North-Holland Mathematical Library
Volume 7

Lars Hörmander
Professore all'Università di Lund

Introduzione all'analisi complessa in più variabili

Terza edizione riveduta

Traduzione italiana per uso personale

North-Holland, 1990
Amsterdam · New York · Oxford · Tokyo

Collana ed edizione originale

North-Holland Mathematical Library, volume 7.

Comitato editoriale consultivo. M. Artin, H. Bass, J. Eells, W. Feit, P. J. Freyd, F. W. Gehring, H. Halberstam, L. Hörmander, J. H. B. Kemperman, H. A. Lauwerier, W. A. J. Luxemburg, L. Nachbin, F. P. Peterson, I. M. Singer e A. C. Zaanen.

Editore. Elsevier Science Publishers B.V., Sara Burgerhartstraat 25, P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, Paesi Bassi. Distribuzione per Stati Uniti e Canada: Elsevier Science Publishing Company, Inc., 655 Avenue of the Americas, New York, N.Y. 10010, U.S.A.

Dati di catalogazione della Library of Congress. Hörmander, Lars. *An introduction to complex analysis in several variables* / Lars Hörmander. Terza edizione. p. cm. (North-Holland Mathematical Library, vol. 7). Contiene riferimenti bibliografici. ISBN 0-444-88446-7. 1. Funzioni di più variabili complesse. 2. Equazioni differenziali alle derivate parziali. 3. Funzioni analitiche. I. Titolo. II. Collana. QA331.7.H67 1989. 515'.94–dc20. 89-23204 CIP.

Edizioni. Prima edizione, 1966. Seconda edizione riveduta, 1973. Terza edizione riveduta, 1990. ISBN 0 444 88446 7.

Avvertenze dell'editore dell'originale. © Elsevier Science Publishers B.V., 1990. Tutti i diritti riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, archiviata in un sistema di recupero delle informazioni o trasmessa in alcuna forma o con alcun mezzo, elettronico, meccanico, mediante fotocopia, registrazione o altro, senza la previa autorizzazione scritta dell'editore, Elsevier Science Publishers B.V., P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, Paesi Bassi.

Disposizioni particolari per i lettori negli Stati Uniti. Questa pubblicazione è registrata presso il Copyright Clearance Center Inc. (CCC), Salem, Massachusetts. Presso il CCC si possono ottenere informazioni sulle condizioni alle quali è consentito fotocopiare parti di questa pubblicazione negli Stati Uniti. Per ogni altra questione relativa al diritto d'autore, compresa la fotocopiatura al di fuori degli Stati Uniti, occorre rivolgersi all'editore.

L'editore declina ogni responsabilità per lesioni o danni a persone o cose derivanti da responsabilità per danno da prodotti, negligenza o altra causa, oppure dall'impiego o dall'applicazione di metodi, prodotti, istruzioni o idee contenuti nel presente volume.

Stampato nei Paesi Bassi.

Prefazione

Due recenti sviluppi nella teoria delle equazioni alle derivate parziali hanno dato origine a questo libro. Il primo è la teoria dei sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali a coefficienti costanti, che si fonda in larga misura sulla teoria delle funzioni di più variabili complesse. Il secondo è la soluzione del cosiddetto problema di Neumann per $\bar{\partial}$, che ha aperto una nuova via all'analisi complessa attraverso i metodi delle equazioni alle derivate parziali. Quando si risolvono i problemi di Cousin con questi metodi, si ottengono automaticamente per la soluzione certe stime difficili da ricavare con i metodi classici. Risultati di questo tipo sono importanti nelle applicazioni ai sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali. È parso quindi naturale dare un'esposizione autonoma dell'analisi complessa dal punto di vista delle equazioni alle derivate parziali. Abbiamo concentrato l'attenzione sugli argomenti che si prestano a questa trattazione, lasciando da parte gli spazi analitici. Abbiamo invece incluso alcuni teoremi sulle algebre di Banach, come ulteriore esempio delle applicazioni all'analisi della teoria delle funzioni di più variabili complesse.

Questo libro si discosta solo di poco dalle dispense di un corso tenuto dall'autore all'Università di Stanford nei trimestri primaverile ed estivo del 1964. Lo scopo è offrire a lettori interessati soprattutto all'analisi un'introduzione agevole all'analisi complessa, senza pretesa di completezza in alcuna direzione. Si presuppongono perciò soltanto alcune conoscenze di teoria delle funzioni di variabile reale, più precisamente i primi elementi di teoria dell'integrazione, teoria delle distribuzioni, analisi funzionale e calcolo delle forme differenziali. Si fa pochissimo uso di algebra.

Nel capitolo I si richiama brevemente la teoria elementare delle funzioni di una variabile complessa. La ragione principale è che i problemi centrali, presentati in un caso familiare, possano servire da guida nel caso generale. Il capitolo I comprende anche alcuni fatti classici, come la formula integrale di Cauchy per le soluzioni delle equazioni di Cauchy–Riemann non omogenee, che purtroppo mancano in molti testi elementari. Nell'ultimo paragrafo si sviluppano i risultati sulle funzioni subarmoniche di cui avremo bisogno. Poiché la maggior parte dei lettori vorrà passare rapidamente al capitolo II, segnaliamo che proprio nell'ultimo paragrafo del capitolo I è stato inserito il passaggio essenziale del teorema di Hartogs sull'analiticità separata.

Il capitolo II si apre con i risultati classici sugli sviluppi in serie di potenze, sui domini di olomorfia e sui domini pseudoconvessi. Seguendo un lavoro classico di Oka, riformulato nello spirito delle equazioni differenziali, si dimostrano quindi alcuni teoremi di esistenza per le equazioni di Cauchy–Riemann nei domini di Runge. Si illustrano così i metodi di Oka e Cartan in un caso molto semplice, sufficiente per le principali applicazioni alla teoria delle algebre di Banach. A queste è dedicato il capitolo III, il cui primo paragrafo richiama le proprietà fondamentali di tali algebre. Si possono saltare sia il capitolo III sia il paragrafo 2.7 senza perdere il filo dell'esposizione.

Nel capitolo IV si risolvono le equazioni di Cauchy–Riemann nei domini di olomorfia mediante una variante del problema di Neumann per $\bar{\partial}$. Si ottiene al tempo stesso una soluzione del problema di Levi, dimostrando che i domini pseudoconvessi coincidono con i domini di olomorfia. Nel capitolo V questi risultati vengono estesi alle varietà di Stein. Si dimostra che tali varietà ammettono un'immersione olomorfa che le identifica con sottovarietà di spazi vettoriali complessi di dimensione sufficientemente grande. Il capitolo V si chiude dimostrando che si può definire una struttura complessa su una varietà assegnando un sistema di equazioni di Cauchy–Riemann che soddisfi un'opportuna condizione di integrabilità.

Il capitolo VII è dedicato alla teoria dei fasci analitici coerenti sulle varietà di Stein. Le dimostrazioni si basano sui teoremi di esistenza per le equazioni di Cauchy–Riemann stabiliti nel capitolo V e sulla teoria locale esposta nel capitolo VI. Un paragrafo finale è dedicato alla «coomologia con stime» per fasci su $\mathbb{C}^n$ con generatori polinomiali. Vi si utilizzano i teoremi di esistenza per le equazioni di Cauchy–Riemann dimostrati nel capitolo IV. Il libro si conclude con applicazioni ai sistemi sovradeterminati di equazioni differenziali.

Sono molto grato ai colleghi e agli studenti dell'Università di Stanford che mi hanno aiutato a migliorare le dispense originali, e alla National Science Foundation per aver sostenuto il lavoro svolto a Stanford nell'estate del 1964 con il finanziamento GP 2426.

Princeton, New Jersey, gennaio 1966 Lars Hörmander

Prefazione alla seconda edizione

La modifica principale in questa edizione riguarda il paragrafo 4.4, la cui trattazione è stata migliorata. Sono stati inoltre aggiunti diversi riferimenti bibliografici, in particolare a lavori che seguono l'indirizzo di quel paragrafo, e sono stati corretti alcuni refusi.

Lund, febbraio 1973 Lars Hörmander

Prefazione alla terza edizione

Dalla pubblicazione della prima edizione di questo libro sono apparse numerose monografie su diversi aspetti dell'analisi complessa in più variabili. Nessuna, tuttavia, assume come strumento principale le tecniche analitiche fondate sulla soluzione del problema di Neumann per $\bar{\partial}$. Le aggiunte a questa edizione sono state perciò scelte per dare maggior risalto ai risultati per i quali questi metodi rivestono particolare importanza. Abbiamo così aggiunto un paragrafo 7.7, che espone per intero il «principio fondamentale» di Ehrenpreis. Si sono rese necessarie, di conseguenza, varie modifiche al precedente paragrafo 7.6 sulla «coomologia con stime». Gli argomenti locali del paragrafo 7.7 sono strettamente legati alla dimostrazione della coerenza del fascio dei germi di funzioni che si annullano su un insieme analitico. Per questa ragione abbiamo incluso tale dimostrazione in un nuovo paragrafo 6.5, colmando una lacuna evidente delle precedenti edizioni. Infine, abbiamo aggiunto una trattazione del teorema di Siu sui numeri di Lelong delle funzioni plurisubarmoniche. Le tecniche L^2 sono infatti essenziali nella dimostrazione e le funzioni plurisubarmoniche svolgono in questo libro un ruolo tanto importante che è parso naturale esaminarne le principali singolarità.

Desidero infine ringraziare Jan-Erik Björk, Sönke Hansen, Christer Kiselman e Ragnar Sigurdsson per le preziose osservazioni sulle aggiunte a questa edizione.

Lund, novembre 1988 Lars Hörmander

Indice generale

Le due colonne numeriche indicano, rispettivamente, la pagina originale e la pagina di questa traduzione.

Prefazione ..... v iii
Elenco dei simboli ..... xi vii

Capitolo I — Funzioni analitiche di una variabile complessa
Sommario 1 1
1.1. Preliminari 1 1
1.2. La formula integrale di Cauchy e le sue applicazioni 2 2
1.3. Il teorema di approssimazione di Runge 6 5
1.4. Il teorema di Mittag-Leffler 9 7
1.5. Il teorema di Weierstrass 14 10
1.6. Funzioni subarmoniche 16 11
Note 21 16

Capitolo II — Proprietà elementari delle funzioni di più variabili complesse
Sommario 22 17
2.1. Preliminari 22 17
2.2. Applicazioni della formula integrale di Cauchy nei polidischi 25 19
2.3. Le equazioni di Cauchy–Riemann non omogenee in un polidisco 30 22
2.4. Serie di potenze e domini di Reinhardt 34 25
2.5. Domini di olomorfia 36 27
2.6. Pseudoconvessità e plurisubarmonicità 44 32
2.7. Domini di Runge 52 39
Note 59 44

Capitolo III — Applicazioni alle algebre di Banach commutative
Sommario 61 46
3.1. Preliminari 61 46
3.2. Funzioni analitiche di elementi di un'algebra di Banach 68 51
Note 75 56

Capitolo IV — Stime L^2 e teoremi di esistenza per l'operatore $\bar{\partial}$
Sommario 77 57
4.1. Preliminari 77 57
4.2. Teoremi di esistenza nei domini pseudoconvessi 82 61
4.3. Teoremi di approssimazione 89 66
4.4. Teoremi di esistenza negli spazi L^2 ..... 92 68
4.5. Funzionali analitici 107 79
Note 112 83

Capitolo V — Varietà di Stein
Sommario 114 84
5.1. Definizioni 114 84
5.2. Stime L^2 e teoremi di esistenza per l'operatore $\bar{\partial}$ 118 87
5.3. Immersione delle varietà di Stein 129 96
5.4. Inviluppi di olomorfia 137 102
5.5. I problemi di Cousin su una varietà di Stein 143 106
5.6. Teoremi di esistenza e di approssimazione per sezioni di un fibrato vettoriale analitico 146 108
5.7. Varietà quasi complesse 149 111
Note 153 114

Capitolo VI — Proprietà locali delle funzioni analitiche
Sommario 155 115
6.1. Il teorema di preparazione di Weierstrass 155 115
6.2. Fattorizzazione nell'anello A_0 dei germi di funzioni analitiche 158 117

6.3. A_0-moduli finitamente generati 161 119
6.4. Il teorema di Oka 165 122
6.5. Insiemi analitici 167 124
Note 176 131

Capitolo VII — Fasci analitici coerenti sulle varietà di Stein
Sommario 177 132
7.1. Definizione di fascio 178 132
7.2. Esistenza di sezioni globali di un fascio analitico coerente 183 136
7.3. Gruppi di coomologia a valori in un fascio 192 143
7.4. Gruppi di coomologia di una varietà di Stein a coefficienti in un fascio analitico coerente 198 147
7.5. Il teorema di de Rham 205 152
7.6. Coomologia con stime ed equazioni differenziali a coefficienti costanti 206 153
7.7. Quozienti di A^K per sottomoduli e principio fondamentale di Ehrenpreis 227 170
Note 248 185

Bibliografia 249 186
Indice analitico 253 190

Elenco dei simboli

I rinvii di questo elenco riportano le pagine della terza edizione originale.

$\complement A$ Complementare di A in un insieme ambiente determinato dal contesto.

$\varnothing$ Insieme vuoto.

$A \setminus B$ Indica $A \cap \complement B$.

$A \pm B$ È l'insieme $\{a \pm b : a \in A,\ b \in B\}$ se A, B sono sottoinsiemi di un gruppo abeliano.

$A \Subset B$ Significa che A è relativamente compatto in B, cioè contenuto in un sottoinsieme compatto di B.

∂A Frontiera di A.

$\partial_0 A$ Frontiera distinta quando A è un polidisco.

$C^k(\Omega)$ Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ (o di una varietà C^∞), è lo spazio delle funzioni complesse di classe C^k in Ω, $0 \le k \le \infty$.

$C_0^k(A)$ Se A è un sottoinsieme di una varietà C^∞ Ω, è l'insieme delle funzioni di $C^k(\Omega)$ che si annullano fuori da un sottoinsieme compatto di A.

$\operatorname{supp} f$ Supporto di f, cioè chiusura del più piccolo insieme al di fuori del quale f si annulla (p. 3).

$\mathcal{D}$ Talvolta abbrevia $C_0^\infty(\Omega)$ (p. 78).

$A(\Omega)$ Spazio delle funzioni analitiche in Ω (pp. 1, 23).

$P(\Omega)$ Spazio delle funzioni plurisubarmoniche in Ω (p. 44).

$L^2(\Omega, \varphi)$ Spazio delle funzioni misurabili in Ω per cui $\|u\|_\varphi^2 = \int |u|^2 e^{-\varphi}\, dx < \infty$ (pp. 78, 120).

$\mathcal{D}'(\Omega)$ Spazio delle distribuzioni di Schwartz in Ω.

$\mathcal{E}'(\Omega)$ Sottospazio delle distribuzioni a supporto compatto.

W^s Spazio delle funzioni di L^2 in $\mathbb{R}^N$ le cui derivate di ordine $\le s$, nel senso delle distribuzioni, appartengono tutte a L^2 (p. 85).

$W^s(\Omega, \mathrm{loc})$ Se Ω è un aperto di una varietà C^∞, è l'insieme delle funzioni in Ω che, su ogni sottoinsieme compatto di una carta, coincidono con una funzione di W^s nello spazio delle coordinate (pp. 85, 126).

$L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ Coincide con $W^0(\Omega, \mathrm{loc})$.

$\mathcal{F}_{(p,q)}$ Per ciascuno degli spazi precedenti $\mathcal{F}$, denota l'insieme di tutte le forme di tipo (p, q) a coefficienti in $\mathcal{F}$ (p. 24).

$\partial/\partial z_j$, $\partial/\partial \bar{z}_j$ Si vedano le pp. 1 e 22.

∂^α È $(\partial/\partial z_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial z_n)^{\alpha_n}$ (p. 26), dove $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un multiordine con α_j interi non negativi. Si pone $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

$\wedge$ Prodotto esterno.

d Differenziazione esterna.

∂, $\bar{\partial}$ Componenti di d di tipo $(1,0)$ e $(0,1)$ (pp. 22, 24).

u^*f Per una forma f e un'applicazione u, è definito a p. 23.

I, J, K Denotano spesso un multiindice, ossia una successione $(i_1, \ldots, i_p)$ di interi fra 1 e n, dimensione dello spazio considerato. Scriviamo $|I| = p$. Il simbolo $\sum'_I$ indica che la somma è limitata ai multiindici con $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.

$\widehat{K}_\Omega$ È definito alle pp. 8, 37, 116.

$\widehat{K}^P_\Omega$ È definito a p. 46.

$\widehat{K}$ È definito a p. 53.

$\gamma_z f$ Germe di f in z (p. 159).

A_z Insieme dei germi in z delle funzioni analitiche.

D_T Dominio dell'operatore T.

R_T Immagine dell'operatore T.

$d\lambda$ Misura di Lebesgue.

$\widehat{f}$ Trasformata di Gelfand (o trasformata di Fourier) di f.

$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ Gruppo di coomologia del ricoprimento $\mathcal{U}$ a valori nel fascio $\mathcal{F}$ (p. 193).

$H^p(X, \mathcal{F})$ Gruppo di coomologia dello spazio paracompatto X a valori nel fascio $\mathcal{F}$ (p. 194).

$R[z]$ Insieme dei polinomi in una variabile z a coefficienti nell'anello R.

Capitolo I
Funzioni analitiche di una variabile complessa

Sommario. Nei primi due paragrafi richiamiamo le proprietà più semplici delle funzioni analitiche che discendono dalla formula integrale di Cauchy. Seguono i teoremi di approssimazione (il teorema di Runge) e i teoremi di esistenza per le funzioni meromorfe (i teoremi di Mittag-Leffler e di Weierstrass). Essi costituiscono il caso unidimensionale dei problemi di Cousin, attorno ai quali si è sviluppata la teoria delle funzioni analitiche di più variabili. Dimostriamo infine alcuni teoremi fondamentali sulle funzioni subarmoniche.

1.1. Preliminari

Sia $u \in C^1(\Omega)$[1] una funzione a valori complessi, dove Ω è un aperto del piano complesso $\mathbb{C}$, che identifichiamo con $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con x, y le coordinate reali e poniamo $z = x+iy$. Poiché $2x = z + \bar{z}$ e $2iy = z - \bar{z}$, il differenziale di u si può esprimere come combinazione lineare di dz e $d\bar{z}$,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}. \tag{1.1.1}$$

Abbiamo qui introdotto le notazioni

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1.1.2}$$

Definizione 1.1.1. Una funzione $u \in C^1(\Omega)$ si dice *analitica* (oppure *olomorfa*) in Ω se $\partial u/\partial \bar{z} = 0$ in Ω (equazione di Cauchy–Riemann) o, equivalentemente, se du è proporzionale a dz. Per le funzioni analitiche si scrive anche u' in luogo di $\partial u/\partial z$. Si ha dunque $du = u'\,dz$ se u è analitica. L'insieme delle funzioni analitiche in Ω si indica con $A(\Omega)$.

Esempi. (1) Per ogni intero n si ha $d(z^n) = nz^{n-1}\,dz$ (per $z \neq 0$ se $n < 0$). Pertanto ogni polinomio $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ è una funzione analitica e $p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$. (2) Se definiamo $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, otteniamo $de^z = e^z\,dz$, dunque e^z è analitica.

Per la linearità dell'operatore $\partial/\partial\bar{z}$, ogni combinazione lineare a coefficienti complessi di funzioni analitiche è analitica. Dalla regola di derivazione del prodotto $d(uv) = u\,dv + v\,du$ si ricava la corrispondente regola per gli operatori $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial\bar{z}$. Il prodotto di funzioni analitiche è dunque analitico.

Sia u analitica in Ω e sia v analitica in un aperto contenente l'immagine di u. Allora $z \mapsto v(u(z))$ è analitica in Ω. Infatti la regola della catena dà

$$dv = \frac{dv}{du}\,du = v'(u)u'(z)\,dz,$$

da cui segue anche che $dv/dz = (dv/du)(du/dz)$.

Studiamo infine l'inversa di una funzione analitica. Osserviamo anzitutto che, essendo $du = u'\,dz$, l'applicazione $dz \mapsto du$ è una rotazione seguita da un'omotetia di rapporto $|u'|$. Il determinante jacobiano dell'applicazione $z \mapsto u(z)$, considerata come applicazione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, è pertanto uguale a $|u'|^2$. Se $u'(z_0) \neq 0$, dal teorema delle funzioni implicite segue dunque che u manda omeomorficamente un intorno di z_0 su un intorno di $u_0 = u(z_0)$ e che l'inversa $w \mapsto z(w)$ è anch'essa di classe C^1 in un intorno di u_0. Poiché $u(z(w)) = w$, la regola della catena dà $u'(z(w))\,dz = dw$. Dunque z è una funzione analitica di w e

$$\frac{dz(w)}{dw} = \frac{1}{u'(z(w))}.$$

[1] Per le notazioni usate nel libro che non siano spiegate altrove, si veda l'elenco dei simboli.

1.2. La formula integrale di Cauchy e le sue applicazioni

Sia ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$ la cui frontiera $\partial\omega$ sia costituita da un numero finito di curve di Jordan di classe C^1. Se $u \in C^1(\overline{\omega})$, la formula di Stokes dà

$$\int_{\partial\omega} u\,dz = \iint_{\omega} du \wedge dz. \tag{1.2.1}$$

Osservando che $du \wedge dz = (\partial u/\partial\bar{z})\,d\bar{z} \wedge dz = 2i(\partial u/\partial\bar{z})\,dx \wedge dy$, si ottiene anche

$$\int_{\partial\omega} u\,dz = 2i \iint_{\omega} \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\,dx \wedge dy = \iint_{\omega} \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz. \tag{1.2.2}$$

(Naturalmente si può dimostrare questa formula anche integrando direttamente il secondo membro.) La frontiera è orientata in modo che, percorrendola, si abbia ω sulla sinistra. Ne segue subito che $\int_{\partial\omega} u\,dz = 0$ se $u \in C^1(\overline{\omega})$ è analitica in ω. Si ottiene inoltre la formula integrale di Cauchy.

Teorema 1.2.1. Se $u \in C^1(\overline{\omega})$, vale la formula

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{u(z)}{z-\zeta}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\iint_{\omega} \frac{\partial u/\partial\bar{z}}{z-\zeta}\,dz \wedge d\bar{z}, \qquad \zeta \in \omega. \tag{1.2.3}$$

Dimostrazione. Posto $\omega_1 = \{z \in \omega : |z-\zeta| > \varepsilon\}$, con $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\zeta, \mathbb{C}\setminus\omega)$, applichiamo la (1.2.2) a $u(z)/(z-\zeta)$. Poiché $1/(z-\zeta)$ è analitica in ω_1, risulta

$$\iint_{\omega_1} \frac{\partial u/\partial\bar{z}}{z-\zeta}\,d\bar{z} \wedge dz = \int_{\partial\omega} \frac{u(z)}{z-\zeta}\,dz - \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\,i\,d\theta.$$

La funzione $(z-\zeta)^{-1}$ è integrabile su ω e u è continua in ζ. Facendo tendere ε a zero si ottiene la (1.2.3).

In senso inverso dimostreremo il risultato seguente.

Teorema 1.2.2. Se μ è una misura a supporto compatto in $\mathbb{C}$, l'integrale

$$u(\zeta) = \int (z-\zeta)^{-1}\,d\mu(z)$$

definisce una funzione analitica fuori dal supporto di μ. In ogni aperto ω nel quale $d\mu = (2\pi i)^{-1}\varphi\,dz \wedge d\bar{z}$ per una $\varphi \in C^k(\omega)$, si ha $u \in C^k(\omega)$ e, se $k \geq 1$, $\partial u/\partial\bar{\zeta} = \varphi$.

Dimostrazione. Fuori dal supporto K di μ la continuità è immediata, poiché $(z,\zeta) \mapsto (z-\zeta)^{-1}$ è continua per $z \in K$ e $\zeta \notin K$. Poiché $\partial(z-\zeta)^{-1}/\partial\bar{\zeta} = 0$ per $z \neq \zeta$, derivando sotto il segno d'integrale si ottiene $\partial u/\partial\bar{\zeta} = 0$. Per la seconda affermazione supponiamo dapprima $\omega = \mathbb{R}^2$. Con un cambiamento di variabile scriviamo

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\iint \varphi(\zeta - z)z^{-1}\,dz \wedge d\bar{z}.$$

La funzione z^{-1} è integrabile su ogni compatto. Si può quindi derivare sotto il segno d'integrale fino a k volte e gli integrali così ottenuti sono continui. Si ha dunque $u \in C^k$ e, per $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}} &= -\frac{1}{2\pi i}\iint \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\varphi(\zeta - z)\,z^{-1}\,dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint (z-\zeta)^{-1}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}}\,dz \wedge d\bar{z}.\end{aligned}$$

Applichiamo il teorema 1.2.1 a φ su un disco che contenga al suo interno il supporto di φ. Otteniamo $\partial u/\partial\bar\zeta = \varphi$. Per un aperto ω arbitrario e ogni $z_0 \in \omega$, scegliamo $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ uguale a 1 in un intorno V di z_0. Posto $\mu_1 = \psi\mu$, $\mu_2 = (1-\psi)\mu$, si ha $u = u_1 + u_2$, dove

$$u_j(\zeta) = \int (z-\zeta)^{-1}\, d\mu_j(z), \qquad j = 1, 2.$$

Poiché $d\mu_1 = (2\pi i)^{-1}\psi\varphi\, dz \wedge d\bar z$ e $\psi\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^2)$, si ha $u_1 \in C^k$ e $\partial u_1/\partial\bar\zeta = \psi\varphi$ per $k \geq 1$. La misura μ_2 è nulla in V, sicché u_2 è analitica in V. Ne seguono $u \in C^k(V)$ e, per $k \geq 1$, $\partial u/\partial\bar\zeta = \varphi$ in V. La dimostrazione è conclusa.

Corollario 1.2.3. Ogni $u \in A(\Omega)$ appartiene a $C^\infty(\Omega)$. Se $u \in A(\Omega)$, anche u' appartiene ad $A(\Omega)$.

Dimostrazione. Basta applicare i teoremi 1.2.1 e 1.2.2 a dischi ω tali che $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Il teorema seguente dà un risultato più preciso.

Teorema 1.2.4. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ e ogni intorno aperto $\omega \subset \Omega$ di K, esistono costanti C_j, $j = 0, 1, \ldots$, tali che

$$\sup_{z\in K} |u^{(j)}(z)| \leq C_j \iint_\omega |u|\, dx\, dy, \qquad u \in A(\Omega), \tag{1.2.4}$$

dove $u^{(j)} = \partial^j u/\partial z^j$.

Dimostrazione. Scegliamo $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ uguale a 1 in un intorno di K. Per $u \in A(\Omega)$ vale $\partial(\psi u)/\partial\bar z = u\,\partial\psi/\partial\bar z$. Applicando il teorema 1.2.1 al prodotto ψu otteniamo

$$\psi(\zeta)u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\iint u(z)\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}(z)(z-\zeta)^{-1}\, dz \wedge d\bar z. \tag{1.2.5}$$

Poiché $\psi = 1$ in un intorno di K e $|z-\zeta|$ è limitato inferiormente da una costante positiva per $\zeta \in K$ e z nel supporto di $\partial\psi/\partial\bar z$, derivando la (1.2.5) si ricava immediatamente la (1.2.4).

Corollario 1.2.5. Se $u_n \in A(\Omega)$ e $u_n \to u$ per $n \to \infty$ uniformemente sui compatti di Ω, allora $u \in A(\Omega)$.

Dimostrazione. Applicando la (1.2.4) a $u_n - u_m$ si vede che $\partial u_n/\partial z$ converge uniformemente sui compatti. Poiché $\partial u_n/\partial\bar z = 0$, convergono uniformemente sui compatti anche $\partial u_n/\partial x$ e $\partial u_n/\partial y$. Ne segue che $u \in C^1$ e che $\partial u/\partial\bar z = \lim_n \partial u_n/\partial\bar z = 0$.

Corollario 1.2.6 (Stieltjes–Vitali). Siano $u_n \in A(\Omega)$. Se la successione $|u_n|$ è uniformemente limitata su ogni compatto di Ω, esiste una sottosuccessione u_{n_j} che converge uniformemente su ogni compatto di Ω a un limite $u \in A(\Omega)$.

Dimostrazione. Come nel corollario 1.2.5, dal teorema 1.2.4 ricaviamo limitazioni uniformi per le derivate prime delle u_n su ogni compatto. La successione è perciò equicontinua sui compatti. La conclusione segue dal teorema di Ascoli e dal corollario 1.2.5.

Corollario 1.2.7. La somma di una serie di potenze $u(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ è analitica all'interno del cerchio di convergenza.

Dimostrazione. La serie converge uniformemente in ogni disco concentrico di raggio minore.

Teorema 1.2.8. Se u è analitica in $\Omega = \{z : |z| < r\}$, vale lo sviluppo

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

con convergenza uniforme su ogni compatto di Ω.

Dimostrazione. Siano $r_1 < r_2 < r$. Dalla (1.2.3) segue che

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_2} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad |z| < r_1. \tag{1.2.6}$$

Per $|z| < r_1$ e $|\zeta| = r_2$ la serie $(\zeta - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \zeta^{-n-1}$ converge assolutamente e uniformemente. Basta quindi integrare termine a termine e osservare che, per la (1.2.6),

$$u^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_2} u(\zeta)\zeta^{-n-1}\, d\zeta.$$

Corollario 1.2.9 (Unicità del prolungamento analitico). Sia $u \in A(\Omega)$. Se esiste un punto $z \in \Omega$ nel quale

$$u^{(k)}(z) = 0 \qquad \text{per ogni } k \geq 0, \tag{1.2.7}$$

e se Ω è connesso, allora $u = 0$ in Ω.

Dimostrazione. L'insieme dei punti $z \in \Omega$ che verificano la (1.2.7) è evidentemente chiuso in Ω e, per il teorema 1.2.8, è anche aperto. Per ipotesi è non vuoto, dunque coincide con Ω.

Corollario 1.2.10. Se u è analitica nel disco $\Omega = \{z : |z| < r\}$ e non è identicamente nulla, si può scrivere in uno e un solo modo

$$u(z) = z^n v(z),$$

con n intero non negativo, $v \in A(\Omega)$ e $v(0) \neq 0$ (e quindi anche $1/v$ analitica in un intorno di 0).

Dimostrazione. L'asserto è immediato.

Teorema 1.2.11. Se u è analitica nel disco $\Omega = \{z : |z - z_0| < r\}$ e $|u(z)| \leq |u(z_0)|$ per $z \in \Omega$, allora u è costante in Ω.

Dimostrazione. Possiamo supporre $u(z_0) \neq 0$. Per $0 < \rho < r$ si ha

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{u(z_0 + \rho e^{i\theta})}{u(z_0)}\right) d\theta = 0.$$

La parte reale dell'integrando è non negativa e si annulla soltanto quando $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) = u(z_0)$. Ne segue il teorema.

Corollario 1.2.12 (Principio del massimo modulo). Sia Ω limitato e sia u continua in $\overline{\Omega}$ e analitica in Ω. Il massimo di $|u|$ su $\overline{\Omega}$ si raggiunge sulla frontiera.

Dimostrazione. Se il massimo si raggiunge in un punto interno, dal teorema 1.2.11 e dal corollario 1.2.9 segue che u è costante sulla componente di Ω che contiene quel punto. Pertanto $|u|$ assume lo stesso valore anche in qualche punto della frontiera.

1.3. Il teorema di approssimazione di Runge

Dal teorema 1.2.8 segue, in particolare, che una funzione analitica in un disco si può approssimare uniformemente con polinomi in z su ogni disco concentrico più piccolo. Ogni funzione intera si può dunque approssimare con polinomi, uniformemente su ogni compatto. Daremo ora un teorema generale di approssimazione.

Teorema 1.3.1 (Runge). Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e K un sottoinsieme compatto di Ω. Le seguenti condizioni su Ω e K sono equivalenti:

(a) Ogni funzione analitica in un intorno di K si può approssimare uniformemente su K con funzioni di $A(\Omega)$.

(b) $\Omega \setminus K$ non ha alcuna componente connessa relativamente compatta in Ω.

(c) Per ogni $z \in \Omega \setminus K$ esiste una funzione $f \in A(\Omega)$ tale che $|f(z)| > \sup_K |f|$.

Corollario 1.3.2. Se K è un compatto del piano tale che $\mathbb{C} \setminus K$ è connesso e se u è analitica in un intorno di K, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio f tale che

$$\sup_K |f - u| < \varepsilon. \tag{1.3.1}$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.1 e per l'osservazione che lo precede, si può trovare prima una funzione intera e quindi anche un polinomio f per cui valga la (1.3.1).

Dimostrazione del teorema 1.3.1. Sia O una componente connessa di $\Omega \setminus K$ relativamente compatta in Ω. Per il principio del massimo (corollario 1.2.12), poiché $\partial O \subset K$, si ha

$$\sup_O |f| \le \sup_K |f|, \qquad f \in A(\Omega). \tag{1.3.2}$$

Pertanto (c) non può valere. Questo dimostra che (c) implica (b).

Se vale (a), la (1.3.2) mostra che ogni funzione f analitica in un intorno di K si prolunga a una funzione F continua su $\overline{O}$ e analitica in O. Più precisamente, la restrizione di f a K determina univocamente tale prolungamento, che coincide con f su ∂O. Fissato $z_0 \in O$, consideriamo $g(z) = (z - z_0)^{-1}$. La funzione $(z - z_0)g(z)$ è identicamente uguale a 1 vicino a K, e il suo prolungamento è, per unicità, la costante 1. D'altra parte, indicando con G il prolungamento di g, si ottiene lo stesso prolungamento moltiplicando $G(z)$ per $z - z_0$. In z_0 otterremmo così $1 = (z_0 - z_0)G(z_0) = 0$. Questa contraddizione dimostra che (a) implica (b).

Dimostriamo che (b) implica (a). Sia μ una misura, eventualmente a segno variabile o complessa, con supporto in K, tale che

$$\int u \, d\mu = 0 \qquad \text{per ogni } u \in A(\Omega).$$

Supponendo che $\Omega \setminus K$ non abbia componenti relativamente compatte, proveremo che $\int f \, d\mu = 0$ per ogni f analitica in un intorno di K. La tesi seguirà allora dal teorema di Hahn–Banach. Poniamo

$$\varphi(\zeta) = \int (z - \zeta)^{-1} \, d\mu(z), \qquad \zeta \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Per il teorema 1.2.2, φ è analitica in $\mathbb{C} \setminus K$. Per $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ si ha, per ogni $k \ge 0$,

$$\varphi^{(k)}(\zeta) = \int k!(z - \zeta)^{-k-1} \, d\mu(z) = 0,$$

poiché la funzione dell'argomento z che compare nell'integrale, a meno del fattore costante, è analitica in Ω. Per il corollario 1.2.9, φ è dunque nulla nelle componenti di $\mathbb{C} \setminus K$ che incontrano $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Inoltre $\int z^n \, d\mu(z) = 0$ per ogni $n \geq 0$. Per $|\zeta| > \max_K |z|$ si può sviluppare $(z-\zeta)^{-1}$ in una serie di potenze in z uniformemente convergente su K. Ne segue che φ è nulla anche nella componente illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$. Per la (b) si sono così considerate tutte le componenti e dunque $\varphi = 0$ in $\mathbb{C} \setminus K$.

Sia ora f analitica in un intorno di K. Scegliamo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ uguale a 1 vicino a K, con supporto contenuto nell'aperto dove f è definita. Per la (1.2.5),

$$f(z) = \psi(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint f(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} (\zeta - z)^{-1} \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \qquad z \in K.$$

Poiché $\partial\psi/\partial\bar{\zeta} = 0$ in un intorno di K, possiamo invertire l'ordine delle integrazioni. Otteniamo

$$\int f(z) \, d\mu(z) = -\frac{1}{2\pi i} \iint f(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \varphi(\zeta) \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0.$$

La funzione f si può quindi approssimare su K con funzioni di $A(\Omega)$. L'equivalenza di (a) e (b) è dimostrata.

Infine, supponiamo verificata (b) e prendiamo $z \in \Omega \setminus K$. Scegliamo un disco chiuso L con centro in z e contenuto in $\Omega \setminus K$. Le componenti di $\Omega \setminus (K \cup L)$ si ottengono da quelle di $\Omega \setminus K$ togliendo L dalla componente che lo contiene. Perciò anche $K \cup L$ verifica la (b). Per la (a), la funzione uguale a 0 vicino a K e a 1 vicino a L si può approssimare uniformemente su $K \cup L$ con funzioni di $A(\Omega)$. In particolare, esiste $f \in A(\Omega)$ con $|f| < 1/2$ su K e $|f - 1| < 1/2$ su L. Ciò dimostra (c).

Per ogni compatto $K \subset \Omega$ definiamo l'*inviluppo di K rispetto ad $A(\Omega)$* ponendo

$$\widehat{K} = \widehat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f| \text{ per ogni } f \in A(\Omega)\}.$$

Scegliendo $f(z) = 1/(z-\zeta)$, con $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, otteniamo

$$d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = d(\widehat{K}, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

dove d indica la distanza. Considerando invece $f(z) = e^{\alpha z}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, vediamo che $\widehat{K}$ è contenuto nell'inviluppo convesso di K. È inoltre evidente che $\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}$. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ l'inviluppo $\widehat{K}$ è dunque un compatto di Ω che contiene K e soddisfa le ipotesi del teorema di approssimazione di Runge. Si può quindi scegliere una successione crescente di compatti K_j di Ω tali che $K_j = \widehat{K}_j$ e tali che ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j.

Possiamo anche dare una descrizione di $\widehat{K}$ analoga alla condizione (b) del teorema 1.3.1.

Teorema 1.3.3. *$\widehat{K}_\Omega$ è l'unione di K e di tutte le componenti di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω.*

Dimostrazione. Se O è una di queste componenti, la (1.3.2) dà $O \subset \widehat{K}$. L'unione K_1 di K e di tutte queste componenti è dunque contenuta in $\widehat{K}$. Poiché $\Omega \setminus K_1$ è unione di componenti aperte di $\Omega \setminus K$, è aperto. Ne segue che K_1 è compatto. Per la definizione di K_1, nessuna componente di $\Omega \setminus K_1$ è relativamente compatta in Ω. Pertanto K_1 soddisfa la condizione (b) del teorema 1.3.1 e dalla condizione (c) segue $K_1 = \widehat{K_1} \supset \widehat{K}$. Questo conclude la dimostrazione.

Diamo ora una variante del teorema di Runge relativa a due aperti.

Teorema 1.3.4. Siano $\Omega_1 \subset \Omega_2$ aperti di $\mathbb{C}$. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

(a) Ogni funzione di $A(\Omega_1)$ si può approssimare con funzioni di $A(\Omega_2)$ uniformemente su ogni compatto di Ω_1.

(b) Se $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = L \cup F$, dove F è chiuso in Ω_2, L è compatto e $F \cap L = \varnothing$, allora L è vuoto.

(c_1) Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ si ha $\widehat{K}_{\Omega_1} = \widehat{K}_{\Omega_2}$.

(c_2) Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ si ha $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}_{\Omega_1}$.

(c_3) Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$, l'insieme $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ è compatto.

Dimostrazione. Le implicazioni $(a) \Rightarrow (c_2) \Rightarrow (c_3)$ sono immediate. Poniamo $K' = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ e $K'' = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega_1)$. Per (c_3) i due insiemi disgiunti K' e K'' sono compatti. Se $f \in A(\Omega_1)$, per il teorema 1.3.1 la funzione uguale a f su K' e a 1 su K'' si può approssimare uniformemente su $K' \cup K''$ con funzioni di $A(\Omega_2)$. Questo dimostra (a). Scegliendo $f = 0$ otteniamo inoltre $K'' = \varnothing$, per cui $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Poiché $(a) \Rightarrow (c_2)$, vale anche (c_1). Le condizioni (a), (c_1), (c_2) e (c_3) sono perciò equivalenti.

Per provare che $(c_1) \Rightarrow (b)$, scegliamo un aperto ω che contenga L, sia relativamente compatto in Ω_2 e abbia chiusura disgiunta da F. Poiché $\partial\omega \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = \varnothing$ e $\partial\omega \subset \Omega_2$, risulta $\partial\omega \subset \Omega_1$. Per il principio del massimo l'inviluppo di $\partial\omega$ rispetto ad $A(\Omega_2)$ contiene ω e quindi L. Per (c_1) ne segue che $L \subset \Omega_1$, sicché $L = \varnothing$.

Per provare che $(b) \Rightarrow (c_1)$, consideriamo una componente O di $\Omega_2 \setminus K$ relativamente compatta in Ω_2. Poiché $\partial O \subset K \subset \Omega_1$, l'insieme

$$L = O \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = \overline{O} \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$$

è un sottoinsieme compatto di O. L'insieme $(\mathbb{C} \setminus O) \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$ è chiuso in Ω_2, perciò dalla (b) segue che $L = \varnothing$. Dunque $O \subset \Omega_1$ e, per il teorema 1.3.3, $\widehat{K}_{\Omega_2} \subset \widehat{K}_{\Omega_1}$. L'inclusione opposta è evidente. Risulta così dimostrata (c_1).

1.4. Il teorema di Mittag-Leffler

Daremo dapprima una definizione di funzione meromorfa alquanto laboriosa, ma che ha il vantaggio di applicarsi anche al caso di più variabili.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ indichiamo con A_z l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni f analitiche in qualche intorno di z, per la relazione $f \sim g$ se $f = g$ in un intorno di z. Se f è analitica vicino a z, scriviamo f_z per la sua classe in A_z. È chiaro che A_z è un anello senza divisori dello zero. Possiamo dunque formarne il campo dei quozienti M_z.

Definizione 1.4.1. Una funzione *meromorfa* nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un'applicazione

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \bigcup_z M_z$$

tale che $\varphi(z) \in M_z$ per ogni z e tale che ogni punto di Ω possieda un intorno ω sul quale esistano $f, g \in A(\omega)$ con $\varphi(z) = f_z/g_z$ per $z \in \omega$. Indichiamo con $M(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni meromorfe in Ω.

In particolare, se $F \in A(\Omega)$, l'applicazione $z \mapsto F_z$ è meromorfa. Poiché funzioni analitiche distinte definiscono funzioni meromorfe distinte, possiamo identificare $A(\Omega)$ con un sottoinsieme di $M(\Omega)$. Conviene scrivere φ_z in luogo di $\varphi(z)$ anche per una funzione

meromorfa arbitraria. Le funzioni meromorfe formano un anello nel quale ogni elemento che non sia identicamente nullo su alcuna componente di Ω ammette inverso.

A ogni $q \in M_\zeta$ possiamo assegnare un valore $q(\zeta)$ in ζ. Scegliamo f, g analitiche in un intorno di ζ tali che $q = f_\zeta/g_\zeta$, con $g_\zeta \neq 0$. Se $q = 0$, poniamo $q(\zeta) = 0$. Se $q \neq 0$, per il corollario 1.2.10 possiamo scrivere $f(z) = (z-\zeta)^n f_1(z)$ e $g(z) = (z-\zeta)^m g_1(z)$, dove f_1, g_1 sono analitiche vicino a ζ e $f_1(\zeta)g_1(\zeta) \neq 0$. La differenza $n - m$ e il rapporto $f_1(\zeta)/g_1(\zeta)$ dipendono soltanto da q, qualunque siano i rappresentanti scelti. Possiamo quindi porre

$$q(\zeta) = \begin{cases} \infty & n < m, \\ f_1(\zeta)/g_1(\zeta) & n = m, \\ 0 & n > m. \end{cases}$$

Se $\varphi \in M(\Omega)$ otteniamo un'applicazione $z \mapsto \varphi_z(z) = F(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La funzione F è analitica fuori da un sottoinsieme discreto D di Ω e $1/F$ è analitica in un intorno di D, con la convenzione $1/\infty = 0$. Viceversa, data F con queste proprietà, si definisce una funzione meromorfa φ ponendo

$$\varphi_z = F_z \quad (z \notin D), \qquad \varphi_z = 1/(1/F)_z \quad (z \in D).$$

Allora $\varphi_z(z) = F(z)$ per ogni z. La corrispondenza fra F e φ è biunivoca, dunque la definizione 1.4.1 equivale a quella classica. I punti in cui $F(z) = \infty$ sono i *poli* di F. Nel seguito identificheremo φ e F.

Teorema 1.4.2. Se F è meromorfa vicino a ζ, in un intorno di ζ si ha

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k (z-\zeta)^{-k} + G(z)$$

con A_k costanti e G analitica. La rappresentazione è unica. Se $F_\zeta \neq 0$, esiste anche un'unica rappresentazione $F(z) = (z-\zeta)^n G(z)$ con G analitica, $G(\zeta) \neq 0$ e n intero. Per $n > 0$ si ha uno zero di ordine n in ζ, per $n < 0$ un polo di ordine $-n$.

La dimostrazione segue immediatamente dal corollario 1.2.10. Studiamo ora la prima rappresentazione. Di quella moltiplicativa ci occuperemo nel § 1.5.

Teorema 1.4.3 (Mittag-Leffler). Sia $(z_j)_{j\geq 1}$ una successione discreta di punti distinti dell'aperto Ω e sia f_j meromorfa vicino a z_j. Esiste una funzione f meromorfa in Ω, analitica fuori dai punti z_j, tale che $f - f_j$ sia analitica vicino a z_j per ogni j.

Dimostrazione. Per il teorema 1.4.2 possiamo supporre che $f_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} A_{jk}(z-z_j)^{-k}$. Cerchiamo $u_j \in A(\Omega)$ in modo che la serie

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(z) - u_j(z))$$

definisca una funzione con le proprietà volute. Scegliamo una successione crescente di compatti $K_j \subset \Omega$, con $\widehat{K_j} = K_j$, tale che ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j. Poiché gli z_k non hanno punti di accumulazione in Ω, possiamo supporre $z_k \notin K_j$ per $k \geq j$. Per il teorema di Runge possiamo scegliere $u_j \in A(\Omega)$ con $|f_j - u_j| < 2^{-j}$ su K_j. La serie $\sum_{j=k}^{\infty}(f_j - u_j)$ converge allora uniformemente su K_k a una funzione analitica nell'interno di K_k. La definizione di f ha dunque senso e f ha le proprietà richieste.

Diamo un'altra formulazione del teorema di Mittag-Leffler, cui occorre ricorrere in più variabili.

Teorema 1.4.3′. Sia $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$, con Ω_j aperti di $\mathbb{C}$. Se $f_j \in M(\Omega_j)$ e $f_j - f_k \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$ per ogni j, k, esiste $f \in M(\Omega)$ tale che $f - f_j \in A(\Omega_j)$ per ogni j.

Lasciamo al lettore la verifica dell'equivalenza con il teorema 1.4.3. Un altro risultato equivalente è il seguente.

Teorema 1.4.4. Per ogni $f \in C^\infty(\Omega)$ l'equazione $\partial u/\partial \bar{z} = f$ ammette una soluzione $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Scegliamo una successione crescente di compatti $K_j \subset \Omega$, con $\widehat{K_j} = K_j$, tale che ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j. Sia $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ uguale a 1 vicino a K_j. Poniamo $\varphi_1 = \psi_1$ e $\varphi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$ per $j > 1$. Allora $\varphi_j = 0$ vicino a K_{j-1} e $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j = 1$ in Ω. Per il teorema 1.2.2 esiste $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con $\partial u_j/\partial \bar{z} = \varphi_j f$. In particolare u_j è analitica vicino a K_{j-1}. Per Runge si può dunque scegliere $v_j \in A(\Omega)$ con $|u_j - v_j| < 2^{-j}$ su K_{j-1}. La serie

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

converge uniformemente su ogni compatto di Ω. La coda da $l+1$ all'infinito consiste di termini analitici vicino a K_l e converge uniformemente su K_l a una funzione analitica nel suo interno. Dunque $u \in C^\infty(\Omega)$ e, calcolando la derivata termine a termine, otteniamo $\partial u/\partial \bar{z} = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j f = f$. Questo conclude la dimostrazione.

