di algebre si usa $A \mapsto \mathrm{diag}(A, 0)$.

II.4 — p. 36, §2.1 v). Le affermazioni dell'originale sono riprodotte, ma la formula e l'indicazione di isomorfismi di gruppi vanno rettificate. Infatti

$$\det\left(\frac{\alpha}{\det\alpha}\right) = (\det\alpha)^{1-m},$$

che non è in generale uguale a 1. Ponendo $D(z) = \mathrm{diag}(z, 1, \ldots, 1)$ si ottiene l'omeomorfismo di *spazi*

$$U(m) \longrightarrow SU(m) \times S^1, \qquad \alpha \longmapsto \big(D(\det\alpha)^{-1}\alpha, \det\alpha\big),$$

con inversa $(B,z) \mapsto D(z)B$. Analogamente si ottiene un omeomorfismo $O(m) \simeq SO(m) \times \{\pm 1\}$. Queste identificazioni non sono, in generale, isomorfismi con i gruppi prodotto diretto; sono sufficienti per le successive conclusioni sulla connessione.

II.5 — p. 36, §2.2. Nell'identità per la traccia è stato corretto n in m: per una matrice unitaria di ordine m, $\mathrm{Tr}(\alpha\alpha^*) = m$.

II.6 — p. 40, §3.7. La scrittura delle funzioni di transizione sottintende l'indice della coordinata omessa in ciascuna carta. Precisamente il dominio di $h_j \circ h_k^{-1}$ è $h_k(U_j \cap U_k)$ e il suo codominio è $h_j(U_j \cap U_k)$; la condizione di non annullamento riguarda la coordinata omogenea x_j, espressa nella carta k.

II.7 — p. 43, §5.1. Il rinvio all'esempio 1.10, riprodotto dall'originale, va letto «esempio 1.9».

III.1 — p. 48, esercizio iii). Nel riferimento alla decomposizione cellulare del sottocomplesso è stato corretto K in L.

III.2 — p. 51, corollario 2.3. La dicotomia «vuoto oppure tutta la cella» vale per la cella aperta e, non per la sua aderenza $\bar{e}$: un sottocomplesso può incontrarne soltanto il bordo. La conclusione di chiusura resta valida. Per la finitezza locale, ogni punto ha un intorno contenuto in un sottocomplesso finito P; l'intersezione $L \cap P$ è un sottocomplesso finito e dunque chiuso. La chiusura di L segue localmente. La frase dell'originale è mantenuta con richiamo a questa nota.

III.3 — p. 53, dimostrazione del lemma 3.3. I nomi degli estremi sono uniformati a s, s'; il testo francese passa a x, y.

III.4 — p. 54, corollario 3.11. L'esistenza di un vertice di indice 1 richiede che l'albero abbia almeno uno spigolo. Un albero costituito da un solo vertice è l'eccezione da escludere. Nella dimostrazione di IV, 3.5, questo caso iniziale è immediato, essendo un punto già contraibile.

IV.1 — p. 58, esercizio 1.8 ii), f). L'enunciato su due applicazioni da uno spazio contraibile X a Z richiede che le loro immagini appartengano alla stessa componente connessa per archi di Z; in particolare basta supporre Z connesso per archi. Senza questa precisazione, un punto che si applica in due punti distinti di uno spazio discreto fornisce un controesempio. Si intende inoltre non vuoto uno spazio contraibile.

IV.2 — p. 62, dimostrazione di 3.3. Lo spazio ambiente dell'insieme $\widehat{F_i}$ è scritto D^{p+1}, correggendo D^{m+1} dell'originale, per coerenza con la dimensione della cella considerata.

V.1 — p. 73, dimostrazione di 1.4. Nella conclusione è stato corretto $c_1(c_2c_2)$ in $c_1(c_2c_3)$.

V.2 — p. 77, dimostrazione del lemma 3.5. Il codominio di G è Y, non X come stampato nell'originale.

V.3 — p. 79, inizio del §4. È corretto l'ordine di composizione: il laccio associato a $\hat{c} : S^1 \to X$ è $c = \hat{c} \circ p$, non $p \circ \hat{c}$.

V.4 — pp. 81–82. Nell'enunciato 5.1 e nel codominio della mappa sul bordo del quadrato è stato sostituito X con il gruppo topologico G considerato nel paragrafo.

Precisazioni ai capitoli VI–XV e all'appendice

VI.1 — pp. 88 e 90. Nelle formule integrali per il grado e l'indice manca nell'originale il fattore $1/(2\pi)$. È stato reinserito. Il parametro percorre una volta il cerchio; si usa l'intervallo $[0,1]$ con $z = e^{2\pi it}$.