Mostriamo ora che il teorema 1.4.4 implica una forma più forte del teorema 1.4.3′.

Teorema 1.4.5. Sia $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ e siano $g_{jk} \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$, $j, k = 1, 2, \ldots$, tali che

$$g_{jk} = -g_{kj}, \qquad g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0 \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l. \tag{1.4.1}$$

Esistono allora $g_j \in A(\Omega_j)$ tali che, per ogni j, k,

$$g_{jk} = g_k - g_j \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k. \tag{1.4.2}$$

Il teorema 1.4.5 implica il teorema 1.4.3′. Con le notazioni di quest'ultimo poniamo $g_{jk} = f_j - f_k$. Vale la (1.4.1), quindi esistono $g_j \in A(\Omega_j)$ con $f_j - f_k = g_{jk} = g_k - g_j$ in $\Omega_j \cap \Omega_k$. Ciò significa che $f_j + g_j = f_k + g_k$ sulle intersezioni. Esiste pertanto una funzione meromorfa f in Ω che coincide con $f_j + g_j$ in ogni Ω_j. Poiché $f - f_j = g_j \in A(\Omega_j)$, il teorema 1.4.3′ è dimostrato.

Dimostrazione del teorema 1.4.5. Scegliamo una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{\Omega_j\}$. Ciò significa scegliere funzioni φ_ν e interi positivi i_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, tali che

(i) $\varphi_\nu \in C_0^\infty(\Omega_{i_\nu})$,

(ii) su ogni compatto di Ω tutte le φ_ν, salvo un numero finito, sono identicamente nulle,

(iii) $\sum_\nu \varphi_\nu = 1$ in Ω.

Si vedano, per esempio, Schwartz [1] o de Rham [1]. Se vale la (1.4.2), ponendo $j = i_\nu$, moltiplicando per φ_ν e sommando, si trova $g_k = h_k + u$, dove

$$h_k = \sum_\nu \varphi_\nu g_{i_\nu k}, \qquad u = \sum_\nu \varphi_\nu g_{i_\nu}.$$

La funzione h_k è definita a partire dai dati g_{jk} (si pone $\varphi_\nu g_{i_\nu k} = 0$ fuori da Ω_{i_ν}) e appartiene a $C^\infty(\Omega_k)$. Inoltre,

$$h_k - h_j = \sum_\nu \varphi_\nu (g_{i_\nu k} - g_{i_\nu j}) = \sum_\nu \varphi_\nu g_{jk} = g_{jk},$$

perché $g_{ki_\nu} + g_{i_\nu j} + g_{jk} = 0$. Pertanto $\partial h_k/\partial\bar z = \partial h_j/\partial\bar z$ in $\Omega_j \cap \Omega_k$. Esiste dunque $\psi \in C^\infty(\Omega)$ che in ogni Ω_k coincide con $\partial h_k/\partial\bar z$. Scegliamo ora u che risolva l'equazione $\partial u/\partial\bar z = -\psi$, come consente il teorema 1.4.4. Le funzioni $g_k = h_k + u$ hanno tutte le proprietà richieste.

Vediamo così che enunciati come i teoremi 1.4.4, 1.4.5 e 1.4.3′ sono essenzialmente equivalenti. In più variabili preferiremo lavorare con risultati analoghi al teorema 1.4.4. Rinviamo la dimostrazione di risultati come il teorema 1.4.5 all'ultimo capitolo, dove introdurremo il linguaggio adatto al loro studio, quello dei gruppi di coomologia a valori in un fascio.

1.5. Il teorema di Weierstrass

Diamo la formulazione classica, lasciando al lettore il compito di enunciarne una analoga al teorema 1.4.3′.

Teorema 1.5.1 (Weierstrass). Sia $(z_j)_{j\ge1}$ una successione discreta di punti distinti nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e siano n_j interi arbitrari. Esiste f meromorfa in Ω, analitica e diversa da zero fuori dai punti z_j, tale che $f(z)(z-z_j)^{-n_j}$ sia analitica e diversa da zero vicino a z_j per ogni j.

In altri termini, f ha zeri e poli prescritti, con gli ordini assegnati.

Dimostrazione. Sia (K_j) una successione crescente di compatti di Ω come nella dimostrazione del teorema 1.4.3. Sceglieremo successivamente funzioni razionali f_j che abbiano in K_j gli zeri e i poli voluti e funzioni $g_j \in A(\Omega)$ tali che

$$|f_{j+1} f_j^{-1} \exp g_j - 1| < \varepsilon_j \quad \text{su } K_j, \qquad \sum_j \varepsilon_j < \infty. \tag{1.5.1}$$

Supponiamo già scelte $f_1, \dots, f_j$ e $g_1, \dots, g_{j-1}$. Sia f una funzione razionale con gli zeri e i poli prescritti su K_{j+1}. Possiamo scrivere

$$f/f_j = c \prod_\nu (z - w_\nu)^{m_\nu},$$

dove il prodotto è finito, i w_ν appartengono a $\mathbb{C} \setminus K_j$ e gli m_ν sono interi. Poiché nessuna componente di $\Omega \setminus K_j$ è relativamente compatta in Ω, per ogni ν possiamo scegliere $w'_\nu \in \mathbb{C} \setminus K_{j+1}$ nella stessa componente di $\mathbb{C} \setminus K_j$ di w_ν. La funzione

$$f_{j+1} = f \prod_\nu (z - w'_\nu)^{-m_\nu}$$

ha gli zeri e i poli voluti su K_{j+1}. Inoltre,

$$\log(f_{j+1}(z)/f_j(z)) = \log c + \sum_\nu m_\nu \log \frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu}$$

si può definire come funzione analitica a un solo valore vicino a K_j, perché w_ν, w'_ν appartengono alla stessa componente del suo complementare. Possiamo dunque scegliere $g_j \in A(\Omega)$ con $|\log(f_{j+1}/f_j) + g_j| < \log(1+\varepsilon_j)$ su K_j, da cui segue la (1.5.1).

Dalla (1.5.1) segue subito che

$$\lim_{J\to\infty} f_{J+1}\prod_{j=1}^{J} e^{g_j} = f_1\prod_{j=1}^{\infty}(f_{j+1}f_j^{-1}\exp g_j)$$

definisce una funzione meromorfa f in Ω con le proprietà richieste. Infatti il prodotto dall'indice j all'infinito converge nell'interno di K_j a una funzione analitica che non si annulla. Il teorema è dimostrato.

Corollario 1.5.2. Ogni funzione meromorfa in Ω si può scrivere nella forma f/g con f, g analitiche in Ω.

Dimostrazione. Se F ha poli z_j di ordini n_j, il teorema 1.5.1 fornisce una funzione analitica g con zeri di ordine n_j in z_j e nessun altro zero. Allora $Fg = f$ è analitica e $F = f/g$.

Corollario 1.5.3. Esiste una funzione $f \in A(\Omega)$ che non si può prolungare analiticamente ad alcun insieme più grande, neppure come funzione meromorfa.

Più precisamente, se D è un disco con centro in Ω e g è meromorfa in D e coincide con f vicino al centro, allora $D \subset \Omega$.

Dimostrazione. Disponiamo tutti i punti di Ω a coordinate razionali in una successione $z_1, z_2, \ldots$ nella quale ciascuno compaia infinite volte. Poniamo $r_j = d(z_j, \mathbb{C}\setminus\Omega)$. Scegliamo compatti crescenti $K_j \subset \Omega$ tali che ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j. Per ogni j prendiamo $w_j \notin K_j$ con $|w_j - z_j| < r_j$. Poiché i w_j formano una successione discreta in Ω, il teorema 1.5.1 dà una $f \in A(\Omega)$ che si annulla in ciascun w_j e in nessun altro punto. Se $a \in \Omega$ ha coordinate razionali e $r = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, il disco $D = \{z : |z - a| < r\}$ contiene infiniti punti w_j, perché $z_j = a$ per infiniti indici. Quindi f non si può prolungare meromorficamente ad alcun disco aperto che contenga $\overline{D}$: gli zeri di una funzione meromorfa non identicamente nulla sono isolati. Ne segue l'asserto.

Corollario 1.5.4. Sia $z_1, z_2, \ldots$ una successione discreta in Ω. Se f_j è analitica vicino a z_j e gli n_j sono interi non negativi, esiste una funzione $f \in A(\Omega)$ tale che per ogni j

$$f(z) - f_j(z) = O(|z - z_j|^{n_j+1}), \qquad z \to z_j.$$

Dimostrazione. Sia $g \in A(\Omega)$ con zeri di ordine $n_j + 1$ nei punti z_j e senza altri zeri. La condizione su f significa che $f/g - f_j/g$ deve essere analitica in z_j. Per il teorema 1.4.3 esiste una funzione meromorfa h con poli soltanto nei punti z_j e tale che $h - f_j/g$ sia analitica in z_j per ogni j. Allora $f = gh$ ha le proprietà richieste.

1.6. Funzioni subarmoniche

Ricordiamo che una funzione h di classe C^2 in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice armonica se $\Delta h = 4\,\partial^2 h/(\partial z\,\partial\bar{z}) = 0$ in Ω.

Definizione 1.6.1. Una funzione $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ si dice *subarmonica* se soddisfa le due condizioni seguenti.

(a) u è semicontinua superiormente, ossia $\{z \in \Omega : u(z) < s\}$ è aperto per ogni s reale.

(b) Per ogni compatto $K \subset \Omega$ e ogni funzione h continua su K, armonica nel suo interno e maggiore o uguale a u sulla frontiera di K, si ha $u \le h$ su K.

Con questa definizione la funzione identicamente uguale a $-\infty$ è subarmonica. Talvolta la si esclude dalla definizione.

Teorema 1.6.2. Se u è subarmonica e c è reale positivo, cu è subarmonica. Data una famiglia $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ di funzioni subarmoniche, $u = \sup_\alpha u_\alpha$ è subarmonica purché $u < \infty$ e u sia semicontinua superiormente, condizioni sempre verificate se A è finito. Se $u_1, u_2, \dots$ è una successione decrescente di funzioni subarmoniche, anche $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ è subarmonica.

Dimostrazione. Le prime due affermazioni sono immediate. Per l'ultima osserviamo che $\{z \in \Omega : u(z) < s\} = \bigcup_j \{z \in \Omega : u_j(z) < s\}$ è aperto. Dunque u è semicontinua superiormente. Sia h una maggiorante di u sulla frontiera come nella condizione (b) e sia $\varepsilon > 0$. I compatti $\{z \in \partial K : u_j(z) \geq h(z) + \varepsilon\}$ formano una successione decrescente con intersezione vuota. Per j sufficientemente grande sono dunque vuoti, e per tali j si ha $u_j \leq h + \varepsilon$ su K. Ne segue che $u \leq h$, dunque u è subarmonica.

Sono spesso utili altre definizioni equivalenti.

Teorema 1.6.3. Sia $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ semicontinua superiormente. Ciascuna delle condizioni seguenti è necessaria e sufficiente per la subarmonicità di u.

(i) Se $D \subset \Omega$ è un disco chiuso e f un polinomio analitico tale che $u \leq \operatorname{Re} f$ su ∂D, allora $u \leq \operatorname{Re} f$ in D.

(ii) Posto $\Omega_\delta = \{z : d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \delta\}$, per ogni misura positiva $d\mu$ sull'intervallo $[0, \delta]$ si ha
$$2\pi u(z) \int d\mu(r) \leq \iint u(z + re^{i\theta})\, d\theta\, d\mu(r), \qquad z \in \Omega_\delta, \tag{1.6.1}$$
dove l'integrazione angolare va da 0 a 2π.

(iii) Per ogni $\delta > 0$ e ogni $z \in \Omega_\delta$ esiste una misura positiva $d\mu$ supportata in $[0, \delta]$, con massa positiva fuori dall'origine, per cui vale la (1.6.1).

La semicontinuità di u assicura che gli integrali siano ben definiti.

Dimostrazione. La definizione 1.6.1 implica (i), ed è immediato che (ii) implica (iii). Resta da provare che (i) implica (ii) e che da (iii) segue la subarmonicità di u.

Per la prima implicazione siano $z \in \Omega_\delta$, $0 < r \leq \delta$ e $D = \{\zeta : |\zeta - z| \leq r\} \subset \Omega$. Se $\varphi(\theta) = \sum a_k e^{ik\theta}$ è un polinomio trigonometrico reale tale che $u(z + re^{i\theta}) \leq \varphi(\theta)$ per ogni θ, la parte reale del polinomio $f(\zeta) = a_0 + 2\sum_{k>0} a_k (\zeta - z)^k / r^k$ maggiora u su ∂D. Per (i), $u \leq \operatorname{Re} f$ in D. In particolare,
$$u(z) \leq a_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta. \tag{1.6.2}$$

Sia ora φ una qualsiasi funzione continua che maggiori $u(z + re^{i\theta})$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico φ_1 tale che $\varphi \leq \varphi_1 \leq \varphi + \varepsilon$. Vale quindi la (1.6.2) con $\varphi + \varepsilon$ in luogo di φ, e di conseguenza anche con φ. Per definizione dell'integrale di una funzione semicontinua ne segue che
$$u(z) \leq (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$
Integrando rispetto a $d\mu(r)$ si ottiene la (1.6.1).

Mostriamo che (iii) implica la subarmonicità. Siano $K \subset \Omega$ compatto e h continua su K, armonica nell'interno, con $h \geq u$ su ∂K. Se l'estremo superiore M di $v = u - h$ su K

fosse positivo, per semicontinuità v assumerebbe il valore M su un compatto non vuoto F contenuto nell'interno di K. Sia z_0 un punto di F a distanza minima da ∂K. Per δ minore di tale distanza, ogni circonferenza $|z - z_0| = r$, $0 < r \leq \delta$, contiene punti dove $v < M$ e, per semicontinuità, un intero arco con questa proprietà. Di conseguenza, per una misura con le proprietà di (iii),

$$\iint v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\, d\mu(r) < 2\pi M \int d\mu(r) = 2\pi v(z_0) \int d\mu(r).$$

Ciò contraddice (iii), poiché per le funzioni armoniche la (1.6.1) vale con il segno di uguaglianza (ogni funzione armonica, come pure la sua opposta, è subarmonica). La dimostrazione è conclusa.

Corollario 1.6.4. Se u_1, u_2 sono subarmoniche, anche $u_1 + u_2$ è subarmonica.

Corollario 1.6.5. Una funzione u definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ è subarmonica se ogni punto di Ω possiede un intorno in cui u è subarmonica.

In altri termini, la subarmonicità è una proprietà locale.

Corollario 1.6.6. Se $f \in A(\Omega)$, $\log|f|$ è subarmonica in Ω.

Dimostrazione. Segue dal principio del massimo e dalla condizione (i) del teorema 1.6.3.

Il corollario 1.6.6 implica che $|f|$ è subarmonica per $f \in A(\Omega)$. Vale infatti il teorema seguente.

Teorema 1.6.7. Sia φ una funzione convessa crescente su $\mathbb{R}$ e si ponga $\varphi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$. Se u è subarmonica, anche $\varphi(u)$ è subarmonica.

Dimostrazione. Per ogni x_0 esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + k(x - x_0)$. Dunque

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u(z + re^{i\theta}))\, d\theta \geq \varphi(x_0) + k\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta - x_0\right).$$

Scegliamo x_0 in modo da annullare la parentesi. Per la subarmonicità di u e la monotonia di φ otteniamo

$$\varphi(u(z)) \leq \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u(z + re^{i\theta}))\, d\theta.$$

Ciò dimostra il teorema, poiché $\varphi(u)$ è evidentemente semicontinua superiormente.

Corollario 1.6.8. Siano $u_1, u_2 \geq 0$ e sia $\log u_j$ subarmonica in Ω per $j = 1, 2$, con la convenzione $\log 0 = -\infty$. Allora $\log(u_1 + u_2)$ è subarmonica in Ω.

Dimostrazione. Siano f un polinomio in z e D un disco in Ω tali che $\log(u_1+u_2) \leq \operatorname{Re} f$ su ∂D, ossia $u_1 + u_2 \leq |e^f|$ su ∂D. Poiché $\log u_j - \operatorname{Re} f$ è subarmonica, per il teorema 1.6.7 anche $u_j|e^{-f}|$ è subarmonica. La somma $(u_1 + u_2)|e^{-f}|$ è quindi subarmonica ed è al più 1 in D. Dunque $\log(u_1 + u_2) \leq \operatorname{Re} f$ in D, come volevamo.

Teorema 1.6.9. Sia u subarmonica nell'aperto Ω e non identicamente $-\infty$ su alcuna componente di Ω. Allora u è integrabile su ogni compatto di Ω, ossia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. In particolare $u > -\infty$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Se $z \in \Omega$, $u(z) > -\infty$ e $D \subset \Omega$ è un disco chiuso di centro z, dalla (1.6.1) e dalla limitatezza superiore di u su D segue che u è integrabile su D. Sia E l'insieme dei punti z che ammettono un intorno sul quale u è integrabile. Allora $u = -\infty$ in un intorno di ogni punto di $\Omega \setminus E$. Dunque sia E sia $\Omega \setminus E$ sono aperti. Il secondo insieme è unione di componenti di Ω su cui $u = -\infty$ e per ipotesi deve essere vuoto.

Possiamo ora dare un'altra caratterizzazione delle funzioni subarmoniche.

Teorema 1.6.10. Se u è subarmonica in Ω e non è identicamente $-\infty$ su alcuna sua componente, si ha

$$\int u\,\Delta v\,d\lambda \geq 0 \quad \text{se } v \in C^2_0(\Omega), \quad v \geq 0, \tag{1.6.3}$$

dove λ è la misura di Lebesgue.

Dimostrazione. Per $0 < r < d(\operatorname{supp} v, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ e $z \in \operatorname{supp} v$ si ha

$$2\pi u(z) \leq \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Moltiplicando per v e integrando rispetto a $d\lambda$ otteniamo

$$\int u(z) \left(\int_0^{2\pi} v(z - re^{i\theta})\,d\theta - 2\pi v(z) \right) d\lambda(z) \geq 0.$$

Dividendo per $\pi r^2/2$ e facendo tendere r a zero, lo sviluppo di Taylor di v mostra che al limite si ottiene la (1.6.3).

Teorema 1.6.11. Sia $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e valga la (1.6.3). Esiste una e una sola funzione subarmonica U in Ω uguale a u quasi ovunque. Se φ è una funzione integrabile non negativa di $|z|$, a supporto compatto e di integrale positivo, per ogni $z \in \Omega$ si ha

$$U(z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int u(z - \delta z')\varphi(z')\,d\lambda(z')}{\int \varphi(z')\,d\lambda(z')}. \tag{1.6.4}$$

Dimostrazione. Se U è subarmonica, per la (1.6.1) e per δ piccolo si ha

$$U(z) \leq \frac{\int U(z - \delta z')\varphi(z')\,d\lambda(z')}{\int \varphi(z')\,d\lambda(z')}.$$

Per la semicontinuità superiore di U, il limite superiore del secondo membro per $\delta \to 0$ è al più $U(z)$. Pertanto, se $u = U$ quasi ovunque, deve valere la (1.6.4).

Supponiamo dapprima $u \in C^2(\Omega)$. Integrando per parti si vede che la (1.6.3) equivale a $\Delta u \geq 0$. Dunque, per $z \in \Omega$ e per i raggi ammessi,

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(z + re^{i\theta})\,d\theta \geq 0.$$

Se scriviamo $M(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\,d\theta$, ne segue $M''(r) + r^{-1}M'(r) \geq 0$, ossia $rM'(r)$ è crescente. Poiché $rM'(r) \to 0$ per $r \to 0$, si ottiene $M'(r) \geq 0$. Dunque $M(0) \leq M(r)$ e u è subarmonica.

Scegliamo ora $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ con supporto nel disco unitario, non negativa, radiale e con integrale positivo. La funzione

$$u_\delta(z) = \frac{\int u(z-\delta z')\varphi(z')\,d\lambda(z')}{\int \varphi(z')\,d\lambda(z')}$$

appartiene a $C^\infty(\Omega_\delta)$ e converge a u in norma L^1 sui compatti di Ω per $\delta \to 0$. Si verifica subito che in Ω_δ vale la (1.6.3) con u_δ in luogo di u. Dalla prima parte della dimostrazione segue quindi che u_δ è subarmonica e che la media

$$\frac{\int u_\delta(z-\varepsilon z')\varphi(z')\,d\lambda(z')}{\int \varphi(z')\,d\lambda(z')}$$

decresce per $\varepsilon \downarrow 0$. Facendo tendere δ a zero si vede che anche $u_\varepsilon(z)$ decresce per $\varepsilon \downarrow 0$. Pertanto $U(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(z)$ esiste ed è subarmonica per il teorema 1.6.2. Poiché $u_\varepsilon \to u$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si ha $U = u$ quasi ovunque, e la dimostrazione è completa.

In particolare, abbiamo provato che una funzione di classe C^2 è subarmonica se e solo se $\Delta u \geq 0$. Quando $\Delta u > 0$ diremo che u è *strettamente subarmonica*. Ci servirà in seguito il seguente complemento al corollario 1.6.8.

Teorema 1.6.12. Se $0 \leq f \in C^2$ e $\log f$ è subarmonica, $\log(1+f)$ è strettamente subarmonica salvo nei punti in cui $\operatorname{grad} f = 0$ e $\Delta f = 0$.

Dimostrazione. La subarmonicità di $\log f$ dà $f\Delta f - |\operatorname{grad} f|^2 \geq 0$. Posto $f_1 = 1 + f$, si ha

$$f_1\Delta f_1 - |\operatorname{grad} f_1|^2 = \Delta f + (f\Delta f - |\operatorname{grad} f|^2).$$

Questa quantità si annulla soltanto se $\Delta f = 0$, il che implica $\operatorname{grad} f = 0$.

Concludiamo dimostrando un risultato di Hartogs sulle successioni di funzioni subarmoniche.

Teorema 1.6.13. Sia (v_k) una successione di funzioni subarmoniche in Ω, uniformemente limitate superiormente su ogni compatto di Ω. Si supponga che $\limsup_{k\to\infty} v_k(z) \leq C$ per ogni $z \in \Omega$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste allora k_0 tale che

$$v_k(z) \leq C + \varepsilon, \qquad z \in K, \quad k > k_0.$$

Dimostrazione. Poiché si può sostituire Ω con un aperto relativamente compatto che contenga K, possiamo supporre che la successione sia uniformemente limitata superiormente in Ω e persino, sottraendo una costante, che $v_k \leq 0$ in Ω per ogni k. Scegliamo $r > 0$ tale che $K \subset \Omega_{3r}$. Per la (1.6.1), per ogni $z \in K$,

$$\pi r^2 v_k(z) \leq \int_{|z-z'|<r} v_k(z')\,d\lambda(z').$$

Per il lemma di Fatou il limite superiore del secondo membro per $k \to \infty$ è al più $\pi C r^2$. Per ogni $z \in K$ possiamo quindi scegliere k_0 tale che

$$\int_{|z-z'|<r} v_k(z')\,d\lambda(z') \leq \pi(C + \varepsilon/2)r^2, \qquad k > k_0.$$

Poiché $v_k \leq 0$, per $|z-w| < \delta < r$ si ottiene

$$\pi(r+\delta)^2 v_k(w) \leq \int_{|z'-w|<r+\delta} v_k(z')\,d\lambda(z') \leq \int_{|z'-z|\leq r} v_k(z')\,d\lambda(z').$$

Scegliendo δ sufficientemente piccolo segue $v_k(w) < C + \varepsilon$ per $k > k_0$ e $|w - z| < \delta$. Per la compattezza di K, il lemma di Borel–Lebesgue conclude la dimostrazione.

Note. Gli argomenti di questo capitolo sono così noti che ci limiteremo a pochissimi riferimenti. Ricordiamo tuttavia che si conoscono risultati molto più forti del corollario 1.3.2. Mergelyan [1] ha dimostrato che, se K soddisfa le ipotesi di quel corollario, la chiusura uniforme delle restrizioni a K dei polinomi è costituita da tutte le funzioni continue su K e analitiche nel suo interno. Si veda anche Wermer [1] per una dimostrazione semplice che usa l'analisi funzionale. Gli enunciati analoghi in più variabili sono falsi (si veda Kallin [1]). Gran parte del § 1.6 si trova in Radó [1]. Fa eccezione il teorema 1.6.13, che risale essenzialmente a Hartogs.

Capitolo II
Proprietà elementari delle funzioni di più variabili complesse

Sommario. Nel § 2.1 definiamo le funzioni analitiche come le soluzioni delle equazioni di Cauchy–Riemann $\bar\partial u = 0$. Dopo aver decomposto le forme differenziali in somme di forme di tipo (p, q), definiamo l'operatore $\bar\partial$ su forme arbitrarie. Otteniamo così un complesso di operatori differenziali, la cui esattezza è dimostrata in casi particolari nei §§ 2.3 e 2.7. Il caso generale sarà studiato con tecniche assai diverse nei capitoli IV e V. Nei §§ 2.2 e 2.4 presentiamo risultati per lo più classici che si dimostrano estendendo direttamente la formula integrale di Cauchy ai domini prodotto in $\mathbb{C}^n$. Incontreremo in particolare domini in cui tutte le funzioni analitiche si prolungano analiticamente a domini più ampi. I domini per i quali ciò è impossibile si chiamano domini di olomorfia. Li introduciamo nel § 2.5, dove li caratterizziamo mediante la convessità olomorfa. Nel § 2.6 introduciamo una proprietà di convessità più esplicita, la pseudoconvessità. Dimostriamo che la convessità olomorfa implica la pseudoconvessità. L'implicazione inversa, che costituisce il problema di Levi, è rinviata al capitolo IV. L'ultimo paragrafo tratta l'approssimazione di funzioni analitiche mediante polinomi e, in tale contesto, l'esattezza della successione di operatori $\bar\partial$. Esso prepara il capitolo III. Il lettore che desideri passare direttamente al capitolo IV potrà saltare il § 2.7 e la parte finale del § 2.3 che gli serve da preparazione.

2.1. Preliminari

Sia $u \in C^1(\Omega)$ a valori complessi, dove Ω è un aperto di $\mathbb{C}^n$, spazio che identifichiamo con $\mathbb{R}^{2n}$. Indichiamo con x_j, $1 \le j \le 2n$, le coordinate reali e con $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, $j = 1, \dots, n$, quelle complesse. Come nel § 1.1 possiamo esprimere du come combinazione lineare dei differenziali dz_j e $d\bar z_j$:

$$du = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar z_j} d\bar z_j, \tag{2.1.1}$$

dove abbiamo usato le notazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z_j} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_{2j-1}} - i\frac{\partial u}{\partial x_{2j}}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial \bar z_j} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_{2j-1}} + i\frac{\partial u}{\partial x_{2j}}\right). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Con la notazione

$$\partial u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j, \qquad \bar\partial u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar z_j} d\bar z_j, \tag{2.1.3}$$

la (2.1.1) si scrive anche

$$du = \partial u + \bar\partial u. \tag{2.1.1$'$}$$

Le forme differenziali che sono combinazioni lineari dei dz_j si dicono di tipo $(1, 0)$, quelle che sono combinazioni lineari dei $d\bar z_j$ di tipo $(0, 1)$. Dunque ∂u e $\bar\partial u$ sono le componenti di du rispettivamente di tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Definizione 2.1.1. Una funzione $u \in C^1(\Omega)$ si dice *analitica* (o *olomorfa*) in Ω se du è di tipo $(1, 0)$, ossia se $\bar\partial u = 0$ (equazioni di Cauchy–Riemann). L'insieme delle funzioni analitiche in Ω si indica con $A(\Omega)$.

Gli operatori differenziali ∂ e $\bar\partial$ sono evidentemente lineari e soddisfano la regola del prodotto. Quindi $A(\Omega)$ è un anello. Sia ora u una funzione analitica in Ω a valori in $\mathbb{C}^\nu$, ossia $u = (u_1, \dots, u_\nu)$ con ciascuna componente analitica in Ω. Se $v \in C^1(\omega)$ per un aperto ω contenente l'immagine di u, la funzione $u^*v : \Omega \ni z \mapsto v(u(z))$ appartiene a $C^1(\Omega)$ e si ha

$$d(u^*v) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial v}{\partial u_j}\, du_j + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial v}{\partial \bar u_j}\, d\bar u_j.$$

Poiché in Ω i du_j sono di tipo $(1,0)$ e i $d\bar u_j$ di tipo $(0,1)$, segue

$$\partial(u^*v) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial v}{\partial u_j}\, du_j, \qquad \bar\partial(u^*v) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial v}{\partial \bar u_j}\, d\bar u_j.$$

Dunque u^*v è analitica se v è analitica. Più in generale, la decomposizione $d = \partial + \bar\partial$ e la nozione di funzione analitica sono invarianti per applicazioni analitiche. Il teorema delle funzioni implicite si estende subito alle funzioni analitiche.

Teorema 2.1.2. Siano $f_j(w,z)$, $j = 1, \dots, m$, funzioni analitiche delle variabili

$$(w,z) = (w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n)$$

vicino al punto $(w^0, z^0) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Si supponga che $f_j(w^0, z^0) = 0$ per $j = 1, \dots, m$ e che

$$\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial w_k} \right)_{j,k=1}^{m} \neq 0 \quad \text{in } (w^0, z^0).$$

Le equazioni $f_j(w,z) = 0$, $j = 1, \dots, m$, ammettono in un intorno di z^0 un'unica soluzione analitica $w(z)$ tale che $w(z^0) = w^0$.

Dimostrazione. Possiamo considerare le equazioni $f_j(w,z) = 0$ come $2m$ equazioni reali $\operatorname{Re} f_j(w,z) = 0$, $\operatorname{Im} f_j(w,z) = 0$ nelle $2m$ incognite reali $\operatorname{Re} w_k$, $\operatorname{Im} w_k$. Per applicare l'usuale teorema delle funzioni implicite occorre provare che in (w^0, z^0) le equazioni $df_j = 0$, $dz_k = 0$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, implicano $dw_j = 0$ per $j = 1, \dots, m$. Ciò è immediato, perché il sistema

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial w_k}\, dw_k = 0, \qquad j = 1, \dots, m,$$

ha determinante non nullo. Le equazioni $f_j(w,z) = 0$ definiscono quindi univocamente vicino a z^0 funzioni w_k di classe C^1 tali che $w(z^0) = w^0$. Per dimostrarne l'analiticità basta osservare che per tali funzioni si ha

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial w_k}\, dw_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial z_k}\, dz_k = df_j = 0.$$

Risolvendo il sistema rispetto ai dw_k, si vede che ciascuno di essi è combinazione lineare di $dz_1, \dots, dz_n$.

Si osservi che, in particolare, per il teorema 2.1.2 un'applicazione analitica di $\mathbb{C}^n$ in sé ha localmente inversa analitica dove lo jacobiano non si annulla. Estendiamo infine la definizione degli operatori ∂ e $\bar\partial$ a forme differenziali arbitrarie. Una forma differenziale f si dice di tipo (p,q) se si può scrivere

$$f = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar z^J,$$

dove $I = (i_1, \dots, i_p)$ e $J = (j_1, \dots, j_q)$ sono multiindici, ossia successioni di indici compresi fra 1 e n. Abbiamo usato la notazione

$$dz^I \wedge d\bar{z}^J = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Ogni forma differenziale si decompone in uno e un solo modo in somma di forme di tipo (p, q), $0 \le p, q \le n$. Se f è di tipo (p, q), il suo differenziale esterno $df = \sum_{I,J} df_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J$ si scrive $df = \partial f + \bar{\partial} f$, dove

$$\partial f = \sum_{I,J} \partial f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J, \qquad \bar{\partial} f = \sum_{I,J} \bar{\partial} f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

sono rispettivamente di tipo $(p+1, q)$ e $(p, q+1)$. Poiché $0 = d^2 f = \partial^2 f + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) f + \bar{\partial}^2 f$ e i tre addendi hanno tipi diversi, si ottiene

$$\partial^2 = 0, \qquad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0, \qquad \bar{\partial}^2 = 0. \tag{2.1.4}$$

Di conseguenza, l'equazione

$$\bar{\partial} u = f, \tag{2.1.5}$$

con f di tipo $(p, q+1)$, può ammettere soluzione soltanto se $\bar{\partial} f = 0$. Si vede così che, anche quando interessano principalmente le equazioni di Cauchy–Riemann (2.1.5) con u funzione, è naturale studiare $\bar{\partial}$ anche sulle forme di tipo $(0, 1)$ e quindi su quelle di tipo $(0, 2)$ e così via.

Se $u : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^\nu$ è olomorfa e $f = \sum f_{I,J}\, du^I \wedge d\bar{u}^J$ è una forma definita in un intorno aperto dell'immagine di u, definiamo in Ω la forma $u^* f$ ponendo

$$u^* f = \sum f_{I,J}(u(z))\, du^I \wedge d\bar{u}^J.$$

Poiché le componenti u_k sono analitiche, du_k e $d\bar{u}_k$ per $k = 1, \dots, \nu$ sono forme su Ω di tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$ rispettivamente. Dunque $u^* f$ è di tipo (p, q) se f è di tipo (p, q). Dall'identità $d(u^* f) = u^*(df)$ segue allora che

$$\partial(u^* f) = u^*(\partial f), \qquad \bar{\partial}(u^* f) = u^*(\bar{\partial} f).$$

Se $\mathcal{F}$ è uno spazio di funzioni (o di distribuzioni), useremo la notazione $\mathcal{F}_{(p,q)}$ per lo spazio delle forme di tipo (p, q) con coefficienti in $\mathcal{F}$.

2.2. Applicazioni della formula integrale di Cauchy nei polidischi

Un insieme $D \subset \mathbb{C}^n$ si dice *polidisco* se esistono dischi $D_1, \dots, D_n$ in $\mathbb{C}$ tali che

$$D = \prod_{j=1}^{n} D_j = \{z : z_j \in D_j,\ j = 1, \dots, n\}.$$

L'insieme $\prod_{j=1}^n \partial D_j$ si chiama *frontiera distinta* di D e si indica con $\partial_0 D$.

Teorema 2.2.1. Sia D un polidisco aperto e sia u una funzione continua in $\overline{D}$ che, in D, è analitica rispetto a ciascuna variabile z_j quando le altre sono tenute fisse. Allora

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{u(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \tag{2.2.1}$$

Di conseguenza $u \in C^\infty(D)$ e, anzi, u è analitica in D.

Dimostrazione. Dal corollario 1.2.5 e dalla continuità di u segue che u è analitica rispetto a $z_j \in D_j$ anche quando alle altre coordinate z_k si assegnano valori arbitrari in $\overline{D}_k$. Applicando ripetutamente la (1.2.3) si ottiene quindi la (2.2.1). Per $(\zeta, z) \in \partial_0 D \times D$ l'integrando, come funzione di z, è di classe C^∞ e analitico. Ne segue il teorema.

Corollario 2.2.2. Se Ω è un aperto di $\mathbb{C}^n$ e $u \in A(\Omega)$, allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e tutte le derivate di u sono anch'esse analitiche in Ω.

Si ottengono subito anche stime per le derivate di u. Chiameremo *multiordine* una n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di interi non negativi e scriveremo $\partial^\alpha = (\partial/\partial z_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial z_n)^{\alpha_n}$. Si definisce in modo analogo $\bar\partial^\alpha$. Scriveremo inoltre $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Teorema 2.2.3. Per ogni compatto K contenuto in un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ e ogni intorno aperto $\omega \subset \Omega$ di K, esistono costanti C_α, una per ciascun multiordine α, tali che

$$\sup_K |\partial^\alpha u| \le C_\alpha \|u\|_{L^1(\omega)}, \qquad u \in A(\Omega). \tag{2.2.2}$$

Dimostrazione. Se ω è un polidisco e K un suo sottoinsieme compatto, basta applicare ripetutamente il teorema 1.2.4. Nel caso generale si ricopre K con un numero finito di compatti, ciascuno contenuto in un polidisco a sua volta contenuto in ω.

Corollario 2.2.4. Se $u_k \in A(\Omega)$ e $u_k \to u$ per $k \to \infty$ uniformemente sui compatti di Ω, allora $u \in A(\Omega)$. *Dimostrazione.* Si ripete la dimostrazione del corollario 1.2.5.

Corollario 2.2.5. Se $u_k \in A(\Omega)$ e la successione $|u_k|$ è uniformemente limitata su ogni compatto di Ω, esiste una sottosuccessione u_{k_j} che converge uniformemente su ogni compatto di Ω a un limite $u \in A(\Omega)$. *Dimostrazione.* Si ripete la dimostrazione del corollario 1.2.6.

Passiamo agli sviluppi in serie di potenze delle funzioni analitiche nei polidischi. Diremo che una serie $\sum_\alpha a_\alpha(z)$ converge *normalmente* in un aperto Ω se $\sum_\alpha \sup_K |a_\alpha(z)|$ converge per ogni compatto $K \subset \Omega$. Ciò implica, naturalmente, che la somma esiste ed è indipendente dall'ordine di sommazione e che è analitica se tutti gli a_α sono analitici.

Teorema 2.2.6. Se u è analitica nel polidisco $D = \{z : |z_j| < r_j,\ j = 1, \dots, n\}$, si ha, con convergenza normale,

$$u(z) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!} z^\alpha, \qquad z \in D.$$

Dimostrazione. Lo sviluppo in serie di potenze

$$(\zeta_1 - z_1)^{-1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{-1} = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\zeta^\alpha \zeta_1 \cdots \zeta_n}$$

converge normalmente per $(\zeta, z) \in \partial_0 D \times D$. Se u è continua su $\overline{D}$, nella (2.2.1) possiamo quindi moltiplicare per $u(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ e integrare termine a termine. Derivando la (2.2.1) si trova

$$\partial^\alpha u(0) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} u(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \prod_{j=1}^n \zeta_j^{-\alpha_j - 1}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \tag{2.2.3}$$

Questo dimostra il teorema se u è continua su $\overline{D}$. Nel caso generale basta applicare il risultato a polidischi relativamente compatti in D. La dimostrazione dà inoltre il risultato seguente.

Teorema 2.2.7 (Disuguaglianze di Cauchy). Se u è analitica e $|u| \le M$ nel polidisco $\{z : |z_j| < r_j,\ j = 1, \dots, n\}$, si ha

$$|\partial^\alpha u(0)| \le M\alpha!\, r^{-\alpha}. \tag{2.2.4}$$

Dimostrazione. Segue dalla (2.2.3) applicata a polidischi più piccoli.

Come nella prova del corollario 1.2.9, dal teorema 2.2.6 segue l'unicità del prolungamento analitico. Si può anche applicare quel corollario direttamente. Anche il principio del massimo si estende immediatamente da una a più variabili.

Concludiamo il paragrafo dimostrando il teorema di Hartogs secondo cui una funzione separatamente analitica è analitica. Un enunciato analogo sarebbe falso per le funzioni di variabili reali. La funzione $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, con $f(0, 0) = 0$, è infinitamente derivabile rispetto a x o a y quando si tiene fissa l'altra variabile, eppure non è neppure continua nell'origine.

Teorema 2.2.8. Sia u una funzione a valori complessi definita nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Se u è analitica rispetto a ogni variabile z_j quando alle altre si assegnano valori fissi arbitrari, allora u è analitica in Ω.

L'enunciato è locale, dunque basta dimostrarlo nei polidischi.

Lemma 2.2.9. Se u soddisfa le ipotesi del teorema 2.2.8 nel polidisco $\Omega = \{z : |z_j| < r_j,\ j = 1, \dots, n\}$ e $|u|$ è limitata in Ω, allora u è analitica in Ω.

Dimostrazione. Per il teorema 2.2.1 basta dimostrare che u è continua in Ω. Sia $|u| \le M$ in Ω. Affermiamo che

$$|u(z) - u(\zeta)| \le 2M \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{|z_j - \zeta_j|}{|r_j^2 - z_j\bar{\zeta}_j|}, \qquad z, \zeta \in \Omega. \tag{2.2.5}$$

Infatti

$$\begin{aligned} u(z) - u(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \big(&u(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z_j, \dots, z_n) \\ &- u(\zeta_1, \dots, \zeta_j, z_{j+1}, \dots, z_n)\big), \end{aligned}$$

sicché basta dimostrare la stima in una variabile. In tal caso essa segue dal lemma di Schwarz, poiché $z \mapsto u(z) - u(\zeta)$ ha modulo al più $2M$ e si annulla in $z = \zeta$. Vale dunque la (2.2.5), e il lemma è dimostrato.

D'ora in poi supporremo che il teorema 2.2.8 sia già stato dimostrato per funzioni di meno di n variabili. Per $n = 1$ l'enunciato è immediato.

Lemma 2.2.10. Valgano le ipotesi del teorema 2.2.8 e sia $D = \prod_{j=1}^{n} D_j$ un polidisco chiuso con interno non vuoto, contenuto in Ω. Esistono dischi $D'_j \subset D_j$ di raggio positivo, con $D'_n = D_n$, tali che u sia limitata in $D' = \prod_{j=1}^{n} D'_j$ e quindi analitica nel suo interno.

Dimostrazione. Poniamo

$$E_M = \left\{ z' \in \prod_{j=1}^{n-1} D_j : |u(z', z_n)| \le M \text{ per ogni } z_n \in D_n \right\}.$$

L'insieme E_M è chiuso perché, per l'ipotesi induttiva, a z_n fissato la funzione u è analitica e dunque continua in z'. Inoltre $\bigcup_{M=1}^{\infty} E_M = \prod_{j=1}^{n-1} D_j$. Per il teorema di Baire E_M ha un punto interno per M sufficientemente grande. Basta scegliere D' contenuto in $E_M \times D_n$.

Lemma 2.2.11. Sia u una funzione a valori complessi nel polidisco $D = \{z : |z_j - z_j^0| < R,\ j = 1, \dots, n\}$. Si supponga che per ogni z_n fissato u sia analitica in $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ e che, per qualche $r > 0$, sia analitica e limitata in

$$D' = \{z : |z_j - z_j^0| < r,\ j = 1, \dots, n-1,\ |z_n - z_n^0| < R\} \subset D.$$

Allora u è analitica in D.

Dimostrazione. Possiamo supporre $z^0 = 0$. Scegliamo $0 < R_1 < R_2 < R$. Per il teorema 2.2.6,

$$u(z) = \sum_\alpha a_\alpha(z_n)(z')^\alpha, \qquad z \in D, \tag{2.2.6}$$

dove α percorre soltanto i multiordini con $n-1$ componenti. Il coefficiente $a_\alpha(z_n) = \partial^\alpha u(0, z_n)/\alpha!$ è analitico in z_n e

$$|a_\alpha(z_n)| R_2^{|\alpha|} \longrightarrow 0 \quad \text{per } |\alpha| \to \infty \quad \text{a } z_n \text{ fissato}, \quad |z_n| < R. \tag{2.2.7}$$

Inoltre, se M è un maggiorante di $|u|$ in D', la disuguaglianza di Cauchy dà

$$|a_\alpha(z_n)| r^{|\alpha|} \le M. \tag{2.2.8}$$

Applichiamo il teorema 1.6.13 alle funzioni subarmoniche $z_n \mapsto |\alpha|^{-1} \log |a_\alpha(z_n)|$ con $|\alpha| > 0$. Per la (2.2.8) sono uniformemente limitate superiormente per $|z_n| < R$ e per la (2.2.7) il loro limite superiore per $|\alpha| \to \infty$ è al più $\log(1/R_2)$ a z_n fissato. Dunque, per il teorema 1.6.13, per $|\alpha|$ abbastanza grande,

$$|\alpha|^{-1} \log |a_\alpha(z_n)| < \log(1/R_1) \quad \text{se } |z_n| < R_1.$$

Ossia $|a_\alpha(z_n)| R_1^{|\alpha|} \le 1$ per $|\alpha|$ abbastanza grande e $|z_n| < R_1$. Ne segue che la (2.2.6) converge normalmente in D. Essendo i suoi termini analitici, concludiamo che u è analitica.

Dimostrazione del teorema 2.2.8. Dato $\zeta \in \Omega$, scegliamo $R > 0$ in modo che il polidisco $\{z : |z_j - \zeta_j| \le 2R,\ j = 1, \dots, n\}$ sia contenuto in Ω. Per il lemma 2.2.10 esiste z^0 con $\max_j |z_j^0 - \zeta_j| < R$ tale che le ipotesi del lemma 2.2.11 siano soddisfatte per qualche $r > 0$. Quindi u è analitica in un intorno di ζ, come volevamo.

2.3. Le equazioni di Cauchy–Riemann non omogenee in un polidisco

Consideriamo anzitutto l'equazione $\bar\partial u = f$, dove f è una forma assegnata di tipo $(0,1)$ a supporto compatto e l'incognita u è una funzione. Ricordiamo che $\bar\partial f = 0$ è condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione. Esplicitamente, vogliamo risolvere il sistema sovradeterminato di equazioni differenziali

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z_j} = f_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{2.3.1}$$

quando sono soddisfatte le condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar z_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_j} = 0, \qquad j, k = 1, \dots, n. \tag{2.3.2}$$

Teorema 2.3.1. Siano $f_j \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$ per $j = 1, \dots, n$, con $k > 0$, e si supponga che valga la (2.3.2), con $n > 1$. Esiste allora $u \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$ che soddisfa la (2.3.1).

Per $n = 1$ il teorema è falso: basta prendere $f_1 \in C_0^\infty$ con integrale di Lebesgue diverso da zero.

Dimostrazione. Poniamo

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \iint (\tau - z_1)^{-1} f_1(\tau, z_2, \dots, z_n)\, d\tau \wedge d\bar{\tau} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iint \tau^{-1} f_1(z_1 - \tau, z_2, \dots, z_n)\, d\tau \wedge d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

La seconda espressione mostra che $u \in C^k(\mathbb{C}^n)$. È chiaro che $u(z) = 0$ se $|z_2| + \cdots + |z_n|$ è sufficientemente grande. Dal teorema 1.2.2 segue $\partial u/\partial \bar{z}_1 = f_1$. Se $k > 1$ è un indice di coordinata, deriviamo sotto il segno d'integrale e usiamo $\partial f_1/\partial \bar{z}_k = \partial f_k/\partial \bar{z}_1$. Si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2\pi i} \iint (\tau - z_1)^{-1} \frac{\partial f_k(\tau, z_2, \dots, z_n)}{\partial \bar{\tau}}\, d\tau \wedge d\bar{\tau} = f_k(z),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema 1.2.1. Dunque u soddisfa tutte le equazioni (2.3.1). In particolare è analitica fuori da un compatto. Per l'unicità del prolungamento analitico concludiamo che u ha supporto compatto.

Dal teorema 2.3.1 discende immediatamente il seguente teorema di Hartogs.

Teorema 2.3.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$, con $n > 1$, e sia $K \subset \Omega$ un compatto tale che $\Omega \setminus K$ sia connesso. Per ogni $u \in A(\Omega \setminus K)$ esiste allora $U \in A(\Omega)$ tale che $u = U$ in $\Omega \setminus K$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uguale a 1 in un intorno di K. Poniamo $u_0 = (1 - \varphi)u$ e definiamo $u_0 = 0$ in K. Allora $u_0 \in C^\infty(\Omega)$. Cerchiamo $v \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ in modo che $U = u_0 - v$ abbia le proprietà volute. La funzione U sarà analitica se

$$\bar{\partial} v = \bar{\partial} u_0 = -u \bar{\partial} \varphi = f, \tag{2.3.3}$$

dove f, posta uguale a zero in K e fuori da Ω, ha componenti in $C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$. La (2.3.3) ha quindi una soluzione che si annulla nella componente illimitata del complementare del supporto di φ. La frontiera di questa componente è contenuta in $\Omega \setminus K$, sicché esiste un aperto non vuoto di $\Omega \setminus K$ nel quale $v = 0$ e $u = u_0$. La funzione analitica U definita in Ω coincide dunque con u in un aperto non vuoto di $\Omega \setminus K$. Poiché quest'ultimo insieme è connesso, $u = U$ in tutto $\Omega \setminus K$.

Ogni funzione analitica in $\Omega \setminus K$ si può dunque prolungare analiticamente all'insieme più grande Ω. La situazione è assai diversa da quella che si presenta in una variabile complessa (corollario 1.5.3). Nel prossimo paragrafo incontreremo un altro esempio di questo fenomeno, che studieremo sistematicamente nel § 2.5. Lo stesso metodo dimostrativo dà una versione più forte del teorema 2.3.2, in cui la funzione da prolungare è assegnata soltanto su $\partial\Omega$.

Teorema 2.3.2′. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}^n$, con $n > 1$, tale che $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$ sia connesso e $\partial\Omega$ sia di classe C^4. Sia ρ una funzione reale di classe C^4 che si annulla precisamente su $\partial\Omega$, con $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ su $\partial\Omega$. Se $u \in C^4(\overline{\Omega})$ e $\bar{\partial} u \wedge \bar{\partial} \rho = 0$ su $\partial\Omega$, esiste una funzione analitica U in Ω, di classe $C^1(\overline{\Omega})$, tale che $U = u$ su $\partial\Omega$.

Premettiamo alcune osservazioni. Viceversa, l'esistenza di U implica che $U - u = \rho h$ con $h \in C^0(\overline{\Omega})$, e quindi $\bar{\partial} U - \bar{\partial} u = h \bar{\partial} \rho$ su $\partial\Omega$. Pertanto su $\partial\Omega$ si ha $\bar{\partial} u \wedge \bar{\partial} \rho = \bar{\partial} U \wedge \bar{\partial} \rho = 0$. L'ipotesi $\bar{\partial} u \wedge \bar{\partial} \rho = 0$ si esprime anche così:

$$\sum_{j=1}^n t_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \text{se} \quad \sum_{j=1}^n t_j \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_j} = 0.$$

In altre parole, u deve soddisfare tutte le equazioni di Cauchy–Riemann tangenziali. Queste dipendono soltanto dai valori di u su $\partial\Omega$. Gli ordini di derivabilità richiesti si possono facilmente ridurre di due unità.

Dimostrazione del teorema 2.3.2′. Costruiamo dapprima $U_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che $U_0 = u$ su $\partial\Omega$ e $\bar\partial U_0 = O(\rho^2)$ al bordo. Per ipotesi possiamo scrivere

$$\bar\partial u = h_0 \bar\partial\rho + \rho h_1$$

con opportuni $h_0 \in C^3(\overline{\Omega})$ e $h_1 \in C^2_{(0,1)}(\overline{\Omega})$. Quindi

$$\bar\partial(u - h_0\rho) = \rho(h_1 - \bar\partial h_0) = \rho h_2, \qquad h_2 \in C^2_{(0,1)}(\overline{\Omega}).$$

Poiché $0 = \bar\partial(\rho h_2) = \bar\partial\rho \wedge h_2 + \rho\bar\partial h_2$, risulta $\bar\partial\rho \wedge h_2 = 0$ su $\partial\Omega$. Possiamo dunque scrivere $h_2 = h_3\bar\partial\rho + \rho h_4$, con $h_3 \in C^2(\overline{\Omega})$ e $h_4 \in C^1_{(0,1)}(\overline{\Omega})$. Ponendo $U_0 = u - h_0\rho - h_3\rho^2/2$, si ha

$$\bar\partial U_0 = \rho^2(h_4 - \bar\partial h_3/2),$$

e la costruzione è conclusa. Definiamo ora $f = \bar\partial U_0$ in Ω e $f = 0$ nel suo complementare. Allora $f \in C^1_{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$ ha supporto compatto. Per il teorema 2.3.1 esiste dunque $v \in C^1(\mathbb{C}^n)$ a supporto compatto con $\bar\partial v = f$. Poiché v è analitica nell'insieme connesso $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$, vi si annulla. Perciò $U = U_0 - v$ coincide con $U_0 = u$ su $\partial\Omega$, e in Ω si ha $\bar\partial U = \bar\partial U_0 - \bar\partial v = f - f = 0$. Questo conclude la dimostrazione.

Quando f non ha supporto compatto, lo studio dell'equazione $\bar\partial u = f$ è un poco più complicato anche nei polidischi. Nel § 2.6 avremo bisogno di risultati per forme f di tipo $(0, q+1)$ con $q \geq 0$ arbitrario. Ammettiamo quindi che f sia di tipo $(p, q+1)$ con $p, q \geq 0$ arbitrari. Per semplicità supponiamo che le componenti siano di classe C^∞.

Teorema 2.3.3. Sia D un polidisco aperto e sia $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(D)$, $p, q \geq 0$, con $\bar\partial f = 0$. Se $D' \Subset D$ (ossia D' è relativamente compatto in D), esiste $u \in C^\infty_{(p,q)}(D')$ tale che $\bar\partial u = f$ in D'.

Dimostrazione. Mostriamo per induzione la validità dell'enunciato quando f non contiene i differenziali $d\bar z_{k+1}, \ldots, d\bar z_n$. Per $k = 0$ è immediato: ogni termine di f ha grado $q+1 > 0$ rispetto ai $d\bar z_j$, sicché $f = 0$. Per $k = n$ si ha l'enunciato del teorema. Supponiamolo dimostrato per $k-1$ e scriviamo

$$f = d\bar z_k \wedge g + h,$$

dove $g \in C^\infty_{(p,q)}(D)$, $h \in C^\infty_{(p,q+1)}(D)$ e g, h non contengono $d\bar z_k, \ldots, d\bar z_n$. Scriviamo

$$g = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q}{}' g_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar z^J,$$

dove l'apice indica che la somma è estesa ai soli multiindici strettamente crescenti. Da $\bar\partial f = 0$ segue

$$\frac{\partial g_{I,J}}{\partial \bar z_j} = 0, \qquad j > k, \tag{2.3.4}$$

poiché, a meno di un fattore ± 1, questo è il coefficiente di $dz^I \wedge d\bar z^J \wedge d\bar z_k \wedge d\bar z_j$ in $\bar\partial f$. Dunque $g_{I,J}$ è analitica in queste variabili. Scegliamo ora una soluzione $G_{I,J}$ dell'equazione

$$\frac{\partial G_{I,J}}{\partial \bar z_k} = g_{I,J}. \tag{2.3.5}$$

A tale scopo scegliamo $\psi \in C_0^\infty(D_k)$ con $\psi(z_k) = 1$ in un intorno $D'' \subset D$ di $\overline{D'}$ e poniamo

$$\begin{aligned} G_{I,J}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \iint (\tau - z_k)^{-1} \psi(\tau) g_{I,J}(z_1, \dots, z_{k-1}, \tau, z_{k+1}, \dots, z_n)\, d\tau \wedge d\bar{\tau} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iint \tau^{-1} \psi(z_k - \tau) g_{I,J}(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k - \tau, z_{k+1}, \dots, z_n)\, d\tau \wedge d\bar{\tau}. \end{aligned}$$

L'ultima espressione mostra che $G_{I,J} \in C^\infty(D)$. Il teorema 1.2.2 dà la (2.3.5) in D''. Per la (2.3.4), derivando sotto il segno d'integrale, otteniamo

$$\frac{\partial G_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} = 0, \qquad j > k. \tag{2.3.6}$$

Ponendo $G = \sum'_{I,J} G_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$, in D'' si ha

$$\bar{\partial} G = \sum_{I,J}{}' \sum_j \frac{\partial G_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J = d\bar{z}_k \wedge g + h_1,$$

dove h_1 raccoglie i termini con j da 1 a $k-1$ e non contiene $d\bar{z}_k, \dots, d\bar{z}_n$. Di conseguenza $h - h_1 = f - \bar{\partial} G$ non contiene tali differenziali. Per ipotesi induttiva esiste dunque $v \in C^\infty_{(p,q)}(D')$ tale che $\bar{\partial} v = f - \bar{\partial} G$ in D' (si osservi che $\bar{\partial}(f - \bar{\partial} G) = \bar{\partial} f = 0$). Allora $u = v + G$ soddisfa $\bar{\partial} u = f$, come volevamo.

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 1.4.4, si prova senza difficoltà che, sotto le ipotesi del teorema 2.3.3, esiste una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}(D)$ di $\bar{\partial} u = f$ su tutto D. Rinviamo tuttavia la dimostrazione al § 2.7, quando avremo esteso il teorema 2.3.3 a insiemi più generali dei polidischi.

2.4. Serie di potenze e domini di Reinhardt

Siano a_α numeri complessi assegnati per tutti i multiordini α. Consideriamo in $\mathbb{C}^n$ la serie di potenze $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$. Definiamo il suo *dominio di convergenza* D come l'insieme degli z tali che la serie converga assolutamente in ogni punto di un intorno di z. Indichiamo inoltre con B l'insieme dei punti z per i quali esiste una costante C tale che $|a_\alpha z^\alpha| \leq C$ per ogni α. È chiaro che D è contenuto nell'interno B° di B. Per dimostrare l'uguaglianza proviamo dapprima il lemma di Abel.

Lemma 2.4.1. Se $w \in B$, la serie di potenze converge normalmente nel polidisco $|z_j| < |w_j|$, $j = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste C tale che $|a_\alpha w^\alpha| \leq C$. Se $|z_j| \leq k_j |w_j|$ con $0 \leq k_j < 1$ per ogni j, si ottiene $|a_\alpha z^\alpha| \leq C k^\alpha$. Poiché $\sum_\alpha k^\alpha = \prod_{j=1}^n (1 - k_j)^{-1} < \infty$, il lemma è dimostrato.

Teorema 2.4.2. Il dominio di convergenza D è l'interno di B. La serie di potenze converge normalmente in D, sicché la sua somma è analitica in D. *Dimostrazione.* È una conseguenza immediata del lemma 2.4.1.

Teorema 2.4.3. Sia $D^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : (e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) \in D\}$. Allora D^* è un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$. Se $\xi \in D^*$ e $\eta_j \leq \xi_j$ per ogni j, anche $\eta \in D^*$. Inoltre $z \in D$ se e solo se esiste $\xi \in D^*$ tale che $|z_j| \leq e^{\xi_j}$ per $j = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Definiamo B^* sostituendo B a D nella definizione di D^*. Per il teorema 2.4.2, D^* è l'interno di B^*. Dati $\xi, \eta \in B^*$, si trova C tale che per ogni α

$$|a_\alpha| \exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j\right) \leq C, \qquad |a_\alpha| \exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \eta_j\right) \leq C.$$

Se $\lambda, \mu \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$, segue

$$|a_\alpha| \exp\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j (\lambda\xi_j + \mu\eta_j)\right) \leq C.$$

Dunque $\lambda\xi + \mu\eta \in B^*$, vale a dire che B^* è convesso. Ne seguono immediatamente le proprietà asserite per D^*.

Viceversa, se $D^* \subset \mathbb{R}^n$ gode delle proprietà elencate nel teorema 2.4.3 e si definisce D mediante l'ultima affermazione di quel teorema, si ottiene un aperto D che è precisamente il dominio di convergenza di una serie di potenze. Ciò segue dal teorema 2.4.5 e dal fatto, che dimostreremo nel § 2.5, che esiste una funzione analitica in D che non si può prolungare analiticamente oltre D (si veda il corollario 2.5.8). In particolare, per il teorema 2.4.3 il dominio di convergenza di una serie di potenze ha la proprietà indicata nella definizione seguente.

Definizione 2.4.4. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice *dominio di Reinhardt* se da $(z_1, \ldots, z_n) \in \Omega$ segue $(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega$ per ogni scelta di $\theta_1, \ldots, \theta_n$ reali.

Teorema 2.4.5. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio di Reinhardt connesso contenente l'origine e sia $f \in A(\Omega)$. Esiste una e una sola serie di potenze tale che

$$f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$$

con convergenza normale in Ω.

Dimostrazione. L'unicità è evidente: la derivazione termine a termine, lecita per il teorema 2.2.3, dà $a_\alpha = \partial^\alpha f(0)/\alpha!$. Per l'esistenza fissiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo Ω_ε come l'insieme degli $z \in \Omega$ tali che $d(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > \varepsilon|z|$, dove $|\cdot|$ è una norma in $\mathbb{C}^n$ e d la distanza associata. Si ha $0 \in \Omega_\varepsilon$ e Ω_ε è aperto. Sia Ω'_ε la componente di Ω_ε che contiene l'origine. È chiaro che Ω'_ε cresce per $\varepsilon \downarrow 0$. Poiché ogni $z \in \Omega$ si può congiungere a 0 con una poligonale in Ω, si ha $\Omega = \bigcup_{\varepsilon>0} \Omega'_\varepsilon$. Per $z \in \Omega'_\varepsilon$ poniamo

$$g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 T_\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n)}{(t_1 - 1) \cdots (t_n - 1)}\, dt_1 \cdots dt_n,$$

dove $T_\varepsilon = \{t : |t_j| \leq 1 + \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n\}$. L'integrale è definito, poiché la distanza da z a $(1+\varepsilon)z$ è $\varepsilon|z|$, cosicché $(1+\varepsilon)z \in \Omega$ per $z \in \Omega'_\varepsilon$. Siccome Ω è un dominio di Reinhardt, ne segue $(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) \in \Omega$ per ogni $t \in \partial_0 T_\varepsilon$. Derivando sotto il segno d'integrale si vede che g è analitica in Ω'_ε. Se ora $|z|$ è così piccolo che $(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) \in \Omega$ per ogni $t \in T_\varepsilon$, il teorema 2.2.1 dà $f(z) = g(z)$. Per la connessione di Ω'_ε si ha quindi $f = g$ in Ω'_ε.

Ora

$$(t_1 - 1)^{-1} \cdots (t_n - 1)^{-1} = \sum_\alpha t_1^{-\alpha_1 - 1} \cdots t_n^{-\alpha_n - 1}$$

con convergenza normale per $t \in \partial_0 T_\varepsilon$. Quando z varia in un compatto di Ω'_ε e $t \in \partial_0 T_\varepsilon$, il punto $(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n)$ resta in un compatto di Ω. Otteniamo quindi $f(z) = \sum_\alpha f_\alpha(z)$ con convergenza normale in Ω'_ε, dove

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 T_\varepsilon} f(t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) t_1^{-\alpha_1 - 1} \cdots t_n^{-\alpha_n - 1}\, dt_1 \cdots dt_n$$

è analitica in Ω'_ε. Come sopra, troviamo $f_\alpha(z) = z^\alpha \partial^\alpha f(0)/\alpha!$ in un intorno di 0 e quindi in Ω'_ε. La dimostrazione è conclusa.

Diremo che un dominio di Reinhardt è *logaritmicamente convesso* se possiede le proprietà dei domini di convergenza descritte nel teorema 2.4.3. È chiaro che l'interno dell'intersezione di una famiglia di domini di Reinhardt logaritmicamente convessi è ancora un dominio di Reinhardt logaritmicamente convesso. Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ esiste dunque un minimo dominio di Reinhardt logaritmicamente convesso che lo contiene, eventualmente l'intero $\mathbb{C}^n$. Dai teoremi 2.4.3 e 2.4.5 otteniamo ora il seguente risultato.

Teorema 2.4.6. Sia Ω un dominio di Reinhardt connesso contenente 0 e sia $\widetilde{\Omega}$ il minimo dominio di Reinhardt logaritmicamente convesso che lo contiene. Ogni funzione di $A(\Omega)$ si prolunga a una funzione di $A(\widetilde{\Omega})$.

Esempio. Se $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : \max(|z_1|, |z_2|) < 1,\ \min(|z_1|, |z_2|) < \varepsilon\}$, allora

$$\widetilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C}^2 : \max(|z_1|, |z_2|, |z_1 z_2|/\varepsilon) < 1\}.$$

2.5. Domini di olomorfia

Nei teoremi 2.3.2 e 2.4.6 abbiamo incontrato aperti $\Omega \subsetneq \widetilde{\Omega}$ tali che ogni $u \in A(\Omega)$ si prolunga a una funzione di $A(\widetilde{\Omega})$. Esaminiamo ora più da vicino questo fenomeno.

Definizione 2.5.1. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice *dominio di olomorfia* se non esistono aperti Ω_1, Ω_2 di $\mathbb{C}^n$ con le seguenti proprietà:

(a) $\varnothing \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$.

(b) Ω_2 è connesso e non è contenuto in Ω.

(c) Per ogni $u \in A(\Omega)$ esiste $u_2 \in A(\Omega_2)$, necessariamente unica, tale che $u = u_2$ in Ω_1.

In termini approssimativi, nessuna parte della frontiera può essere attraversata prolungando analiticamente tutti gli elementi di $A(\Omega)$. Vedremo che per ogni Ω esiste un massimo $\widetilde{\Omega}$ al quale si prolungano tutte le funzioni di $A(\Omega)$ e che $\widetilde{\Omega}$ è allora un dominio di olomorfia. Questo risultato vale però soltanto se si ammettono varietà complesse sopra $\mathbb{C}^n$. Qui consideriamo soltanto domini univalenti e rinviamo pertanto la discussione al § 5.4.

Definizione 2.5.2. Per un compatto $K \subset \Omega$ definiamo l'inviluppo $\widehat{K}_\Omega$ rispetto ad $A(\Omega)$ mediante

$$\widehat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f| \text{ per ogni } f \in A(\Omega)\}. \tag{2.5.1}$$

Prendendo $f(z) = \exp\langle z, \zeta\rangle$, si vede che $\widehat{K}_\Omega$ è contenuto nell'inviluppo convesso di K e quindi è limitato. È chiaro inoltre che $\widehat{K}_\Omega$ è chiuso in Ω, ma in generale può non essere un compatto di Ω (si veda il teorema 2.5.5). Se D è un polidisco aperto di centro 0, poniamo

$$\Delta_\Omega^D(z) = \sup\{r : \{z\} + rD \subset \Omega\}.$$

Lemma 2.5.3. Sia $f \in A(\Omega)$ e si supponga

$$|f(z)| \leq \Delta_\Omega^D(z), \qquad z \in K. \tag{2.5.2}$$

Sia $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$. Allora, per ogni $u \in A(\Omega)$, lo sviluppo in serie di potenze di u in ζ,

$$\sum_\alpha (z-\zeta)^\alpha \partial^\alpha u(\zeta)/\alpha!, \tag{2.5.3}$$

converge per z nel polidisco $\{\zeta\} + |f(\zeta)|D$.

Dimostrazione. Sia $D = \{z : |z_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$. Per $0 < t < 1$ l'insieme

$$\{z : |z_j - w_j| \leq t r_j |f(w)|,\ j = 1, \ldots, n,\ \text{per qualche } w \in K\}$$

è un compatto di Ω, sul quale dunque $|u| \leq M$ per un opportuno M. Dalle disuguaglianze di Cauchy otteniamo

$$|\partial^\alpha u(w)|\, t^{|\alpha|} r^\alpha |f(w)|^{|\alpha|}/\alpha! \leq M, \qquad w \in K.$$

Poiché $f^{|\alpha|}\partial^\alpha u$ è analitica in Ω, la stessa stima vale per $w \in \widehat{K}_\Omega$. Prendendo $w = \zeta$, concludiamo che la (2.5.3) converge nel polidisco $\{\zeta\} + |f(\zeta)|D$.

Sia ora δ una qualsiasi funzione continua su $\mathbb{C}^n$, positiva fuori dall'origine, tale che $\delta(tz) = |t|\delta(z)$ per $t \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Poniamo $\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) = \inf_{w \notin \Omega} \delta(z - w)$. È chiaro che questa funzione è continua rispetto a z.

Teorema 2.5.4. Sia Ω un dominio di olomorfia. Se $f \in A(\Omega)$ e

$$|f(z)| \leq \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega), \qquad z \in K,$$

con K compatto in Ω, la stessa disuguaglianza vale per $z \in \widehat{K}_\Omega$. In particolare, prendendo f costante, si ottiene

$$\inf_{z \in K,\, w \notin \Omega} \delta(z - w) = \inf_{z \in \widehat{K}_\Omega,\, w \notin \Omega} \delta(z - w).$$

Dimostrazione. Se $\{z : \delta(z) < 1\}$ è un polidisco D, il teorema segue dal lemma 2.5.3. Infatti, per definizione di dominio di olomorfia, gli sviluppi delle funzioni $u \in A(\Omega)$ in un punto $\zeta \in \widehat{K}_\Omega$ non possono convergere tutti in uno stesso polidisco che esca da Ω. Si può ora scrivere

$$\begin{aligned} \delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) &= \sup\{r \in \mathbb{R} : z + aw \in \Omega \text{ se } \delta(w) \leq 1,\ a \in \mathbb{C},\ |a| < r\} \\ &= \inf_{\delta(w) \leq 1} \delta_w(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega), \end{aligned}$$

dove $\delta_w(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) = \sup\{r \in \mathbb{R} : z + aw \in \Omega \text{ se } |a| < r\}$. Basta dunque provare l'asserto per δ_w, e possiamo naturalmente assumere $w = (1, 0, \ldots, 0)$. Posto

$$D_k = \{z : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1/k, \ldots, |z_n| < 1/k\},$$

la quantità $\Delta_\Omega^{D_k}(z)$ cresce verso $\delta_w(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ per $k \to \infty$. Per il teorema di Dini, dato $\varepsilon > 0$, da $|f(z)| \leq \delta_w(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ su K segue $|f(z)| \leq (1+\varepsilon)\Delta_\Omega^{D_k}(z)$ su K per k abbastanza grande. Per l'osservazione iniziale della dimostrazione,

$$|f(\zeta)| \leq (1+\varepsilon)\Delta_\Omega^{D_k}(\zeta) \leq (1+\varepsilon)\delta_w(\zeta, \mathbb{C}^n \setminus \Omega), \qquad \zeta \in \widehat{K}_\Omega.$$

Questo dimostra il teorema.

Possiamo ora caratterizzare i domini di olomorfia.

Teorema 2.5.5. Per un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ sono equivalenti le condizioni seguenti:

(i) Ω è un dominio di olomorfia.

(ii) Se $K \Subset \Omega$, allora $\widehat{K_\Omega} \Subset \Omega$ e, con le notazioni del teorema 2.5.4,

$$\sup_{z\in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)} = \sup_{z\in \widehat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega)}, \qquad f \in A(\Omega).$$

(iii) Se $K \Subset \Omega$, allora $\widehat{K_\Omega} \Subset \Omega$.

(iv) Esiste $f \in A(\Omega)$ che non può essere prolungata analiticamente oltre Ω: non esistono cioè Ω_1, Ω_2 che soddisfino (a) e (b) della definizione 2.5.1 e $f_2 \in A(\Omega_2)$ tale che $f = f_2$ in Ω_1.

Dimostrazione. Per il teorema 2.5.4, (i) implica (ii). Le implicazioni (ii)⇒(iii) e (iv)⇒(i) sono immediate. Resta da provare (iii)⇒(iv). Sia D un polidisco di centro 0. Per $\zeta \in \Omega$ sia D_ζ il massimo polidisco della forma $\{\zeta\} + rD$ contenuto in Ω. Sia M un insieme numerabile denso in Ω. Basta costruire una $f \in A(\Omega)$ che per nessun $\zeta \in M$ possa essere prolungata a un intorno di $\overline{D_\zeta}$. A tale scopo sia $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ una successione di elementi di M in cui ogni punto di M compare infinite volte. Siano $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ compatti di Ω tali che ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j. Poiché $\widehat{K_j} \Subset \Omega$, esiste $z_j \in D_{\zeta_j}$ con $z_j \notin \widehat{K_j}$. Si trova allora $f_j \in A(\Omega)$ tale che $f_j(z_j) = 1$ e $\sup_{K_j} |f_j| < 1$. Sostituendo, se occorre, f_j con una sua potenza sufficientemente elevata, possiamo supporre

$$f_j(z_j) = 1, \qquad \sup_{K_j} |f_j| < 2^{-j}. \tag{2.5.4}$$

Possiamo scegliere f_j in modo che non sia identicamente 1 su alcuna componente di Ω. Formiamo il prodotto infinito

$$f = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - f_j)^j.$$

Poiché $\sum_j j/2^j$ converge, il prodotto converge uniformemente su ogni K_l e definisce quindi una funzione $f \in A(\Omega)$ che non è identicamente nulla su alcuna componente di Ω. Tutte le derivate di f di ordine minore di j si annullano in z_j. Dato $\zeta \in M$, per ogni intero N possiamo dunque trovare in D_ζ punti in cui si annullano tutte le derivate di ordine minore di N. Un prolungamento analitico di f a un intorno di $\overline{D_\zeta}$ avrebbe quindi uno zero di ordine infinito e sarebbe identicamente nullo in D_ζ, il che è assurdo. La dimostrazione è conclusa.

Corollario 2.5.6. Se Ω è convesso in senso geometrico, è un dominio di olomorfia.

Corollario 2.5.7. Se Ω_α è un dominio di olomorfia per ogni α in un insieme di indici A, l'interno Ω di $\bigcap_{\alpha\in A} \Omega_\alpha$ è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Per $K \Subset \Omega$ si ha $\widehat{K_\Omega} \subset \widehat{K_{\Omega_\alpha}}$. Per ogni α, la distanza da $\widehat{K_\Omega}$ al complementare di Ω_α è quindi almeno pari alla distanza da K al complementare di Ω. È così verificata la condizione (iii) del teorema 2.5.5.

Corollario 2.5.8. Sia Ω un dominio di Reinhardt connesso contenente 0. Sono equivalenti le condizioni:

(i) Ω è il dominio di convergenza di una serie di potenze.

(ii) Ω è un dominio di olomorfia.

(iii) $\Omega^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : (e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) \in \Omega\}$ è un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$. Se $\xi \in \Omega^*$ e $\eta_j \le \xi_j$ per ogni j, allora $\eta \in \Omega^*$. Inoltre $z \in \Omega$ se e solo se esiste $\xi \in \Omega^*$ con $|z_j| \le e^{\xi_j}$ per $j = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Per il teorema 2.4.3, (i) implica (iii). Inoltre (ii) implica (i) in virtù del teorema 2.4.5. Resta da provare che (iii) implica (ii). Sia K un compatto in Ω. Possiamo trovare un insieme finito $k \subset \Omega$ tale che

$$K \subset \bigcup_{\zeta \in k} \{z : |z_i| \le |\zeta_i|,\ i = 1, \dots, n\},$$

e tale che nessuna coordinata ζ_i si annulli per $\zeta \in k$. Supponiamo $z \in \widehat{\overline{K_\Omega}}$ e $z_1 \cdots z_j \neq 0$, mentre $z_{j+1}, \dots, z_n$ sono tutte nulle. Possiamo ridurci a questo caso rinumerando le coordinate (l'origine appartiene già a Ω). Per ogni α si ha

$$|z_1^{\alpha_1} \cdots z_j^{\alpha_j}| \le \sup_{\zeta \in k} |\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_j^{\alpha_j}|.$$

Ponendo $\lambda_i = \alpha_i/(\alpha_1 + \cdots + \alpha_j)$ per somma positiva, ciò equivale a

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \log |z_i| \le \sup_{\zeta \in k} \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \log |\zeta_i|.$$

I λ_i sono razionali non negativi arbitrari di somma 1. La stima vale quindi anche per λ_i reali non negativi di somma 1. Questo significa che $(\log |z_1|, \dots, \log |z_j|) \in \mathbb{R}^j$ appartiene all'inviluppo convesso dell'insieme degli $(\eta_1, \dots, \eta_j)$ per i quali esiste $\zeta \in k$ con $\eta_i \le \log |\zeta_i|$ per $i = 1, \dots, j$. Pertanto esiste $\eta \in \Omega^*$ tale che $|z_i| \le e^{\eta_i}$ per $i = 1, \dots, j$, e quindi per tutti gli indici. Si ha così $\widehat{\overline{K_\Omega}} \subset \Omega$, e il corollario è dimostrato.

Abbiamo provato che ogni funzione analitica in un dominio di Reinhardt connesso contenente 0 si prolunga a una funzione analitica in un dominio di olomorfia che è ancora di Reinhardt. Il teorema seguente è analogo, ma più generale.

Definizione 2.5.9. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice *tubo* se esiste un aperto $\omega \subset \mathbb{R}^n$, detto *base* di Ω, tale che $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z \in \omega\}$.

È chiaro che l'inviluppo convesso $\operatorname{ch} \Omega$ è un tubo con base $\operatorname{ch} \omega$.

Teorema 2.5.10. Se Ω è un tubo connesso, ogni $u \in A(\Omega)$ si prolunga a una funzione di $A(\operatorname{ch} \Omega)$.

Dedurremo il teorema dal lemma 2.5.3 e dal lemma seguente.

Lemma 2.5.11. Sia Ω un tubo la cui base contenga l'inviluppo convesso di

$$k = \{(x_1, 0, \dots, 0) : 0 \le x_1 \le 1\} \cup \{(0, x_2, 0, \dots, 0) : 0 \le x_2 \le 1\}.$$

Per $0 < \varepsilon < 1/2$ si ponga

$$K_\varepsilon = \{(x_1, x_2, 0, \dots, 0) : x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1,\\ x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) \leq 1 - \varepsilon\},$$
$$k_\varepsilon = \{x + iy : x \in k,\ y_1^2 + y_2^2 \leq 1/\varepsilon,\ y_3 = \cdots = y_n = 0\}.$$

Allora l'inviluppo di $k_\varepsilon + i\eta$ rispetto ad $A(\Omega)$ contiene $K_\varepsilon + i\eta$ per ogni $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Possiamo assumere $\eta = 0$. Consideriamo

$$M_\varepsilon = \{(z_1, z_2, 0, \dots, 0) : \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 \geq 0, \quad \operatorname{Re}(z_1 + z_2) \leq 1,\\ z_1 + z_2 - \varepsilon(z_1^2 + z_2^2) = 1 - \varepsilon\}.$$

Scrivendo $z_j = x_j + iy_j$, in M_ε si ha

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - \varepsilon, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1. \end{gathered} \tag{2.5.5}$$

Ne segue $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ e $y_1^2 + y_2^2 \leq 1/\varepsilon$, dunque M_ε è compatto. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial z_1}(z_1 + z_2 - \varepsilon(z_1^2 + z_2^2)) = 1 - 2\varepsilon z_1 \neq 0 \quad \text{su } M_\varepsilon,$$

per il teorema delle funzioni implicite z_1 è localmente funzione analitica di z_2 su M_ε. Per simmetria vale anche il viceversa. Su M_ε si ha $x_1 + x_2 < 1$ salvo nei punti $(1, 0, \dots, 0)$ e $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Di conseguenza il bordo della superficie M_ε appartiene a k_ε e il massimo del modulo di una funzione di $A(\Omega)$ su M_ε è assunto in k_ε. L'inviluppo di k_ε contiene dunque

$$\{(x_1, x_2, 0, \dots, 0) : x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) = 1 - \varepsilon\}.$$

Poiché $\lambda k_\varepsilon \subset k_\varepsilon$ per $0 \leq \lambda \leq 1$, ne segue il lemma.

Dimostrazione del teorema 2.5.10. (a) Supponiamo dapprima che la base ω di Ω sia stellata rispetto all'origine: da $x \in \omega$ e $0 \leq t \leq 1$ segue $tx \in \omega$. Un tubo con base stellata è connesso, e l'intersezione di due tubi con basi stellate rispetto allo stesso punto è stellata e quindi connessa. Esiste dunque un tubo $\widetilde{\Omega}$ a base stellata $\widetilde{\omega}$ al quale si può prolungare analiticamente ogni $u \in A(\Omega)$ e che contiene ogni tubo stellato con questa proprietà. Basta infatti prendere l'unione di tutti questi tubi. Dobbiamo dimostrare che $\widetilde{\omega}$ è convessa. Siano ξ_1, ξ_2 due suoi elementi linearmente indipendenti. Possiamo scegliere coordinate in cui ξ_1, ξ_2 sono i versori degli assi x_1, x_2. Definiamo k come nel lemma 2.5.11 e scegliamo $\delta > 0$ in modo che $\Delta^D_{\widetilde{\Omega}}(z) > \delta$ per $z \in k$ (per le notazioni si veda il lemma 2.5.3). Poniamo

$$E = \{a \in [0, 1] : (x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in \widetilde{\omega} \text{ se } x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq a\}.$$

È chiaro che E è aperto in $[0, 1]$ e che $0 \in E$. Se $a \in E$ e $0 < \varepsilon < 1/2$, dal lemma 2.5.11 segue che per un opportuno compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ l'inviluppo di $k + iK$ rispetto ad $A(\widetilde{\Omega})$ contiene

$$L_{a,\varepsilon} = \{(x_1, x_2, 0, \dots, 0) : x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq (1 - \varepsilon)a\}.$$

Di conseguenza la serie di potenze di ogni $\widetilde{f} \in A(\widetilde{\Omega})$ in un punto ζ con $\operatorname{Re}\zeta \in L_{a,\varepsilon}$ converge in $\{\zeta\} + \delta D$. Se ne deduce che E è chiuso, quindi $E = [0, 1]$. È così dimostrata la convessità di $\widetilde{\omega}$.

(b) Sia ora ω un aperto connesso arbitrario di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo $0 \in \omega$. Indichiamo con $\widetilde{\Omega}$ il massimo tubo con base stellata rispetto all'origine tale che per ogni $f \in A(\Omega)$ esista $\widetilde{f} \in A(\widetilde{\Omega})$ coincidente con f vicino a 0. Per (a), $\widetilde{\Omega}$ è convesso. Supponiamo che non contenga tutto Ω. Esiste allora $x_0 \in \omega$ che non appartiene a $\widetilde{\omega}$ e, per la connessione di ω, possiamo congiungere x_0 a 0 con una poligonale in ω. Sia x_1 l'ultima intersezione della poligonale con $\partial\widetilde{\omega}$ percorrendola verso 0. Il tratto che congiunge x_1 a 0 appartiene a $\omega \cap \widetilde{\omega}$, salvo il punto x_1. Se $\omega_1 \subset \omega$ è un intorno convesso di x_1, la funzione f' uguale a $\widetilde{f}$ in $\widetilde{\omega} + i\mathbb{R}^n$ e a f in $\omega_1 + i\mathbb{R}^n$ è univocamente definita e analitica nel tubo con base $\widetilde{\omega} \cup \omega_1$, stellata rispetto a x_1. Per (a), f' si prolunga quindi al tubo con base $\mathrm{ch}(\widetilde{\omega} \cup \omega_1)$, stellata anche rispetto a 0. Ciò contraddice la definizione di $\widetilde{\Omega}$. Dunque $\widetilde{\Omega} \supset \Omega$ e, per l'unicità del prolungamento analitico, $\widetilde{f} = f$ in tutto Ω.

Esempio. Se P è un polinomio (o una funzione intera), le componenti dell'interno di $\{\xi : P(\xi + i\eta) \neq 0 \text{ per ogni } \eta \in \mathbb{R}^n\}$ sono tutte convesse. Basta applicare il teorema 2.5.10 a $1/P$. Si ottengono in particolare informazioni interessanti sui polinomi iperbolici (cfr. Hörmander [2], capitolo V).

Corollario 2.5.12 (al teorema 2.5.10). Un tubo è un dominio di olomorfia se e solo se ogni sua componente è convessa.

Elenchiamo infine alcune semplici costruzioni che conducono a domini di olomorfia.

Teorema 2.5.13. Sia Ω un dominio di olomorfia e siano $f_1, \ldots, f_N \in A(\Omega)$. Allora $\Omega_f = \{z \in \Omega : |f_j(z)| < 1,\ j = 1, \ldots, N\}$ è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Sia K un compatto in Ω_f. Scegliamo $r < 1$ tale che $|f_j| \leq r$ su K per $j = 1, \ldots, N$. La stessa disuguaglianza vale su $\widehat{K}_\Omega$, dunque $\widehat{K}_\Omega \subset \Omega_f$. Poiché Ω è un dominio di olomorfia, $\widehat{K}_\Omega$ è compatto. Dall'inclusione $\widehat{K}_{\Omega_f} \subset \widehat{K}_\Omega$ segue allora la compattezza di $\widehat{K}_{\Omega_f}$.

Una forma più generale dello stesso risultato è la seguente.

Teorema 2.5.14. Siano Ω, Ω' domini di olomorfia rispettivamente in $\mathbb{C}^n$ e in $\mathbb{C}^m$, e sia $u : \Omega \to \mathbb{C}^m$ un'applicazione analitica. Allora $\Omega_u = \{z \in \Omega : u(z) \in \Omega'\}$ è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Sia K un compatto in Ω_u. Poiché $\widehat{K}_{\Omega_u} \subset \widehat{K}_\Omega \Subset \Omega$, basta provare che $\widehat{K}_{\Omega_u}$ è chiuso in Ω. Ora $u(K)$ è un compatto di Ω' per la continuità di u, e il suo inviluppo K' rispetto ad $A(\Omega')$ è un compatto di Ω'. Per $f \in A(\Omega')$ e $\zeta \in \widehat{K}_{\Omega_u}$ si ha

$$|f(u(\zeta))| \leq \sup_{z \in K} |f(u(z))| = \sup_{w \in u(K)} |f(w)|.$$

Ciò significa che $u(\zeta) \in K'$. Pertanto u manda in K' ogni punto della chiusura di $\widehat{K}_{\Omega_u}$ in Ω. Ciascuno di questi punti appartiene quindi a Ω_u. La dimostrazione è conclusa.

Osservazione. Dall'ipotesi che Ω sia un dominio di olomorfia abbiamo utilizzato soltanto il fatto che $\widehat{K}_{\Omega_u} \Subset \Omega$ per ogni $K \Subset \Omega_u$. Se $\Omega_u \Subset \Omega$, possiamo dunque omettere l'ipotesi che Ω sia un dominio di olomorfia.

2.6. Pseudoconvessità e plurisubarmonicità

Finora abbiamo applicato il teorema 2.5.4 soltanto quando f è costante. Ne ricaveremo ora ulteriori informazioni. Sia z_0 un punto di un dominio di olomorfia Ω e sia $w \in \mathbb{C}^n$. Scegliamo r così piccolo che

$$D = \{z_0 + \tau w : \tau \in \mathbb{C},\ |\tau| \leq r\} \subset \Omega,$$

e sia $f(\tau)$ un polinomio analitico tale che

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \operatorname{Re} f(\tau), \qquad |\tau| = r.$$

Se scegliamo un polinomio analitico F in $\mathbb{C}^n$ tale che $F(z_0+\tau w) = f(\tau)$, possiamo scrivere l'ipotesi nella forma

$$|e^{-F(z)}| \leq \delta(z, \complement\Omega), \qquad z \in \partial D.$$

Per il principio del massimo l'inviluppo di ∂D rispetto ad $A(\Omega)$ contiene D. Dal teorema 2.5.4 segue quindi che $|e^{-F(z)}| \leq \delta(z, \complement\Omega)$ per $z \in D$, ossia

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \operatorname{Re} f(\tau), \qquad |\tau| \leq r.$$

La stessa conclusione è evidente se $w = 0$. Pertanto, fissati $z, w \in \mathbb{C}^n$, la funzione $-\log \delta(z + \tau w, \complement\Omega)$ è subarmonica rispetto a τ dove è definita (si veda la condizione (i) del teorema 1.6.3). Introduciamo un nome per queste funzioni.

Definizione 2.6.1. Una funzione u definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e a valori in $[-\infty, +\infty)$ si dice *plurisubarmonica* se

(a) u è semicontinua superiormente;

(b) per ogni $z, w \in \mathbb{C}^n$, la funzione $\tau \mapsto u(z + \tau w)$ è subarmonica nella parte di $\mathbb{C}$ in cui è definita.

Indicheremo con $P(\Omega)$ l'insieme di tutte queste funzioni.

Esempio. Se f è analitica, $\log |f|$ è plurisubarmonica.

Prima di proseguire, raccogliamo le proprietà delle funzioni plurisubarmoniche di cui avremo bisogno e che non sono conseguenze immediate delle proprietà analoghe delle funzioni subarmoniche.

Teorema 2.6.2. Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ è plurisubarmonica se e solo se

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \geq 0, \qquad z \in \Omega, \quad w \in \mathbb{C}^n. \tag{2.6.1}$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 1.6.10 alle funzioni $\tau \mapsto u(z + \tau w)$.

Teorema 2.6.3. Sia $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ nulla per $|z| > 1$, dipendente soltanto da $|z_1|, \ldots, |z_n|$ e tale che $\int \varphi(z)\, d\lambda(z) = 1$, dove $d\lambda$ è la misura di Lebesgue. Se u è plurisubarmonica in Ω, allora

$$u_\varepsilon(z) = \int u(z - \varepsilon\zeta)\varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta)$$

è plurisubarmonica, è di classe C^∞ dove $d(z, \complement\Omega) > \varepsilon$ e $u_\varepsilon \searrow u$ per $\varepsilon \searrow 0$. (Supponiamo $u \not\equiv -\infty$.)

Dimostrazione. Nel caso $n = 1$ abbiamo provato, nella dimostrazione del teorema 1.6.11, che u_ε decresce quando $\varepsilon \searrow 0$. Iterando questo risultato vediamo che u_ε decresce anche per $n > 1$. Dal caso $n = 1$ si ricava subito anche $u \leq u_\varepsilon$. Poiché la semicontinuità superiore dà $\limsup_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon \leq u$, concludiamo che $u_\varepsilon \searrow u$ per $\varepsilon \searrow 0$. La plurisubarmonicità di u_ε segue immediatamente dal teorema 1.6.10.

Viceversa, dal teorema 1.6.2 segue subito che il limite di una successione decrescente di funzioni plurisubarmoniche è plurisubarmonico.

Teorema 2.6.4. Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e $\Omega' \subset \mathbb{C}^m$, sia f un'applicazione analitica di Ω in Ω' e sia $u \in P(\Omega')$. Allora $f^*u \in P(\Omega)$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $u \in C^2(\Omega')$. Si ha

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 (u \circ f)(z)}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial f_j \, \partial \bar{f}_k} g_j \bar{g}_k \geq 0, \qquad g_j = \sum_{l=1}^{n} w_l \frac{\partial f_j}{\partial z_l}.$$

Dunque $f^*u \in P(\Omega)$. Per una generica $u \in P(\Omega')$ basta scegliere, mediante il teorema 2.6.3, una successione di funzioni plurisubarmoniche di classe C^∞ che decresca verso u e applicare l'osservazione che precede il teorema.

Si noti che il teorema 2.6.4 rafforza la condizione (b) della definizione 2.6.1 anche quando $n = 1$.

Possiamo ora enunciare il risultato ottenuto all'inizio del paragrafo.

Teorema 2.6.5. Se Ω è un dominio di olomorfia e $\delta(z, \complement\Omega)$ è definita come nel teorema 2.5.4, allora $-\log \delta(z, \complement\Omega)$ è plurisubarmonica e continua.

Nel capitolo IV dimostreremo il viceversa. Già a questo punto possiamo tuttavia discutere alcune forme equivalenti della condizione appena ottenuta.

Definizione 2.6.6. Se K è un sottoinsieme compatto dell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, definiamo l'*inviluppo di K rispetto a $P(\Omega)$* mediante

$$\widehat{K}_\Omega^P = \{z \in \Omega : u(z) \leq \sup_K u \text{ per ogni } u \in P(\Omega)\}.$$

È chiaro che l'inviluppo di K rispetto a $P(\Omega)$ è contenuto nel suo inviluppo rispetto ad $A(\Omega)$.

Teorema 2.6.7. Per un aperto Ω in $\mathbb{C}^n$ le seguenti condizioni sono equivalenti.

(i) $-\log \delta(z, \complement\Omega)$ è plurisubarmonica in Ω, con δ definita come nel teorema 2.5.4.

(ii) Esiste in Ω una funzione plurisubarmonica continua u tale che

$$\Omega_c = \{z \in \Omega : u(z) < c\} \Subset \Omega \qquad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}.$$

(iii) $\widehat{K}_\Omega^P \Subset \Omega$ se $K \Subset \Omega$.

Dimostrazione. Se vale (i), basta porre $u(z) = |z|^2 - \log \delta(z, \complement\Omega)$ per ottenere una funzione che soddisfa (ii). È evidente che (ii) implica (iii), quindi resta solo da provare che (iii) implica (i). Siano $z_0 \in \Omega$, $0 \neq w \in \mathbb{C}^n$ e scegliamo $r > 0$ tale che

$$D = \{z_0 + \tau w : |\tau| \leq r\} \subset \Omega.$$

Sia $f(\tau)$ un polinomio analitico tale che

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \operatorname{Re} f(\tau), \qquad |\tau| = r,$$

ossia

$$\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \geq |e^{-f(\tau)}|, \qquad |\tau| = r. \tag{2.6.2}$$

Vogliamo dimostrare la stessa disuguaglianza per $|\tau| \leq r$. Prendiamo un vettore arbitrario $a \in \mathbb{C}^n$ con $\delta(a) < 1$ e consideriamo, per $0 \leq \lambda \leq 1$, l'applicazione

$$\tau \mapsto z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}, \qquad |\tau| \leq r.$$

Indichiamo con D_λ la sua immagine. Si ha $D_0 = D$. Poniamo

$$\Lambda = \{\lambda : 0 \le \lambda \le 1,\ D_\lambda \subset \Omega\}.$$

È chiaro che Λ è un aperto di $[0,1]$. Per provare che coincide con l'intero intervallo mostreremo che è chiuso. Sia K il compatto

$$K = \{z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)} : |\tau| = r,\ 0 \le \lambda \le 1\},$$

contenuto in Ω per la (2.6.2). Se $u \in P(\Omega)$ e $\lambda \in \Lambda$, la funzione $\tau \mapsto u(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)})$ è subarmonica in un intorno del disco $|\tau| \le r$. Dunque

$$u(z_0 + \tau w + \lambda a e^{-f(\tau)}) \le \sup_K u \qquad \text{per } |\tau| \le r.$$

Pertanto $D_\lambda \subset \widehat{K}_\Omega^P$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ne segue che Λ è chiuso, poiché per (iii) $\widehat{K}_\Omega^P$ è relativamente compatto in Ω. Abbiamo così $D_1 \subset \Omega$, ossia

$$z_0 + \tau w + a e^{-f(\tau)} \in \Omega \qquad \text{se } \delta(a) < 1, \quad |\tau| \le r.$$

Di conseguenza $|\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega)| \ge |e^{-f(\tau)}|$ per $|\tau| \le r$, ossia

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \le \operatorname{Re} f(\tau), \qquad |\tau| \le r.$$

Questo prova (i).

Definizione 2.6.8. L'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice *pseudoconvesso* se sono soddisfatte le condizioni equivalenti del teorema 2.6.7.

Poiché l'estremo superiore di una famiglia di funzioni plurisubarmoniche è plurisubarmonico se è continuo, dalla condizione (i) del teorema 2.6.7 otteniamo il seguente risultato.

Teorema 2.6.9. Se Ω_α è un aperto pseudoconvesso per ogni α appartenente a un insieme di indici A, anche l'interno Ω di $\bigcap_{\alpha\in A} \Omega_\alpha$ è pseudoconvesso.