VI.2 — p. 99, corollario 5.10. La sola unione crescente di gruppi liberi non basta a dimostrare che il limite sia libero. Nel caso dei grafi si completa l'argomento

scegliendo un albero massimale e i generatori corrispondenti agli spigoli esterni a esso, con basi compatibili per i sottografi considerati.

VI.3 — p. 102, matrice $s(z)$. La matrice riprodotta ha determinante $b = (1+z_m)/(1+\bar{z}_m)$, non necessariamente 1. È unitaria, ma non necessariamente speciale unitaria. Per $m \geq 2$, moltiplicandola a destra per $\mathrm{diag}(b^{-1}, 1, \ldots, 1)$ si ottiene una sezione in $SU(m)$ senza modificare l'ultima colonna. Il caso $SU(1) = \{1\}$ è immediato.

VI.4 — p. 102. L'identificazione $U(m) \simeq S^1 \times SU(m)$ usata nel testo è un omeomorfismo di spazi; non è in generale un isomorfismo di gruppi prodotto diretto. Si veda la nota II.4.

VII.1 — p. 105. Le proprietà globali di un omeomorfismo locale che riguardano tutta la base richiedono la suriettività, oppure vanno riferite all'immagine. Nella definizione di rivestimento la proiezione è suriettiva.

VII.2 — p. 110. Per l'esponenziale complesso $z \mapsto e^z$, il quoziente corretto è $\mathbb{C}/(2\pi i\mathbb{Z})$, non $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Il secondo quoziente corrisponde invece a $z \mapsto e^{2\pi i z}$.

VII.3 — p. 112. Per un morfismo generale (H,h) fra rivestimenti su basi diverse, il fatto che H sia un omeomorfismo non basta a rendere il morfismo un isomorfismo. Occorre anche che h sia un omeomorfismo. Un controesempio è $H = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ dal rivestimento identico di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R} \to S^1$, con $h(t) = e^{2\pi i t}$. Su una stessa base, con h identità, l'affermazione è corretta.

VIII.1 — p. 119. L'argomento dell'originale usa sottosuccessioni convergenti in un compatto. Senza ipotesi di metrizabilità lo si sostituisce con un ricoprimento finito del compatto $C \times C$ mediante prodotti di intorni: se le proiezioni dei punti sono diverse si scelgono immagini disgiunte; se sono uguali si scelgono due fogli sopra uno stesso aperto connesso distinto. Ogni prodotto incontra il grafico di al più un automorfismo, per l'unicità dei sollevamenti sullo spazio totale connesso.

VIII.2 — p. 126. Gli automorfismi equivarianti del G-insieme sinistro G/H si descrivono mediante moltiplicazioni a destra per elementi del normalizzatore. La composizione introduce il gruppo opposto, identificabile con $N_G(H)/H$ tramite l'inversione.

VIII.3 — p. 127, esercizio. La base del rivestimento intermedio è stata indicata con D: nell'originale compare E, caso in cui la conclusione sarebbe già conseguenza dell'ipotesi galoisiana e la finitezza non svolgerebbe il ruolo previsto.

IX.1 — p. 131, corollario 2.3. La condizione sul sollevamento va richiesta per un punto iniziale fissato della fibra, e deve forzare la banalità del laccio quando il sollevamento con quell'origine è chiuso. Richiedere soltanto che tutti i sollevamenti siano simultaneamente chiusi caratterizza invece la banalità dell'azione di monodromia del singolo elemento; non basta a caratterizzare un rivestimento semplicemente connesso.

IX.2 — p. 140. I morfismi da $q_0 : \mathbb{R} \to S^1$ a $q_n : S^1 \to S^1$ sono $t \mapsto e^{2\pi i(t+k)/n}$, $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La formula dell'originale è stata rettificata.

IX.3 — p. 141, esercizio 6.5 iv)–vi). La parità di m non è da sola il criterio di normalità. Per $H_{m,n} = \langle a^m b^n \rangle$, con $m \neq 0$, occorrono m pari e $n = 0$; per $m = 0$ ogni $\langle b^n \rangle$ è normale. Per $K_{m,n,p} = \langle a^m b^n, b^p \rangle$, occorrono $p \mid 2n$ e $p \mid ((-1)^m - 1)$. Sono questi i criteri per il carattere galoisiano dei rivestimenti. Nel punto vi) il sottogruppo banale $H_{0,0}$ dà $\mathbb{R}^2$, non un cilindro.

IX.4 — p. 141, esercizio 6.5 vii). Il numero dei fogli è $|m|p$: ogni classe ammette un rappresentante con esponente di a modulo $|m|$ e di b modulo p. Il denominatore (n, p) stampato nell'originale è stato eliminato.