L'enunciato corrispondente per i domini di olomorfia è stato dato nel corollario 2.5.7. Il teorema che segue è invece tutt'altro che ovvio per i domini di olomorfia. Anzi, in quel caso esso equivale sostanzialmente alla coincidenza dei domini di olomorfia con i domini pseudoconvessi, che dimostreremo nel capitolo IV.

Teorema 2.6.10. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se ogni punto di $\overline{\Omega}$ ha un intorno ω tale che $\omega \cap \Omega$ sia pseudoconvesso, allora Ω è pseudoconvesso.

La condizione del teorema impone naturalmente una restrizione solo su $\partial\Omega$. In termini informali, il teorema afferma che la pseudoconvessità è una proprietà locale della frontiera.

Dimostrazione del teorema 2.6.10. Sia $z_0 \in \partial\Omega$ e scegliamo un intorno ω di z_0 come nell'ipotesi. Allora $\delta(z, \complement\Omega) = \delta(z, \complement(\Omega \cap \omega))$ per ogni z sufficientemente vicino a z_0. Pertanto $-\log \delta(z, \complement\Omega)$ è plurisubarmonica in Ω in prossimità di ogni punto di $\partial\Omega$. Esiste dunque un chiuso $F \subset \Omega$ tale che $-\log \delta(z, \complement\Omega)$ sia plurisubarmonica in $\Omega \setminus F$. Prendiamo una funzione continua $\varphi \in P(\mathbb{C}^n)$ (per esempio una funzione convessa crescente di $|z|^2$) tale che $\varphi(z) > -\log \delta(z, \complement\Omega)$ per $z \in F$ e $\varphi(z) \to \infty$ per $|z| \to \infty$. Allora $u(z) = \sup(\varphi(z), -\log \delta(z, \complement\Omega))$ appartiene a $P(\Omega)$, poiché $u = \varphi$ in un intorno di F e l'estremo superiore di due funzioni plurisubarmoniche è plurisubarmonico. La funzione u soddisfa chiaramente la condizione (ii) del teorema 2.6.7. Questo prova che Ω è pseudoconvesso.

In vista del capitolo IV enunciamo una proprietà dell'inviluppo rispetto a $P(\Omega)$ che appare molto più forte di quella della definizione 2.6.6.

Teorema 2.6.11. Siano Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$, K un sottoinsieme compatto di Ω e ω un intorno aperto di $\widehat{K}_\Omega^P$. Esiste allora una funzione $u \in C^\infty(\Omega)$ tale che

(a) u è strettamente plurisubarmonica, ossia la forma hermitiana in (2.6.1) è definita positiva per ogni $z \in \Omega$;

(b) $u < 0$ su K e $u > 0$ in $\Omega \cap \complement\omega$;

(c) $\{z \in \Omega : u(z) < c\} \Subset \Omega$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Costruiamo dapprima una funzione continua $v \in P(\Omega)$ che soddisfi (b) e (c). Scegliamo a tal fine una funzione u_0 con le proprietà elencate in (ii) del teorema 2.6.7. Aggiungendo se occorre una costante, possiamo supporre $u_0 < 0$ su K. Poniamo

$$K' = \{z \in \Omega : u_0(z) \le 2\}, \qquad L = \{z \in \Omega \cap \complement\omega : u_0(z) \le 0\}.$$

Entrambi gli insiemi sono compatti. Per ogni $z \in L$ possiamo scegliere $w \in P(\Omega)$ tale che $w(z) > 0$ e $w < 0$ su K. Mediante una regolarizzazione come nel teorema 2.6.3 otteniamo in un intorno di K' una funzione plurisubarmonica continua w_1, negativa su K e positiva in un intorno di z. Poiché L è compatto, applicando il lemma di Borel–Lebesgue e ricordando che il massimo di una famiglia finita di funzioni plurisubarmoniche è plurisubarmonico, possiamo costruire in un intorno di K' una funzione plurisubarmonica continua w_2 tale che $w_2 > 0$ in un intorno di L e $w_2 < 0$ su K. Sia C il massimo di w_2 su K' e poniamo, per $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} v(z) &= \sup(w_2(z), Cu_0(z)) && \text{se } u_0(z) < 2, \\ v(z) &= Cu_0(z) && \text{se } u_0(z) > 1. \end{aligned}$$

Le definizioni concordano per $1 < u_0(z) < 2$. Dunque v è una funzione plurisubarmonica continua in Ω che soddisfa evidentemente (b) e (c).

Sia $\Omega_c = \{z \in \Omega : v(z) < c\}$. Con le notazioni del teorema 2.6.3 poniamo

$$v_j(z) = \int_{\Omega_{j+1}} v(\zeta)\varphi((z-\zeta)/\varepsilon)\varepsilon^{-2n}\, d\lambda(\zeta) + \varepsilon|z|^2, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Scegliendo ε sufficientemente piccolo in dipendenza da j, otteniamo $v_j \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, maggiore di v e strettamente plurisubarmonica in un intorno di $\overline{\Omega_j}$. Scegliendo opportunamente ε possiamo anche fare in modo che $v_0 < 0$ e $v_1 < 0$ su K e che $v_j < v + 1$ in Ω_j per $j = 1, 2, \ldots$. Prendiamo ora una funzione convessa $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\chi(t) = 0$ per $t < 0$ e $\chi'(t) > 0$ per $t > 0$. Allora $\chi(v_j + 1 - j)$ è strettamente plurisubarmonica in un intorno di $\overline{\Omega_j} \setminus \Omega_{j-1}$. Possiamo dunque scegliere successivamente numeri positivi $a_1, a_2, \ldots$ tali che

$$u_m = v_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \chi(v_j + 1 - j)$$

sia maggiore di v e strettamente plurisubarmonica in un intorno di $\overline{\Omega_m}$. Si ha $u_m = u_l$ in Ω_j per $l, m > j$, quindi $u = \lim u_m$ esiste ed è una funzione di classe C^∞ strettamente plurisubarmonica in Ω. Poiché $u = v_0 < 0$ su K e $u > v$ in Ω, seguono (a), (b) e (c).

Applicando il teorema 2.6.11 a $\omega = \Omega \setminus \{x\}$, dove $x \notin \widehat{K}_\Omega^P$, vediamo che nella definizione 2.6.6 possiamo limitarci alle $u \in P(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Pertanto $\widehat{K}_\Omega^P$ è chiuso, e quindi compatto, se K è un sottoinsieme compatto di Ω e Ω è pseudoconvesso.

Esaminiamo ora quando un aperto con frontiera di classe C^2 è pseudoconvesso.

Teorema 2.6.12. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un aperto con frontiera di classe C^2. Sia $\Omega = \{z : \rho(z) < 0\}$, dove ρ è di classe C^2 in un intorno di $\overline{\Omega}$ e $\operatorname{grad}\rho \neq 0$ su $\partial\Omega$. Allora Ω è pseudoconvesso se e solo se

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k} w_j\bar{w}_k \geq 0 \quad \text{quando } z \in \partial\Omega, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j} w_j = 0. \tag{2.6.3}$$

La (2.6.3) si chiama *condizione di Levi*. Quando essa vale si dice anche che $\partial\Omega$ è pseudoconvessa.

Dimostrazione. Se ρ_1 è un'altra funzione che soddisfa le ipotesi del teorema, allora $\rho_1 = h\rho$ con $h > 0$ in un intorno di $\overline{\Omega}$. Di conseguenza

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho_1}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k} w_j\bar{w}_k = h \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k} w_j\bar{w}_k \quad \text{se } \rho = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j} w_j = 0.$$

Questo prova che la (2.6.3) è indipendente dalla scelta di ρ. Per dimostrare che, se Ω è pseudoconvesso, esiste una funzione che soddisfa la (2.6.3), poniamo

$$\rho(z) = -\delta(z, \complement\Omega) \text{ in } \Omega, \qquad \rho(z) = \delta(z, \Omega) \text{ in } \complement\Omega,$$

dove δ è, per esempio, la distanza euclidea. Allora $\rho \in C^2$ vicino alla frontiera di Ω (per il teorema delle funzioni implicite). Nei punti di Ω sufficientemente vicini a $\partial\Omega$, la plurisubarmonicità di $-\log\delta$ significa che

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left(-\delta^{-1} \frac{\partial^2\delta}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k} + \delta^{-2} \frac{\partial\delta}{\partial z_j} \frac{\partial\delta}{\partial\bar{z}_k} \right) w_j\bar{w}_k \geq 0.$$

Ne segue

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k} w_j\bar{w}_k \geq 0 \quad \text{se } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j} w_j = 0.$$

Un passaggio al limite mostra che ciò vale anche su $\partial\Omega$.

Per dimostrare il viceversa possiamo, grazie alla prima parte della dimostrazione, supporre che la (2.6.3) valga con la ρ appena definita. Supponiamo ora che, per un $w \in \mathbb{C}^n$,

$$c = \frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\bar{\tau}} \log\delta(z + \tau w, \complement\Omega)\bigg|_{\tau=0} > 0$$

in un punto z così vicino a $\partial\Omega$ che δ sia di classe C^2 in z. Per la formula di Taylor,

$$\log\delta(z + \tau w, \complement\Omega) = \log\delta(z, \complement\Omega) + \operatorname{Re}(A\tau + B\tau^2) + c|\tau|^2 + o(|\tau|^2), \qquad \tau \to 0,$$

dove A, B sono costanti. Scegliamo $a \in \mathbb{C}^n$ con $\delta(a) = \delta(z, \complement\Omega)$ e $z + a \in \partial\Omega$, e poniamo

$$z(\tau) = z + \tau w + a\exp(A\tau + B\tau^2).$$

Allora, per $|\tau|$ sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned} \delta(z(\tau), \complement\Omega) &\geq \delta(z + \tau w, \complement\Omega) - \delta(a)|\exp(A\tau + B\tau^2)| \\ &\geq \delta(a)(e^{c|\tau|^2/2} - 1)|e^{A\tau + B\tau^2}|. \end{aligned}$$

Poiché $\delta(z(0), \complement\Omega) = 0$, ne concludiamo che, per $\tau = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(z(\tau), \complement\Omega) = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial\bar{\tau}}\delta(z(\tau), \complement\Omega) > 0.$$

Con la notazione ρ usata sopra, poiché $z(\tau)$ è analitica in τ, questo significa che

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j} z_j'(0) = 0, \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} z_j'(0) \overline{z_k'(0)} < 0.$$

Ciò contraddice la (2.6.3) in $z(0)$ e conclude la dimostrazione. (Si noti l'analogia con la dimostrazione del teorema 2.6.7.)

La necessità della (2.6.3) si dimostra facilmente anche per via diretta. Quando la (2.6.3) è violata si può persino provare un teorema locale di prolungamento analogo al teorema 2.3.2′.

Teorema 2.6.13. Sia ρ una funzione di classe C^4 in un intorno ω di z_0, tale che $\rho(z_0) = 0$ e $\operatorname{grad} \rho(z_0) \neq 0$. Supponiamo inoltre che

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z_0)}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k < 0 \quad \text{per qualche } w \in \mathbb{C}^n \text{ con } \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial \rho(z_0)}{\partial z_j} = 0. \tag{2.6.4}$$

Allora esiste un intorno $\omega' \subset \omega$ di z_0 tale che, per ogni $u \in C^4(\omega)$ che soddisfi le equazioni tangenziali di Cauchy–Riemann, $\bar{\partial} u \wedge \bar{\partial} \rho = 0$ su $\{z \in \omega' : \rho(z) = 0\}$, si possa trovare $U \in C^1(\omega')$ con $U = u$ dove $\rho = 0$ e $\bar{\partial} U = 0$ in $\omega'_+ = \{z \in \omega' : \rho(z) \geq 0\}$.

Dimostrazione. Con un cambiamento lineare di coordinate possiamo supporre $z_0 = 0$ e $\rho(x) = x_{2n} + A(x) + O(|x|^3)$, dove A è una forma quadratica. La formula di Taylor dà

$$A(x) = \sum_{j,k=1}^{n} z_j \bar{z}_k \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} + \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^{n} z_j z_k \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \, \partial z_k}.$$

Con il cambiamento analitico di variabili

$$z_j' = z_j \quad (j \leq n-1), \qquad z_n' = z_n + i \sum_{j,k=1}^{n} z_j z_k \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \, \partial z_k},$$

lo sviluppo di Taylor di ρ assume la forma più semplice

$$\rho = \operatorname{Im} z_n' + \sum_{j,k=1}^{n} z_j' \overline{z_k'} \frac{\partial^2 \rho(0)}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} + O(|z'|^3).$$

Per alleggerire le notazioni possiamo perciò supporre senza restrizioni che le coordinate iniziali siano state scelte in modo che

$$\rho = \operatorname{Im} z_n + \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3),$$

dove (A_{jk}) è una matrice hermitiana. L'ipotesi (2.6.4) significa che la forma $\sum_{j,k=1}^{n-1} A_{jk} z_j \bar{z}_k$ non è definita positiva. Con un cambiamento lineare di coordinate possiamo ottenere $A_{11} < 0$. Poiché

$$\rho(z_1, 0, \ldots, 0) = A_{11} |z_1|^2 + O(|z_1|^3),$$

possiamo scegliere prima $\delta > 0$ e poi $\varepsilon > 0$ in modo che $\partial^2 \rho / \partial z_1 \partial \bar{z}_1 < 0$ in

$$\omega' = \{z : |z_1| < \delta, \ |z_2| + \cdots + |z_n| < \varepsilon\} \subset \omega$$

e che $\rho < 0$ sulla parte della frontiera dove $|z_1| = \delta$. Fissati $z_2, \ldots, z_n$ con $|z_2| + \cdots + |z_n| < \varepsilon$, l'insieme degli z_1 tali che $|z_1| < \delta$ e $\rho < 0$ è connesso, poiché ρ, come funzione di z_1, non

può avere un minimo locale. La dimostrazione del teorema 2.3.1 si applica quindi senza modifiche. Per ogni forma $f \in C^k_{(0,1)}(\omega')$, $k > 0$, tale che $\bar\partial f = 0$ e nulla fuori di ω'_+, esiste una soluzione $u \in C^k(\omega')$ dell'equazione $\bar\partial u = f$ che si annulla fuori di ω'_+. La tesi segue allora ripetendo la dimostrazione del teorema 2.3.2′. Lasciamo i dettagli al lettore per esercizio.

Se su una superficie liscia in $\mathbb{C}^n$ è data una funzione u che soddisfa le equazioni tangenziali di Cauchy–Riemann, è dunque possibile prolungarla analiticamente da almeno un lato dell'ipersuperficie in un intorno di ogni punto in cui la forma di Levi (2.6.3) non si annulla identicamente. Quando invece la forma si annulla identicamente, può mancare ogni prolungamento. Per esempio, qualunque funzione di x_{2n-1} soddisfa le equazioni tangenziali di Cauchy–Riemann nell'iperpiano $x_{2n} = 0$, ma in generale non esiste alcun prolungamento analitico.

2.7. Domini di Runge

Dimostreremo un teorema di approssimazione che estende il corollario 1.3.2 e, nello stesso contesto, un teorema di esistenza per l'operatore $\bar\partial$. I metodi elementari che impieghiamo qui non consentono di trattare domini di olomorfia generali. Torneremo su queste questioni nel capitolo IV.

Definizione 2.7.1. Un dominio di olomorfia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice *dominio di Runge* se i polinomi sono densi in $A(\Omega)$, ossia se ogni $f \in A(\Omega)$ può essere approssimata uniformemente su ogni compatto di Ω mediante polinomi analitici.

Poiché dagli sviluppi in serie di potenze risulta che i polinomi sono densi in $A(\mathbb{C}^n)$, nella definizione avremmo potuto considerare anche funzioni intere arbitrarie al posto dei polinomi. Nel seguito poniamo, per ogni compatto K (cfr. la definizione 2.5.2),

$$\widetilde{K} = \widehat{K}_{\mathbb{C}^n} = \{z \in \mathbb{C}^n : |P(z)| \le \sup_K |P| \text{ per ogni polinomio } P\}.$$

Definizione 2.7.2. I compatti K tali che $K = \widetilde{K}$ si dicono *polinomialmente convessi*.

Dimostreremo il teorema seguente (cfr. il teorema 1.3.4).

Teorema 2.7.3. Per un dominio di olomorfia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ le condizioni seguenti sono equivalenti.

(i) Ω è un dominio di Runge.

(ii) Per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha $\widetilde{K} = \widehat{K}_\Omega$.

(iii) Per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha $\widetilde{K} \cap \Omega = \widehat{K}_\Omega$.

(iv) Per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha $\widetilde{K} \cap \Omega \Subset \Omega$.

Dimostrazione. L'implicazione (i) ⇒ (iii) segue dalle definizioni di $\widehat{K}_\Omega$ e di dominio di Runge. L'implicazione (ii) ⇒ (iii) è immediata, mentre (iii) ⇒ (iv) poiché Ω è un dominio di olomorfia. Dimostreremo le implicazioni restanti (iv) ⇒ (ii) ⇒ (i) più avanti in questo paragrafo, dopo aver studiato l'equazione $\bar\partial u = f$ negli intorni dei compatti polinomialmente convessi.

Diremo che un compatto K ha la *proprietà di Cousin* se, per ogni $f \in C^\infty_{(p,q+1)}$ tale che $\bar\partial f = 0$ in un intorno di K $(p, q \ge 0)$, l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}$ in

un qualche intorno di K. Vogliamo provare che tutti i compatti polinomialmente convessi hanno la proprietà di Cousin. Li approssimiamo dapprima mediante insiemi di tipo più semplice.

Lemma 2.7.4. Siano K un compatto polinomialmente convesso e ω un suo intorno. Esistono polinomi $P_1, \dots, P_m$ tali che

$$K \subset \{z : |P_j(z)| \leq 1,\ j = 1, \dots, m\} = L \subset \omega.$$

L'insieme L si chiama *poliedro polinomiale* ed è evidentemente polinomialmente convesso.

Dimostrazione. Poniamo $P_j(z) = a_j z_j$, per $j = 1, \dots, n$, scegliendo gli $a_j > 0$ così piccoli che $|P_j| \leq 1$ su K. Per ogni $z \in \complement\omega$ con $|a_j z_j| \leq 1$ per $j = 1, \dots, n$, esiste un polinomio P tale che $|P(z)| > 1$ e $\sup_K |P| \leq 1$. Dal lemma di Borel–Lebesgue segue che si possono scegliere $P_{n+1}, \dots, P_m$ in modo da ottenere la tesi.

Il seguente lemma fondamentale è dovuto essenzialmente a Oka [1].

Lemma 2.7.5. Siano K un compatto in $\mathbb{C}^n$, D il disco unitario chiuso in $\mathbb{C}$ e P un polinomio in $\mathbb{C}^n$. Indichiamo con μ l'applicazione di Oka

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto (z, P(z)) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

e poniamo $K_P = \{z \in K : |P(z)| \leq 1\}$. Supponiamo che l'insieme $K \times D$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ abbia la proprietà di Cousin. Allora

(a) K_P ha la proprietà di Cousin;

(b) per ogni $f \in C^\infty_{(p,q)}$ $(p, q \geq 0)$ con $\bar\partial f = 0$ in un intorno di K_P, esiste $F \in C^\infty_{(p,q)}$ con $\bar\partial F = 0$ in un intorno di $K \times D$ e tale che $f = \mu^* F$ in un intorno di K_P.

Si osservi che $K_P = \mu^{-1}(K \times D)$. La notazione μ^* è stata introdotta nel paragrafo 2.1.

Dimostrazione. Dimostriamo prima (b). Sia π la proiezione $\mathbb{C}^{n+1} \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{C}^n$. Allora $\pi \circ \mu$ è l'identità. Se ω è un aperto contenente K_P, con $f \in C^\infty_{(p,q)}(\omega)$ e $\bar\partial f = 0$ in ω, allora $\pi^* f \in C^\infty_{(p,q)}(\pi^{-1}\omega)$ e $\bar\partial \pi^* f = \pi^* \bar\partial f = 0$ in $\pi^{-1}\omega$, che è un intorno di

$$\mu K_P = \{(z, w) \in K \times D : w = P(z)\}.$$

Abbiamo $\mu^* \pi^* f = (\pi\mu)^* f = f$ in ω. Sia ora $\varphi \in C^\infty_0(\pi^{-1}\omega)$ uguale a 1 in un intorno di μK_P e poniamo

$$F = \varphi \pi^* f - QG,$$

dove $Q(z, w) = w - P(z)$ e G è una forma di tipo (p, q) in un intorno di $K \times D$, da determinare in modo che $\bar\partial F = 0$. Si noti che $\mu^* F = (\mu^*\varphi) f = f$ in un intorno di K_P. Poiché $\pi^* f$ è $\bar\partial$-chiusa, l'equazione $\bar\partial F = 0$ si scrive $Q\bar\partial G = \bar\partial\varphi \wedge \pi^* f$. Abbiamo dunque l'equazione

$$\bar\partial G = \frac{1}{Q} \bar\partial\varphi \wedge \pi^* f = H.$$

Poiché $\bar\partial\varphi = 0$ in un intorno di μK_P, si ha $H \in C^\infty_{(p,q+1)}$ in un intorno di $K \times D$, e $\bar\partial H = (1/Q)\bar\partial^2\varphi \wedge \pi^* f = 0$. Per ipotesi $K \times D$ ha la proprietà di Cousin. Possiamo quindi trovare in un suo intorno una soluzione $G \in C^\infty_{(p,q)}$ dell'equazione $\bar\partial G = H$. Questo prova (b).

Per provare (a), prendiamo $f \in C^\infty_{(p,q+1)}$ con $\bar\partial f = 0$ in un intorno di K_P. Per (b) possiamo scegliere $F \in C^\infty_{(p,q+1)}$ tale che $\bar\partial F = 0$ in un intorno di $K \times D$ e $f = \mu^* F$. Poiché

$K \times D$ ha la proprietà di Cousin, l'equazione $\bar\partial U = F$ ha una soluzione $U \in C^\infty_{(p,q)}$ in un intorno di $K \times D$. Posto $u = \mu^* U$, segue $\bar\partial u = \mu^* \bar\partial U = \mu^* F = f$ in un intorno di K_P. La dimostrazione è conclusa.

Osservazione. La dimostrazione di (a) richiede l'esistenza di soluzioni dell'equazione $\bar\partial G = H$ in un intorno di $K \times D$ sia per forme H di tipo $(p, q+1)$ sia per forme di tipo $(p, q+2)$. È questa la ragione principale per cui non possiamo limitarci alle forme H di tipo $(0, 1)$.

Dal teorema 2.3.3 sappiamo che ogni polidisco chiuso ha la proprietà di Cousin. Applicando ripetutamente il lemma 2.7.5 otteniamo quindi il seguente teorema.

Teorema 2.7.6. Siano Δ un polidisco chiuso in $\mathbb{C}^n$, D il disco unitario chiuso in $\mathbb{C}$ e $P_1, \dots, P_m$ dei polinomi. Indichiamo con μ l'applicazione di Oka

$$\mathbb{C}^n \ni z \mapsto (z, P_1(z), \dots, P_m(z)) \in \mathbb{C}^{n+m}$$

e poniamo $K = \{z \in \Delta : |P_j(z)| \le 1,\ j = 1, \dots, m\} = \mu^{-1}(\Delta \times D^m)$. Allora

(a) K ha la proprietà di Cousin;

(b) per ogni $f \in C^\infty_{(p,q)}$ $(p, q \ge 0)$ con $\bar\partial f = 0$ in un intorno di K, esiste $F \in C^\infty_{(p,q)}$ con $\bar\partial F = 0$ in un intorno di $\Delta \times D^m$ e tale che $f = \mu^* F$ in un intorno di K.

Dimostrazione. Il lemma 2.7.5 dà subito la dimostrazione per induzione su m.

Dedurremo alcune conseguenze del teorema 2.7.6. In particolare completeremo la dimostrazione del teorema 2.7.3.

Teorema 2.7.7. Sia f una funzione analitica in un intorno di un compatto polinomialmente convesso K. Allora esiste una successione di polinomi analitici f_j tale che $f_j \to f$ uniformemente su K.

Dimostrazione. Per il lemma 2.7.4 possiamo scegliere un poliedro polinomiale compatto L che contenga K e sia tale che f sia analitica in un intorno di L. Scegliamo un polidisco chiuso Δ di centro 0 contenente L e scriviamo

$$L = \{z \in \Delta : |P_j(z)| \le 1,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Per il teorema 2.7.6 (b) possiamo trovare una funzione F analitica in un intorno del polidisco $\Delta \times D^m$ in $\mathbb{C}^{n+m}$ tale che

$$f(z) = F(z, P_1(z), \dots, P_m(z))$$

in un intorno di L. Se $F_k(z, w)$ sono le somme parziali dello sviluppo in serie di potenze di $F(z, w)$, si ha $F_k \to F$ uniformemente sul polidisco $\Delta \times D^m$. Dunque

$$F_k(z, P_1(z), \dots, P_m(z)) \to F(z, P_1(z), \dots, P_m(z)) = f(z)$$

uniformemente su L, il che prova il teorema.

Conclusione della dimostrazione del teorema 2.7.3. Che (ii) implichi (i) segue immediatamente dal teorema 2.7.7. Per provare che (iv) implica (ii) poniamo

$$K_1 = \widetilde{K} \cap \Omega, \qquad K_2 = \widetilde{K} \cap \complement\Omega.$$

Allora K_1 è compatto per (iv) e K_2, essendo un sottoinsieme chiuso di $\widetilde{K}$, è anch'esso compatto. Poiché K_1 e K_2 sono disgiunti, possiamo definire una funzione analitica in un

intorno di $\widetilde{K}$ ponendo $f = 0$ in un intorno di K_1 e $f = 1$ in un intorno di K_2. Poiché $\widetilde{K}$ è polinomialmente convesso, per il teorema 2.7.7 possiamo trovare un polinomio g con $|g - f| < \frac{1}{2}$ su $\widetilde{K}$. Abbiamo quindi $|g| < \frac{1}{2}$ su $K_1 \supset K$ e $|g| > \frac{1}{2}$ su K_2. Poiché $K_2 \subset \widetilde{K}$, concludiamo che K_2 è vuoto. Applicando il teorema 2.7.7 deduciamo che vale (i) e quindi valgono anche (iii) e (ii).

Lasciamo per esercizio la dimostrazione degli analoghi, per i domini di Runge, dei corollari 2.5.6 e 2.5.7 e dei teoremi 2.5.13 e 2.5.14. Rafforziamo invece la parte (a) del teorema 2.7.6.

Teorema 2.7.8. Se Ω è un dominio di Runge, l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ per ogni $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ tale che $\bar\partial f = 0$ $(p, q \geq 0)$.

Dimostrazione. Sia K_j una successione crescente di sottoinsiemi compatti di Ω tali che $\widetilde{K_j} = K_j$ per ogni j e ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j. Per la parte (a) del teorema 2.7.6, per ogni j possiamo trovare $u_j \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ con $\bar\partial u_j = f$ in un intorno di K_j. Vogliamo rendere convergente la successione u_j.

Supponiamo dapprima $q > 0$. Affermiamo che possiamo scegliere le forme u_j in modo che $u_{j+1} = u_j$ in un intorno di K_j per ogni j. Supponiamo infatti di aver già scelto $u_1, \ldots, u_j$ in modo che questa condizione sia soddisfatta. Se $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ soddisfa $\bar\partial u = f$ in un intorno di K_{j+1}, si ha $\bar\partial(u_j - u) = f - f = 0$ in un intorno di K_j. Applicando ancora il teorema 2.7.6 possiamo scegliere $v \in C^\infty_{(p,q-1)}(\Omega)$ in modo che $u_j - u = \bar\partial v$ in un intorno di K_j. Si ha dunque $\bar\partial(u + \bar\partial v) = \bar\partial u = f$ in un intorno di K_{j+1} e $u + \bar\partial v = u_j$ in un intorno di K_j. Possiamo quindi prendere $u_{j+1} = u + \bar\partial v$. È ora chiaro che $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ esiste, che $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ e che $\bar\partial u = f$.

Il caso $q = 0$ è un po' più delicato. Se u è una forma di tipo $(p, 0)$,

$$u = {\sum_{|I|=p}}' u_I \, dz^I,$$

scriviamo $|u| = (\sum' |u_I|^2)^{1/2}$. L'equazione $\bar\partial u = 0$ significa che $\bar\partial u_I = 0$ per ogni I, ossia che tutti gli u_I sono analitici. Ragionando come sopra e applicando il teorema 2.7.7 anziché ricorrere una seconda volta al teorema 2.7.6, vediamo che si possono scegliere le forme $u_j \in C^\infty_{(p,0)}(\Omega)$ in modo che $\bar\partial u_j = f$ in un intorno di K_j e $|u_{j+1} - u_j| < 2^{-j}$ su K_j per ogni j. Poiché i coefficienti di $u_{j+1} - u_j$ sono analitici su K_j, concludiamo che $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ esiste e che $u - u_j$ ha coefficienti analitici nell'interno di K_j per ogni j. Dunque $u \in C^\infty_{(p,0)}(\Omega)$ e $\bar\partial u = f$ in Ω.

Nel caso di una variabile complessa abbiamo visto che un dominio è di Runge precisamente quando è semplicemente connesso. Per $n > 1$ non esiste una caratterizzazione topologica dei domini di Runge in $\mathbb{C}^n$. Alla fine del paragrafo 2.4 abbiamo infatti dato un esempio di un dominio omeomorfo a una palla che non è neppure un dominio di olomorfia. Dimostreremo tuttavia che i domini di Runge sono soggetti a restrizioni topologiche.

Lemma 2.7.9. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ nel quale l'equazione $\bar\partial u = f$ abbia una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ per ogni $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ con $\bar\partial f = 0$ $(p, q \geq 0)$. Se f è una forma differenziale di grado $r > 0$ con coefficienti in $C^\infty(\Omega)$ e $df \in C^\infty_{(r+1,0)}$, esistono una forma $f' \in C^\infty_{(r,0)}(\Omega)$ e una forma g di grado $r - 1$ con coefficienti in $C^\infty(\Omega)$ tali che $f - f' = dg$. Ne segue $df' = df$ e quindi $\bar\partial f' = 0$.

Dimostrazione. Possiamo scrivere

$$f = \sum_{q=0}^{r} f_{r-q,q}, \qquad f_{r-q,q} \in C^\infty_{(r-q,q)}(\Omega).$$

Proviamo per induzione su k che il teorema vale se $f_{r-q,q} = 0$ per $q > k$. Per $k = 0$ l'affermazione è evidente e per $k = r$ coincide con il teorema. Sia $0 < k \leq r$ e supponiamo provata l'affermazione per $k-1$. Poiché $\bar\partial f_{r-k,k}$ è il solo termine di tipo $(r-k, k+1)$ in df, si ha $\bar\partial f_{r-k,k} = 0$. Per ipotesi esiste allora una forma $g' \in C^\infty_{(r-k,k-1)}(\Omega)$ tale che $\bar\partial g' = f_{r-k,k}$. Si ha

$$f - dg' = \sum_{q=0}^{k-1} f_{r-q,q} - \partial g'.$$

Poiché $\partial g' \in C^\infty_{(r-k+1,k-1)}(\Omega)$, dall'ipotesi induttiva segue $f - dg' = f' + dg''$, dove $f' \in C^\infty_{(r,0)}(\Omega)$ e g'' ha grado $r-1$. La dimostrazione è conclusa.

Ricordiamo che per il teorema di de Rham (si veda anche il paragrafo 7.5) esiste un isomorfismo naturale

$$H^r(\Omega, \mathbb{C}) \simeq \frac{\{\text{forme } f \text{ di classe } C^\infty \text{ e grado } r \text{ con } df = 0\}}{\{dg : g \text{ è una forma di classe } C^\infty \text{ e grado } r-1\}}.$$

Qui $H^r(\Omega, \mathbb{C})$ è l'r-esimo gruppo di coomologia di Ω a coefficienti complessi. Quando valgono le ipotesi del lemma 2.7.9, ogni classe contiene una forma $f \in C^\infty_{(r,0)}(\Omega)$ con $df = 0$. Inoltre, se una tale forma si scrive $f = dg$ con g di grado $r-1$, si può scegliere $g \in C^\infty_{(r-1,0)}(\Omega)$ con $\bar\partial g = 0$. Chiamiamo *forma olomorfa di grado s* una forma $h \in C^\infty_{(s,0)}(\Omega)$ con $\bar\partial h = 0$. (Tutti i coefficienti di una forma olomorfa sono olomorfi.) Le osservazioni appena fatte dimostrano il teorema seguente.

Teorema 2.7.10. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ nel quale l'equazione $\bar\partial u = f$ abbia una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ per ogni $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ tale che $\bar\partial f = 0$ $(p, q \geq 0)$. Allora

$$H^r(\Omega, \mathbb{C}) \simeq \frac{\{\text{forme olomorfe } f \text{ di grado } r \text{ con } \partial f = 0\}}{\{\partial g : g \text{ è una forma olomorfa di grado } r-1\}}.$$

Quindi $H^r(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ per $r > n$.

Il teorema 2.7.10 si applica in particolare ai domini di Runge. Proveremo che in questo caso anche l'n-esimo gruppo di coomologia è nullo.

Teorema 2.7.11. Se Ω è un dominio di Runge in $\mathbb{C}^n$, allora $H^r(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ per $r \geq n$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che ogni forma olomorfa di grado n è il differenziale esterno di una forma olomorfa di grado $n-1$. Ora una forma olomorfa di grado n si scrive

$$f\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \qquad f \in A(\Omega), \tag{2.7.1}$$

e una forma olomorfa di grado $n-1$ si scrive

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_j\, dz_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \cdots \wedge dz_n, \tag{2.7.2}$$

dove $\widehat{dz_j}$ indica che dz_j va omesso e $f_j \in A(\Omega)$. Il differenziale della forma (2.7.2) coincide con la forma (2.7.1) se

$$f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial z_j}.$$

Quando f è analitica in tutto lo spazio, basta scegliere $f_2 = \cdots = f_n = 0$ e $f_1(z) = \int_0^{z_1} f(t, z_2, \ldots, z_n)\, dt$ (integrale lungo un cammino nel piano complesso). Le funzioni intere

sono dense in $A(\Omega)$ poiché Ω è un dominio di Runge. Pertanto i differenziali delle $(n-1)$-forme sono densi nell'insieme di tutte le n-forme chiuse. Nel paragrafo 7.5 proveremo che da ciò segue $H^n(\Omega, \mathbb{C}) = 0$.

Poiché ogni compatto polinomialmente convesso in $\mathbb{C}^n$ ha un sistema fondamentale di intorni costituito da domini di Runge, dal teorema 2.7.11 e da un fatto elementare sulla coomologia di Čech, che dimostreremo nel paragrafo 7.5, segue il risultato qui enunciato.

Teorema 2.7.12. Sia K un compatto polinomialmente convesso in $\mathbb{C}^n$. Per $r \geq n$ si ha $H^r(K, \mathbb{C}) = 0$.

Diamo infine un esempio che mostra come, per $r < n$, il gruppo $H^r(\Omega, \mathbb{C})$ non si annulli per tutti i domini di Runge Ω. Poniamo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1 \cdots z_n - 1| < 1,\ |z_j| < 2,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Si tratta di un dominio di Runge limitato (si confronti la dimostrazione del teorema 2.5.13). Sia $1 \leq r < n$ e consideriamo la forma

$$f = (z_1 \cdots z_r)^{-1}\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_r,$$

che è una r-forma olomorfa chiusa in Ω, poiché $z_1 \cdots z_n \neq 0$ in Ω. Sia γ il ciclo in Ω definito da

$$z_j = e^{i\theta_j}\ (j = 1, \ldots, r), \qquad z_{r+1} = e^{-i(\theta_1 + \cdots + \theta_r)}, \qquad z_j = 1\ (j > r+1).$$

I parametri θ_j variano da 0 a 2π. Si ha ora

$$\int_\gamma f = \int i^r\, d\theta_1 \cdots d\theta_r = (2\pi i)^r \neq 0.$$

Dunque f non è il differenziale di alcuna forma di grado $r-1$, il che prova che $H^r(\Omega, \mathbb{C}) \neq 0$.

Note. Per le definizioni fondamentali presupposte nel paragrafo 2.1 rimandiamo i lettori che non abbiano familiarità con le forme differenziali a de Rham [1]. I paragrafi 2.2 e 2.4 contengono soltanto risultati classici, reperibili per lo più in Osgood [1], ma l'esposizione deve molto al capitolo introduttivo di Malgrange [1]. Il teorema 2.3.2 è un celebre teorema di Hartogs. La versione più precisa del teorema 2.3.2′ è dovuta a Bochner [1]. Le dimostrazioni usuali di questi risultati si basano su deformazioni di una curva alla quale si applica la formula integrale di Cauchy. Come ha osservato Ehrenpreis [1], ciò che interviene in realtà è un teorema di esistenza di soluzioni a supporto compatto delle equazioni di Cauchy–Riemann. Abbiamo perciò preso come punto di partenza un risultato di questo tipo. (Questioni analoghe per le varietà complesse sono state discusse da Kohn e Rossi [1].) Il teorema 2.3.3, lemma di Poincaré per l'operatore $\bar{\partial}$, viene spesso chiamato lemma di Dolbeault–Grothendieck. La caratterizzazione dei domini di olomorfia data nel teorema 2.5.5 è dovuta a Cartan e Thullen [1]. Il teorema 2.5.10 è dovuto a Bochner (per un'altra dimostrazione si veda Bochner–Martin [1]). Una dimostrazione più semplice, ma meno elementare, si può fondare sullo studio degli inviluppi di olomorfia svolto nel paragrafo 5.4.

Levi e Hartogs avevano già scoperto che i domini di olomorfia godono di proprietà di convessità. L'esposizione del paragrafo 2.6 segue Bremermann [1] e Lelong [1]. Il teorema 2.6.13 è dovuto essenzialmente a Lewy [1]. I metodi e i risultati del paragrafo 2.7 sono in sostanza dovuti a Oka [1], benché il suo lavoro si presenti in forma assai

diversa, dal momento che egli studia i problemi di Cousin anziché le equazioni di Cauchy–Riemann. Anche il ricorso a forme differenziali di grado superiore nel lemma 2.7.5 (o, equivalentemente, lo studio di gruppi di coomologia di grado superiore), oggi abituale, costituisce una semplificazione essenziale. Il teorema 2.7.10 è dimostrato in Cartan [1] per le varietà di Stein. Lo dimostreremo in questo caso nel paragrafo 5.2. Il teorema 2.7.11 è dovuto a Serre [2] e il teorema 2.7.12 è stato pubblicato da Browder [1]. L'esempio alla fine del paragrafo 2.7 è tratto da Behnke e Stein [1].

Capitolo III
Applicazioni alle algebre di Banach commutative

Sommario. Richiamiamo dapprima le nozioni fondamentali della teoria delle algebre di Banach. Data la brevità dell'esposizione, il lettore che affronti per la prima volta l'argomento potrà aver bisogno di consultare un testo più dettagliato, per esempio Naimark [1] o Loomis [1]. Nel paragrafo 3.2 dimostriamo che le funzioni analitiche di più variabili complesse operano sullo spazio delle trasformate di Gelfand. Mostriamo inoltre che la frontiera di Shilov è determinata da condizioni locali.

3.1. Preliminari

Richiamiamo anzitutto alcune definizioni e alcuni fatti fondamentali sulle algebre di Banach commutative.

Definizione 3.1.1. Un'algebra B (sul campo complesso) si dice *algebra di Banach* se su B è data una norma rispetto alla quale B è uno spazio di Banach e

$$\|fg\| \leq \|f\|\,\|g\|, \qquad f, g \in B.$$

Considereremo soltanto algebre di Banach commutative con elemento unità, che indicheremo con e. Sottintenderemo quindi questa ipotesi nel seguito.

Uno degli scopi principali della teoria è stabilire in quale misura sia possibile rappresentare l'algebra mediante un'algebra di funzioni continue su uno spazio compatto. Sia K uno spazio compatto e sia $C(K)$ l'algebra delle funzioni continue a valori complessi su K. Supponiamo che

$$B \ni f \mapsto Tf \in C(K)$$

sia una rappresentazione continua di B, ossia che T commuti con le operazioni dell'algebra e $\sup_K |Tf| \leq C\|f\|$ per qualche costante C. Da $T(f^n) = (Tf)^n$ segue

$$\sup_K |Tf| \leq C^{1/n}\|f^n\|^{1/n} \leq C^{1/n}\|f\|.$$

Dunque

$$\sup |Tf| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n} \leq \|f\|. \tag{3.1.1}$$

Dimostreremo che fra le applicazioni del tipo appena considerato ve n'è una dalla quale si possono ottenere tutte le altre.

Definizione 3.1.2. Una forma lineare m su B si dice *funzionale lineare moltiplicativo* se è continua, non identicamente nulla e

$$m(fg) = m(f)m(g) \qquad (f, g \in B).$$

Indichiamo con M_B, o semplicemente con M, l'insieme di tutti i funzionali lineari moltiplicativi su B, munito della topologia più debole che renda continua l'applicazione $M \ni m \mapsto m(f) \in \mathbb{C}$ per ogni $f \in B$.

Per definizione di questa topologia, un sistema fondamentale di intorni di $m_0 \in M$ si ottiene prendendo le intersezioni finite di intorni della forma $\{m : |m(f) - m_0(f)| < \varepsilon\}$, con $f \in B$ ed $\varepsilon > 0$. È chiaro che la condizione $m \neq 0$ equivale a $m(e) = 1$ per una forma lineare moltiplicativa.

Teorema 3.1.3. M_B è uno spazio compatto di Hausdorff.

Dimostrazione. Applicando la (3.1.1) a $f \mapsto m(f)$ per un $m \in M$ fissato si ottiene $|m(f)| \le \|f\|$ per ogni $f \in B$. Sia D_f il disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|f\|\}$. Allora l'applicazione

$$M \ni m \mapsto \{m(f)\}_{f\in B} \in \prod_{f\in B} D_f = D$$

è un omeomorfismo di M sull'insieme degli $z = \{z_f\} \in D$ tali che $z_e = 1$ e

$$z_{af+bg} = az_f + bz_g, \qquad z_{fg} = z_f z_g, \qquad f, g \in B, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Questo insieme è un sottoinsieme chiuso di D, quindi è compatto. Il teorema è dimostrato.

Definizione 3.1.4. La funzione continua $\widehat{f}$ su M definita da $\widehat{f}(m) = m(f)$, $m \in M$, si chiama *trasformata di Gelfand* di $f \in B$. L'applicazione $B \ni f \mapsto \widehat{f} \in C(M)$ si chiama *rappresentazione di Gelfand* di B.

Consideriamo di nuovo una rappresentazione continua arbitraria $B \ni f \mapsto Tf \in C(K)$, dove K è uno spazio compatto. Poiché $(Te)^2 = T(e^2) = Te$, la funzione continua Te su K assume soltanto i valori 0 e 1. Poniamo $K_0 = \{k \in K : (Te)(k) = 0\}$ e $K_1 = \{k \in K : (Te)(k) = 1\}$. Allora K_0 e K_1 sono compatti e disgiunti e $Tf = 0$ su K_0 per ogni $f \in B$. Interessa quindi soltanto la restrizione di Tf a K_1. Per ogni $k \in K_1$ l'applicazione $B \ni f \mapsto (Tf)(k)$ definisce un elemento $m \in M$, che denotiamo con $\varphi(k)$. Per la definizione della topologia di M e la continuità di Tf per ogni $f \in B$, l'applicazione φ è continua. Poiché $Tf = \widehat{f} \circ \varphi$ su K_1, abbiamo descritto completamente, in termini della rappresentazione di Gelfand, tutte le rappresentazioni di B mediante funzioni continue.

Passiamo ai teoremi di esistenza dei funzionali lineari moltiplicativi.

Definizione 3.1.5. Se $f \in B$, lo *spettro* $\sigma(f)$ di f è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ per i quali $f - \lambda e$ non è invertibile.

Teorema 3.1.6. Per ogni $f \in B$ si ha

$$\sigma(f) = \{\widehat{f}(m) : m \in M\}, \qquad \sup_{m\in M} |\widehat{f}(m)| = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}. \tag{3.1.2}$$

La dimostrazione richiede qualche preparativo. Osserviamo per ora che $\{\widehat{f}(m) : m \in M\} \subset \sigma(f)$. Infatti, se $\lambda \notin \sigma(f)$, possiamo scegliere $g \in B$ tale che $g(f - \lambda e) = e$. Dunque $\widehat{g}(\widehat{f} - \lambda) = 1$, il che prova che $\widehat{f}$ non assume il valore λ.

Lemma 3.1.7. Se esiste g^{-1}, allora $(g - \lambda h)^{-1}$ esiste per $|\lambda|\|g^{-1}h\| < 1$ e in tale disco è una funzione continua di λ. Se ω è un aperto relativamente compatto nel disco, delimitato da un numero finito di archi di classe C^1, allora

$$\int_{\partial\omega} (g - \lambda h)^{-1} \varphi(\lambda)\, d\lambda = 0$$

se φ è analitica in ω e appartiene a $C^1(\overline{\omega})$.

Dimostrazione. Posto $H = g^{-1}h$, la serie

$$I(\lambda) = g^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H^n$$

converge normalmente nel disco considerato e $I(\lambda)(g - \lambda h) = I(\lambda)g(e - \lambda H) = e$. Il lemma segue poiché, dopo la moltiplicazione per $\varphi(\lambda)$, possiamo integrare termine a termine su $\partial\omega$.

Lemma 3.1.8. Se $(e-\lambda f)^{-1}$ esiste per $|\lambda| \le R$, allora

$$R^n \|f^n\| \le \sup_{|\lambda|=R} \|(e-\lambda f)^{-1}\|, \qquad n \ge 0. \tag{3.1.3}$$

Dimostrazione. Dal lemma 3.1.7 segue che

$$(2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=r} (e-\lambda f)^{-1} \lambda^{-n-1}\, d\lambda$$

è indipendente da r per $0 < r \le R$. Quando $r\|f\| < 1$, integrando lo sviluppo in serie vediamo che l'integrale, con il fattore indicato, è uguale a f^n. Questo prova il lemma.

Possiamo ora dimostrare un'altra parte del teorema 3.1.6. Sia $1/R > \sup_{z\in\sigma(f)} |z|$. Allora $(e-\lambda f)^{-1}$ esiste per $|\lambda| \le R$. Dalla (3.1.3) segue

$$R \limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n} \le 1.$$

Quindi

$$\limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n} \le \sup_{z\in\sigma(f)} |z|. \tag{3.1.4}$$

Se riusciamo a dimostrare che $\sigma(f) \subset \{\widehat{f}(m) : m \in M\}$, la dimostrazione del teorema 3.1.6 sarà completa. Infatti le (3.1.1) e (3.1.4) daranno

$$\sup_{m\in M} |\widehat{f}(m)| \le \liminf_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n} \le \sup_{z\in\sigma(f)} |z| = \sup_{m\in M} |\widehat{f}(m)|,$$

cosicché tutte le disuguaglianze saranno uguaglianze.

Lemma 3.1.9. Nessun elemento $f \in B$ ha spettro vuoto.

Dimostrazione. Se f avesse spettro vuoto, allora $(e-\lambda f)^{-1}$ esisterebbe per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e avremmo

$$\|(e-\lambda f)^{-1}\| \le |\lambda|^{-1}\|f^{-1}\|\, \|(e-\lambda^{-1}f^{-1})^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1}), \qquad \lambda \to \infty.$$

Questo contraddice la (3.1.3) per $n = 0$.

Lemma 3.1.10. Se un'algebra di Banach B è un campo, allora B è isomorfa al campo dei numeri complessi.

Dimostrazione. Per il lemma 3.1.9, per ogni $f \in B$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $f - \lambda e$ non sia invertibile. Se B è un campo, ciò significa che $f - \lambda e = 0$. Dunque B è costituita da tutti i multipli complessi di e.

Ricordiamo che un sottospazio vettoriale $I \subset B$ si dice *ideale* se $BI \subset I$, ossia se $gf \in I$ per ogni $g \in B$ e $f \in I$. Se $I \ne B$ l'ideale si dice proprio. Nessun elemento $f \in B$ con $\|e-f\| < 1$ può appartenere a un ideale proprio I. Infatti $f = e-(e-f)$ avrebbe allora un inverso $g \in B$, e quindi $e = gf \in I$, da cui $I = B$. La chiusura $\overline{I}$ di un ideale proprio è dunque un ideale proprio.

Lemma 3.1.11. Se I è un ideale massimale in B, ossia è un ideale proprio che non è contenuto in alcun altro ideale proprio di B, allora I è chiuso e B/I è isomorfa al campo complesso.

Dimostrazione. Poiché $\overline{I}$ è un ideale proprio contenente I, è chiaro che I è chiuso. L'algebra quoziente B/I è dunque un'algebra di Banach rispetto alla norma quoziente.

I suoi soli ideali sono $\{0\}$ e B/I, poiché la controimmagine in B di un ideale di B/I è un ideale di B che contiene I. Questo significa che B/I è un campo, in quanto l'ideale generato da qualsiasi suo elemento non nullo contiene l'unità di B/I. La tesi segue quindi dal lemma 3.1.10.

Se I è un ideale massimale, l'applicazione canonica da B a B/I può dunque essere interpretata come un funzionale lineare moltiplicativo m, e $I = \{f \in B : m(f) = 0\}$. Viceversa, se $m \in M$, l'insieme $I = \{f \in B : m(f) = 0\}$ è un ideale proprio di B e, poiché B/I ha dimensione uno, è massimale. Gli ideali massimali di B sono dunque in corrispondenza biunivoca con i funzionali lineari moltiplicativi su B. Per questo motivo M è spesso chiamato *spazio degli ideali massimali* di B.

Teorema 3.1.12. Se I è un ideale proprio di B, esiste $m \in M$ tale che $m(f) = 0$ per ogni $f \in I$.

Dimostrazione. Poiché nessun ideale proprio contiene e, dal lemma di Zorn (si veda Loomis [1], p. 2) segue che ogni ideale proprio è contenuto in un ideale massimale. Ma quest'ultimo è l'insieme degli zeri di un funzionale lineare moltiplicativo.

Conclusione della dimostrazione del teorema 3.1.6. Se $\lambda \in \sigma(f)$, l'ideale generato da $f - \lambda e$ è diverso da B. Per il teorema 3.1.12 esiste quindi $m \in M$ che si annulla su tale ideale. In particolare $m(f - \lambda e) = 0$, ossia $\lambda = m(f)$. Dunque $\sigma(f) \subset \{\widehat{f}(m) : m \in M\}$ e, per le osservazioni che seguono il lemma 3.1.8, la dimostrazione è conclusa.

Invece dello spettro di un singolo elemento di B possiamo studiare lo spettro di un insieme di elementi.

Definizione 3.1.13. Se $f_1, \ldots, f_n \in B$, lo *spettro congiunto* $\sigma(f_1, \ldots, f_n)$ di questi elementi è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}^n$ tali che l'ideale generato da $f_1 - \lambda_1 e, \ldots, f_n - \lambda_n e$ sia diverso da B.

Il teorema 3.1.6 ammette un'estensione immediata.

Teorema 3.1.14. Per $f_1, \ldots, f_n \in B$ arbitrari si ha

$$\sigma(f_1, \ldots, f_n) = \{(\widehat{f}_1(m), \ldots, \widehat{f}_n(m)) : m \in M\}.$$

Dimostrazione. Se $\lambda \in \sigma(f_1, \ldots, f_n)$, per il teorema 3.1.12 esiste $m \in M$ tale che $m(f_j - \lambda_j e) = 0$ per $j = 1, \ldots, n$, ossia $m(f_j) = \lambda_j$. D'altra parte, se $\lambda \notin \sigma(f_1, \ldots, f_n)$ possiamo scegliere $g_j \in B$ tali che

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(f_j - \lambda_j e) = e.$$

Quindi $\sum_{j=1}^{n} \widehat{g}_j(\widehat{f}_j - \lambda_j) = 1$, il che prova che $(\widehat{f}_1(m), \ldots, \widehat{f}_n(m)) \neq (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ per ogni $m \in M$.

Diremo che B è generata dagli elementi $f_1, \ldots, f_n \in B$ se la più piccola sottoalgebra chiusa di B che li contiene coincide con B. In altri termini, gli elementi $P(f_1, \ldots, f_n)$, dove P è un polinomio a coefficienti complessi, devono essere densi in B. (Nella definizione di $P(f_1, \ldots, f_n) = \sum a_\alpha f^\alpha$ si pone $f^0 = e$.) Lo spazio degli ideali massimali di un'algebra finitamente generata si descrive con particolare semplicità.

Teorema 3.1.15. Sia B generata da $f_1, \ldots, f_n$. Allora l'applicazione

$$\varphi : M \ni m \mapsto (\widehat{f_1}(m), \ldots, \widehat{f_n}(m)) \in \mathbb{C}^n$$

è un omeomorfismo di M su un compatto polinomialmente convesso K di $\mathbb{C}^n$, che per il teorema 3.1.14 è lo spettro congiunto del sistema di generatori $f_1, \ldots, f_n$. Se $f \in B$, la funzione $\widehat{f} \circ \varphi^{-1}$ è uniformemente approssimabile su K mediante polinomi.

Si noti che lo spettro congiunto di un sistema di elementi che non generi B può non essere polinomialmente convesso.

Dimostrazione. L'applicazione φ è continua per definizione della topologia di M ed è iniettiva. Infatti, per $m \in M$,

$$m(P(f_1, \ldots, f_n)) = P(\widehat{f_1}(m), \ldots, \widehat{f_n}(m)),$$

cosicché $(\widehat{f_1}(m), \ldots, \widehat{f_n}(m))$ determina univocamente m su un sottoinsieme denso di B e dunque su tutto B. Dalla compattezza di M segue che K è compatto e che φ è un omeomorfismo. Sia ora $z \in \widetilde{K}$ (la notazione è stata introdotta prima della definizione 2.7.2). Per provare che $z \in K$ dobbiamo mostrare che l'applicazione $f_j \mapsto z_j$ si estende a una forma lineare moltiplicativa su B. Per ogni polinomio P una tale forma deve mandare $P(f_1, \ldots, f_n)$ in $P(z_1, \ldots, z_n)$. Occorre dunque provare la continuità di questa applicazione, ossia che $|P(z_1, \ldots, z_n)| \leq \|P(f_1, \ldots, f_n)\|$ per ogni polinomio P. Ora

$$\begin{aligned} |P(z_1, \ldots, z_n)| &\leq \sup_{\zeta \in K} |P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| = \sup_{m \in M} |m(P(f_1, \ldots, f_n))| \\ &\leq \|P(f_1, \ldots, f_n)\|. \end{aligned}$$

Questo prova il teorema, poiché l'ultima affermazione segue dalla densità in B dei polinomi in $f_1, \ldots, f_n$ e dalla disuguaglianza $\sup_M |\widehat{g}| \leq \|g\|$ per ogni $g \in B$.

Combinando i teoremi 3.1.15 e 2.7.12 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 3.1.16. Se B ha n generatori, allora $H^k(M, \mathbb{C}) = 0$ per $k \geq n$.

Esempio. L'algebra delle funzioni continue sulla sfera n-dimensionale ha $n+1$ generatori per il teorema di approssimazione di Weierstrass. Per il corollario non può avere n generatori, poiché M è la sfera stessa.

Come esempio del teorema 3.1.15 scegliamo un compatto $K \subset \mathbb{C}^n$ e prendiamo come B la chiusura $C_A(K)$ in $C(K)$ delle restrizioni a K dei polinomi analitici in $\mathbb{C}^n$. ($C(K)$ è lo spazio delle funzioni continue su K con la norma del massimo.) Allora B è un'algebra di Banach con n generatori $z_1, \ldots, z_n$. Lo spazio degli ideali massimali si identifica con $\widetilde{K}$ e la rappresentazione di Gelfand consiste nel prolungare le funzioni di $C_A(K)$ a funzioni di $C_A(\widetilde{K})$. Questi spazi sono dunque isomorfi.

Lo spazio degli ideali massimali può essere considerato come il più grande spazio sul quale si possa rappresentare l'algebra. Come mostra l'esempio precedente, può tuttavia accadere che le trasformate di Gelfand di tutti gli elementi dell'algebra siano determinate dalle loro restrizioni a un certo sottoinsieme di M.

Definizione 3.1.17. Un sottoinsieme chiuso M_0 di M si chiama *frontiera* per M (rispetto a B) se

$$\sup_{M_0} |\widehat{f}| = \sup_{M} |\widehat{f}|, \qquad f \in B.$$

Teorema 3.1.18. Esiste una frontiera S per M contenuta in ogni frontiera. Si chiama S la *frontiera di Shilov* di M (rispetto a B).

L'intersezione di tutte le frontiere è costituita dai punti $m_0 \in M$ per i quali $M \setminus V$ non è una frontiera per alcun intorno aperto V di m_0. In altri termini, per ogni tale V esiste $f \in B$ con $\sup_{M\setminus V} |\widehat{f}| < \sup_V |\widehat{f}|$. Per provare che l'insieme di tutti questi m_0 è effettivamente una frontiera ci occorre un lemma.

Lemma 3.1.19. Siano $f_1, \ldots, f_n \in B$ e si ponga

$$U = \{m \in M : |\widehat{f_i}(m)| < 1,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Allora o U incontra ogni frontiera di M, oppure $M_0 \setminus U$ è una frontiera di M per ogni frontiera M_0 di M.

Dimostrazione. Supponiamo che M_0 sia una frontiera per M e che $M_0 \setminus U$ non lo sia. Possiamo scegliere $f \in B$ tale che $\sup_M |\widehat{f}| = 1$ e $\sup_{M_0\setminus U} |\widehat{f}| < 1$. Sostituendo f con una sua potenza possiamo supporre che $|\widehat{f}| < \varepsilon$ su $M_0 \setminus U$, dove $\varepsilon > 0$ è scelto così piccolo che $\varepsilon \sup_M |\widehat{f_i}| < 1$ per $i = 1, \ldots, n$. Abbiamo allora $|\widehat{f}\widehat{f_i}| < 1$ in U per definizione di U, e in $M_0 \setminus U$ per la scelta di ε. Quindi $|\widehat{f}\widehat{f_i}| < 1$ su M_0 e, poiché M_0 è una frontiera, $|\widehat{f}\widehat{f_i}| < 1$ su M per $i = 1, \ldots, n$. Ogni punto in cui $|\widehat{f}| = 1$ appartiene dunque a U, perciò U incontra ogni frontiera di M.

Dimostrazione del teorema 3.1.18. Sia S l'intersezione di tutte le frontiere, ossia l'insieme dei punti descritti subito dopo l'enunciato del teorema. Sia $f \in B$ e supponiamo $|\widehat{f}| < 1$ su S. Dobbiamo provare $|\widehat{f}| < 1$ su M. Consideriamo a tal fine il compatto $M' = \{m \in M : |\widehat{f}(m)| \geq 1\}$. Per definizione di S, per ogni $m \in M'$ esiste una frontiera M_0 che non contiene m, e quindi un intorno U di m del tipo discusso nel lemma tale che $U \cap M_0 = \varnothing$. Per il lemma di Borel–Lebesgue possiamo ricoprire M' con un numero finito di tali insiemi $U_1, \ldots, U_r$. Poiché M è una frontiera, applicando ripetutamente il lemma vediamo che $M \setminus (\bigcup_{j=1}^r U_j)$ è una frontiera. Ma su di essa $|\widehat{f}| < 1$, per cui $|\widehat{f}| < 1$ su M. Questo conclude la dimostrazione.

Esempio. La frontiera di Shilov di un polidisco è la sua frontiera distinta.

3.2. Funzioni analitiche di elementi di un'algebra di Banach

Il risultato centrale del paragrafo è la seguente estensione di una parte dell'asserzione (b) del teorema 2.7.6.

Teorema 3.2.1. Siano $f_1, \ldots, f_n \in B$ e sia φ una funzione analitica in un intorno di $\sigma(f_1, \ldots, f_n)$ in $\mathbb{C}^n$. Esistono un numero finito di elementi $f_{n+1}, \ldots, f_N \in B$ e una funzione Φ analitica in un intorno del polidisco

$$\{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| \leq \|f_j\|,\ j = 1, \ldots, N\}$$

tali che $\varphi(\widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_n}) = \Phi(\widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_N})$.

Prima della dimostrazione diamo l'applicazione principale.

Teorema 3.2.2. Siano $f_1, \ldots, f_n \in B$ e sia φ analitica in un intorno di $\sigma(f_1, \ldots, f_n)$ in $\mathbb{C}^n$. Esiste $g \in B$ tale che

$$\widehat{g} = \varphi(\widehat{f_1}, \ldots, \widehat{f_n}).$$

In altri termini, le funzioni analitiche operano sullo spazio delle trasformate di Gelfand.

Dimostrazione. Scegliamo $f_{n+1}, \dots, f_N$ e Φ secondo il teorema 3.2.1. Abbiamo

$$\Phi(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha, \qquad \sum_\alpha |a_\alpha| R^\alpha < \infty \quad (R_j = \|f_j\|),$$

dove $z = (z_1, \dots, z_N)$. Quindi la serie $g = \sum_\alpha a_\alpha f^\alpha$ converge in norma e

$$\widehat{g} = \sum_\alpha a_\alpha \widehat{f}^\alpha = \Phi(\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_N) = \varphi(\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_n).$$

La dimostrazione del teorema 3.2.1 discenderà da due lemmi.

Lemma 3.2.3. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ contenente $\sigma_B(f_1, \dots, f_n)$. Esiste una sottoalgebra chiusa finitamente generata B' di B tale che $f_1, \dots, f_n \in B'$ e $\sigma_{B'}(f_1, \dots, f_n) \subset \Omega$.

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che $\sigma_{B'}(f_1, \dots, f_n)$ decresce al crescere di B'. Basta dunque provare che per ogni $z \notin \sigma_B(f_1, \dots, f_n)$ si può scegliere B' in modo che $z \notin \sigma_{B'}(f_1, \dots, f_n)$. L'ipotesi significa che $e = \sum_{j=1}^n g_j(f_j - z_j e)$ per opportuni $g_j \in B$. Se B' è l'algebra chiusa generata da $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$, ne segue $z \notin \sigma_{B'}(f_1, \dots, f_n)$.

Scegliamo $f_{n+1}, \dots, f_\nu$ in modo che $f_1, \dots, f_\nu$ generino l'algebra B' del lemma 3.2.3. Sia π la proiezione $(z_1, \dots, z_\nu) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$ di $\mathbb{C}^\nu$ su $\mathbb{C}^n$.

Lemma 3.2.4. Esistono polinomi P_k, $k = 1, \dots, \mu$, in ν variabili tali che

$$\left.\begin{array}{l} z \in \mathbb{C}^\nu, \quad |z_j| \le \|f_j\|, \quad j = 1, \dots, \nu, \\ |P_k(z)| \le \|P_k(f_1, \dots, f_\nu)\|, \quad k = 1, \dots, \mu \end{array}\right\} \Longrightarrow \pi z \in \Omega.$$

Dimostrazione. Se $\pi z \notin \sigma_{B'}(f_1, \dots, f_n)$, l'applicazione $f_j \mapsto z_j$, $j = 1, \dots, \nu$, non può essere estesa a un funzionale lineare moltiplicativo su B'. Esiste dunque un polinomio P in ν variabili tale che

$$|P(z_1, \dots, z_\nu)| > \|P(f_1, \dots, f_\nu)\|.$$

La disuguaglianza vale anche in un intorno di z. Poiché l'insieme $\{z : |z_j| \le \|f_j\|,\ j = 1, \dots, \nu\}$ è compatto, un'applicazione del lemma di Borel–Lebesgue dà polinomi $P_1, \dots, P_\mu$ con le proprietà richieste.

Dimostrazione del teorema 3.2.1. Sia Ω un intorno di $\sigma_B(f_1, \dots, f_n)$ in cui φ è analitica e scegliamo $f_{n+1}, \dots, f_\nu$ e $P_1, \dots, P_\mu$ secondo i lemmi precedenti. Poniamo $f_{\nu+k} = P_k(f_1, \dots, f_\nu)$, $k = 1, \dots, \mu$, e $N = \nu + \mu$. Per il lemma 3.2.4 la funzione $z \mapsto \varphi(\pi z)$ è analitica in un intorno di

$$K = \{z \in \mathbb{C}^\nu : |z_j| \le \|f_j\|,\ 1 \le j \le \nu, \quad |P_k(z)| \le \|f_{k+\nu}\|,\ 1 \le k \le \mu\}.$$

Dalla parte (b) del teorema 2.7.6 segue che esiste una funzione Φ analitica in un intorno del polidisco $\{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| \le \|f_j\|,\ j = 1, \dots, N\}$ tale che

$$\Phi(z_1, \dots, z_\nu, P_1(z), \dots, P_\mu(z)) = \varphi(\pi z)$$

per ogni z in un intorno di K. In particolare, per $m \in M$ possiamo scegliere $z_j = \widehat{f}_j(m) = m(f_j)$ per $j = 1, \dots, \nu$. Allora $P_j(z) = m(f_{j+\nu}) = \widehat{f}_{j+\nu}(m)$, quindi $z \in K$ e otteniamo $\Phi(\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_N) = \varphi(\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_n)$. Il teorema 3.2.1 è dimostrato.

Come applicazione del teorema 3.2.2 proveremo un «teorema delle funzioni implicite» per un'algebra di Banach. Si tratta di risolvere un'equazione algebrica

$$\sum_{k=0}^n a_k w^k = 0, \tag{3.2.1}$$

con coefficienti $a_k \in B$ e incognita $w \in B$. Questa equazione implica la corrispondente equazione per le trasformate di Gelfand

$$\sum_{k=0}^{n} \widehat{a}_k \widehat{w}^k = 0, \tag{3.2.2}$$

che per ogni $m \in M$ è un'equazione algebrica a coefficienti complessi nell'incognita $\widehat{w}(m)$. È dunque necessario, per l'esistenza di una soluzione della (3.2.1), che la (3.2.2) abbia una soluzione dipendente con continuità da m. In senso inverso dimostreremo quanto segue.

Teorema 3.2.5. Supponiamo che esista una funzione continua h su M tale che

$$\sum_{k=0}^{n} \widehat{a}_k h^k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} k\widehat{a}_k h^{k-1} \neq 0 \quad \text{in ogni punto di } M. \tag{3.2.3}$$

Esiste allora una soluzione w della (3.2.1) con $\widehat{w} = h$.

La dimostrazione si svolgerà in due passi. Dapprima determineremo w in modo che valga soltanto la (3.2.2), poi correggeremo w in modo che valga la (3.2.1).

Lemma 3.2.6. Esiste un numero finito di elementi $a_{n+1}, \ldots, a_\nu \in B$ tali che $h(m_1) = h(m_2)$ per ogni $(m_1, m_2) \in M \times M$ con $\widehat{a}_j(m_1) = \widehat{a}_j(m_2)$ per $j = 0, \ldots, \nu$.

Dimostrazione. Per ogni punto $(m_1^0, m_2^0) \in M \times M$ con $m_1^0 \neq m_2^0$ possiamo scegliere $a \in B$ tale che $\widehat{a}(m_1^0) \neq \widehat{a}(m_2^0)$. Allora $\widehat{a}(m_1) \neq \widehat{a}(m_2)$ in un intorno di (m_1^0, m_2^0). Consideriamo invece un punto della diagonale (m^0, m^0). Scegliamo $\delta > 0$ in modo che nel disco $|z - h(m^0)| \leq \delta$ il polinomio $\sum_{k=0}^{n} \widehat{a}_k(m^0) z^k$ abbia soltanto lo zero semplice $z = h(m^0)$. Sia V un intorno di m^0 tale che, per $m \in V$, si abbia $|h(m) - h(m^0)| \leq \delta$ e l'equazione $\sum_{k=0}^{n} \widehat{a}_k(m) z^k = 0$ abbia una sola radice con $|z - h(m^0)| \leq \delta$. Per $m \in V$ tale unica radice è dunque $h(m)$. Se $(m_1, m_2) \in V \times V$ e $\widehat{a}_k(m_1) = \widehat{a}_k(m_2)$ per $k = 0, \ldots, n$, ne segue $h(m_1) = h(m_2)$. Poiché $M \times M$ è compatto, il lemma di Borel–Lebesgue permette ora di trovare un numero finito di elementi $a_{n+1}, \ldots, a_\nu$ con le proprietà richieste.

Lemma 3.2.7. Siano $a_{n+1}, \ldots, a_\nu$ scelti come nel lemma 3.2.6. Esiste una funzione H analitica in un intorno di $\sigma(a_0, \ldots, a_\nu)$ in $\mathbb{C}^{\nu+1}$ tale che $h = H(\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_\nu)$.

Dimostrazione. Per il lemma 3.2.6 esiste su $\sigma(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ un'unica funzione H tale che $h = H(\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_\nu)$. Per provarne la continuità basta verificare che, se $m_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots$, e $\widehat{a}_k(m_i) \to \widehat{a}_k(m^0)$ per $k = 0, \ldots, \nu$, allora $h(m_i) \to h(m^0)$. Possiamo supporre che $h(m_i)$ converga a un limite h'. Se m è un punto di accumulazione della successione m_i, abbiamo $\widehat{a}_k(m) = \widehat{a}_k(m^0)$ per $k = 0, \ldots, \nu$ e $h' = h(m)$, dunque $h' = h(m^0)$.

Per la (3.2.3) la funzione continua H su $\sigma(a_0, \ldots, a_\nu)$ soddisfa le condizioni

$$\sum_{k=0}^{n} z_k H^k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} k z_k H^{k-1} \neq 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite (teorema 2.1.2), in un intorno sferico di ciascun punto di $\sigma(a_0, \ldots, a_\nu)$ la prima equazione definisce una funzione analitica che coincide con la funzione data H nell'intersezione dello spettro con la palla. Sia 2δ un minorante positivo per i raggi di tali palle, la cui esistenza è garantita dalla compattezza di $\sigma(a_0, \ldots, a_\nu)$. Otteniamo così, nell'insieme dei punti a distanza minore di δ da $\sigma(a_0, \ldots, a_\nu)$, un'unica funzione analitica H che soddisfa l'equazione $\sum_{k=0}^{n} z_k H^k = 0$ e coincide sullo spettro con la funzione data. Infatti, se due palle di raggio δ si intersecano, il centro dell'una appartiene alla palla di raggio 2δ concentrica all'altra. Il lemma è dimostrato.

Dimostrazione del teorema 3.2.5. Combinando il lemma 3.2.7 con il teorema 3.2.2 otteniamo un elemento w_0 dell'algebra tale che $\widehat{w}_0 = h$. Ciò significa che

$$\sum_{k=0}^{n} a_k w_0^k = b,$$

dove $\widehat{b} = \sum_{k=0}^{n} \widehat{a}_k h^k = 0$. Per il teorema 3.1.6 si ha dunque $\|b^j\|^{1/j} \to 0$ per $j \to \infty$. (Diremo che b appartiene al *radicale* di B.) L'altra condizione della (3.2.3) significa che $\sum_{k=1}^{n} k\widehat{a}_k \widehat{w}_0^{k-1} \neq 0$ ovunque su M, ossia che $\sum_{k=1}^{n} k a_k w_0^{k-1}$ è invertibile. Per risolvere esattamente la (3.2.1), poniamo ora $w = w_0 + u$. Affinché $\widehat{w} = h = \widehat{w}_0$, occorre che u appartenga al radicale. L'equazione per u diventa

$$b + u \sum_{k=1}^{n} k a_k w_0^{k-1} + \cdots = 0,$$

dove i puntini indicano termini contenenti potenze superiori di u. La dimostrazione del teorema 3.2.5 sarà quindi completata dal lemma seguente.

Lemma 3.2.8. Nell'equazione $\sum_{j=0}^{n} b_j u^j = 0$, con coefficienti in B, supponiamo che b_0 appartenga al radicale e che b_1 sia invertibile. L'equazione ha allora una soluzione u appartenente al radicale.

Si osservi che questo è il caso particolare del teorema 3.2.5 con $h = 0$.

Dimostrazione. Moltiplicando per b_1^{-1} possiamo supporre $b_1 = e$. Consideriamo l'equazione

$$z_0 + w + z_2 w^2 + \cdots + z_n w^n = 0,$$

dove $z_0, z_2, \ldots, z_n$ sono variabili complesse. Per il teorema delle funzioni implicite essa ha, in un intorno di 0 in $\mathbb{C}^n$, un'unica soluzione analitica w che si annulla per $z_0 = z_2 = \cdots = z_n = 0$. Possiamo scrivere

$$w(z) = \sum_{\alpha \neq 0} c_\alpha z^\alpha.$$

Qui $\alpha = (\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è un multiindice e $\sum_\alpha |c_\alpha| r^{|\alpha|} < \infty$ per qualche $r > 0$. Affermiamo che $c_\alpha = 0$ salvo quando $L(\alpha) = \alpha_0 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \cdots - (n-1)\alpha_n > 0$. Supponiamo di averlo già dimostrato per i termini di grado $\leq k$ (per $k = 0$ o 1 ciò è evidente, poiché $w = -z_0$ più termini di ordine superiore). Se $\alpha^1, \ldots, \alpha^j$ sono multiindici con $L(\alpha^i) > 0$ per $i = 1, \ldots, j$, allora $L(\alpha^1 + \cdots + \alpha^j) \geq j$. Pertanto i termini di grado $\leq k+1$ in $z_2 w^2 + \cdots + z_n w^n$ sono tutti della forma z^β con $L(\beta) \geq j - (j-1) = 1 > 0$. Dunque anche tutti i termini di grado $k+1$ nello sviluppo di w soddisfano la condizione.

Mostriamo ora che la serie $w(b)$ ottenuta sostituendo b_j a z_j converge in norma. Ne seguirà che $w(b)$ appartiene al radicale, poiché tutti i termini della serie vi appartengono. Scegliamo $R > 1$ tale che $\|b_j\| < R^{j-1}$ per $2 \leq j \leq n$. Allora

$$\|b^\alpha\| \leq \|b_0^{\alpha_0}\| \|b_2\|^{\alpha_2} \cdots \|b_n\|^{\alpha_n} \leq \|b_0^{\alpha_0}\| R^{\alpha_0} \qquad \text{se } L(\alpha) > 0.$$

Poiché b_0 appartiene al radicale, per α_0 sufficientemente grande abbiamo $\|b_0^{\alpha_0}\| R^{\alpha_0} \leq r^{|\alpha|}$. Infatti possiamo supporre $r < 1$ e allora $r^{|\alpha|} \geq r^{2\alpha_0}$, mentre $\|b_0^{\alpha_0}\|^{1/\alpha_0} \to 0$ per $\alpha_0 \to \infty$. Quindi la serie $w(b) = \sum c_\alpha b^\alpha$ converge assolutamente. È chiaro che $w(b)$ soddisfa l'equazione voluta, poiché $b_0 + w(b) + b_2 w(b)^2 + \cdots$ si può riordinare in una serie di potenze in b i cui coefficienti sono tutti nulli. La dimostrazione è conclusa.

Teorema 3.2.9. Supponiamo che M non sia connesso e scriviamo $M = M_0 \cup M_1$, con M_0, M_1 chiusi e disgiunti. Esistono due elementi $e_0, e_1 \in B$ tali che $e_0 + e_1 = e$, $e_0 e_1 = 0$, $\widehat{e}_0 = 1$ su M_0 e $\widehat{e}_1 = 1$ su M_1.

Dimostrazione. La funzione h che vale 0 su M_0 e 1 su M_1 è continua e soddisfa l'equazione $h(1-h) = 0$, che ha solo zeri semplici. Esiste dunque $e_1 \in B$ tale che $e_1(e - e_1) = 0$, $\widehat{e}_1 = 0$ su M_0 e $\widehat{e}_1 = 1$ su M_1. Ponendo $e_0 = e - e_1$ si ottiene la tesi.

Il risultato significa che e_0 ed e_1 sono idempotenti, con $e_0 e_1 = 0$ ed $e_0 + e_1 = e$. Gli ideali Be_0 e Be_1 sono dunque algebre di Banach con unità rispettivamente e_0 ed e_1, e B è la loro somma diretta. Viceversa, è chiaro che, se un'algebra di Banach si decompone in somma diretta, lo spazio degli ideali massimali è l'unione dei corrispondenti spazi degli ideali massimali ed è quindi sconnesso.

Teorema 3.2.10. Sia $a \in B$ invertibile e supponiamo che esista una funzione continua h su M con $h^n = \widehat{a}$. Esiste allora un elemento w dell'algebra con $w^n = a$.

Dimostrazione. L'invertibilità di a significa che $\widehat{a} \neq 0$ ovunque su M, dunque h è una radice semplice dell'equazione $h^n - \widehat{a} = 0$.

Diamo infine un teorema che permette di descrivere la frontiera di Shilov mediante condizioni locali.

Teorema 3.2.11. Sia $m_0 \in M$ e supponiamo che esista un intorno aperto V_0 di m_0 tale che a ogni intorno V di m_0 corrisponda un elemento $f \in B$ con

$$\sup_{V_0 \setminus V} |\widehat{f}| < \sup_{V} |\widehat{f}|. \tag{3.2.4}$$

Allora m_0 appartiene alla frontiera di Shilov di M rispetto a B.

In altri termini, m_0 appartiene alla frontiera di Shilov se vi appartiene localmente. Per la dimostrazione ci occorre il lemma seguente.

Lemma 3.2.12. Sia $f_0 \in B$ e sia

$$\{m \in M : \widehat{f}_0(m) = 1\} = K' \cup K'',$$

con K' e K'' compatti disgiunti. Esistono elementi $f_1, \dots, f_\nu$ di B e una funzione φ analitica in un intorno di $\sigma(f_0, \dots, f_\nu)$ tali che $\varphi(z)/(z_0 - 1)$ sia analitica in un intorno di $\{(\widehat{f}_0(m), \dots, \widehat{f}_\nu(m)) : m \in K'\}$ e $\varphi(\widehat{f}_0(m), \dots, \widehat{f}_\nu(m)) = 1$ per $m \in K''$.

Dimostrazione. Possiamo scegliere $f_1, \dots, f_n$ in modo che l'applicazione

$$M \ni m \mapsto (\widehat{f}_0(m), \dots, \widehat{f}_n(m)) \tag{3.2.5}$$

mandi K' e K'' in insiemi disgiunti (necessariamente compatti) K'_f e K''_f. Sia $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^{n+1})$ uguale a 1 in un intorno di K''_f e a 0 in un intorno di K'_f. Vogliamo porre $\varphi(z) = \chi(z) + (z_0 - 1)v(z)$ scegliendo v in modo che φ sia analitica, ossia $(1 - z_0)\bar\partial v = \bar\partial \chi$. In un intorno Ω di M_f (immagine dell'applicazione (3.2.5)) si ha $(1-z_0)^{-1}\bar\partial\chi \in C^\infty_{(0,1)}(\Omega)$, e questa forma è evidentemente $\bar\partial$-chiusa. Per il lemma 3.2.3 possiamo scegliere $f_{n+1}, \dots, f_\nu$ in modo che, indicando con B' l'algebra generata da $f_0, \dots, f_\nu$, l'insieme polinomialmente convesso $\sigma_{B'}(f_0, \dots, f_\nu) \subset \mathbb{C}^{\nu+1}$ sia mandato in Ω dalla proiezione

$$\pi : (z_0, \dots, z_\nu) \mapsto (z_0, \dots, z_n).$$

Per il lemma 2.7.4 esiste un poliedro polinomiale contenuto in $\pi^{-1}\Omega$ e contenente $\sigma_{B'}(f_0, \dots, f_\nu)$. Applicando il teorema 2.7.6 si ottiene in un intorno di $\sigma_{B'}(f_0, \dots, f_\nu)$

una funzione v di classe C^∞ tale che $\varphi = \pi^*\chi + (z_0 - 1)v$ sia analitica in tale intorno. Il lemma è dimostrato.

Dimostrazione del teorema 3.2.11. Possiamo prendere l'intorno V di m_0 aperto e relativamente compatto in V_0. Per ipotesi possiamo scegliere $f_0 \in B$ tale che

$$\sup_{V_0 \setminus V} |\widehat{f_0}| < 1, \qquad \sup_{V} |\widehat{f_0}| = 1. \tag{3.2.6}$$

Possiamo normalizzare f_0 in modo che $\widehat{f_0}(m) = 1$ per qualche $m \in V$. Poniamo

$$K' = \{m \notin V_0 : \widehat{f_0}(m) = 1\}, \qquad K'' = \{m \in V_0 : \widehat{f_0}(m) = 1\} \Subset V$$

e applichiamo il lemma. Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo la funzione

$$\varphi_\varepsilon(z) = \varepsilon\varphi(z_0 - \varepsilon, z_1, \ldots, z_\nu)(z_0 - 1 - \varepsilon)^{-1}$$

è analitica in un intorno di $\sigma(f_0, \ldots, f_\nu)$. Infatti $|\widehat{f_0}(m)| \leq 1$ per $m \in V_0$ e $\varphi(z)/(z_0 - 1)$ è analitica in un intorno dell'immagine di $M \setminus V_0$ mediante l'applicazione $m \mapsto (\widehat{f_0}(m), \ldots, \widehat{f_\nu}(m))$. Dal teorema 3.2.2 segue quindi che esiste $g_\varepsilon \in B$ tale che $\widehat{g}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(\widehat{f_0}, \ldots, \widehat{f_\nu})$. Nel complementare di V abbiamo $\widehat{g}_\varepsilon = O(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$, mentre $\widehat{g}_\varepsilon(m) = -1 + O(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$ se $m \in K''$. Dunque il complementare di V non è una frontiera per alcun tale V. Ne segue che m_0 appartiene alla frontiera di Shilov.

Note. All'origine del teorema 3.2.2 vi è il teorema di Wiener e Lévy secondo cui, se f è una funzione periodica con serie di Fourier assolutamente convergente e F è analitica sull'insieme dei valori di f, anche $F(f)$ ha serie di Fourier assolutamente convergente. I primi risultati di questo tipo in più variabili furono dati da Shilov [1], al quale si devono molti dei risultati del paragrafo 3.2. A eccezione del teorema 3.2.11, dovuto a Rossi [1], tutti i risultati del paragrafo 3.2 si trovano in Arens e Calderón [1]. Per molte algebre importanti è impossibile indebolire l'ipotesi del teorema 3.2.2 che φ sia analitica (si vedano Helson, Kahane, Katznelson e Rudin [1]). Per ulteriori applicazioni dell'analisi complessa alla teoria delle algebre di Banach rimandiamo all'articolo di rassegna di Royden [1].

Capitolo IV
Stime L^2 e teoremi di esistenza per l'operatore $\bar\partial$

Sommario. In questo capitolo abbandoniamo i metodi classici per risolvere i problemi di Cousin (ossia per risolvere le equazioni di Cauchy–Riemann), dei quali abbiamo dato un esempio nel paragrafo 2.7. Sviluppiamo invece una tecnica per studiare le equazioni di Cauchy–Riemann il cui punto essenziale è una stima L^2, dimostrata nei paragrafi 4.1 e 4.2. Nei paragrafi 4.2 e 4.3 ne deduciamo teoremi di esistenza e di approssimazione per le soluzioni delle equazioni di Cauchy–Riemann nei domini di olomorfia. Al tempo stesso otteniamo una soluzione del problema di Levi.

Uno dei principali vantaggi dei metodi qui impiegati è che, senza ulteriore sforzo, danno risultati sull'esistenza di soluzioni delle equazioni di Cauchy–Riemann che soddisfano condizioni di crescita. Nel paragrafo 4.4 diamo alcuni teoremi di questo tipo, importanti per le applicazioni alle equazioni differenziali nei paragrafi 7.6 e 7.7. Discutiamo anche i numeri di Lelong delle funzioni plurisubarmoniche. Nel paragrafo 4.5 applichiamo un caso particolare dei teoremi di esistenza per dimostrare un teorema sui funzionali analitici. In vari teoremi di esistenza per le funzioni analitiche esso svolge lo stesso ruolo che il teorema di Paley–Wiener svolge nei teoremi di esistenza riguardanti funzioni di classe C^∞. Qui tuttavia non sviluppiamo tali applicazioni e il paragrafo 4.5 non è necessario per lo studio dei capitoli V–VII.

4.1. Preliminari

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se φ è continua in Ω, indichiamo con $L^2(\Omega,\varphi)$ lo spazio delle funzioni in Ω di quadrato integrabile rispetto alla misura $e^{-\varphi}\,d\lambda$, dove $d\lambda$ è la misura di Lebesgue. È un sottospazio dello spazio $L^2(\Omega,\mathrm{loc})$ delle funzioni localmente di quadrato integrabile rispetto alla misura di Lebesgue in Ω, ed è chiaro che ogni funzione di $L^2(\Omega,\mathrm{loc})$ appartiene a $L^2(\Omega,\varphi)$ per qualche φ. Indichiamo con $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ lo spazio delle forme di tipo (p,q) a coefficienti in $L^2(\Omega,\varphi)$,

$$f = {\sum_{|I|=p}}' {\sum_{|J|=q}}' f_{I,J}\,dz^I\wedge d\bar z^J,$$

dove il primo sul simbolo di sommatoria indica che si somma soltanto sui multiindici strettamente crescenti. Poniamo

$$|f|^2 = {\sum_{I,J}}' |f_{I,J}|^2, \qquad \|f\|^2_\varphi = \int |f|^2 e^{-\varphi}\,d\lambda.$$

È chiaro che $L^2(\Omega,\varphi)$ è uno spazio di Hilbert con questa norma. Definiamo analogamente $L^2_{(p,q)}(\Omega,\mathrm{loc})$ e $D_{(p,q)}(\Omega)$, dove $D(\Omega)$ indica $C^\infty_0(\Omega)$, notazione che talvolta impieghiamo per evitare un eccesso di indici ed esponenti. Naturalmente $D_{(p,q)}(\Omega)$ è denso in $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ per ogni φ.

Se φ_1 e φ_2 sono due funzioni continue in Ω, l'operatore $\bar\partial$ definisce un operatore lineare chiuso, densamente definito,

$$T : L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_1) \longrightarrow L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi_2).$$

Un elemento $u\in L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_1)$ appartiene al dominio D_T se $\bar\partial u$, definita nel senso delle distribuzioni, appartiene a $L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi_2)$, e in tal caso poniamo $Tu=\bar\partial u$. Che T sia

chiuso segue dalla continuità della derivazione nella teoria delle distribuzioni. Il dominio è denso poiché contiene $D_{(p,q)}(\Omega)$.

Vogliamo provare, per densità opportune, che l'immagine di T è costituita da tutte le $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ tali che $\bar\partial f = 0$ (condizione ovviamente necessaria perché f appartenga all'immagine di T). Il lemma seguente riconduce la questione allo studio di una stima.

Lemma 4.1.1. Sia T un operatore lineare chiuso, densamente definito, da uno spazio di Hilbert H_1 a uno spazio di Hilbert H_2, e sia F un sottospazio chiuso di H_2 contenente l'immagine R_T di T. Allora $F = R_T$ se e solo se esiste una costante C tale che

$$\|f\|_{H_2} \le C\|T^* f\|_{H_1}, \qquad f \in F \cap D_{T^*}. \tag{4.1.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima valida la (4.1.1) e sia $g \in F$. Poiché $T^{**} = T$, l'equazione $Tu = g$ equivale all'identità

$$(u, T^* f)_{H_1} = (g, f)_{H_2}, \qquad f \in D_{T^*}.$$

Se proviamo che

$$|(g, f)_{H_2}| \le C\|g\|_{H_2}\|T^* f\|_{H_1}, \qquad f \in D_{T^*}, \tag{4.1.2}$$

il teorema di Hahn–Banach applicato alla forma antilineare $T^* f \mapsto (g, f)_{H_2}$ mostrerà che l'equazione $Tu = g$ ha una soluzione u con

$$\|u\|_{H_1} \le C\|g\|_{H_2}. \tag{4.1.3}$$

(Poiché H_1 è uno spazio di Hilbert, potremmo naturalmente ricorrere a una proiezione sulla chiusura di R_{T^*} in luogo del teorema di Hahn–Banach.) Per dimostrare la (4.1.2) osserviamo che, se f è ortogonale a F, si ha $(g, f)_{H_2} = 0$ e anche $T^* f = 0$, poiché $R_T \subset F$. Basta dunque provare la (4.1.2) per $f \in F \cap D_{T^*}$, e in tal caso essa segue immediatamente dalla (4.1.1).

Viceversa, supponendo $R_T = F$, dobbiamo provare che l'insieme

$$B = \{f \in F \cap D_{T^*} : \|T^* f\|_{H_1} \le 1\}$$

è limitato. Basta mostrare che B è debolmente limitato in F, ossia che per ogni $g \in F$ fissato la quantità $|(f, g)_{H_2}|$ è limitata al variare di $f \in B$. Ma per ipotesi possiamo scegliere $u \in D_T$ con $Tu = g$, e allora

$$|(f, g)_{H_2}| = |(T^* f, u)_{H_1}| \le \|u\|_{H_1}, \qquad f \in B.$$

Il lemma è dimostrato.

Nella dimostrazione dei teoremi di approssimazione ci occorrerà la seguente informazione sull'operatore T^*, conseguenza della (4.1.1).

Lemma 4.1.2. Sia T un operatore lineare chiuso, densamente definito, da uno spazio di Hilbert H_1 a un altro H_2 e sia F un sottospazio chiuso di H_2 contenente l'immagine R_T di T. Supponiamo valida la (4.1.1). Per ogni $v \in H_1$ ortogonale al nucleo di T si può allora trovare $f \in D_{T^*}$ tale che $T^* f = v$ e

$$\|f\|_{H_2} \le C\|v\|_{H_1}. \tag{4.1.4}$$

Dimostrazione. Il nucleo di T è il sottospazio ortogonale a R_{T^*}, dunque l'ipotesi significa che v appartiene alla chiusura di R_{T^*}. Il complemento ortogonale di F è contenuto

nel nucleo di T^*, perciò la restrizione di T^* a $F \cap D_{T^*}$ ha la stessa immagine di T^*. Ma la (4.1.1) mostra che tale restrizione ha immagine chiusa. Possiamo quindi trovare $f \in F \cap D_{T^*}$ con $T^* f = v$, e la (4.1.4) segue dalla (4.1.1).

Nella nostra applicazione del lemma 4.1.1, H_1 e H_2 saranno rispettivamente $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ e $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$, T sarà l'operatore tra questi spazi definito da $\bar\partial$ come spiegato sopra, e F l'insieme delle $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ con $\bar\partial f = 0$ (nel senso delle distribuzioni). Sia φ_3 un'altra funzione continua e sia S l'operatore da $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ a $L^2_{(p,q+2)}(\Omega, \varphi_3)$ definito da $\bar\partial$. Allora F è il nucleo di S e per provare la (4.1.1) basterà mostrare che

$$\|f\|^2_{\varphi_2} \le C^2(\|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}), \qquad f \in D_{T^*} \cap D_S, \tag{4.1.5}$$

poiché l'ultimo termine scompare se f appartiene al nucleo di S. Se le densità sono scelte opportunamente, basta provare la (4.1.5) per $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$, grazie al lemma seguente.

Lemma 4.1.3. Sia η_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, una successione di funzioni di $C^\infty_0(\Omega)$ tali che $0 \le \eta_\nu \le 1$ e, su ogni compatto di Ω, $\eta_\nu = 1$ per ν sufficientemente grande. Supponiamo che $\varphi_2 \in C^1(\Omega)$ e che

$$e^{-\varphi_{j+1}} \sum_{k=1}^{n} |\partial \eta_\nu / \partial \bar z_k|^2 \le e^{-\varphi_j}, \qquad j = 1, 2, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{4.1.6}$$

Allora $D_{(p,q+1)}(\Omega)$ è denso in $D_{T^*} \cap D_S$ rispetto alla norma del grafico

$$f \mapsto \|f\|_{\varphi_2} + \|T^* f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3}.$$

Su ogni compatto di Ω la (4.1.6) impone solo un numero finito di maggiorazioni a $\varphi_j - \varphi_{j+1}$. Si possono quindi sempre trovare funzioni continue $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ che la soddisfino.

Dimostrazione. Poiché $S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S f = \bar\partial \eta_\nu \wedge f$ per $f \in D_S$, dalla (4.1.6) segue

$$|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S f|^2 e^{-\varphi_3} \le |f|^2 e^{-\varphi_2}.$$

Per il teorema della convergenza dominata,

$$\|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S f\|_{\varphi_3} \to 0 \quad (\nu \to \infty), \qquad f \in D_S. \tag{4.1.7}$$

Se $f \in D_{T^*}$ e $\eta \in C^\infty_0(\Omega)$, allora $\eta f \in D_{T^*}$. Infatti per $u \in D_T$,

$$\begin{aligned}(\eta f, Tu)_{\varphi_2} &= (f, \bar\eta T u)_{\varphi_2} = (f, T(\bar\eta u))_{\varphi_2} + (f, \bar\eta T u - T(\bar\eta u))_{\varphi_2} \\ &= (\eta T^* f, u)_{\varphi_1} + (f, \bar\eta T u - T(\bar\eta u))_{\varphi_2}.\end{aligned}$$

Poiché nell'ultimo termine non compaiono derivate di u, il membro sinistro è continuo rispetto alla norma $\|u\|_{\varphi_1}$. Esiste dunque $v \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ con

$$(v, u)_{\varphi_1} = (\eta f, Tu)_{\varphi_2}, \qquad u \in D_T.$$

Ciò significa che $\eta f \in D_{T^*}$ e $T^*(\eta f) = v$. Per $\eta = \eta_\nu$, stimando $\bar\eta_\nu T u - T(\bar\eta_\nu u)$ come nella dimostrazione della (4.1.7), otteniamo

$$|(T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f, u)_{\varphi_1}| \le \int |f| e^{-\varphi_2/2} |u| e^{-\varphi_1/2}\, d\lambda,$$

da cui $|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f|^2 e^{-\varphi_1} \le |f|^2 e^{-\varphi_2}$. Come sopra, per convergenza dominata concludiamo che

$$\|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\|_{\varphi_1} \to 0 \quad (\nu \to \infty), \qquad f \in D_{T^*}. \tag{4.1.8}$$

Dunque $\eta_\nu f \to f$ nella norma del grafico se $f \in D_{T^*} \cap D_S$.

Per completare la dimostrazione basta approssimare gli elementi $f \in D_{T^*} \cap D_S$ a supporto compatto in Ω con elementi di $D_{(p,q+1)}(\Omega)$. A tal fine occorre un lemma elementare.

Lemma 4.1.4. Sia $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\int \chi\, dx = 1$, e si ponga $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\chi(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Se $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, allora

$$(g * \chi_\varepsilon)(x) = \int g(y)\chi_\varepsilon(x-y)\, dy = \int g(x-\varepsilon y)\chi(y)\, dy$$

è una funzione di classe C^∞ tale che $\|g * \chi_\varepsilon - g\|_{L^2} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$. Se il supporto di χ è contenuto nella palla unitaria, nessun punto del supporto di $g * \chi_\varepsilon$ dista più di ε dal supporto di g.