X.1 — pp. 145–146. «Codimensione almeno 2» segue la disuguaglianza esplicita dell'originale. Il francese usa in alcuni punti «supérieure à 2» mentre il risultato e la prova includono il caso 2; lo stesso criterio è applicato al caso di codimensione almeno 3.

X.2 — p. 147. Per il criterio di suriettività del lemma 2.4 non basta in generale il quoziente K/H suggerito nella prova. Se H è un sottogruppo proprio di K, sul K-insieme $K \sqcup K$ la permutazione che scambia le due copie soltanto sugli elementi di H è H-equivariante ma non K-equivariante. Il lemma 2.6 si intende come prolungabilità di ogni isomorfismo dato, non come sola esistenza di un isomorfismo fra gli spazi.

XIII.1 — p. 185. L'isolamento dei singoli punti critici non degeneri non implica, da solo, che siano in numero finito in un compatto: possono accumularsi su punti critici degeneri. La conclusione è corretta se tutti i punti critici sono non degeneri, come per le funzioni di Morse considerate subito dopo.

XIII.2 — p. 192. La funzione $-f + \sup f$ si annulla nel massimo di f. Per rispettare letteralmente la definizione di funzione di Morse positiva su una varietà senza bordo si aggiunge una costante strettamente positiva. I punti critici e gli indici non cambiano.

XIII.3 — p. 196, teorema 4.6. L'enunciato generale senza ipotesi di finitezza non è corretto per il prodotto tensoriale algebrico della coomologia ordinaria. I casi dimostrati nel testo, con almeno un fattore compatto, sono validi. Per esempio, per due insiemi discreti numerabili, H^0 del prodotto contiene tutte le matrici reali, mentre l'immagine del prodotto tensoriale contiene solo le somme finite di matrici separabili. La versione a supporto compatto dell'esercizio 5.7 non ha questo problema.

XIV.1 — p. 208. L'originale afferma che ogni endomorfismo dello spazio reale $H^1(T^m)$ proviene da una matrice intera. Occorre precisare che l'endomorfismo conserva il reticolo delle classi a periodi interi. Per esempio, la moltiplicazione per $1/2$ su $H^1(S^1)$ non è indotta da un'applicazione del cerchio.

XIV.2 — p. 216, prova di 6.1. Il ricoprimento in una sola catena localmente finita richiesto dall'argomento non è disponibile in questa forma per ogni varietà non compatta (già una varietà con due estremità impone cautela). L'enunciato resta valido; una dimostrazione completa usa un esaurimento e trasferisce i supporti lungo famiglie localmente finite di cammini verso l'infinito. Si conserva qui la struttura della dimostrazione dell'autore, segnalando il punto che richiede integrazione.

XV.1 — p. 234. La frase sulla congettura di Poincaré riflette lo stato delle conoscenze alla data del testo, 1970. Oggi il risultato è un teorema: la dimostrazione di Grigorij Perelman è stata annunciata nei lavori del 2002–2003. Fonte: Clay Mathematics Institute, *Poincaré Conjecture*. La frase storica è mantenuta distinguendola dall'aggiornamento.

XV.2 — p. 235. Con la convenzione del lemma 5.1, $\lambda_m = (-1)^m \nu \otimes 1$. Nell'originale manca il fattore $(-1)^m$. Il segno corretto è necessario anche per ottenere la caratteristica di Eulero mediante la somma alternata del paragrafo successivo.

XV.3 — p. 237. Il tempo 1 del flusso di un campo non singolare può avere punti fissi, per la presenza di orbite periodiche. Si deve scegliere un tempo positivo sufficientemente piccolo; la compattezza e l'assenza di zeri garantiscono una scelta uniforme. È questa la correzione introdotta nella prova di 5.12.

A.1 — p. 239. Nella dimostrazione di 1.1 non si può supporre $ae_n \in H$. Si sceglie invece $h \in H$ con ultima coordinata a; è $\mathbb{Z}h$ il fattore diretto da usare. La prova è stata rettificata in questo punto.

A.2 — p. 243. Per una presentazione finita basta che il nucleo sia generato *normalmente* da un numero finito di relazioni. Non è necessario che sia finitamente generato come gruppo libero, condizione più forte menzionata nel testo originale.

Sono inoltre uniformati refusi evidenti negli indici, nelle variabili, nei domini e codomini, e alcuni rinvii interni. L'indice analitico è tradotto e riordinato; i rimandi manifestamente errati sono corretti. Le note non costituiscono una revisione critica esaustiva del volume.