Ammettendo per il momento il lemma, completiamo la dimostrazione del lemma 4.1.3. Se $f \in D_{T^*} \cap D_S$ ha supporto compatto, definiamo $f * \chi_\varepsilon$ scegliendo χ come nel lemma 4.1.4 con $N = 2n$ e applicando la convoluzione a ciascun coefficiente di f. Per $\varepsilon \to 0$ il supporto di $f * \chi_\varepsilon$ resta contenuto in un compatto fissato di Ω e il lemma dà $\|f - f * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_2} \to 0$. Poiché $S(f * \chi_\varepsilon) = (Sf) * \chi_\varepsilon$, otteniamo altresì $\|Sf - S(f * \chi_\varepsilon)\|_{\varphi_3} \to 0$. L'operatore T^* non ha coefficienti costanti, ma possiamo scrivere $e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^* = \vartheta + a$, dove ϑ è un operatore differenziale a coefficienti costanti e a è di ordine zero (cfr. la (4.1.9) sotto). Poiché

$$(\vartheta + a)(f * \chi_\varepsilon) = ((\vartheta + a)f) * \chi_\varepsilon + a(f * \chi_\varepsilon) - (af) * \chi_\varepsilon$$

e per il lemma 4.1.4 il secondo membro converge in L^2 a $(\vartheta + a)f + af - af$, segue $\|T^*(f * \chi_\varepsilon) - T^* f\|_{\varphi_1} \to 0$. Questo conclude la dimostrazione del lemma 4.1.3.

Dimostrazione del lemma 4.1.4. Nel primo integrale che definisce $g * \chi_\varepsilon$ possiamo derivare sotto il segno d'integrale quante volte vogliamo, ottenendo $g * \chi_\varepsilon \in C^\infty$. Dalla seconda espressione e dalla disuguaglianza di Minkowski segue

$$\|g * \chi_\varepsilon\|_{L^2} \le C\|g\|_{L^2}, \qquad C = \int |\chi|\, dx.$$

È evidente che $g * \chi_\varepsilon - g \to 0$ uniformemente per $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, sottospazio denso di L^2. Poiché anche l'ultima affermazione del lemma è immediata, abbiamo $\|g * \chi_\varepsilon - g\|_{L^2} \to 0$ per tutte le g di un sottoinsieme denso di L^2. Dalla maggiorazione uniforme appena dimostrata segue allora la stessa conclusione per ogni $g \in L^2$.

Concludiamo il paragrafo calcolando esplicitamente T^*, il che fornisce anche un'altra dimostrazione della (4.1.8). Scegliamo

$$u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' u_{I,K}\, dz^I \wedge d\bar{z}^K \in D_{(p,q)}(\Omega),$$
$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q+1}{}' f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2).$$

Poiché $f_{I,J}$ è definito per ogni J come funzione antisimmetrica degli indici di J, e

$$\bar\partial u = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|K|=q}{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_{I,K}}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^K,$$

per $f \in D_{T^*}$ otteniamo

$$\int \sum_{I,K}{}' (T^* f)_{I,K} \overline{u_{I,K}} e^{-\varphi_1}\, d\lambda = (T^* f, u)_{\varphi_1} = (f, Tu)_{\varphi_2}$$
$$= (-1)^p \int \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} f_{I,jK} \overline{\frac{\partial u_{I,K}}{\partial \bar{z}_j}} e^{-\varphi_2}\, d\lambda.$$

Ciò significa che

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_1} \frac{\partial (e^{-\varphi_2} f_{I,jK})}{\partial z_j}\, dz^I \wedge d\bar{z}^K. \tag{4.1.9}$$

4.2. Teoremi di esistenza nei domini pseudoconvessi

Scegliamo una funzione $\psi \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$\sum_{k=1}^{n} |\partial \eta_\nu / \partial \bar{z}_k|^2 \le e^\psi \quad \text{in } \Omega, \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{4.2.1}$$

Ponendo

$$\varphi_1 = \varphi - 2\psi, \qquad \varphi_2 = \varphi - \psi, \qquad \varphi_3 = \varphi, \tag{4.2.2}$$

la condizione (4.1.6) è soddisfatta per ogni scelta di φ. Studieremo ora $\|T^* f\|_{\varphi_1}$ e $\|Sf\|_{\varphi_3}$ per $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$, mantenendo fissa ψ in tutto ciò che segue e ottenendo stime uniformi rispetto a φ, in modo da poter scegliere opportunamente φ alla fine della discussione. Supponiamo $\varphi \in C^2(\Omega)$.

Osserviamo anzitutto che, essendo

$$\bar{\partial} f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q+1}{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

si ottiene

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J,L}{}' \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I,L}}{\partial \bar{z}_l}}\, \varepsilon_{lL}^{jJ},$$

dove $\varepsilon_{lL}^{jJ} = 0$ salvo che $j \notin J$, $l \notin L$ e $\{j\} \cup J = \{l\} \cup L$. In tal caso ε_{lL}^{jJ} è il segno della permutazione $\binom{jJ}{lL}$. Riordiniamo i termini della somma. Consideriamo prima i termini con $j = l$. Perché $\varepsilon_{lL}^{jJ} \neq 0$ occorre che $J = L$ e $j \notin J$, sicché la somma di questi termini è

$$\sum_{I,J}{}' \sum_{j \notin J} |\partial f_{I,J} / \partial \bar{z}_j|^2.$$

Passiamo ai termini con $j \neq l$. Se $\varepsilon_{lL}^{jJ} \neq 0$, allora $l \in J$ e $j \in L$ e, sopprimendo l da J oppure j da L, si ottiene lo stesso multiindice K. Poiché

$$\varepsilon_{lL}^{jJ} = \varepsilon_{jlK}^{jJ} \varepsilon_{ljK}^{jlK} \varepsilon_{lL}^{ljK} = -\varepsilon_{lK}^{J} \varepsilon_{L}^{jK},$$

la somma dei termini in questione è

$$-\sum_{I,K}{}' \sum_{j \neq l} \frac{\partial f_{I,lK}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_l}}.$$

Otteniamo così

$$|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{I,J}{}' \sum_{j} \left| \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k} \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial \bar{z}_j}}. \tag{4.2.3}$$

(Per $p = 0$, $q = 1$, ciò segue dal fatto che $|\bar{\partial} f|^2 = \sum_{j,k} |\partial f_j / \partial \bar{z}_k - \partial f_k / \partial \bar{z}_j|^2 / 2$.)

Consideriamo ora T^*f. Con la notazione

$$\delta_j w = e^{\varphi}\frac{\partial(we^{-\varphi})}{\partial z_j} = \frac{\partial w}{\partial z_j} - w\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}, \tag{4.2.4}$$

dalla (4.1.9) otteniamo

$$\begin{aligned} e^{\psi}T^*f = (-1)^{p-1}\sum_{I,K}{}'\sum_{j=1}^{n}\delta_j f_{I,jK}\, dz^I\wedge d\bar z^K \\ + (-1)^{p-1}\sum_{I,K}{}'\sum_{j=1}^{n} f_{I,jK}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}dz^I\wedge d\bar z^K. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \sum_{I,K}{}'\sum_{j,k=1}^{n}\delta_j f_{I,jK}\overline{\delta_k f_{I,kK}}\, e^{-\varphi}\, d\lambda \le 2\|T^*f\|^2_{\varphi_1} + 2\int |f|^2|\partial\psi|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda.$$

Combinando questa stima con la (4.2.3) otteniamo

$$\begin{aligned} &\int \sum_{I,K}{}'\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_j f_{I,jK}\overline{\delta_k f_{I,kK}} - \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial\bar z_k}\overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial\bar z_j}}\right)e^{-\varphi}\, d\lambda \\ &+ \int \sum_{I,J}{}'\sum_{j=1}^{n}|\partial f_{I,J}/\partial\bar z_j|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \\ &\le 2\|T^*f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3} + 2\int |f|^2|\partial\psi|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Ora gli operatori $\partial/\partial\bar z_k$ e $-\delta_k$ sono aggiunti nel senso che, per $w_1, w_2 \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int w_1\overline{\frac{\partial w_2}{\partial\bar z_k}}e^{-\varphi}\, d\lambda = -\int \delta_k w_1\overline{w_2}e^{-\varphi}\, d\lambda,$$

e valgono le relazioni di commutazione

$$\delta_j\frac{\partial}{\partial\bar z_k} - \frac{\partial}{\partial\bar z_k}\delta_j = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z_k\,\partial z_j}. \tag{4.2.6}$$

Trasferendo le derivazioni sul fattore di sinistra nella prima somma della (4.2.5) otteniamo dunque

$$\begin{aligned} &\sum_{I,K}{}'\int\sum_{j,k=1}^{n} f_{I,jK}\overline{f_{I,kK}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\,\partial\bar z_k}e^{-\varphi}\, d\lambda + \sum_{I,J}{}'\sum_{j=1}^{n}\int|\partial f_{I,J}/\partial\bar z_j|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \\ &\le 2\|T^*f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3} + 2\int|f|^2|\partial\psi|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda, \qquad f\in D_{(p,q+1)}(\Omega). \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Supponiamo ora φ strettamente plurisubarmonica, con

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\,\partial\bar z_k}w_j\bar w_k \ge c\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2, \qquad w\in\mathbb{C}^n, \tag{4.2.8}$$

dove c è una funzione continua positiva in Ω. Dalla (4.2.7) segue allora che, per $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$,

$$\int (c - 2|\partial\psi|^2)|f|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \le 2\|T^*f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}. \tag{4.2.9}$$

Ricordando il lemma 4.1.3, abbiamo così dimostrato il seguente lemma.

Lemma 4.2.1. Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definite dalla (4.2.2), con $\varphi, \psi \in C^2(\Omega)$. Vale la stima

$$\|f\|^2_{\varphi_2} \leq \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}, \qquad f \in D_{T^*} \cap D_S, \tag{4.2.10}$$

purché

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \geq 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^{\psi}) \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2, \quad w \in \mathbb{C}^n. \tag{4.2.11}$$

È ora facile dimostrare un teorema di esistenza.

Teorema 4.2.2. Sia Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$. Per ogni $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ tale che $\bar{\partial} f = 0$, l'equazione $\bar{\partial} u = f$ ha, nel senso delle distribuzioni, una soluzione $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$.

Dimostrazione. Per il teorema 2.6.11 possiamo scegliere una funzione strettamente plurisubarmonica $p \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$K_c = \{z \in \Omega : p(z) \leq c\} \Subset \Omega, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sia $0 < m \in C^0(\Omega)$ tale che

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \geq m \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2.$$

Se χ è una funzione convessa crescente di classe C^∞ e $\varphi = \chi(p)$, otteniamo

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k \geq \chi'(p) m \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2.$$

Pertanto φ soddisfa la (4.2.11) se $\chi'(p)m \geq 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^{\psi})$, ossia se

$$\chi'(t) \geq \sup_{K_t} 2(|\bar{\partial}\psi|^2 + e^{\psi})/m. \tag{4.2.12}$$

Il secondo membro è una funzione crescente e finita di t, definita per $t \geq \min p$. Esistono quindi funzioni crescenti χ' di classe C^∞ che soddisfano la (4.2.12). È chiaro che, data $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc})$, possiamo scegliere χ in modo che inoltre $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi - \psi)$. Dal lemma 4.1.1 segue allora che l'equazione $\bar{\partial} u = f$ ha una soluzione $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi - 2\psi)$. Il teorema è dimostrato.

Esaminiamo la regolarità della soluzione u dell'equazione $\bar{\partial} u = f$ che abbiamo ottenuto. A tale scopo è importante osservare che la soluzione di $Tu = f$ data dal lemma 4.1.1 si può scegliere ortogonale al nucleo di T, ossia nella chiusura dell'immagine di T^*. Ne ricaveremo per u un'ulteriore equazione differenziale, essenziale per provarne la regolarità.

Per s intero non negativo, sia W^s lo spazio delle funzioni in $\mathbb{C}^n$ le cui derivate di ordine $\leq s$ appartengono a L^2. Con $W^s(\Omega, \mathrm{loc})$ indichiamo le funzioni che soddisfano la stessa condizione sui compatti di Ω. Indichiamo quindi con $W^s_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$ lo spazio delle forme di tipo (p,q) con coefficienti in questo spazio. Se f ha tipo $(p, q+1)$, con $p, q \geq 0$, poniamo

$$\vartheta f = \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial z_j} \, dz^I \wedge d\bar{z}^K.$$

Questa è, a meno del segno, la parte principale dell'operatore differenziale nella (4.1.9).

Lemma 4.2.3. Se $f \in L^2_{(p,q+1)}(\mathbb{C}^n)$ ha supporto compatto, $\bar\partial f \in L^2_{(p,q+2)}(\mathbb{C}^n)$ e $\vartheta f \in L^2_{(p,q)}(\mathbb{C}^n)$, allora $f \in W^1_{(p,q+1)}(\mathbb{C}^n)$.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, per $f \in D_{(p,q+1)}$, la (4.2.7) con $\varphi = \psi = 0$ dà

$$\sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f_{I,J}/\partial \bar z_j|^2 \, d\lambda \le 2\|\vartheta f\|_0^2 + \|\bar\partial f\|_0^2. \tag{4.2.13}$$

Se f soddisfa soltanto le ipotesi del lemma, regolarizziamola mediante $f * \chi_\varepsilon$ come nel lemma 4.1.4. Applichiamo la (4.2.13) a $f * \chi_\varepsilon - f * \chi_\delta$. Poiché $\vartheta(f * \chi_\varepsilon) = (\vartheta f) * \chi_\varepsilon \to \vartheta f$ in $L^2_{(p,q)}(\mathbb{C}^n)$ e vale il risultato corrispondente per $\bar\partial(f * \chi_\varepsilon)$, si vede che $\chi_\varepsilon * (\partial f_{I,J}/\partial \bar z_j)$ converge in L^2 per tutti gli I, J, j quando $\varepsilon \to 0$. Dunque $\partial f_{I,J}/\partial \bar z_j \in L^2$. La dimostrazione è così ricondotta al lemma seguente.

Lemma 4.2.4. Se $w \in L^2(\mathbb{C}^n)$ ha supporto compatto e $\partial w/\partial \bar z_j \in L^2$ per $j = 1, \dots, n$, allora $w \in W^1$.

Dimostrazione. Basta provare che $\partial w/\partial z_j \in L^2$. Se $w \in C^\infty_0$, due integrazioni per parti danno

$$\int \left|\frac{\partial w}{\partial z_j}\right|^2 d\lambda = \int \frac{\partial w}{\partial z_j}\overline{\frac{\partial w}{\partial z_j}}\, d\lambda = -\int \frac{\partial^2 w}{\partial \bar z_j\, \partial z_j}\bar w \, d\lambda = \int \left|\frac{\partial w}{\partial \bar z_j}\right|^2 d\lambda.$$

Usando questa identità come abbiamo usato la (4.2.13) nella dimostrazione del lemma precedente, otteniamo $\partial w/\partial z_j \in L^2$.

Possiamo ora rafforzare il teorema 4.2.2.

Teorema 4.2.5. Sia Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$ e sia $0 \le s \le \infty$. L'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in W^{s+1}_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$ per ogni $f \in W^s_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ tale che $\bar\partial f = 0$. Per $q = 0$ ogni soluzione dell'equazione $\bar\partial u = f$ ha questa proprietà.

Dimostrazione. (a) Supponiamo dapprima $q = 0$. Per il teorema 4.2.2 l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u = \sum' u_I dz^I \in L^2_{(p,0)}(\Omega, \mathrm{loc})$. L'equazione significa che $\partial u_I/\partial \bar z_j = f_{I,j} \in W^s(\Omega, \mathrm{loc})$ per ogni I, j (con il segno determinato dall'ordine dei differenziali). Supponiamo che $u \in W^\sigma(\Omega, \mathrm{loc})$ per un certo σ finito con $0 \le \sigma \le s$. Per $\sigma = 0$ lo sappiamo già. Se $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$, otteniamo, con la stessa convenzione di segno,

$$\frac{\partial(\chi u_I)}{\partial \bar z_j} = \chi f_{I,j} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar z_j} u_I \in W^\sigma.$$

Se v è una derivata di ordine σ di χu_I, ne segue $\partial v/\partial \bar z_j \in L^2$ per ogni j. Per il lemma 4.2.4 si ha quindi $v \in W^1$, ossia tutte le derivate di χu_I di ordine $\sigma + 1$ sono in L^2. Ciò significa che $u_I \in W^{\sigma+1}(\Omega, \mathrm{loc})$. Ripetendo il ragionamento concludiamo che $u_I \in W^{s+1}(\Omega, \mathrm{loc})$.

(b) Supponiamo ora $q > 0$. Come osservato dopo la dimostrazione del teorema 4.2.2, la soluzione dell'equazione $\bar\partial u = f$ data in quel teorema si può scegliere nella chiusura dell'immagine di T^*. Per la (4.1.9) e poiché $\vartheta^2 = 0$, abbiamo

$$\vartheta(e^{-\varphi_1} u) = 0, \qquad \bar\partial u = f.$$

Possiamo anche scrivere $\bar\partial u = f$, $\vartheta u = au$, dove a è un operatore differenziale di ordine zero con coefficienti C^∞ agente su u. Supponiamo di avere già dimostrato che $u \in W^\sigma_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$ per un certo σ finito con $0 \le \sigma \le s$. Per $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$ si ottiene

$$\bar\partial(\chi u) \in W^\sigma_{(p,q+1)}, \qquad \vartheta(\chi u) \in W^\sigma_{(p,q-1)}.$$

Se D è una derivazione di ordine σ, la forma $D(\chi u)$ soddisfa le ipotesi del lemma 4.2.3, dunque $D(\chi u) \in W^1$. Perciò $\chi u \in W^{\sigma+1}_{(p,q)}$, ossia $u \in W^{\sigma+1}_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$. La dimostrazione è conclusa.

Corollario 4.2.6. Se Ω è pseudoconvesso, l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ per ogni $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ tale che $\bar\partial f = 0$.

Dimostrazione. Per il noto lemma di Sobolev,

$$W^{s+2n}_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc}) \subset C^s_{(p,q)}(\Omega), \tag{4.2.14}$$

e quindi il corollario segue dal teorema 4.2.5. (Una dimostrazione elementare della (4.2.14) si ricava dall'ovvia disuguaglianza

$$\sup |w| \le \int \left| \frac{\partial^{2n} w}{\partial x_1 \cdots \partial x_{2n}} \right| d\lambda, \qquad w \in C^\infty_0(\mathbb{C}^n).$$

Infatti, come nella dimostrazione del lemma 4.2.3, da questa disuguaglianza si ottiene che ogni $w \in W^{2n}$ a supporto compatto è continua dopo averne modificato i valori su un insieme di misura nulla. Lasciamo i dettagli al lettore.)

Combinando il corollario 4.2.6 con il teorema 2.7.10 otteniamo il teorema seguente.

Teorema 4.2.7. Se Ω è un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$, allora $H^r(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ per $r > n$.

Osservazione. La teoria di Morse permette di provare di più, ossia che $H^r(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ per $r > n$ (si veda Milnor [1]). D'altra parte $H^r(\Omega, \mathbb{C})$ può essere non nullo per $r \le n$. Sia infatti

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \tfrac{1}{2} < |z_j| < 2,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

È un dominio di olomorfia poiché è il prodotto di aperti di $\mathbb{C}$, che sono a loro volta domini di olomorfia. Dunque Ω è pseudoconvesso. La forma $f = (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_r)/(z_1 \cdots z_r)$, con $1 \le r \le n$, è chiusa. Se però γ è il ciclo chiuso $z_1 = e^{i\theta_1}, \ldots, z_r = e^{i\theta_r}$ $(\theta_j \in \mathbb{R})$, $z_{r+1} = \cdots = z_n = 1$, l'integrale di f su γ vale $(2\pi i)^r \neq 0$. Dunque f non è il differenziale di alcuna forma di grado $r-1$. (Si veda anche un esempio nel paragrafo 2.7.)

Possiamo ora dimostrare il viceversa del teorema 2.6.5.

Teorema 4.2.8. Un aperto di $\mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia se (e, per il teorema 2.6.5, solo se) è pseudoconvesso.

Questo segue dal corollario 4.2.6 e dal teorema seguente.

Teorema 4.2.9. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ tale che l'equazione $\bar\partial u = f$ abbia una soluzione $u \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ per ogni $f \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega)$ con $\bar\partial f = 0$, $q = 0, \ldots, n-2$. Allora Ω è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Il teorema vale per $n = 1$, poiché ogni aperto di $\mathbb{C}$ è un dominio di olomorfia. Procediamo per induzione sulla dimensione n e supponiamo il risultato già provato in dimensione $n-1$.

Basta provare che per ogni aperto convesso $D \subset \Omega$ con un punto z^0 della sua frontiera su $\partial\Omega$ esiste una funzione analitica in Ω che non si può prolungare analiticamente in un intorno di z^0. Possiamo scegliere coordinate tali che $z^0 = 0$ e che il piano $z_n = 0$ abbia con D un'intersezione non vuota D_0. Per la convessità di D, l'origine appartiene alla frontiera di D_0 e quindi alla frontiera di

$$\omega = \{z \in \Omega : z_n = 0\}.$$

(Possiamo considerare ω come un aperto di $\mathbb{C}^{n-1}$.) Sia j l'inclusione naturale di ω in Ω e sia π la proiezione di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}^{n-1}$ ottenuta sopprimendo l'ultima coordinata. Il punto principale della dimostrazione è ora mostrare che, per ogni $f \in C^\infty_{(0,q)}(\omega)$, $q \geq 0$, con $\bar\partial f = 0$, esiste $F \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ con $\bar\partial F = 0$ e $f = j^*F$. (Cfr. il lemma 2.7.5. La notazione j^* è stata introdotta nel paragrafo 2.1.) Per costruire F osserviamo che ω e $M = \{z \in \Omega : \pi z \notin \omega\}$ sono disgiunti e relativamente chiusi in Ω. Esiste quindi $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ uguale a 1 in un intorno di ω e a 0 in un intorno di M. La forma $\varphi\pi^*f$, posta uguale a zero dove $\varphi = 0$, appartiene allora a $C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ e $j^*(\varphi\pi^*f) = f$. Poniamo

$$F = \varphi\pi^*f - z_n v,$$

con $v \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ da scegliere in modo che $\bar\partial F = 0$. Ciò significa che

$$\bar\partial v = z_n^{-1}\bar\partial\varphi \wedge \pi^*f.$$

Poiché il secondo membro appartiene a $C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega)$ ed è $\bar\partial$-chiuso, l'esistenza di v segue dall'ipotesi del teorema nei gradi richiesti. Abbiamo $j^*F = j^*\pi^*f = f$, dunque F ha le proprietà volute.

Possiamo ora provare che le ipotesi del teorema sono soddisfatte sostituendo Ω con ω. Infatti, data $f \in C^\infty_{(0,q+1)}(\omega)$ con $\bar\partial f = 0$, abbiamo provato che esiste $F \in C^\infty_{(0,q+1)}(\Omega)$ con $\bar\partial F = 0$ e $j^*F = f$. Per ipotesi l'equazione $\bar\partial U = F$ ha una soluzione $U \in C^\infty_{(0,q)}(\Omega)$. Ponendo $u = j^*U$ otteniamo

$$\bar\partial u = j^*\bar\partial U = j^*F = f.$$

Per l'ipotesi induttiva ω è un dominio di olomorfia. Esiste quindi una funzione f analitica in ω che non si può prolungare analiticamente in un intorno di $\overline{D}_0$. Scegliendo F analitica in Ω con $j^*F = f$, ossia $F = f$ in ω, ne segue che F non si può prolungare in un intorno di $\overline{D}$. Dunque Ω è un dominio di olomorfia e la dimostrazione è conclusa.

4.3. Teoremi di approssimazione

Mostreremo che le stime L^2 dimostrate nel paragrafo 4.2 forniscono anche teoremi di approssimazione. Il passo essenziale è il seguente.

Lemma 4.3.1. Sia p una funzione strettamente plurisubarmonica di classe C^∞ in Ω tale che

$$K_c = \{z \in \Omega : p(z) \leq c\} \Subset \Omega \qquad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}.$$

Ogni funzione analitica in un intorno di K_0 si può allora approssimare nella norma L^2 su K_0 mediante funzioni di $A(\Omega)$.

Dimostrazione. Per il teorema di Hahn–Banach basta provare che, se $v \in L^2(K_0)$ e

$$\int_{K_0} u\bar v \, d\lambda = 0 \tag{4.3.1}$$

per ogni $u \in A(\Omega)$, la (4.3.1) vale per ogni u analitica soltanto in un intorno di K_0. Estendiamo v ponendola uguale a zero fuori di K_0. La (4.3.1) implica allora che ve^{φ_1} è ortogonale al nucleo N_T dell'operatore T del paragrafo precedente, con $p = q = 0$ come indici di bidegrado. Infatti N_T è un sottospazio di $A(\Omega)$ (per il teorema 4.2.5 tutti i suoi elementi sono funzioni di classe C^∞). Quando vale la stima (4.2.10), dal lemma 4.1.2 segue che esiste $f = \sum_{j=1}^n f_j \, d\bar z_j \in D_{T^*}$ tale che

$$\|f\|_{\varphi_2} \leq \|e^{\varphi_1}v\|_{\varphi_1}, \qquad T^*f = ve^{\varphi_1}.$$

Per la (4.1.9) quest'ultima equazione implica, nel senso delle distribuzioni,

$$ve^{\varphi_1} = -e^{\varphi_1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(e^{-\varphi_2} f_j)}{\partial z_j}.$$

Scrivendo $g = fe^{-\varphi_2}$ abbiamo dunque $v = -\sum_{j=1}^{n} \partial g_j/\partial z_j$ e

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} |g_j|^2 e^{\varphi_2}\, d\lambda \le \int_\Omega |v|^2 e^{\varphi_1}\, d\lambda, \tag{4.3.2}$$

sempre nell'ipotesi che valga la (4.2.10).

Nella dimostrazione del teorema 4.2.2 abbiamo visto che la (4.2.10) vale se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono definite dalla (4.2.2) con $\varphi = \chi(p)$, dove χ è convessa e soddisfa la (4.2.12). Scegliamo una successione di funzioni convesse χ_ν che soddisfino la (4.2.12), in modo che $\chi_\nu(t)$ sia indipendente da ν per $t \le 0$ e che $\chi_\nu(t) \nearrow \infty$ per $\nu \to \infty$ se $t > 0$. Per ogni ν possiamo allora scegliere g_j^ν, $j = 1, \dots, n$, tali che

$$v = -\sum_{j=1}^{n} \partial g_j^\nu/\partial z_j \tag{4.3.3}$$

e

$$\int \sum_{j=1}^{n} |g_j^\nu|^2 \exp(\chi_\nu(p) - \psi)\, d\lambda \le C, \tag{4.3.4}$$

con una costante C indipendente da ν, poiché nel secondo membro della (4.3.2) l'integrazione è limitata a K_0 e ivi $\chi_\nu(p)$ è indipendente da ν. Poiché $\chi_1 \le \chi_\nu$, possiamo estrarre dalla successione g^ν una sottosuccessione debolmente convergente a un limite g nello spazio di Hilbert $L^2_{(0,1)}(\Omega, \psi - \chi_1(p))$. Dalla (4.3.4) otteniamo $g = 0$ dove $p > 0$, e dalla (4.3.3) segue $v = -\sum_{j=1}^{n} \partial g_j/\partial z_j$ nel senso delle distribuzioni, ossia

$$\int u\bar{v}\, d\lambda = \int \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} \bar{g}_j\, d\lambda \tag{4.3.5}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Infatti questa identità, con g^ν al posto di g, segue dalla (4.3.3). Poiché v e g si annullano fuori di K_0, la (4.3.5) vale per ogni u che sia di classe C^∞ anche solo in un intorno di K_0. Se u è analitica in un tale intorno, ne segue la (4.3.1). La dimostrazione è conclusa.

È più utile la seguente riformulazione del lemma 4.3.1.

Teorema 4.3.2. Sia Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$ e sia K un compatto in Ω per il quale $\widehat{K}_\Omega^P = K$ (si veda la definizione 2.6.6). Ogni funzione analitica in un intorno di K si può allora approssimare uniformemente su K mediante funzioni di $A(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia u analitica in un intorno ω di K. Per il teorema 2.6.11 possiamo scegliere una funzione strettamente plurisubarmonica $p \in C^\infty(\Omega)$ che soddisfi le ipotesi del lemma 4.3.1, in modo che K sia contenuto nell'interno di K_0 e K_0 sia a sua volta contenuto nell'interno di ω. Per il lemma 4.3.1 esiste una successione $u_j \in A(\Omega)$ con $u_j - u \to 0$ in $L^2(K_0)$. Per il teorema 2.2.3 ne segue $u_j - u \to 0$ uniformemente su K. Il teorema è dimostrato.

Poiché $\widehat{K}_\Omega^P \subset \widehat{K}_\Omega$ (l'inviluppo di K rispetto ad $A(\Omega)$, si veda la definizione 2.5.2), il teorema 4.3.2 vale anche sostituendo $\widehat{K}_\Omega^P$ con $\widehat{K}_\Omega$. Possiamo dunque dare un risultato parallelo al teorema 1.3.4 che estende il teorema 2.7.3.

Teorema 4.3.3. Siano $\Omega_1 \subset \Omega_2$ domini di olomorfia. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

(i) Ogni funzione di $A(\Omega_1)$ si può approssimare mediante funzioni di $A(\Omega_2)$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di Ω_1. (In tal caso Ω_1 si chiama dominio di Runge rispetto a Ω_2.)

(ii) Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ si ha $\widehat{K}_{\Omega_2} = \widehat{K}_{\Omega_1}$.

(iii) Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ si ha $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}_{\Omega_1}$.

(iv) Per ogni compatto $K \subset \Omega_1$ si ha $\widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 \Subset \Omega_1$.

Dimostrazione. È evidente che (i) implica (iii) e che (iii) implica (iv), poiché Ω_1 è per ipotesi un dominio di olomorfia. Poniamo $K' = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ e $K'' = \widehat{K}_{\Omega_2} \cap \complement\Omega_1$. Per (iv) gli insiemi disgiunti K' e K'' sono compatti, dato che $\widehat{K}_{\Omega_2}$ è compatto in quanto Ω_2 è un dominio di olomorfia. Per ogni $f \in A(\Omega_1)$ il teorema 4.3.2 mostra che la funzione uguale a f su K' e a 1 su K'' è uniformemente approssimabile su $\widehat{K}_{\Omega_2} = K' \cup K''$ mediante funzioni di $A(\Omega_2)$. Questo prova (i) e, scegliendo $f = 0$, otteniamo $K'' = \varnothing$. Pertanto (iv), e con essa la condizione equivalente (iii), implica (ii). Poiché l'implicazione inversa è evidente, il teorema è dimostrato.

Diamo infine una forma più forte del teorema 4.2.8.

Teorema 4.3.4. Sia K un sottoinsieme compatto di un aperto pseudoconvesso $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Allora $\widehat{K}_\Omega$ (definizione 2.5.2) coincide con $\widehat{K}^P_\Omega$ (definizione 2.6.6).

Questo risultato comprende naturalmente il teorema 4.2.8 e dimostreremo il teorema 4.3.4 servendoci di esso. Per un argomento diretto si veda anche la dimostrazione del teorema 5.2.10.

Dimostrazione del teorema 4.3.4. È ovvio che $\widehat{K}^P_\Omega \subset \widehat{K}_\Omega$. Per provare l'inclusione inversa sia ω un intorno aperto arbitrario di $\widehat{K}^P_\Omega$. Per il teorema 2.6.11 possiamo scegliere in Ω una funzione plurisubarmonica continua p, negativa su K, tale che

$$\Omega_0 = \{z \in \Omega : p(z) < 0\}$$

sia contenuto in ω. Poiché Ω_0 è evidentemente pseudoconvesso, dal teorema 4.2.8 segue che Ω e Ω_0 sono domini di olomorfia. Inoltre Ω_0 è un dominio di Runge rispetto a Ω, perché per il teorema 4.3.2 ogni funzione di $A(\Omega_0)$ è uniformemente approssimabile mediante funzioni di $A(\Omega)$ sui compatti $\{z \in \Omega : p(z) \le c\}$, $c < 0$. La condizione (ii) del teorema 4.3.3 mostra allora che $\widehat{K}_\Omega \subset \Omega_0 \subset \omega$. Dunque $\widehat{K}_\Omega \subset \widehat{K}^P_\Omega$, e la dimostrazione è conclusa.

4.4. Teoremi di esistenza negli spazi L^2

Nei paragrafi 4.2 e 4.3 abbiamo impiegato le stime L^2 per studiare l'operatore $\bar\partial$ in C^∞. Si ottengono tuttavia informazioni globali più precise conservando le norme L^2, come faremo in questo paragrafo.

Lemma 4.4.1. Sia Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$ e sia $\varphi \in C^2(\Omega)$ a valori reali, tale che

$$c\sum_{j=1}^n |w_j|^2 \le \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar z_k} w_j \bar w_k, \qquad z \in \Omega, \quad w \in \mathbb{C}^n, \tag{4.4.1}$$

dove c è continua e positiva in Ω. Se $g \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi)$ e $\bar\partial g = 0$, esiste $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi)$ con $\bar\partial u = g$ e

$$\int |u|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \le 2 \int |g|^2 e^{-\varphi} c^{-1}\, d\lambda, \tag{4.4.2}$$

purché il secondo membro sia finito.

Dimostrazione. Per il teorema 2.6.11 scegliamo in Ω una funzione s strettamente plurisubarmonica di classe C^∞ tale che, per ogni a reale,

$$\Omega_a = \{z \in \Omega : s(z) < a\} \Subset \Omega.$$

Fissato a, possiamo scegliere le funzioni di troncamento η_ν del paragrafo 4.2 uguali a 1 in Ω_{a+1} e trovare quindi $\psi \ge 0$ che soddisfi la (4.2.1) e sia nulla in Ω_{a+1}. Sostituiamo φ con $\varphi' = \varphi + \chi(s)$, dove $\chi \ge 0$ è nulla in $(-\infty, a)$, convessa e così rapidamente crescente che

$$\varphi' - 2\psi = \varphi + \chi(s) - 2\psi \ge \varphi, \qquad \chi'(s) \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial z_j \partial \bar z_k} w_j \bar w_k \ge 2|\partial\psi|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2.$$

Applicando la (4.2.9) con φ' al posto di φ e $\varphi_j = \varphi' + (j-3)\psi$, otteniamo

$$\int c|f|^2 e^{-\varphi'}\, d\lambda \le 2\|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \|Sf\|^2_{\varphi_3}$$

per $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$ e dunque per $f \in D_{T^*} \cap D_S$. Poiché $2\varphi_2 - \varphi - \varphi' = \varphi' - 2\psi - \varphi \ge 0$, dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, normalizzato a 1 il secondo membro della (4.4.2), segue

$$|(g,f)_{\varphi_2}|^2 \le \tfrac12 \int c|f|^2 e^{-\varphi'}\, d\lambda \le \|T^* f\|^2_{\varphi_1} + \tfrac12 \|Sf\|^2_{\varphi_3}, \qquad f \in D_{T^*} \cap D_S.$$

Affermiamo che

$$|(g,f)_{\varphi_2}| \le \|T^* f\|_{\varphi_1}, \qquad f \in D_{T^*}. \tag{4.4.3}$$

Per $Sf = 0$ lo abbiamo già provato. Se invece f è ortogonale al nucleo di S, è ortogonale all'immagine di T, quindi $T^* f = 0$. Poiché $\bar\partial g = 0$ e

$$\int |g|^2 e^{-\varphi_2}\, d\lambda \le \int |g|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda < \infty$$

in quanto $\varphi_2 - \varphi = \varphi' - \psi - \varphi \ge \psi \ge 0$, per tali f abbiamo $(g,f)_{\varphi_2} = 0$. Questo conclude la dimostrazione della (4.4.3).

Applicando il teorema di Hahn–Banach alla forma antilineare $T^* f \mapsto (g,f)_{\varphi_2}$, $f \in D_{T^*}$, otteniamo un elemento $u_a \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_1)$ tale che

$$\int |u_a|^2 e^{-\varphi_1}\, d\lambda \le 1 \tag{4.4.4}$$

e $(g,f)_{\varphi_2} = (u_a, T^* f)_{\varphi_1}$ per $f \in D_{T^*}$, dunque $Tu_a = g$. Possiamo ora scegliere una successione $a_j \to \infty$ tale che u_{a_j} converga debolmente in L^2 su Ω_a per ogni a a un limite u. Da $\bar\partial u_{a_j} = g$ segue $\bar\partial u = g$ e dalla (4.4.4) segue $\int_{\Omega_a} |u|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \le 1$ per ogni a. Ciò prova la (4.4.2).

Il teorema seguente è una semplice conseguenza del lemma 4.4.1, ma è spesso assai più utile perché elimina le ipotesi di regolarità e di stretta plurisubarmonicità su φ.

Teorema 4.4.2. Sia Ω un aperto pseudoconvesso in $\mathbb{C}^n$ e sia φ una qualunque funzione plurisubarmonica in Ω. Per ogni $g \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi)$ con $\bar\partial g = 0$ esiste una soluzione $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\mathrm{loc})$ dell'equazione $\bar\partial u = g$ tale che

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-2}\,d\lambda \le \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi}\,d\lambda. \tag{4.4.5}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\varphi \in C^2$. Applichiamo il lemma 4.4.1 con $\varphi + 2\log(1+|z|^2)$ al posto di φ, osservando che

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^n w_j\bar w_k \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar z_k}\log(1+|z|^2) &= (1+|z|^2)^{-2}\big(|w|^2(1+|z|^2)-|\langle w,z\rangle|^2\big)\\ &\ge (1+|z|^2)^{-2}|w|^2.\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Possiamo dunque prendere $c = 2(1+|z|^2)^{-2}$ e la (4.4.2) dà la (4.4.5).

Nel caso generale scegliamo anzitutto una funzione plurisubarmonica s in Ω tale che $\Omega_a = \{z \in \Omega : s(z) < a\} \Subset \Omega$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Anche gli aperti Ω_a sono pseudoconvessi. Regolarizzando φ come nel teorema 2.6.3 otteniamo funzioni plurisubarmoniche φ_ε di classe C^∞, definite in $\Omega_{a(\varepsilon)}$, con $a(\varepsilon) \to \infty$ per $\varepsilon \to 0$ e $\varphi_\varepsilon \downarrow \varphi$ per $\varepsilon \downarrow 0$. Per la parte già dimostrata troviamo una forma $u_\varepsilon \in L^2_{(p,q)}(\Omega_{a(\varepsilon)},\varphi_\varepsilon)$ tale che $\bar\partial u_\varepsilon = g$ in $\Omega_{a(\varepsilon)}$ e

$$\int_{\Omega_{a(\varepsilon)}} |u_\varepsilon|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}(1+|z|^2)^{-2}d\lambda \le \int_{\Omega_{a(\varepsilon)}} |g|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}d\lambda \le \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi}d\lambda.$$

Per la monotonia di φ_ε la norma L^2 di u_ε su Ω_a è limitata per ogni a fissato. Possiamo quindi scegliere $\varepsilon_j \to 0$ in modo che u_{ε_j} converga debolmente in Ω_a per ogni a a un limite $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega,\mathrm{loc})$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ per cui il peso è definito su Ω_a otteniamo

$$\int_{\Omega_a} |u|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}(1+|z|^2)^{-2}d\lambda \le \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi}d\lambda.$$

Ne segue la (4.4.5) e, poiché $\bar\partial u = g$, la dimostrazione è conclusa.

Come prima applicazione del teorema 4.4.2 con $p = q = 0$ studiamo il prolungamento di una funzione analitica definita su un sottospazio lineare. L'esistenza del prolungamento è ovvia in assenza di condizioni di crescita. Come vedremo nel paragrafo 4.5 è però importante ottenere buone maggiorazioni per il prolungamento.

Teorema 4.4.3. Sia φ plurisubarmonica in $\mathbb{C}^n$ e, per una costante C, sia

$$|\varphi(z) - \varphi(z')| < C \quad \text{se } |z - z'| < 1. \tag{4.4.7}$$

Sia Σ un sottospazio lineare complesso di $\mathbb{C}^n$ di codimensione k. Per ogni funzione analitica u in Σ tale che

$$\int_\Sigma |u|^2 e^{-\varphi}\,d\sigma < \infty, \tag{4.4.8}$$

dove $d\sigma$ è la misura di Lebesgue su Σ, esiste una funzione analitica U in $\mathbb{C}^n$ tale che $U = u$ su Σ e

$$\int |U|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-3k}\,d\lambda \le 9^k \pi^k e^{kC}\int_\Sigma |u|^2 e^{-\varphi}\,d\sigma. \tag{4.4.9}$$

Dimostrazione. Poiché $\log(1+|z|^2)$ è plurisubarmonica per la (4.4.6), basta provare il teorema per un iperpiano Σ e iterare k volte il risultato così ottenuto. Possiamo supporre

che Σ sia l'iperpiano $z_n = 0$. Allora u è analitica in $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ e possiamo considerarla come funzione analitica in $\mathbb{C}^n$ indipendente da z_n. Per la (4.4.7),

$$\int_{|z_n|<1} |u|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda \le \pi e^C \int_\Sigma |u|^2 e^{-\varphi}\, d\sigma. \tag{4.4.10}$$

Sia ψ la funzione continua in $\mathbb{C}$ uguale a 1 nel disco di raggio $1/2$, nulla fuori del disco unitario e lineare in $|z|$ nella corona intermedia. Allora $|\partial\psi/\partial\bar{z}| \le 1$. Scrivendo

$$U(z) = \psi(z_n)u(z') - z_n v(z)$$

si ha $U(z) = u(z')$ per $z_n = 0$. Resta da scegliere v con un'opportuna maggiorazione e in modo che $\bar\partial U = 0$, ossia

$$\bar\partial v = z_n^{-1} u(z')\bar\partial\psi(z_n) = z_n^{-1} u(z') \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_n} d\bar{z}_n = f. \tag{4.4.11}$$

È chiaro che $\bar\partial f = 0$ e, poiché $\partial\psi/\partial\bar{z}_n = 0$ per $|z_n| < 1/2$, dalla (4.4.10) otteniamo

$$\int |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \le 4\pi e^C \int_\Sigma |u|^2 e^{-\varphi} d\sigma.$$

Il teorema 4.4.2 fornisce ora una soluzione della (4.4.11) tale che

$$\int |v|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-2} d\lambda \le 4\pi e^C \int_\Sigma |u|^2 e^{-\varphi} d\sigma.$$

Combinando questa stima con la (4.4.10) si ottiene la (4.4.9).

Un ragionamento analogo serve a dimostrare il seguente teorema di esistenza.

Teorema 4.4.4. Sia φ plurisubarmonica nell'aperto pseudoconvesso $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Se $z^0 \in \Omega$ ed $e^{-\varphi}$ è integrabile in un intorno di z^0, esiste una funzione analitica u in Ω tale che $u(z^0) = 1$ e

$$\int_\Omega |u(z)|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-3n}\, d\lambda(z) < \infty. \tag{4.4.12}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $z^0 = 0$. Scegliamo un polidisco $D = \{z : |z_j| < r,\ j = 1, \dots, n\} \subset \Omega$ sul quale $e^{-\varphi}$ sia integrabile e definiamo, per $k = 0, 1, \dots, n$,

$$\Omega_k = \{z \in \Omega : |z_j| < r \text{ per } j > k\}.$$

Proveremo per induzione che per ogni k esiste una funzione analitica u_k in Ω_k con $u_k(z^0) = 1$ e

$$\int_{\Omega_k} |u_k|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-3k} d\lambda(z) < \infty. \tag{4.4.13}$$

Per $k = 0$ possiamo prendere $u_0 = 1$, e u_n avrà le proprietà richieste. Supponiamo $0 < k \le n$ e che u_{k-1} sia già stata costruita. Scegliamo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ nulla per $|z| > r/2$ e uguale a 1 per $|z| < r/3$. Poniamo

$$u_k(z) = \psi(z_k)u_{k-1}(z) - z_k v(z),$$

dove il primo termine è posto uguale a zero in $\Omega_k \backslash \Omega_{k-1}$. Affinché u_k sia analitica dobbiamo scegliere v come soluzione di $\bar\partial v = z_k^{-1} u_{k-1}\bar\partial\psi = f$. Per ipotesi induttiva

$$\int_{\Omega_k} |f|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-3(k-1)} d\lambda < \infty,$$

perciò il teorema 4.4.2 permette di trovare v tale che

$$\int_{\Omega_k} |v|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{1-3k} d\lambda < \infty.$$

Insieme all'ipotesi su u_{k-1} questo implica la (4.4.13). Poiché $v \in C^\infty$ in un intorno di 0, si ha $u_k(0) = u_{k-1}(0) = 1$. Dunque u_k ha le proprietà richieste.

Per applicare il teorema 4.4.4 ci occorre il seguente risultato elementare.

Teorema 4.4.5. Esiste una costante C tale che, per ogni funzione plurisubarmonica ψ nella palla unitaria di $\mathbb{C}^n$ con $\psi(0) = 0$ e $\psi(z) < 1$ per $|z| < 1$, si abbia

$$\int_{|z|<1/2} e^{-\psi(z)}\, d\lambda \le C. \tag{4.4.14}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $n = 1$. Possiamo usare la rappresentazione di Riesz (Radó [1, cap. VI], Hörmander [2, cap. XVI])

$$2\pi\psi(z) = \int_{|\zeta|<1} \log \frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar\zeta|}\, d\mu(\zeta) + \int_{|\zeta|=1} (1-|z|^2)|z-\zeta|^{-2}\, d\sigma(\zeta),$$

dove $d\mu = \Delta\psi \ge 0$ e $d\sigma \le |d\zeta|$ è il limite debole dei valori di ψ sulla circonferenza unitaria (rispetto alla misura d'arco). Per $z = 0$ otteniamo $0 = \int \log|\zeta|\, d\mu(\zeta) + \int d\sigma(\zeta)$, ossia

$$\int_{|\zeta|<1} \log(1/|\zeta|)\, d\mu(\zeta) + \int_{|\zeta|=1} (|d\zeta| - d\sigma(\zeta)) = 2\pi.$$

Poiché entrambi i termini sono non negativi, segue

$$\int_{|\zeta|<1} \log(1/|\zeta|)\, d\mu(\zeta) \le 2\pi, \qquad \int |d\sigma(\zeta)| \le 4\pi. \tag{4.4.15}$$

Pertanto

$$\left|(2\pi)^{-1}\int (1-|z|^2)|z-\zeta|^{-2}\, d\sigma(\zeta)\right| \le 6 \quad (|z|<1/2),$$

$$a = \int_{|\zeta|<R} \frac{d\mu(\zeta)}{2\pi} \le \frac{1}{\log(1/R)} < 2 \quad (R < e^{-1/2}).$$

Poiché $e < 4$ possiamo scegliere $1/2 < R < e^{-1/2}$. Allora, per una costante C,

$$\left|\int_{R<|\zeta|<1} \log\frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar\zeta|}\, d\mu(\zeta)\right| < C, \qquad |z| < 1/2.$$

La disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica mostra che, per $|z| < 1/2$,

$$\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<R} \log\frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar\zeta|}\, d\mu(\zeta)\right) = \exp\left(\int_{|\zeta|<R} -a\log\frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar\zeta|}\,\frac{d\mu(\zeta)}{2\pi a}\right)$$

$$\le \int_{|\zeta|<R}\left(\frac{|z-\zeta|}{|1-z\bar\zeta|}\right)^{-a}\frac{d\mu(\zeta)}{2\pi a} < C\int_{|\zeta|<R}|z-\zeta|^{-a}\, d\mu(\zeta).$$

Quest'ultima funzione è integrabile poiché $a < 2$. Abbiamo così provato la (4.4.14) per $n = 1$. Per il caso generale basta introdurre coordinate polari, ottenendo

$$\int_{|z|<1/2} e^{-\psi(z)}\, d\lambda(z) = \int_{|\zeta|=1} dS(\zeta)\int_{|w|<1/2} |w|^{2n-2} e^{-\psi(w\zeta)}\, d\lambda(w)/(2\pi),$$

dove dS è la misura superficiale sulla sfera unitaria. La dimostrazione è conclusa.

Corollario 4.4.6. Se φ è plurisubarmonica in un aperto pseudoconvesso connesso Ω e non è identicamente $-\infty$, allora $e^{-\varphi}$ è localmente integrabile in un aperto denso G contenente tutti i punti di Ω in cui $\varphi(z) > -\infty$. Il complementare di G è l'insieme degli zeri comuni a tutte le funzioni analitiche in Ω che soddisfano la (4.4.12).

Per $n = 1$ si vede facilmente dalla dimostrazione del teorema 4.4.5 che $e^{-\varphi}$ è localmente integrabile nel complementare dell'insieme discreto dei punti in cui $\Delta\varphi$ ha una massa $\geq 4\pi$. Dopo il prossimo teorema discuteremo risultati affini per $n > 1$.

Nella seguente applicazione del teorema 4.4.2 useremo l'uniformità della (4.4.5) rispetto a φ. Indichiamo con A lo spazio delle funzioni intere in $\mathbb{C}^n$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Teorema 4.4.7. Sia φ plurisubarmonica in $\mathbb{C}^n$ e sia A_φ l'insieme delle funzioni intere u tali che, per qualche N,

$$\int |u(z)|^2 e^{-\varphi(z)}(1 + |z|^2)^{-N}\, d\lambda < \infty. \tag{4.4.15}$$

La chiusura di A_φ in A contiene tutte le $u \in A$ tali che $|u|^2 e^{-\varphi}$ sia localmente integrabile e coincide con A se e solo se $e^{-\varphi}$ è localmente integrabile.

Dimostrazione. Data una funzione intera U tale che $|U|^2 e^{-\varphi}$ sia localmente integrabile, approssimeremo U in $\{z : |z| < R\}$ mediante funzioni di A_φ. Scegliamo $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ con $\chi(z) = 1$ per $|z| < R + 2$ e poniamo $V = \chi U$. Allora

$$f = \bar\partial V = U\bar\partial\chi = 0 \quad \text{per } |z| < R + 2,$$

e f ha supporto compatto. Per rendere piccola la norma di f poniamo, per $t > 0$,

$$\varphi_t(z) = \varphi(z) + \max(0, t\log(|z|/(R + 1))).$$

È chiaro che φ_t è plurisubarmonica e che $\int |f|^2 e^{-\varphi_t} d\lambda \to 0$ per $t \to \infty$. Per il teorema 4.4.2 esiste quindi u_t con $\bar\partial u_t = f$ e

$$\int |u_t|^2 e^{-\varphi_t}(1 + |z|^2)^{-2} d\lambda \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

In particolare $\bar\partial u_t = 0$ per $|z| < R + 1$ e $\int_{|z|<R+1} |u_t|^2 d\lambda \to 0$. Pertanto $u_t(z) \to 0$ uniformemente per $|z| < R$ quando $t \to \infty$. Poiché

$$\int |u_t|^2 (1 + |z|^2)^{-2-t/2} e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < \infty,$$

la funzione analitica $V - u_t$ soddisfa la (4.4.15) con $N = 2 + t/2$. Dunque $V - u_t \in A_\varphi$ e converge uniformemente a U per $|z| < R$ quando $t \to \infty$. Questo dimostra il teorema, poiché ogni funzione di A_φ deve annullarsi in z se $e^{-\varphi}$ non è integrabile in alcun intorno di z.

Si osservi che la dimostrazione del teorema 4.4.7 fornisce una dimostrazione alternativa del lemma 4.3.1.

Usando il corollario 4.4.6 daremo ora alcuni risultati sulla misura positiva $\Delta\varphi$ associata a una funzione plurisubarmonica φ. Cominciamo con un lemma elementare sulle funzioni subarmoniche.

Lemma 4.4.8. Se φ è subarmonica in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, allora

$$M(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta/(2\pi)$$

è una funzione convessa crescente di $\log r \in [-\infty, \log R)$. Se $R = \infty$ e $\varphi < 0$, allora φ è costante.

Dimostrazione. La funzione $\Phi(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(ze^{i\theta})\, d\theta/(2\pi)$ è subarmonica per $|z| < R$, poiché eredita da φ le proprietà di media (ii), (iii) del teorema 1.6.3 (cfr. il corollario 1.6.4). Si ha $\Phi(z) = M(|z|)$, dunque per il principio del massimo $\Phi(z) \le M(r)$ se $|z| \le r$. Pertanto M è crescente e $M(r) \downarrow \varphi(0)$ per $r \downarrow 0$. Dati $0 < r_1 < r_2 < R$, scegliamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \log r_j + b = M(r_j)$ per $j = 1, 2$. Il principio del massimo dà allora $\Phi(z) \le a \log |z| + b$ per $r_1 < |z| < r_2$, il che prova la convessità asserita.

Se $R = \infty$ e $\varphi < 0$, segue che M è costante e uguale a $\varphi(0)$, poiché non vi sono altre funzioni convesse crescenti limitate superiormente su tutta la retta. Per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ concludiamo che

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &\le \int_{|z-\zeta|<r} \varphi(z) \frac{d\lambda(z)}{\pi r^2} \le \int_{|z|<r-|\zeta|} \varphi(z) \frac{d\lambda(z)}{\pi r^2} \\ &= \varphi(0)(r - |\zeta|)^2/r^2 \to \varphi(0) \qquad (r \to \infty,\ r > |\zeta|).\end{aligned}$$

Dunque $\varphi(\zeta) \le \varphi(0)$ e, scambiando i ruoli di ζ e 0, otteniamo $\varphi(\zeta) = \varphi(0)$.

Lemma 4.4.9. Sia φ plurisubarmonica, non identicamente $-\infty$, nell'aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Poniamo $\widehat{\Omega} = \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C} : |w| < d(z, \complement\Omega)\}$ e

$$M_\varphi(z, w) = \int_{|\zeta|=1} \varphi(z + w\zeta)\, dS(\zeta)/c_{2n}, \qquad (z, w) \in \widehat{\Omega}.$$

Qui dS è la misura superficiale sulla sfera unitaria di $\mathbb{C}^n$, c_{2n} la sua area totale, uguale a 2π volte il volume C_{2n-2} della palla unitaria in $\mathbb{C}^{n-1}$, e $d(z, \complement\Omega)$ è la distanza di z dal complementare di Ω. Allora $M_\varphi(z, w)$ è plurisubarmonica in $\widehat{\Omega}$ e $M_\varphi(z, w) = M_\varphi(z, |w|)$, quindi $M_\varphi(z, r)$ è una funzione convessa crescente di $\log r$. Esiste pertanto la derivata sinistra rispetto a $\log r$, cioè $r\partial_r^- M_\varphi(z, r)$. Se $d\mu = \Delta\varphi/(2\pi)$ si ha

$$r\partial_r^- M_\varphi(z, r) = \int_{|\zeta|<r} \frac{d\mu(z + \zeta)}{C_{2n-2} r^{2n-2}}, \qquad (z, r) \in \widehat{\Omega}, \quad r > 0, \tag{4.4.16}$$

ed esistono in $[0, \infty)$ i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}\nu_\varphi(z) &= \lim_{r\to 0} r\partial_r^- M_\varphi(z, r) = \lim_{r\to 0} M_\varphi(z, r)/\log r \\ &= \lim_{r\to 0} \int_{|\zeta|<r} \frac{d\mu(z + \zeta)}{C_{2n-2} r^{2n-2}}.\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Se $e^{-\varphi}$ è integrabile in un intorno di z, allora $\nu_\varphi(z) < 2n$.

Dimostrazione. Per il teorema 2.6.4, fissato ζ sulla sfera unitaria, la funzione $\widehat{\Omega} \ni (z, w) \mapsto \varphi(z + w\zeta)$ è plurisubarmonica. Lo stesso ragionamento della dimostrazione del lemma 4.4.8 prova dunque la plurisubarmonicità di M_φ. Poiché $\zeta \mapsto e^{i\theta}\zeta$ è un'isometria della sfera unitaria, è chiaro che

$$M_\varphi(z, w) = M_\varphi(z, e^{i\theta} w) = M_\varphi(z, |w|).$$

Se $v \in C_0^\infty(\{\zeta : |\zeta| < d(z, \complement\Omega)\})$ dipende soltanto da $|\zeta|$, allora

$$\begin{aligned}\int v(\zeta) d\mu(z+\zeta) &= \int \varphi(z+\zeta)\Delta v(\zeta)\, d\lambda(\zeta)/(2\pi) \\ &= C_{2n-2}\int M_\varphi(z,r) r^{2n-1}(v''(r) + (2n-1)v'(r)/r)\, dr \\ &= C_{2n-2}\int M_\varphi(z,r)\, d(r^{2n-1}v'(r)) \\ &= -C_{2n-2}\int \partial_r^- M_\varphi(z,r) r^{2n-1} v'(r)\, dr.\end{aligned}$$

Facendo crescere v verso la funzione caratteristica della palla di raggio r otteniamo la (4.4.16). La convessità di $M_\varphi(z,r)$ rispetto a $\log r$ dà allora la (4.4.17) e implica che $\nu_\varphi(z) \le (M_\varphi(z,r) - M_\varphi(z,r_0))/(\log r - \log r_0)$. Quindi

$$M_\varphi(z,r) \le \nu_\varphi(z)\log r + C, \qquad 0 < r < r_0.$$

Dalla disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica ricaviamo

$$\int_{|\omega|=1} e^{-\varphi(z+r\omega)}\frac{dS(\omega)}{c_{2n}} \ge \exp\left(-\int_{|\omega|=1}\varphi(z+r\omega)\frac{dS(\omega)}{c_{2n}}\right) = e^{-M_\varphi(z,r)} \ge r^{-\nu_\varphi(z)}e^{-C}.$$

Dunque se $\nu_\varphi(z) \ge 2n$, $e^{-\varphi}$ non è integrabile in alcun intorno di z. Il lemma è dimostrato.

Definizione 4.4.10. Il numero $\nu_\varphi(z)$ definito dalla (4.4.17) si chiama *numero di Lelong* della funzione plurisubarmonica φ in z.

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio di olomorfia e sia $\varphi \not\equiv -\infty$ plurisubarmonica in Ω. Poniamo

$$\begin{aligned}\Lambda(\varphi,\alpha) &= \{z \in \Omega : \nu_\varphi(z) \ge \alpha\}, \qquad \alpha > 0, \\ P(\varphi) &= \{z \in \Omega : \varphi(z) = -\infty\}, \qquad Z(\varphi) = \{z \in \Omega : e^{-\varphi} \notin L^1_{\mathrm{loc}} \text{ in } z\}.\end{aligned}$$

Allora

$$\Lambda(\varphi, 2n) \subset Z(\varphi) \subset P(\varphi) \tag{4.4.18}$$

per il lemma 4.4.9 e il teorema 4.4.5 rispettivamente. Il corollario 4.4.6 afferma che $Z(\varphi)$ è l'insieme degli zeri comuni di una famiglia di funzioni analitiche. Vogliamo dedurne che ciò vale anche per $\Lambda(\varphi,\alpha)$. Il passo essenziale è costruire una funzione plurisubarmonica φ_α con $\nu_{\varphi_\alpha} = \max(\nu_\varphi - \alpha, 0)$.

Se $\Omega \ne \mathbb{C}^n$, $\widehat{\Omega}$ è pseudoconvesso per i teoremi 2.6.5 e 2.6.7, applicati a

$$(z,w) \mapsto \max\left(\frac{1}{\log d(z,\complement\Omega) - \log|w|}, |z|^2 - \log d(z,\complement\Omega)\right).$$

Per il teorema 2.6.11 possiamo quindi scegliere una funzione strettamente plurisubarmonica $\rho \in C^\infty(\widehat{\Omega})$ tale che $\{(z,w) \in \widehat{\Omega} : \rho(z,w) < c\} \Subset \widehat{\Omega}$ per ogni c. Se $\Omega = \mathbb{C}^n$, allora $\widehat{\Omega} = \mathbb{C}^{n+1}$ e scegliamo $\rho(z,w) = |z|^2 + |w|^2$ affinché cresca più rapidamente di $\log|w|$. La dimostrazione del teorema 2.6.11 mostra che, grazie alla simmetria per rotazioni di $\widehat{\Omega}$ nella variabile w, possiamo prendere ρ non negativa, dipendente da z e da $|w|$ e crescente rispetto a $|w|$.

Lemma 4.4.11. Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia connesso, $\varphi \not\equiv -\infty$ è plurisubarmonica in Ω, M_φ è definita come nel lemma 4.4.9 e ρ è scelta come sopra, allora

$$\varphi_\alpha(z) = \inf_{\substack{(z,w)\in\widehat{\Omega}\\ w\neq 0}} (M_\varphi(z,w) + \rho(z,w) - \alpha \log|w|), \qquad \alpha > 0, \tag{4.4.19}$$

è plurisubarmonica in Ω, $\varphi_\alpha(z) > -\infty$ se $\nu_\varphi(z) < \alpha$ e

$$\nu_{\varphi_\alpha} = \max(\nu_\varphi - \alpha, 0). \tag{4.4.20}$$

Dimostrazione. (a) Se $\nu_\varphi(z) < \alpha$, allora $M_\varphi(z,w) - \alpha \log|w|$ è decrescente rispetto a $|w|$ vicino a 0, perciò $\varphi_\alpha(z) > -\infty$ e quindi $\nu_{\varphi_\alpha}(z) = 0$. Per provare che φ_α è plurisubarmonica, proprietà che in generale non vale per il minimo di funzioni plurisubarmoniche, supponiamo dapprima $\varphi \in C^\infty$. Poiché a z fissato M_φ e ρ dipendono da $r = |w|$, sappiamo che

$$\psi(z,r) = M_\varphi(z,r) + \rho(z,r) - \alpha \log r$$

è una funzione C^∞ di $t = \log r$ con derivata seconda positiva, che tende a $+\infty$ per $r \to 0$ e per $r \to d(z, \complement\Omega)$. Esiste dunque un unico punto di minimo $r(z)$, caratterizzato dall'equazione $r\,\partial\psi(z,r)/\partial r = 0$. Per il teorema delle funzioni implicite r è una funzione C^∞ di z. Segue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial z_j \partial \bar z_k} &= \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar z_k} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \bar z_k}\right)\\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial z_j \partial \bar z_k} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z_j \partial r}\frac{\partial r}{\partial \bar z_k} + \frac{\partial^2\psi}{\partial \bar z_k \partial r}\frac{\partial r}{\partial z_j} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial r}{\partial \bar z_k}.\end{aligned}$$

Scrivendo $s_j = t_j \partial r/\partial z_j$ otteniamo

$$\sum_{j,k} t_j \bar t_k \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial z_j \partial \bar z_k} = \sum_{j,k}\left(t_j\frac{\partial}{\partial z_j} + 2s_j\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\bar t_k\frac{\partial}{\partial \bar z_k} + 2\bar s_k\frac{\partial}{\partial \bar w}\right)\psi(z,r) \geq 0,$$

dove i coefficienti sono valutati nel punto e abbiamo usato $\partial r/\partial w = 1/2$ per $w = r$. Questo prova la plurisubarmonicità di φ_α quando $\varphi \in C^\infty$. Nel caso generale scegliamo funzioni $\varphi^\varepsilon \downarrow \varphi$ per $\varepsilon \downarrow 0$, plurisubarmoniche e lisce in $\Omega_{a(\varepsilon)} \uparrow \Omega$. Si procede come nella dimostrazione del teorema 4.4.2. Per $z \in \Omega' \Subset \Omega$ e ε piccolo l'estremo inferiore nella definizione di $(\varphi^\varepsilon)_\alpha(z)$ è raggiunto all'interno della regione di definizione in $\Omega_{a(\varepsilon)}$, dunque $(\varphi^\varepsilon)_\alpha$ è plurisubarmonica in Ω'. Poiché $(\varphi^\varepsilon)_\alpha \downarrow \varphi_\alpha$ per $\varepsilon \downarrow 0$, anche φ_α è plurisubarmonica.

(b) Proviamo ora che $\nu_{\varphi_\alpha} \geq \nu_\varphi - \alpha$. Per definizione,

$$\varphi_\alpha(z) \leq M_\varphi(z,r) + \rho(z,r) - \alpha \log r, \qquad r < d(z, \complement\Omega).$$

La media di $M_\varphi(z+\zeta, r)$ per $|\zeta| = r'$, con $r + r' < d(z, \complement\Omega)$, è una media di $Z \mapsto \varphi(z+Z)$ sulla palla $|Z| \leq r + r'$, invariante rispetto alle trasformazioni ortogonali di Z. È dunque una media dei valori di $R \mapsto M_\varphi(z,R)$ per $R \leq r + r'$, il che prova che

$$M_{\varphi_\alpha}(z,r') \leq M_\varphi(z, r+r') + \int_{|\zeta|=1} \rho(z + r'\zeta, r)\, dS(\zeta)/c_{2n} - \alpha \log r.$$

Prendendo $r = r'$ otteniamo

$$\nu_{\varphi_\alpha}(z) = \lim_{r\to 0} M_{\varphi_\alpha}(z,r)/\log r \geq \lim_{r\to 0} M_\varphi(z,2r)/\log r - \alpha = \nu_\varphi(z) - \alpha.$$

(c) La funzione φ_α è concava rispetto ad α per $\alpha \geq 0$, essendo l'estremo inferiore di funzioni affini. Dalla (4.4.17) segue quindi che ν_{φ_α} è convessa rispetto ad α. All'inizio della dimostrazione abbiamo osservato che $\nu_{\varphi_\alpha}(z) = 0$ per $\alpha > \nu_\varphi(z)$. Inoltre $\nu_{\varphi_0}(z) \leq \nu_\varphi(z)$ perché $\varphi_0 \geq \varphi + \min \rho$. Per convessità di $\alpha \mapsto \nu_{\varphi_\alpha}$ ne segue che $\nu_{\varphi_\alpha}(z) \leq \nu_\varphi(z) - \alpha$ per $0 \leq \alpha \leq \nu_\varphi(z)$. Poiché in (b) abbiamo provato la disuguaglianza inversa, la dimostrazione è conclusa.

Possiamo ora dare un risultato preciso sugli insiemi di livello dei numeri di Lelong.

Teorema 4.4.12. Sia $\varphi \not\equiv -\infty$ plurisubarmonica nel dominio di olomorfia connesso $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e sia $\nu_\varphi(z)$ il suo numero di Lelong in z. Per $\alpha > 0$,

$$\Lambda(\varphi, \alpha) = \{z \in \Omega : \nu_\varphi(z) \geq \alpha\}$$

è l'intersezione degli insiemi degli zeri di una famiglia di funzioni di $A(\Omega)$.

Dimostrazione. Applicando la (4.4.18) alle funzioni φ_α costruite nel lemma 4.4.11 e usando il lemma e la stessa (4.4.18) otteniamo, per $\alpha > 0$,

$$\Lambda(\varphi, \alpha + 2n) = \Lambda(\varphi_\alpha, 2n) \subset Z(\varphi_\alpha) \subset P(\varphi_\alpha) \subset \Lambda(\varphi, \alpha).$$

Se $\gamma > 2n/\alpha$, ne segue

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi, \alpha) = \Lambda(\gamma\varphi, \gamma\alpha - 2n + 2n) &\subset Z((\gamma\varphi)_{\gamma\alpha-2n}) \\ &\subset \Lambda(\gamma\varphi, \gamma\alpha - 2n) = \Lambda(\varphi, \alpha - 2n/\gamma). \end{aligned}$$

Dunque $\Lambda(\varphi, \alpha) = \bigcap_{\gamma > 2n/\alpha} Z((\gamma\varphi)_{\gamma\alpha-2n})$, il che prova il teorema, poiché ciascun insieme $Z((\gamma\varphi)_{\gamma\alpha-2n})$ è l'insieme degli zeri comuni di una famiglia di funzioni analitiche.

Per evitare di ripetere l'ipotesi $\varphi \not\equiv -\infty$, d'ora in poi poniamo $\nu_\varphi = +\infty$ se $\varphi \equiv -\infty$. Il teorema 4.4.12 suggerisce che il numero di Lelong debba avere buone proprietà di invarianza, benché la definizione (4.4.17) dipenda in modo essenziale dalla metrica di $\mathbb{C}^n$. Dimostreremo infatti il risultato seguente.

Teorema 4.4.13. Sia φ plurisubarmonica in $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Se $z \in \Omega$, allora

$$\nu_\varphi(z) \leq \lim_{r \to 0} \frac{1}{\log r} \int_0^{2\pi} \varphi(z + e^{i\theta} r\zeta) \, \frac{d\theta}{2\pi}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{4.4.22}$$

con uguaglianza per quasi ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Dunque, per quasi ogni ζ, $\nu_\varphi(z)$ è la massa nell'origine del laplaciano di $w \mapsto \varphi(z + w\zeta)/(2\pi)$. Se $\Omega' \subset \mathbb{C}^{n'}$ e $f : \Omega' \to \Omega$ è analitica con differenziale iniettivo, allora

$$\nu_{f^*\varphi} \geq f^* \nu_\varphi,$$

con uguaglianza se il differenziale di f è biiettivo.

Dimostrazione. Per dimostrare la (4.4.22) possiamo supporre $z = 0$ e, per un certo $\delta > 0$, che $|\zeta| < \delta$ implichi $\zeta \in \Omega$ e $\varphi(\zeta) < 0$, con $\varphi(\zeta) \neq -\infty$ in almeno uno di questi punti. Poniamo

$$\Phi(r, \zeta) = -\frac{1}{\log r} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta} r\zeta) \, \frac{d\theta}{2\pi}, \qquad r < 1, \quad r|\zeta| < \delta.$$

È una funzione plurisubarmonica negativa di ζ per $|\zeta| < \delta/r$ e decrescente rispetto a $\log r$, poiché l'integrale è una funzione convessa negativa di $\log r$. Dunque $\Phi(r, \zeta) \uparrow \Lambda(\zeta)$ per $r \downarrow 0$, dove $-\Lambda(\zeta)$ è il numero di Lelong di $w \mapsto \varphi(w\zeta)$, ossia la massa in 0 della misura

ottenuta applicando $\Delta/(2\pi)$ a tale funzione, se $\varphi(w\zeta) \not\equiv -\infty$. Scegliamo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$ non negativa, con $\int \psi(z)\, d\lambda(z) = 1$, dipendente soltanto da $|z_1|, \dots, |z_n|$. Allora (cfr. il teorema 2.6.3)

$$\Phi(r,\zeta) \le \int \Phi(r, \zeta - \varepsilon z)\psi(z) d\lambda(z) \longrightarrow \int \Lambda(\zeta - \varepsilon z)\psi(z) d\lambda(z) = \Lambda_\varepsilon(\zeta) \quad (r \to 0).$$

La funzione Λ_ε è plurisubarmonica e cresce con ε. Pertanto $\widetilde{\Lambda}(\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_\varepsilon(\zeta)$ esiste ed è plurisubarmonica. Per il teorema di Lebesgue, $\widetilde{\Lambda}(\zeta) = \Lambda(\zeta)$ per quasi ogni ζ con $|\zeta| = 1$ rispetto a dS, poiché Λ è omogenea. Essendo $\Lambda(\zeta) \le \Lambda_\varepsilon(\zeta)$ per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $\Lambda(\zeta) \le \widetilde{\Lambda}(\zeta) \le 0$ per ogni ζ. Dal lemma 4.4.8 segue che $\widetilde{\Lambda}$ è costante. Con la notazione del lemma 4.4.9,

$$M_\varphi(0,r)/\log r = -\int_{|\zeta|=1} \Phi(r,\zeta)\, dS(\zeta)/c_{2n}.$$

Per $r \to 0$ otteniamo $\nu_\varphi(0) = -\widetilde{\Lambda}$, il che conclude la dimostrazione delle prime affermazioni.

La nuova interpretazione di ν_φ mostra subito che $\nu_{f^*\varphi} = f^*\nu_\varphi$ per ogni biiezione lineare f. Per dimostrarlo per una biiezione analitica arbitraria f nel punto z possiamo quindi supporre $z = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0)$ uguale all'identità e $\varphi \le 0$. Useremo una forma più debole della (4.4.17),

$$\nu_\varphi(0) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{|\zeta|<r} \varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta)}{C_{2n} r^{2n} \log r}, \tag{4.4.23}$$

dove $C_{2n} = c_{2n}/(2n)$ è il volume della palla unitaria in $\mathbb{C}^n$. Per dimostrarla scriviamo

$$\begin{aligned}\int_{|\zeta|<r} \varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta) &= \int_0^r c_{2n} M_\varphi(0,\rho)\rho^{2n-1} d\rho \\ &= \int_0^r (M_\varphi(0,\rho)/\log\rho) c_{2n}\rho^{2n-1} \log\rho\, d\rho.\end{aligned}$$

Per $\rho \to 0$ abbiamo $M_\varphi(0,\rho)/\log\rho \to \nu_\varphi(0)$ e $\int_0^r c_{2n}\rho^{2n-1}\log\rho\, d\rho = C_{2n} r^{2n}(\log r - 1/(2n))$, il che prova la (4.4.23). Poiché $\varphi \le 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}\nu_\varphi(0) &= \lim_{r\to 0} \frac{\int_{|f(\zeta)|<r} \varphi(f(\zeta))|\det f'(\zeta)|^2 d\lambda(\zeta)}{C_{2n} r^{2n}\log r} \\ &\le \lim_{r\to 0} \sup_{|f(\zeta)|<r} |\det f'(\zeta)|^2 \frac{\int_{|\zeta|<r+Cr^2} f^*\varphi(\zeta) d\lambda(\zeta)}{C_{2n} r^{2n}\log r} = \nu_{f^*\varphi}(0).\end{aligned}$$

Pertanto $\nu_{f^*\varphi}(0) \le \nu_{(f^{-1})^* f^*\varphi}(0) = \nu_\varphi(0)$, il che prova che $\nu_{f^*\varphi} = f^*\nu_\varphi$ quando f' è biiettivo. Se f ha soltanto differenziale iniettivo, il risultato già dimostrato permette un cambiamento locale di coordinate che rende f lineare. La disuguaglianza $\nu_{f^*\varphi} \ge f^*\nu_\varphi$ è allora conseguenza immediata della (4.4.22). La dimostrazione è conclusa.

Corollario 4.4.14. Siano $f_1, \dots, f_k$ analitiche nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e sia $V = \{z \in \Omega : f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}$. Allora $\varphi = \frac{1}{2}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_k|^2)$ è plurisubarmonica in Ω, $\nu_\varphi(z) = 0$ per $z \in \Omega \setminus V$ e, per $z \in V$, $\nu_\varphi(z)$ è il massimo intero d tale che tutte le $f_1, \dots, f_k$ si annullino almeno all'ordine d in z.

Dimostrazione. Per il corollario 1.6.8 φ è plurisubarmonica e $\varphi \in C^\infty(\Omega \setminus V)$. Quindi $\nu_\varphi(z) = 0$ per $z \in \Omega \setminus V$. Per $z \in V$ si ha

$$\varphi(z + w\zeta) = d\log|w| + O(1), \qquad w \to 0,$$

se $f_j(z+w\zeta) = c_j w^d + O(|w|^{d+1})$ per $w \to 0$ e almeno uno dei c_j è diverso da zero. Ciò vale per tutti gli ζ di un aperto se le $f_1, \dots, f_k$ si annullano all'ordine d in z e non tutte all'ordine $d+1$. Dunque $\nu_\varphi(z) = d$ per il teorema 4.4.13.

Insieme ai risultati che dimostreremo nei capitoli VI e VII, il corollario mostra che ogni sottoinsieme analitico (si veda il paragrafo 6.5) di una varietà di Stein (si veda il paragrafo 5.1) può presentarsi come insieme Λ nel teorema 4.4.12.

4.5. Funzionali analitici

Già nella dimostrazione del teorema 4.4.4 abbiamo considerato forme lineari sullo spazio delle funzioni analitiche intere. In questo paragrafo ne intraprendiamo uno studio più sistematico.

Definizione 4.5.1. Gli elementi del duale A' dello spazio $A = A(\mathbb{C}^n)$ delle funzioni intere, munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti, si chiamano *funzionali analitici*. Si dice che un compatto K è un *portante* del funzionale analitico μ se per ogni intorno ω di K esiste una costante C_ω tale che

$$|\mu(f)| \le C_\omega \sup_\omega |f|, \qquad f \in A. \tag{4.5.1}$$

Dalla definizione della topologia di A segue che, per ogni $\mu \in A'$, esiste un compatto ω per il quale vale (4.5.1). Pertanto μ ha un portante compatto. Vedremo tuttavia un esempio in cui nessun portante è contenuto in tutti gli altri. Sotto questo aspetto la nozione differisce da quella di supporto di una funzione o di una distribuzione.

Le combinazioni lineari delle funzioni esponenziali $\exp\langle z,\zeta\rangle$, dove $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e $\langle z,\zeta\rangle = z_1\zeta_1 + \cdots + z_n\zeta_n$, sono dense in A. Infatti, derivando $e^{\langle z,\zeta\rangle}$ rispetto a ζ e ponendo poi $\zeta = 0$, si vede che z^α appartiene, per ogni α, alla chiusura dello spazio generato dagli esponenziali. Un funzionale analitico μ è dunque univocamente determinato dai valori che assume sugli esponenziali, ossia dalla sua trasformata di Laplace.

Definizione 4.5.2. Se $\mu \in A'$, definiamo la sua *trasformata di Laplace* ponendo

$$\widetilde{\mu}(\zeta) = \mu_z(e^{\langle z,\zeta\rangle}), \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{4.5.2}$$

La trasformata di Laplace è una funzione analitica intera di ζ. Infatti la continuità di μ consente di derivare sotto il segno di μ e di verificare che $\widetilde{\mu} \in C^\infty$ e che $\partial\widetilde{\mu}/\partial\bar{\zeta}_j = 0$ per ogni j. Da (4.5.1) ricaviamo la stima

$$|\widetilde{\mu}(\zeta)| \le C_\omega \exp\big(\sup_{z\in\omega} \mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle\big).$$

Poniamo

$$H_K(\zeta) = \sup_{z\in K} \mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle. \tag{4.5.3}$$

Allora H_K è una funzione convessa e positivamente omogenea di ζ e, se K è convesso,

$$K = \{z : \mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle \le H_K(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{C}^n\}. \tag{4.5.4}$$

Questa ben nota proprietà delle funzioni di supporto degli insiemi convessi si dimostra applicando il teorema di Hahn–Banach al convesso $\{(t,\zeta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n : H(\zeta) \le t\}$. Le osservazioni appena fatte dimostrano la prima parte del teorema seguente.

Teorema 4.5.3. Se $\mu \in A'$ ha per portante il compatto K, allora $M(\zeta) = \widetilde{\mu}(\zeta)$ è una funzione analitica intera e per ogni $\delta > 0$ esiste una costante C_δ tale che

$$|M(\zeta)| \le C_\delta \exp\big(H_K(\zeta) + \delta|\zeta|\big), \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{4.5.5}$$

Viceversa, se K è un compatto convesso e M una funzione intera che soddisfa (4.5.5) per ogni $\delta > 0$, esiste un funzionale analitico μ con portante K tale che $\widetilde{\mu} = M$.

In particolare la trasformazione di Laplace è una biiezione di A' sullo spazio delle funzioni intere M di tipo esponenziale, ossia di quelle che, per opportune costanti a e C, soddisfano la stima

$$|M(\zeta)| \le C \exp(a|\zeta|).$$

Daremo dapprima la dimostrazione classica del teorema 4.5.3 per $n = 1$, poi una dimostrazione basata sul teorema 4.4.3, valida per ogni n.

Dimostrazione del teorema 4.5.3 per $n = 1$. Sia M una funzione che soddisfa (4.5.5). Sviluppiamola in serie di potenze,

$$M(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k / k!.$$

Scegliamo A e C in modo che $|M(\zeta)| \le Ce^{A|\zeta|}$. Le disuguaglianze di Cauchy danno

$$|a_k|/k! \le Ce^{AR}/R^k$$

per ogni $R > 0$. Scegliendo $R = k/A$ si rende minimo il secondo membro e, per la formula di Stirling, si ottiene, con una costante C_1,

$$|a_k| \le C(Ae)^k k!/k^k \le CC_1^k. \tag{4.5.6}$$

Ora possiamo scrivere

$$\zeta^k/k! = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma e^{z\zeta} z^{-k-1}\, dz,$$

dove γ è una curva convessa che racchiude l'origine. Abbiamo dunque formalmente

$$M(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k/k! = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma e^{z\zeta} B(z)\, dz, \tag{4.5.7}$$

dove

$$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k-1} \tag{4.5.8}$$

si chiama *trasformata di Borel* di M. Da (4.5.6) segue che questa serie converge uniformemente per $|z| > C_1 + 1$, sicché (4.5.7) vale effettivamente se γ è contenuta in tale insieme.

Dimostreremo che B si prolunga in una funzione analitica su $\mathbb{C} \setminus K$. Ammettendo per un momento questo risultato, poniamo

$$\mu(f) = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma f(z) B(z)\, dz,$$

dove γ è una qualunque curva convessa che circonda K. Si definisce così un funzionale analitico indipendente dalla scelta di γ, che ha quindi K per portante. Per (4.5.7) si ha $\widetilde{\mu} = M$.

Per costruire il prolungamento analitico fissiamo arbitrariamente $\zeta \in \mathbb{C}$ e poniamo

$$B_\zeta(z) = \int_0^\infty M(t\zeta) e^{-tz\zeta} \zeta \, dt.$$

Questo integrale converge assolutamente e definisce una funzione analitica nel semipiano

$$\{z : H(\zeta) < \mathrm{Re}(\zeta z)\}. \tag{4.5.9}$$

Quando $C_1|\zeta| < \mathrm{Re}(\zeta z)$, da (4.5.6) segue che si può calcolare $B_\zeta(z)$ mediante lo sviluppo in serie di potenze di M, ottenendo $B_\zeta(z) = B(z)$. Due funzioni B_{ζ_1} e B_{ζ_2} coincidono dunque su un aperto dell'intersezione dei semipiani nei quali sono definite, purché tale intersezione sia non vuota, e coincidono quindi in tutto il dominio comune. Le funzioni B_ζ definiscono pertanto un prolungamento analitico di B all'insieme degli z per cui $H(\zeta) < \mathrm{Re}(\zeta z)$ per qualche ζ. Per (4.5.4) questo è il complementare di K.

Si osservi che la dimostrazione dà anche una corrispondenza biunivoca fra i funzionali analitici e le funzioni analitiche in un intorno dell'infinito che si annullano all'infinito.

Dimostrazione generale del teorema 4.5.3. Sia K_ε l'insieme dei punti a distanza euclidea da K minore di ε. Vogliamo costruire una funzione continua ψ, nulla fuori di K_ε, tale che il funzionale analitico definito dalla misura $\psi \, d\lambda$ abbia M come trasformata di Laplace, ossia

$$M(\zeta) = \int \psi(z) e^{\langle z, \zeta \rangle} \, d\lambda(z). \tag{4.5.10}$$

Sia $\widehat{\psi}$ la trasformata di Fourier–Laplace di ψ, considerata come funzione di $2n$ variabili reali,

$$\widehat{\psi}(\theta_1, \dots, \theta_{2n}) = \int \psi(x) e^{-i(x_1\theta_1 + \cdots + x_{2n}\theta_{2n})} \, dx_1 \cdots dx_{2n}.$$

È una funzione analitica di $2n$ variabili complesse. Se poniamo $\widehat{\psi} = \Psi$, la condizione (4.5.10) significa che

$$\Psi(i\zeta_1, -\zeta_1, i\zeta_2, -\zeta_2, \dots, i\zeta_n, -\zeta_n) = M(\zeta_1, \dots, \zeta_n). \tag{4.5.11}$$

La costruzione di ψ è dunque un problema di prolungamento del tipo considerato nel teorema 4.4.3. Se ψ ha supporto in K_ε, deve essere

$$|\widehat{\psi}(\theta)| \le C \exp \varphi_\varepsilon(\theta), \tag{4.5.12}$$

dove

$$\varphi_\varepsilon(\theta) = \sup_{x \in K_\varepsilon} (x_1 \, \mathrm{Im}\, \theta_1 + \cdots + x_{2n} \, \mathrm{Im}\, \theta_{2n}). \tag{4.5.13}$$

Viceversa, se Ψ è una funzione analitica intera in $\mathbb{C}^{2n}$ tale che

$$|\Psi(\theta)| \le C(1 + |\theta|)^{-2n-1} \exp \varphi_\varepsilon(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{C}^{2n}, \tag{4.5.12$'$}$$

il teorema di Paley–Wiener, nella sua forma più elementare, mostra che Ψ è la trasformata di Fourier–Laplace di una funzione continua ψ che si annulla fuori di K_ε. Se inoltre Ψ soddisfa (4.5.11), il teorema sarà dimostrato. (Per dimostrare il teorema di Paley–Wiener basta formare la trasformata inversa di Fourier

$$\psi(x) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x, \theta' + i\theta'' \rangle} \Psi(\theta' + i\theta'') \, d\theta'.$$

Spostando il contorno d'integrazione si vede che il risultato è indipendente da θ''. Sostituendo θ'' con $t\theta''$ e facendo tendere t a $+\infty$, si ottiene $\psi(x) = 0$ se $\langle x, \theta'' \rangle > \varphi_\varepsilon(\theta'')$

nella notazione della funzione di supporto reale, ossia $\langle x, \theta'' \rangle > \varphi_\varepsilon(i\theta'')$ con la definizione (4.5.13). Da una relazione analoga a (4.5.4) si conclude che ψ si annulla fuori di K_ε. Per la formula d'inversione di Fourier la trasformata di Laplace della funzione ψ è uguale a Ψ.)

Per costruire Ψ indichiamo con u la funzione

$$(i\zeta_1, -\zeta_1, \dots, i\zeta_n, -\zeta_n) \longmapsto M(\zeta_1, \dots, \zeta_n),$$

analitica in un sottospazio Σ di dimensione n di $\mathbb{C}^{2n}$. Se $\theta = (i\zeta_1, -\zeta_1, \dots, i\zeta_n, -\zeta_n)$, da (4.5.13) ricaviamo

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(\theta) &= \sup_{x \in K_\varepsilon} (x_1 \operatorname{Re} \zeta_1 - x_2 \operatorname{Im} \zeta_1 + \cdots) \\ &= \sup_{z \in K_\varepsilon} \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle = H_K(\zeta) + \varepsilon |\zeta|. \end{aligned}$$

Per (4.5.5) si ha quindi

$$|u(\theta)| \le C_\delta \exp(\varphi_\varepsilon(\theta) + (\delta - \varepsilon)|\zeta|), \qquad \delta > 0, \quad \theta \in \Sigma.$$

Scegliendo $\delta < \varepsilon$, otteniamo

$$\int_\Sigma |u|^2 e^{-2\varphi_\varepsilon} \, d\sigma < \infty.$$

Poiché φ_ε è convessa, e dunque plurisubarmonica, ed è uniformemente continua, dal teorema 4.4.3 segue che esiste una funzione analitica intera U in $\mathbb{C}^{2n}$ tale che $U = u$ in Σ e

$$\int |U(\theta)|^2 e^{-2\varphi_\varepsilon(\theta)} (1 + |\theta|^2)^{-3n} \, d\lambda < \infty,$$

dove ora $d\lambda$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{C}^{2n}$. Per il teorema 2.2.3 ne segue

$$|U(\theta)| \le C e^{\varphi_\varepsilon(\theta)} (1 + |\theta|)^{3n}. \tag{4.5.14}$$

Poniamo ora

$$\Psi(\theta) = U(\theta) \widehat{\chi}(\theta),$$

dove $\widehat{\chi}$ è la trasformata di Fourier–Laplace di una funzione non negativa $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^n)$, con supporto in $\{z : |z| < \varepsilon\}$, che dipende solo da $|z|$ e ha integrale uguale a 1. Ciò significa che $\widehat{\chi}(0) = 1$ e che $\widehat{\chi}(\theta)$ è una funzione di $\theta_1^2 + \cdots + \theta_{2n}^2$, da cui $\widehat{\chi} = 1$ in Σ. Pertanto Ψ soddisfa (4.5.11). Poiché, per il teorema di Paley–Wiener,

$$|\widehat{\chi}(\theta)| \le C_N (1 + |\theta|)^{-N} e^{\varepsilon |\operatorname{Im} \theta|}$$

per ogni N (lo si dimostra integrando per parti), dalla (4.5.14) segue la stima (4.5.12)$'$ con 2ε al posto di ε.

Esempio. La funzione $M(\zeta) = \cos(2\sqrt{\zeta_1 \zeta_2})$ è intera e di tipo esponenziale. Poiché $|\cos t| \le e^{|t|}$ per ogni numero complesso t, si ha

$$|M(\zeta)| \le \exp(a_1|\zeta_1| + a_2|\zeta_2|) \qquad \text{se } a_1 a_2 = 1, \quad a_1, a_2 > 0.$$

Il funzionale analitico μ per cui $\widetilde{\mu} = M$ ha dunque per portante l'insieme $\{(z_1, z_2) : |z_1| \le a_1, \ |z_2| \le a_2\}$ per $a_1 a_2 = 1$. L'intersezione di questi portanti è l'origine. È tuttavia chiaro che l'origine non è un portante di μ, poiché $M(\zeta_1, \zeta_1)$ è di tipo esponenziale 2. Può dunque mancare un minimo fra gli insiemi convessi portanti di M. Fa eccezione il caso $n = 1$, in cui la trasformata di Borel di M si prolunga analiticamente al complementare dell'intersezione di tutti i convessi portanti di μ, il che prova che anche l'intersezione è un portante di μ.

Note. I primi teoremi di esistenza per le equazioni di Cauchy–Riemann nei domini di olomorfia, formulati come soluzione del primo problema di Cousin, furono dimostrati da Oka [2]. Egli dimostrò anche un teorema di approssimazione per funzioni analitiche in un intorno di un compatto olomorficamente convesso. Per una classe più ristretta di domini questo risultato è dovuto a Weil [3]. La coincidenza dei domini pseudoconvessi con i domini di olomorfia fu dimostrata molto più tardi da Oka [5], Bremermann [2] e Norguet [1]. Una caratteristica importante dei metodi qui impiegati è che permettono di risolvere direttamente il primo problema di Cousin nei domini pseudoconvessi. Diventa così facile dimostrare che questi sono domini di olomorfia. Al tempo stesso si prova che essi sono caratterizzati dall'esistenza di soluzioni dell'equazione $\bar{\partial}u = f$ per ogni forma f con $\bar{\partial}f = 0$ (cfr. Serre [3]). Tecniche simili a quelle qui usate furono proposte per la prima volta da Garabedian e Spencer [1], per analogia con la decomposizione di Hodge–de Rham–Kodaira delle forme sulle varietà riemanniane. Le stime fondamentali a priori furono dimostrate per la prima volta da Morrey [1] per le forme di tipo $(0, 1)$ e da Kohn [1] nel caso generale. (Nel capitolo V useremo una semplificazione, dovuta ad Ash [1], della dimostrazione di Kohn [1].) Kohn [2] dimostrò anche alcuni teoremi sulla regolarità al bordo, necessari per il suo metodo e per quello di Morrey. Una dimostrazione semplificata fu data da Kohn e Nirenberg [1]. La tecnica di modificare le norme L^2 mediante funzioni peso risale, in altri settori della teoria delle equazioni alle derivate parziali, a Carleman. In questo contesto fu introdotta da Hörmander [1] per evitare le difficoltà al bordo sopra ricordate e dimostrare risultati più precisi. Argomenti affini sono dovuti ad Andreotti e Vesentini [1].

Nel paragrafo 4.4 si danno teoremi di esistenza più precisi in norme L^2, con alcune applicazioni. Il teorema 4.4.4 è dovuto a Bombieri [1]. Per ulteriori applicazioni rimandiamo a Skoda [1, 2]. La proprietà importante del teorema 4.4.2, il risultato principale, è l'uniformità rispetto alle funzioni peso e agli aperti pseudoconvessi considerati. Come applicazione diamo una dimostrazione, dovuta a Kiselman [2], [3], del teorema di Siu [1] sui numeri di Lelong delle funzioni plurisubarmoniche. La nostra esposizione comprende anche alcuni argomenti tratti da Lelong [2]. Per versioni più generali, riguardanti le correnti positive chiuse, e per le applicazioni, rimandiamo a Siu [1] e Lelong [2]. I metodi del paragrafo 4.4 si possono utilizzare anche per studiare proprietà asintotiche delle funzioni analitiche intere (si veda Sigurdsson [1]). Come semplice applicazione dei risultati del paragrafo 4.4 dimostriamo nel paragrafo 4.5 un teorema sui funzionali analitici dovuto a Pólya [1] per una variabile complessa e a Ehrenpreis [2] e Martineau [1] nel caso generale. Servendosi di risultati di Martineau [1], Kiselman [1] ha studiato in quali casi un funzionale analitico ammetta un unico portante minimale. Per le applicazioni dei funzionali analitici si vedano, ad esempio, Ehrenpreis [3] e Malgrange [3].

Capitolo V
Varietà di Stein

Sommario. Finora abbiamo studiato la teoria delle funzioni soltanto negli aperti di $\mathbb{C}^n$. Per molti scopi questo quadro è troppo ristretto. Ad esempio, il prolungamento analitico simultaneo di tutte le funzioni analitiche in un aperto di $\mathbb{C}^n$ può condurre a funzioni definite in un dominio di Riemann a più fogli sopra $\mathbb{C}^n$, proprio come può accadere per una superficie di Riemann nel caso $n = 1$. Introduciamo quindi una classe di varietà analitiche complesse, le varietà di Stein, la cui definizione si ispira alle proprietà dei domini di olomorfia in $\mathbb{C}^n$. Daremo le definizioni nel paragrafo 5.1 e mostreremo nel paragrafo 5.2 che i teoremi di esistenza e di approssimazione per le equazioni di Cauchy–Riemann dei paragrafi 4.2 e 4.3 si estendono a questo caso più generale. Nel paragrafo 5.3 dimostreremo che una varietà di Stein si può rappresentare concretamente come sottovarietà chiusa di uno spazio $\mathbb{C}^N$ di dimensione sufficientemente alta. Viceversa, tali sottovarietà sono sempre varietà di Stein. Nel paragrafo 5.4 studieremo il massimo prolungamento analitico simultaneo delle funzioni analitiche in un dominio di $\mathbb{C}^n$. Vedremo che esso conduce a una varietà di Stein distesa sopra $\mathbb{C}^n$ e che tali varietà si possono caratterizzare mediante una condizione di pseudoconvessità. (I paragrafi 5.3 e 5.4 non sono necessari per leggere le parti successive del libro.) Nel paragrafo 5.5 formuleremo finalmente i problemi di Cousin e li risolveremo per le varietà di Stein. Nel paragrafo 5.6 estenderemo i risultati del paragrafo 5.2 alle sezioni dei fibrati vettoriali analitici su varietà di Stein. Questo passaggio è essenziale per la teoria dei fasci analitici coerenti che svilupperemo nel capitolo VII. Infine, nel paragrafo 5.7 mostreremo che si può definire una struttura analitica anche prescrivendo, in ogni punto di una varietà, quali differenziali debbano essere di tipo $(0,1)$, in modo che sia soddisfatta una certa condizione di integrabilità. Il risultato è importante nello studio delle perturbazioni delle strutture complesse, ma il lettore può ometterlo senza perdere il filo dell'esposizione.

5.1. Definizioni

Uno spazio topologico di Hausdorff Ω si chiama *varietà di dimensione* n se ogni punto di Ω ha un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per definire la nozione di varietà analitica complessa si usa una famiglia di tali omeomorfismi.

Definizione 5.1.1. Una varietà Ω di dimensione $2n$ si chiama *varietà analitica complessa di dimensione complessa* n se è assegnata una famiglia $\mathcal{F}$ di omeomorfismi κ, detti *sistemi di coordinate analitiche complesse*, di aperti $\Omega_\kappa \subset \Omega$ su aperti $\widetilde{\Omega}_\kappa \subset \mathbb{C}^n$, con le seguenti proprietà.

(i) Se $\kappa, \kappa' \in \mathcal{F}$, l'applicazione fra aperti di $\mathbb{C}^n$

$$\kappa'\kappa^{-1} : \kappa(\Omega_\kappa \cap \Omega_{\kappa'}) \longrightarrow \kappa'(\Omega_\kappa \cap \Omega_{\kappa'})$$

è analitica. (Scambiando κ e κ' si vede che anche l'inversa è analitica.)

(ii) $\bigcup_{\kappa\in\mathcal{F}} \Omega_\kappa = \Omega$.

(iii) Se κ_0 è un omeomorfismo di un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ su un aperto di $\mathbb{C}^n$ e, per ogni $\kappa \in \mathcal{F}$, tanto l'applicazione

$$\kappa\kappa_0^{-1} : \kappa_0(\Omega_0 \cap \Omega_\kappa) \longrightarrow \kappa(\Omega_0 \cap \Omega_\kappa)$$

quanto la sua inversa sono analitiche, allora $\kappa_0 \in \mathcal{F}$.

In un certo senso la condizione (iii) è superflua. Se infatti $\mathcal{F}$ soddisfa (i) e (ii), essa si estende in uno e un solo modo a una famiglia $\mathcal{F}'$ che soddisfa (i), (ii), (iii). L'unica famiglia $\mathcal{F}'$ siffatta è precisamente quella di tutte le applicazioni che soddisfano la condizione (iii) rispetto a $\mathcal{F}$. Una struttura analitica complessa può dunque essere definita da una famiglia arbitraria $\mathcal{F}$ che soddisfi (i) e (ii), ma, se si sopprime la condizione (iii), più famiglie definiscono la stessa struttura. Una tale famiglia si chiama *sistema completo di carte analitiche complesse* e due di questi sistemi si dicono equivalenti se definiscono la stessa struttura.

Diremo che n funzioni a valori complessi $(z_1, \dots, z_n)$, definite in un intorno di un punto w di Ω, costituiscono un sistema di coordinate locali in w se l'applicazione da esse definita su un intorno di w a valori in $\mathbb{C}^n$ è un sistema di coordinate nel senso appena precisato. Se $f_1, \dots, f_n$ sono funzioni analitiche in un intorno di $z(w) = (z_1(w), \dots, z_n(w))$ in $\mathbb{C}^n$, allora $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ è un altro sistema di coordinate in w se e solo se $\det(\partial f_i/\partial z_j)_{i,j=1}^n \neq 0$ in $z(w)$. Ciò segue dal teorema 2.1.2.

Definizione 5.1.2. Siano Ω_1 e Ω_2 varietà analitiche complesse. Un'applicazione $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ si dice *analitica* se $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}$ è analitica ovunque sia definita, per tutti i sistemi di coordinate κ_1 in Ω_1 e κ_2 in Ω_2.

Naturalmente basta scegliere i sistemi di coordinate in due sistemi completi di carte di Ω_1 e di Ω_2. In particolare abbiamo ora definito il concetto di funzione analitica su una varietà analitica complessa Ω. Indicheremo con $A(\Omega)$ l'insieme di tali funzioni munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti di Ω. È evidente che $A(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet se Ω è numerabile all'infinito, ossia se esiste una successione di compatti $K_1, K_2, \dots$ tale che ogni compatto di Ω sia contenuto in qualche K_j. Infatti la topologia di $A(\Omega)$ è allora definita dalle seminorme

$$A(\Omega) \ni f \longmapsto \sup_{K_j} |f|, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

e la completezza è evidente.

Ogni aperto di una varietà complessa Ω possiede chiaramente una struttura di varietà analitica complessa, sicché è ben definita anche la nozione di funzione (o applicazione) analitica su un aperto. Se f è analitica in $\widetilde{\Omega}_\kappa \subset \mathbb{C}^n$, allora $f \circ \kappa$ è analitica in Ω_κ. La definizione stessa di varietà analitica complessa assicura dunque l'esistenza locale di funzioni analitiche. Definiamo ora una classe di varietà sulle quali esistono abbastanza funzioni analitiche globali. Vedremo che su tali varietà la teoria delle funzioni complesse si comporta essenzialmente come nei domini di olomorfia in $\mathbb{C}^n$.

Definizione 5.1.3. Una varietà analitica complessa Ω di dimensione n, numerabile all'infinito, si chiama *varietà di Stein* se soddisfa le seguenti condizioni.

(α) Ω è olomorficamente convessa, ossia, per ogni compatto K di Ω, l'insieme

$$\widehat{K} = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f| \text{ per ogni } f \in A(\Omega)\}$$

è un compatto di Ω.

(β) Se z_1, z_2 sono punti distinti di Ω, esiste $f \in A(\Omega)$ tale che $f(z_1) \neq f(z_2)$.

(γ) Per ogni $z \in \Omega$ si possono trovare n funzioni $f_1, \dots, f_n \in A(\Omega)$ che costituiscono un sistema di coordinate in z.

Esempio. Per il teorema 2.5.5 ogni dominio di olomorfia in $\mathbb{C}^n$ è una varietà di Stein.

Per dare un altro esempio ci occorre una definizione.

Definizione 5.1.4. Un sottoinsieme V di una varietà analitica complessa Ω di dimensione n si chiama *sottovarietà analitica di dimensione* m se

(i) V è chiuso.

(ii) In un intorno ω di ogni punto $v \in V$ esistono coordinate locali $z_1, \ldots, z_n$ tali che

$$\omega \cap V = \{w \in \omega : z_{m+1}(w) = \cdots = z_n(w) = 0\}.$$

Su V si può definire una struttura analitica naturale mediante i sistemi di coordinate $(z_1, \ldots, z_m)$, dove $(z_1, \ldots, z_n)$ è un sistema di coordinate per Ω con la proprietà indicata. Se $f_1, \ldots, f_n$ è un sistema arbitrario di coordinate di Ω in $v \in V$, fra queste funzioni se ne possono sempre trovare m che costituiscono un sistema di coordinate per V in v. Infatti, poiché in $z(v)$ lo jacobiano soddisfa

$$\det(\partial f_i/\partial z_j) \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

si possono scegliere $i_1, \ldots, i_m$ in modo che

$$\det(\partial f_{i_\mu}/\partial z_\nu) \neq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, m).$$

Le restrizioni a V delle $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m}$ formano quindi un sistema di coordinate locali in v.

Teorema 5.1.5. Ogni sottovarietà di una varietà di Stein è una varietà di Stein.

Dimostrazione. Le condizioni (α) e (β) sono immediate, poiché la restrizione a una sottovarietà di una funzione analitica su tutta la varietà è necessariamente analitica. La condizione (γ) segue dall'osservazione appena fatta.

Il teorema sarebbe falso per ogni classe più piccola di varietà che contenga tutti gli spazi $\mathbb{C}^n$. Nel paragrafo 5.3 dimostreremo infatti che ogni varietà di Stein di dimensione n si può immergere come sottovarietà di $\mathbb{C}^{2n+1}$. Dimostriamo infine che il teorema 2.6.11 si estende alle varietà di Stein.

Teorema 5.1.6. Siano Ω una varietà di Stein, K un compatto di Ω e ω un intorno aperto di $\widehat{K}$. Esiste allora una funzione $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tale che

(a) φ è strettamente plurisubarmonica.

(b) $\varphi < 0$ su K e $\varphi > 0$ in $\Omega \setminus \omega$.

(c) $\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Si osservi che la nozione di stretta plurisubarmonicità è ben definita per le funzioni su una varietà analitica complessa, poiché è invariante per cambiamenti analitici di variabili (si veda la dimostrazione del teorema 2.6.4).

Dimostrazione del teorema 5.1.6. Per la condizione (α) della definizione 5.1.3 possiamo scegliere una successione $K_1 = \widehat{K}, K_2, \ldots$ di compatti di Ω tali che $\widehat{K_j} = K_j$, $\bigcup_j K_j = \Omega$ e K_j sia contenuto nell'interno di K_{j+1} per ogni j. Sia ω_j un aperto con $K_j \subset \omega_j \subset K_{j+1}$ e $\omega_1 \subset \omega$. Poiché $\widehat{K_j} = K_j$, per ogni j si possono scegliere funzioni $f_{jk} \in A(\Omega)$, $k = 1, \ldots, k_j$,

di modulo minore di 1 su K_j, in modo che $\max_k |f_{jk}(z)| > 1$ per $z \in K_{j+2} \setminus \omega_j$. Elevando le f_{jk} a potenze sufficientemente alte si può persino ottenere

$$\sum_{k=1}^{k_j} |f_{jk}(z)|^2 < 2^{-j}, \qquad z \in K_j, \tag{5.1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} |f_{jk}(z)|^2 > j, \qquad z \in K_{j+2} \setminus \omega_j. \tag{5.1.2}$$

In virtù della condizione (γ) della definizione 5.1.3 possiamo inoltre supporre che, per ogni punto di K_j, fra le funzioni f_{jk}, $k = 1, \ldots, k_j$, ve ne siano n che costituiscono un sistema di coordinate locali in quel punto. Poniamo ora

$$\varphi(z) = \sum_{j,k} |f_{jk}(z)|^2 - 1.$$

La somma converge per (5.1.1) e, per (5.1.2), $\varphi(z) > j - 1$ se $z \in \Omega \setminus \omega_j$. In effetti φ appartiene a $C^\infty(\Omega)$, poiché la serie

$$\sum_{j,k} f_{jk}(z)\overline{f_{jk}(\zeta)}$$

converge uniformemente sui compatti di $\Omega \times \Omega$, sicché la somma è analitica in z e la sua complessa coniugata è analitica in ζ. È anche chiaro che φ è plurisubarmonica. Lo è strettamente poiché, se per qualche z si ha

$$\sum_{l=1}^{n} w_l \, \partial f_{jk}(z)/\partial z_l = 0 \qquad \text{per ogni } j, k,$$

allora $w = 0$, dato che esistono n funzioni f_{jk} che costituiscono un sistema di coordinate locali in z. Questo conclude la dimostrazione.

Si osservi che anche $\log(2 + \varphi)$ è strettamente plurisubarmonica, per il corollario 1.6.8 e il teorema 1.6.12.

Osservazione. Nella dimostrazione del teorema 5.1.6 abbiamo usato soltanto le condizioni (α) e (γ) della definizione 5.1.3. Nel paragrafo 5.2 vedremo che da ciò si può concludere che la condizione (β) è conseguenza delle altre due.

5.2. Stime L^2 e teoremi di esistenza per l'operatore $\bar\partial$

Sia Ω una varietà analitica complessa di dimensione complessa n, numerabile all'infinito. La decomposizione delle forme differenziali in forme di tipo (p, q) e la definizione dell'operatore $\bar\partial$ si estendono immediatamente alle forme e alle funzioni su Ω, poiché tutte queste nozioni sono invarianti per cambiamenti analitici di coordinate (si veda il paragrafo 2.1).

Per estendere le tecniche degli spazi di Hilbert usate nel capitolo IV dobbiamo introdurre norme hermitiane sulle forme differenziali in Ω. Scegliamo dunque una metrica hermitiana su Ω, ossia una metrica riemanniana che, in ogni sistema di coordinate analitiche $z_1, \ldots, z_n$, si scriva

$$\sum_{j,k=1}^{n} h_{jk} \, dz_j \, d\bar z_k,$$

dove (h_{jk}) è una matrice hermitiana definita positiva a coefficienti C^∞. L'esistenza di una tale struttura hermitiana è ovvia localmente e si dimostra subito globalmente mediante una partizione dell'unità. Indichiamo con dV l'elemento di volume invariante definito dalla struttura (per le definizioni si veda anche Weil [1]).

Se f è una forma di tipo $(1,0)$ e $f = \sum_1^n f_j\, dz_j$ in coordinate locali, poniamo

$$\langle f, f\rangle = \sum h^{kj} f_j \bar{f}_k,$$

dove (h^{jk}) è l'inversa di (h_{jk}). Questa forma hermitiana è definita in modo invariante, poiché

$$\langle f, f\rangle = \sup \frac{|\sum f_j\, dz_j|^2}{\sum h_{jk}\, dz_j\, d\bar{z}_k}.$$

Per il procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt ogni punto di Ω ha un intorno U in cui esistono n forme $\omega^1, \dots, \omega^n$ di tipo $(1,0)$ a coefficienti C^∞ tali che in ogni punto di U

$$\langle \omega^j, \omega^k\rangle = \delta_{jk}, \qquad j,k = 1,\dots,n.$$

Se poniamo $f = \sum f_j \omega^j$, ne segue che $\langle f, f\rangle = \sum_1^n |f_j|^2$. Più in generale una forma differenziale f di tipo (p,q) si scrive in modo unico come somma

$$f = \sum_{|I|=p}{}' \sum_{|J|=q}{}' f_{I,J}\omega^I \wedge \bar{\omega}^J,$$

dove i coefficienti $f_{I,J}$ sono antisimmetrici sia in I sia in J e $\sum'$ indica che si somma soltanto sui multiindici crescenti. Possiamo definire $\langle f, f\rangle$ ponendo

$$\langle f, f\rangle = |f|^2 = \sum{}' |f_{I,J}|^2 = \frac{1}{p!q!} \sum |f_{I,J}|^2,$$

poiché questa definizione è indipendente dalla scelta della base ortonormale $\omega^1, \dots, \omega^n$. Lasciamo la verifica per esercizio.

Come nel lemma 4.1.3 scegliamo una volta per tutte una successione $\eta_1, \eta_2, \dots$ di funzioni in $C_0^\infty(\Omega)$ tali che $0 \le \eta_\nu \le 1$ e, su ogni compatto di Ω, $\eta_\nu = 1$ per ν abbastanza grande. In luogo della condizione (4.1.6) modifichiamo la metrica hermitiana in modo che

$$|\bar{\partial}\eta_\nu| \le 1 \quad \text{su } \Omega, \qquad \nu = 1,2,\dots. \tag{5.2.1}$$

Per vedere che ciò è possibile basta osservare che, data una metrica hermitiana, possiamo scegliere una funzione positiva $M \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$|\bar{\partial}\eta_\nu| \le M \qquad \text{per ogni } \nu.$$

Su ogni compatto di Ω questo impone infatti soltanto un numero finito di limitazioni inferiori per M. Se sostituiamo alla metrica data la metrica

$$M^2 \sum h_{jk}\, dz_j\, d\bar{z}_k,$$

la (5.2.1) risulta soddisfatta quando si calcola la norma del differenziale rispetto alla nuova metrica. *D'ora in poi teniamo fisse la struttura hermitiana e la successione η_ν.*

Sia $\varphi \in C^2(\Omega)$. Indichiamo con $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ lo spazio di tutte le (classi di equivalenza di) forme di tipo (p,q) a coefficienti misurabili in ogni sistema di coordinate locali e tali che

$$\|f\|^2_\varphi = \int |f|^2 e^{-\varphi}\, dV < \infty.$$

L'operatore $\bar{\partial}$ definisce due operatori lineari chiusi con dominio denso

$$T : L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi) \to L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi) \quad \text{e} \quad S : L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi) \to L^2_{(p,q+2)}(\Omega,\varphi).$$

Lemma 5.2.1. $D_{(p,q+1)}(\Omega)$ è denso in $D_{T^*} \cap D_S$ per la norma del grafico

$$f \longmapsto \|f\|_\varphi + \|T^* f\|_\varphi + \|Sf\|_\varphi.$$

Dimostrazione. Riprendiamo essenzialmente la dimostrazione del lemma 4.1.3. Poiché

$$S(\eta_\nu f) - \eta_\nu Sf = \bar\partial \eta_\nu \wedge f, \qquad f \in D_S,$$

da (5.2.1) segue

$$|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu Sf|^2 \le |f|^2, \qquad f \in D_S.$$

Inoltre si ha

$$(T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f, u)_\varphi = -(f, \bar\partial \eta_\nu \wedge u)_\varphi, \qquad f \in D_{T^*}, \quad u \in D_{(p,q)},$$

da cui

$$|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f|^2 \le |f|^2.$$

Quindi $\eta_\nu f \to f$ nella norma del grafico se $f \in D_{T^*} \cap D_S$. Basta perciò approssimare gli elementi di $D_{T^*} \cap D_S$ a supporto compatto. Con una partizione dell'unità ci riduciamo al caso in cui il supporto è contenuto in una carta. Possiamo allora servirci del seguente lemma classico di Friedrichs.

Lemma 5.2.2. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\int \varphi\, dx = 1$, sia $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto e sia a una funzione di classe C^1 in un intorno del supporto di v. Poniamo

$$(J_\varepsilon v)(x) = \int v(x - \varepsilon y)\varphi(y)\, dy.$$

Allora $aD_k J_\varepsilon v - J_\varepsilon(aD_k v) \to 0$ in L^2 quando $\varepsilon \to 0$. Qui $aD_k v$ è definito nel senso delle distribuzioni e $D_k = \partial/\partial x_k$.

Dimostrazione. L'enunciato è evidente per $v \in C^1$. È quindi sufficiente dimostrare la disuguaglianza

$$\|aD_k J_\varepsilon v - J_\varepsilon(aD_k v)\|_{L^2} \le C\|v\|_{L^2}$$

per ε piccolo, supponendo che a abbia derivate limitate in tutto $\mathbb{R}^N$. Un calcolo diretto dà

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x) &= aD_k J_\varepsilon v(x) - J_\varepsilon(aD_k v)(x) \\ &= \int v(x - \varepsilon y)\left((a(x) - a(x - \varepsilon y))\frac{\varphi_k(y)}{\varepsilon} + (D_k a)(x - \varepsilon y)\varphi(y)\right) dy. \end{aligned}$$

Abbiamo scritto $\varphi_k = D_k\varphi$. Se C è un maggiorante di $|\operatorname{grad} a|$, risulta

$$|W_\varepsilon(x)| \le C \int |v(x - \varepsilon y)|(|y||\varphi_k(y)| + |\varphi(y)|)\, dy.$$

La disuguaglianza integrale di Minkowski dà dunque

$$\|W_\varepsilon\|_{L^2} \le C \int (|y||\varphi_k(y)| + |\varphi(y)|)\, dy\, \|v\|_{L^2}.$$

Conclusione della dimostrazione del lemma 5.2.1. Dal lemma 5.2.2 segue immediatamente che, se in una carta in cui f ha supporto compatto applichiamo l'operatore J_ε a ciascuna componente di f, allora

$$\|T^*(J_\varepsilon f) - J_\varepsilon T^* f\|_\varphi \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Per il lemma 4.1.4 ne segue

$$\|T^*(J_\varepsilon f) - T^* f\|_\varphi \to 0 \quad \text{per } \varepsilon \to 0, \quad f \in D_{T^*}.$$

Analogamente $S(J_\varepsilon f) \to Sf$ se $f \in D_S$. (Qui la dimostrazione è più semplice, poiché S ha coefficienti costanti nelle coordinate analitiche.) Questo conclude la dimostrazione del lemma 5.2.1.

Sia U una carta di Ω in cui esiste una base ortonormale C^∞ di forme $\omega^1, \dots, \omega^n$ di tipo $(1,0)$. Esprimeremo in questa base gli operatori S e T^* sulle forme $f \in D_{(p,q+1)}$ con supporto in U. Ne risulterà che per tali forme il lemma 4.2.1 rimane sostanzialmente invariato.

Se $u \in C^1(U)$, scriviamo

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \omega^i}\omega^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar\omega^i}\bar\omega^i,$$

definendo così gli operatori differenziali lineari del primo ordine $\partial/\partial\omega^i$ e $\partial/\partial\bar\omega^i$. Allora $\bar\partial u = \sum_{i=1}^n (\partial u/\partial\bar\omega^i)\bar\omega^i$ e, se $f = \sum' f_{I,J}\omega^I \wedge \bar\omega^J$, si ha

$$\bar\partial f = \sum_{I,J}{}' \sum_i \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar\omega^i}\bar\omega^i \wedge \omega^I \wedge \bar\omega^J + \cdots,$$

dove i puntini indicano termini in cui nessun $f_{I,J}$ è derivato. Essi compaiono perché $\bar\partial\omega^i$ e $\bar\partial\bar\omega^j$ possono essere diversi da zero. Indicando con Af la somma esplicita, si ha evidentemente $|\bar\partial f - Af| \le C|f|$, con C indipendente da f se il supporto di f è contenuto in un compatto fissato di U.

Sia ora $u \in D_{(p,q)}$ con supporto in U. Si ha

$$\begin{aligned}\int \langle T^* f, u\rangle e^{-\varphi} dV &= \int \langle f, \bar\partial u\rangle e^{-\varphi} dV \\ &= (-1)^p \sum_{I,K}{}' \sum_j \int f_{I,jK}\overline{\partial u_{I,K}/\partial\bar\omega^j}\, e^{-\varphi} dV + \cdots.\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

I puntini indicano ancora termini privi di derivate. Integriamo per parti. Osserviamo anzitutto che, ponendo

$$\delta_j w = e^\varphi \partial(we^{-\varphi})/\partial\omega^j,$$

la formula di Green dà, per $v, w \in C_0^\infty(U)$,

$$\int \frac{\partial v}{\partial\bar\omega^j}\bar w e^{-\varphi} dV = -\int v\overline{\delta_j w} e^{-\varphi} dV + \int \sigma_j v \bar w e^{-\varphi} dV,$$

dove $\sigma_j \in C^\infty(U)$. Integrando per parti in (5.2.2) si ottiene

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum_{I,K}{}' \sum_{j=1}^n \delta_j f_{I,jK}\omega^I \wedge \bar\omega^K + \cdots = Bf + \cdots, \tag{5.2.3}$$

dove i termini omessi non contengono derivate delle $f_{I,jK}$ né dipendono da φ. Pertanto $|T^* f - Bf| \le C|f|$ quando f ha supporto in un compatto fissato di U. Con un'altra costante, indipendente da f e da φ, si ottiene così

$$\|Af\|_\varphi^2 + \|Bf\|_\varphi^2 \le 2(\|Sf\|_\varphi^2 + \|T^* f\|_\varphi^2) + C\|f\|_\varphi^2. \tag{5.2.4}$$

Gli argomenti che hanno condotto a (4.2.3) sono ancora applicabili, perciò

$$\begin{aligned}\|Af\|_\varphi^2 + \|Bf\|_\varphi^2 = &\int {\sum_{I,J}}' \sum_{j=1}^n |\partial f_{I,J}/\partial\bar\omega^j|^2 e^{-\varphi} dV \\ &+ \int {\sum_{I,K}}' \sum_{j,k=1}^n \left(\delta_j f_{I,jK}\overline{\delta_k f_{I,kK}} - \frac{\partial f_{I,jK}}{\partial\bar\omega^k}\overline{\frac{\partial f_{I,kK}}{\partial\bar\omega^j}}\right) e^{-\varphi} dV.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Prima di ripetere l'integrazione per parti compiuta a questo punto nel paragrafo 4.2, dobbiamo calcolare i commutatori di $\partial/\partial\bar\omega^j$ e δ_k per ottenere una formula che sostituisca (4.2.6). Sia w una funzione liscia in U. Formiamo

$$\bar\partial\partial w = \bar\partial \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial\omega^k}\omega^k = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial\bar\omega^j\partial\omega^k}\bar\omega^j\wedge\omega^k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial\omega^i}\bar\partial\omega^i.$$

Poiché $\bar\partial\omega^i$ è di tipo $(1,1)$, possiamo scrivere

$$\bar\partial\omega^i = \sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i \bar\omega^j\wedge\omega^k. \tag{5.2.6}$$

Ne risulta

$$\bar\partial\partial w = \sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\bar\omega^j\partial\omega^k} + \sum_i c_{jk}^i\frac{\partial w}{\partial\omega^i}\right)\bar\omega^j\wedge\omega^k.$$

Sostituendo w con $\bar w$ e coniugando tutti i termini otteniamo anche

$$\partial\bar\partial w = \sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^j\partial\bar\omega^k} + \sum_i \bar c_{jk}^i\frac{\partial w}{\partial\bar\omega^i}\right)\omega^j\wedge\bar\omega^k.$$

Dall'identità $\bar\partial\partial w = -\partial\bar\partial w$ segue dunque

$$w_{kj} = \frac{\partial^2 w}{\partial\bar\omega^j\partial\omega^k} + \sum_i c_{jk}^i\frac{\partial w}{\partial\omega^i} = \frac{\partial^2 w}{\partial\omega^k\partial\bar\omega^j} + \sum_i \bar c_{kj}^i\frac{\partial w}{\partial\bar\omega^i}, \tag{5.2.7}$$

dove il primo membro è definito da queste uguaglianze. Con tale notazione

$$\partial\bar\partial w = \sum w_{jk}\omega^j\wedge\bar\omega^k.$$

Pertanto w è plurisubarmonica precisamente quando la forma $\sum w_{jk}f_j\bar f_k$ è definita positiva.[2] Da (5.2.7) segue

$$\delta_k\frac{\partial w}{\partial\bar\omega^j} - \frac{\partial\delta_k w}{\partial\bar\omega^j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar\omega^j\partial\omega^k}w + \sum_i c_{jk}^i\frac{\partial w}{\partial\omega^i} - \sum_i \bar c_{kj}^i\frac{\partial w}{\partial\bar\omega^i}.$$

Ovvero, usando la definizione di δ_i e applicando di nuovo (5.2.7) con φ al posto di w,

$$\delta_k\frac{\partial w}{\partial\bar\omega^j} - \frac{\partial\delta_k w}{\partial\bar\omega^j} = \varphi_{kj}w + \sum_i c_{jk}^i\delta_i w - \sum_i \bar c_{kj}^i\frac{\partial w}{\partial\bar\omega^i}. \tag{5.2.8}$$

[2]Così nell'originale. Per la plurisubarmonicità è sufficiente e necessaria la semidefinitezza positiva. [N.d.T.]

Usando la formula di Green e (5.2.8), integriamo ora per parti in (5.2.5). Tenendo conto di (5.2.4), otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{I,K}{}' \int \sum_{j,k=1}^{n} f_{I,jK}\bar{f}_{I,kK}\varphi_{jk}e^{-\varphi}dV + \sum_{I,J}{}' \int \sum_{j=1}^{n} |\partial f_{I,J}/\partial\bar{\omega}^j|^2 e^{-\varphi}dV \\ \leq 2(\|Sf\|_\varphi^2 + \|T^*f\|_\varphi^2) + C\|f\|_\varphi^2 + t_1 + t_2 + t_3,\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

dove

$$\begin{aligned} t_1 &= \sum_{I,K}{}' \sum_{i,j,k=1}^{n} \int f_{I,jK}\bar{c}_{jk}^i \overline{\delta_i f_{I,kK}} e^{-\varphi}dV, \\ t_2 &= -\sum_{I,K}{}' \sum_{i,j,k=1}^{n} \int f_{I,jK} c_{kj}^i \overline{\partial f_{I,kK}/\partial\bar{\omega}^i} e^{-\varphi}dV, \\ t_3 &= \sum_{I,K}{}' \sum_{j,k} \int \left(f_{I,jK}\bar{\sigma}_j \overline{\delta_k f_{I,kK}} - f_{I,jK}\sigma_k \overline{\partial f_{I,kK}/\partial\bar{\omega}^j} \right) e^{-\varphi}dV. \end{aligned}$$

In t_1 e nei termini di t_3 contenenti gli operatori δ_j, un'altra integrazione per parti conduce a termini che contengono soltanto gli operatori differenziali $\partial/\partial\bar{\omega}^i$. Stimandoli con la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz ricaviamo da (5.2.9)

$$\begin{aligned}\int \sum_{I,J}{}' |f_{I,J}|^2 \lambda e^{-\varphi}dV + \tfrac{1}{2}\sum_{I,J}{}' \sum_{j=1}^{n} \int |\partial f_{I,J}/\partial\bar{\omega}^j|^2 e^{-\varphi}dV \\ \leq 2(\|T^*f\|_\varphi^2 + \|Sf\|_\varphi^2 + C\|f\|_\varphi^2)\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

per ogni $f \in D_{(p,q+1)}$ con supporto in un compatto fissato di U. Qui C è una costante e λ indica il minimo autovalore della forma hermitiana simmetrica

$$\sum \varphi_{jk} t_j \bar{t}_k. \tag{5.2.11}$$

Si osservi che λ è indipendente dalla scelta della base $\omega^1, \ldots, \omega^n$, poiché un cambiamento di base induce soltanto una trasformazione unitaria delle variabili $t_1, \ldots, t_n$. Naturalmente la stima (5.2.10) interessa soprattutto quando φ è plurisubarmonica.

Possiamo ora dare facilmente una versione globale di (5.2.10).

Teorema 5.2.3. Esiste una funzione continua C su Ω tale che

$$\int (\lambda - C)|f|^2 e^{-\varphi}dV \leq 4(\|T^*f\|_\varphi^2 + \|Sf\|_\varphi^2), \qquad f \in D_{(p,q+1)}(\Omega). \tag{5.2.12}$$

Qui φ è una funzione arbitraria in $C^2(\Omega)$ e λ è il minimo autovalore della forma (5.2.11), anch'esso funzione continua su Ω. Si potrebbe sostituire la costante 4 con qualunque numero maggiore di 1.

Dimostrazione. Siano U_j, $j = 1, 2, \ldots$, carte di Ω in cui valga (5.2.10), scelte in modo da formare un ricoprimento localmente finito di Ω. Ciò significa che $\bigcup U_j = \Omega$ e che ogni compatto di Ω incontra soltanto un numero finito di U_j. Scegliamo $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$ in modo che

$$\sum \psi_j^2 = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

(Se $\psi_j' \in C_0^\infty(U_j)$ e $\psi^2 = \sum(\psi_j')^2 > 0$ ovunque in Ω, possiamo prendere $\psi_j = \psi_j'/\psi$.) Applichiamo (5.2.10) a $\psi_j f$. Otteniamo

$$\int \psi_j^2 |f|^2 \lambda e^{-\varphi}dV \leq 4(\|\psi_j T^*f\|_\varphi^2 + \|\psi_j Sf\|_\varphi^2) + C_j \int_{U_j} |f|^2 e^{-\varphi}dV.$$

Sommando queste stime otteniamo subito (5.2.12).

Il teorema 5.2.3 sostituisce pienamente il lemma 4.2.1. Possiamo quindi procedere come nei paragrafi 4.2 e 4.3 e saremo brevi.

Teorema 5.2.4. Sia Ω una varietà complessa su cui esiste una funzione strettamente plurisubarmonica φ tale che $\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Allora per ogni $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ con $\bar\partial f = 0$ l'equazione $\bar\partial u = f$ ammette, in senso debole, una soluzione $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$.

Dimostrazione. Sostituiamo in (5.2.12) φ con $\chi(\varphi)$, dove χ è una funzione convessa crescente. Si può allora sostituire il minorante λ della forma (5.2.11) con $\chi'(\varphi)\lambda$ (si veda la dimostrazione del teorema 4.2.2). Dal teorema 5.2.3 ricaviamo dunque, per $f \in D_{(p,q+1)}(\Omega)$,

$$\int (\chi'(\varphi)\lambda - C)|f|^2 e^{-\chi(\varphi)} dV \le 4(\|T^* f\|^2_{\chi(\varphi)} + \|Sf\|^2_{\chi(\varphi)}).$$

Scegliendo χ' crescente abbastanza rapidamente da avere

$$\chi'(\varphi)\lambda - C \ge 4, \tag{5.2.13}$$

per il lemma 5.2.1 si ottiene

$$\|f\|^2_{\chi(\varphi)} \le \|T^* f\|^2_{\chi(\varphi)} + \|Sf\|^2_{\chi(\varphi)}, \qquad f \in D_{T^*} \cap D_S. \tag{5.2.14}$$

L'operatore T^* è naturalmente l'aggiunto di T rispetto alle norme $\| \ \|_{\chi(\varphi)}$. Se χ soddisfa (5.2.13), il lemma 4.1.1 (si veda anche (4.1.5)) mostra ora che per ogni $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \chi(\varphi))$ con $\bar\partial f = 0$ l'equazione $\bar\partial u = f$ ammette una soluzione $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \chi(\varphi))$, che si può scegliere in modo che

$$\|u\|_{\chi(\varphi)} \le \|f\|_{\chi(\varphi)}. \tag{5.2.15}$$

Questo dimostra il teorema.

Gli spazi $W^s_{(p,q)}$, $0 \le s \le \infty$, introdotti dopo il teorema 4.2.2, sono evidentemente invarianti per cambiamenti analitici di coordinate. Su una varietà Ω si può dunque definire $W^s_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$ come l'insieme delle forme che appartengono a $W^s_{(p,q)}$ in ogni carta. La dimostrazione del teorema 4.2.5 si applica con modifiche evidenti. Infatti, per le forme $f \in D_{T^*} \cap D_S$ con supporto in una carta, la (5.2.10) dà stime delle derivate $\partial f_{I,J}/\partial \bar\omega^j$ e quindi delle derivate $\partial f_{I,J}/\partial \bar z_j$ nelle coordinate locali z_j. Lasciamo dunque al lettore, per esercizio, i particolari della dimostrazione del teorema seguente.

Teorema 5.2.5. Sia Ω una varietà complessa su cui esiste una funzione strettamente plurisubarmonica $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$ per ogni c. Allora, per ogni $f \in W^s_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc})$ con $\bar\partial f = 0$, l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in W^{s+1}_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$. Per $q = 0$ ogni soluzione dell'equazione $\bar\partial u = f$ ha questa proprietà.

L'ultima affermazione è naturalmente già contenuta nel teorema 4.2.5.

Corollario 5.2.6. Nelle ipotesi del teorema 5.2.5, per ogni $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$ con $\bar\partial f = 0$, l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$.

Poiché il teorema 2.7.10 si estende evidentemente alle varietà, in virtù del teorema 5.1.6 otteniamo il seguente risultato.

Teorema 5.2.7. Se Ω è una varietà di Stein di dimensione n, allora $H^r(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ per $r > n$.

Otteniamo anche teoremi di approssimazione.

Teorema 5.2.8. Siano Ω una varietà complessa e φ una funzione strettamente plurisubarmonica in Ω tale che $K_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) \leq c\} \Subset \Omega$ per ogni c reale. Ogni funzione analitica in un intorno di K_0 si può allora approssimare uniformemente su K_0 mediante funzioni di $A(\Omega)$.

Dimostrazione. Basta applicare la dimostrazione del lemma 4.3.1 usando la stima (5.2.14) al posto di (4.2.10). (La funzione φ del teorema 5.2.8 corrisponde alla funzione p del lemma 4.3.1.) Non ripetiamo i particolari.

Combinando i teoremi 5.2.8 e 5.1.6 otteniamo il seguente corollario.

Corollario 5.2.9. Se Ω è una varietà di Stein e K è un compatto di Ω tale che $\widehat{K} = K$, ogni funzione analitica in un intorno di K si può approssimare uniformemente su K mediante funzioni di $A(\Omega)$.

Possiamo ora dimostrare il reciproco del teorema 5.1.6.

Teorema 5.2.10. Una varietà complessa Ω è una varietà di Stein se e solo se esiste una funzione strettamente plurisubarmonica $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$ per ogni c reale. Gli insiemi $\overline{\Omega_c}$ sono allora $A(\Omega)$-convessi.

Dimostrazione. Il teorema 5.1.6 afferma che funzioni φ con queste proprietà esistono su ogni varietà di Stein. Viceversa, supponiamo che su Ω esista una tale funzione φ. Dobbiamo dimostrare le tre condizioni (α), (β), (γ) della definizione 5.1.3. Premettiamo un lemma.

Lemma 5.2.11. Ogni $z^0 \in \Omega$ ha un intorno ω_0 in cui esiste una funzione analitica $u_0 \in A(\omega_0)$ tale che $u_0(z^0) = 0$ e

$$\operatorname{Re} u_0(z) < \varphi(z) - \varphi(z^0) \qquad \text{se } z^0 \neq z \in \omega_0.$$

Dimostrazione. Siano $z_1, \ldots, z_n$ coordinate locali in z^0 tutte nulle in quel punto. Lo sviluppo di Taylor di φ si scrive

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \operatorname{Re} u_0(z) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3),$$

dove u_0 è un polinomio di grado ≤ 2 e $u_0(0) = 0$. Poiché la forma hermitiana è definita positiva, in un intorno dell'origine risulta

$$\varphi(z) > \varphi(0) + \operatorname{Re} u_0(z), \qquad z \neq 0.$$

Il lemma è dimostrato.

Conclusione della dimostrazione del teorema 5.2.10. Osserviamo anzitutto che anche Ω_c soddisfa le ipotesi del teorema, con $1/(c - \varphi)$ al posto di φ. Disponiamo dunque, per ogni c, di un teorema di esistenza per l'operatore $\bar{\partial}$ in Ω_c (corollario 5.2.6).

Sia z^0 un punto arbitrario di Ω. Dimostreremo che in z^0 esistono coordinate locali costituite da funzioni di $A(\Omega)$, che z^0 non appartiene all'inviluppo rispetto ad $A(\Omega)$ di $\overline{\Omega_c}$ per alcun $c < \varphi(z^0)$ e che, per ogni altro punto z^1 con $\varphi(z^1) \leq \varphi(z^0)$, esiste $f \in A(\Omega)$ con $f(z^0) \neq f(z^1)$. Questo dimostrerà il teorema.

Scegliamo u_0 e ω_0 secondo il lemma 5.2.11, in modo che $z^1 \notin \omega_0$ e che un unico sistema di coordinate locali ricopra ω_0. Prendiamo altri due intorni ω_1 e ω_2 di z^0 tali che

$$\omega_1 \Subset \omega_2 \Subset \omega_0.$$

Sia $\psi \in C_0^\infty(\omega_2)$ uguale a 1 in ω_1. Useremo ψ come consueta funzione di troncamento. Poiché il supporto di $\bar\partial\psi$ è contenuto in $\overline{\omega_2} \setminus \omega_1$, possiamo scegliere $a > \varphi(z^0)$ ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$\operatorname{Re} u_0(z) < -\varepsilon \qquad \text{se } z \in \operatorname{supp} \bar\partial\psi \text{ e } \varphi(z) < a. \tag{5.2.16}$$

Dalla dimostrazione del teorema 5.2.4 per l'operatore $\bar\partial$ in Ω_a segue che esiste una funzione $\varphi_a \in C^\infty(\Omega_a)$, limitata inferiormente in Ω_a, tale che per ogni $f \in L^2_{(0,1)}(\Omega_a, \varphi_a)$ con $\bar\partial f = 0$ l'equazione $\bar\partial v = f$ ammette una soluzione $v \in L^2(\Omega_a, \varphi_a)$ con

$$\|v\|_{\varphi_a} \le \|f\|_{\varphi_a}. \tag{5.2.17}$$

Per il corollario 5.2.6, v è infinitamente differenziabile se lo è f.

Sia ora u una funzione analitica in ω_0. Per un parametro positivo grande t poniamo

$$u_t = \psi u e^{tu_0} - v_t. \tag{5.2.18}$$

Vogliamo scegliere v_t in modo che $u_t \in A(\Omega_a)$ e v_t sia piccola. A tal fine osserviamo che u_t è analitica se

$$\bar\partial v_t = u e^{tu_0} \bar\partial\psi = f_t, \tag{5.2.19}$$

dove l'ultima uguaglianza è una definizione. Per (5.2.16) si ha $\|f_t\|_{\varphi_a} = O(e^{-\varepsilon t})$ a u fissata. Applicando (5.2.17) vediamo dunque che (5.2.19) ha una soluzione v_t con

$$\|v_t\|_{\varphi_a} = O(e^{-\varepsilon t}), \qquad t \to +\infty. \tag{5.2.20}$$

In particolare, per (5.2.19), v_t è analitica nel complementare del supporto di $\bar\partial\psi$ in Ω_a. Per il teorema 2.2.3 si ottiene dunque $u_t(z^1) = v_t(z^1) \to 0$ e $u_t(z^0) = u(z^0) + v_t(z^0) \to u(z^0)$ per $t \to \infty$.[3] Poiché possiamo scegliere $u(z^0) = 1$, per t grande risulta $u_t(z^1) \ne u_t(z^0)$. Per il teorema 5.2.8 possiamo approssimare u_t su $\overline{\Omega_{\varphi(z^0)}}$ con una funzione $U \in A(\Omega)$ tanto da avere $U(z^0) \ne U(z^1)$. Ciò dimostra la condizione (β). Inoltre da (5.2.20) segue

$$\int_{\Omega_c} |u_t|^2 \, dV \to 0, \qquad t \to \infty,$$

per ogni $c < \varphi(z^0)$. Per il teorema 2.2.3, $u_t \to 0$ uniformemente sui compatti di Ω_c. Se $c' < c$, per t grande si ha pertanto $|u_t| < \frac{1}{2}$ su $\Omega_{c'}$, mentre $u_t(z^0) \to 1$. Approssimando u_t con funzioni di $A(\Omega)$ mediante il teorema 5.2.8, concludiamo che z^0 non appartiene all'inviluppo rispetto ad $A(\Omega)$ di $\overline{\Omega_{c'}}$ per alcun $c' < \varphi(z^0)$. L'inviluppo di $\overline{\Omega_{c'}}$ rispetto ad $A(\Omega)$ coincide quindi con $\overline{\Omega_{c'}}$ per ogni c'. Questo dimostra la condizione (α).

Infine, scegliamo la funzione $u \in A(\omega_0)$ in modo che $u(z^0) = 0$. Allora $\partial u_t = \partial u - \partial v_t$ in z^0 e, per il teorema 2.2.3, $\partial v_t \to 0$ in z^0. Pertanto ∂u_t converge a ∂u in z^0 per $t \to \infty$. Se $u^1, \dots, u^n$ è un sistema di coordinate in z^0 formato da funzioni che vi si annullano, lo jacobiano delle corrispondenti funzioni $u_t^1, \dots, u_t^n \in A(\Omega_a)$ rispetto a $u^1, \dots, u^n$ tende dunque a 1 quando $t \to \infty$. Per il teorema 5.2.8 possiamo approssimare queste funzioni mediante $U^1, \dots, U^n \in A(\Omega)$ tanto bene che anche lo jacobiano delle $U^1, \dots, U^n$ rispetto a $u^1, \dots, u^n$ è diverso da zero in z^0. È quindi soddisfatta anche la condizione (γ) della definizione 5.1.3.

[3] Nell'originale compare qui il segno più. Con la convenzione di (5.2.18) le due uguaglianze sono $u_t(z^1) = -v_t(z^1)$ e $u_t(z^0) = u(z^0) - v_t(z^0)$. I limiti sono gli stessi. [N.d.T.]

Corollario 5.2.12. La condizione (β) della definizione 5.1.3 è conseguenza delle altre ipotesi.

Dimostrazione. È una conseguenza immediata del teorema 5.2.10 e dell'osservazione che segue il teorema 5.1.6.

5.3. Immersione delle varietà di Stein

Sia Ω una varietà analitica complessa di dimensione n. Ogni $f = (f_1, \dots, f_N) \in A(\Omega)^N$ definisce un'applicazione analitica

$$\Omega \ni z \longmapsto (f_1(z), \dots, f_N(z)) \in \mathbb{C}^N. \tag{5.3.1}$$

Definizione 5.3.1. L'applicazione (5.3.1) si dice *regolare* se ha rango n in ogni punto di Ω, ossia se in ogni punto di Ω esiste un sistema di coordinate formato da n delle funzioni $f_1, \dots, f_N$. Se l'immagine inversa di ogni compatto di $\mathbb{C}^N$ è un compatto di Ω, l'applicazione si dice *propria*.

La condizione di regolarità si può naturalmente esprimere anche così. Se $(z_1, \dots, z_n)$ sono coordinate locali, la matrice jacobiana $(\partial f_i/\partial z_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n$, ha rango n in ogni punto della carta.

È chiaro che l'immagine di un'applicazione propria (5.3.1) è chiusa, poiché ogni compatto è mandato in un compatto. Se inoltre l'applicazione è regolare e iniettiva, l'immagine è una sottovarietà analitica di $\mathbb{C}^N$ isomorfa a Ω. Il nostro scopo è costruire un'applicazione siffatta quando Ω è una varietà di Stein.

Lemma 5.3.2. Se K è un compatto di una varietà complessa che soddisfa le condizioni (β) e (γ) della definizione 5.1.3, per qualche N sufficientemente grande si può trovare $f \in A(\Omega)^N$ regolare e iniettiva su K.

Dimostrazione. Per il lemma di Borel–Lebesgue e la condizione (γ) della definizione 5.1.3 possiamo scegliere $(f_1, \dots, f_k) \in A(\Omega)^k$ in modo che in ogni punto di K un sistema di coordinate sia formato da n di queste funzioni. Esiste allora un intorno V della diagonale in $K \times K$ tale che, se $(z', z'') \in V$ e $f_j(z') = f_j(z'')$ per $j = 1, \dots, k$, allora $z' = z''$. Usando (β) possiamo ora scegliere un numero finito di funzioni $f_{k+1}, \dots, f_N$ di $A(\Omega)$ tali che le uguaglianze $f_j(z') = f_j(z'')$, $j = k+1, \dots, N$, per $(z', z'') \in (K \times K) \setminus V$ implichino $z' = z''$. Riunendo le funzioni otteniamo un'applicazione con le proprietà richieste.

Mostreremo ora che non occorre prendere N maggiore di $2n + 1$. Ciò segue da un argomento di Whitney.

Lemma 5.3.3. Se K è un compatto di una varietà complessa Ω di dimensione n e $f = (f_1, \dots, f_N) \in A(\Omega)^N$, allora, per $N > n$, f manda K in un compatto di misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{C}^N$.

Dimostrazione. La compattezza di $f(K)$ segue dalla continuità di f. Per dimostrare che l'immagine ha misura nulla possiamo supporre che K sia contenuto in una carta di coordinate $(z_1, \dots, z_n)$, poiché si può ricoprire K con un numero finito di carte. Poiché $f(z+\zeta) = f(z) + O(|\zeta|)$, la misura dell'immagine di un cubo I di lato ε in $\mathbb{C}^n$ è $O(\varepsilon^{2N}) = m(I)O(\varepsilon^2)$, essendo $N > n$. Ora possiamo ricoprire K con cubi di lato ε di misura totale minore di $m(K) + 1$. Ne segue $m(f(K)) < (m(K) + 1)O(\varepsilon^2)$, dunque $f(K)$ ha misura nulla.

Lemma 5.3.4. Se $f \in A(\Omega)^{N+1}$, $N \geq 2n$, è regolare sul compatto K di Ω, esiste $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ arbitrariamente vicino all'origine tale che

$$(f_1 - a_1 f_{N+1}, \ldots, f_N - a_N f_{N+1}) \in A(\Omega)^N$$

sia regolare su K. Questo vale anzi per ogni $a \in \mathbb{C}^N$ fuori di un insieme di misura nulla.

Dimostrazione. Possiamo supporre K contenuto in una carta con coordinate $(z_1, \ldots, z_n)$. Il vettore $a \in \mathbb{C}^N$ va scelto in modo che, se in qualche punto di K e per qualche $\lambda \in \mathbb{C}^n$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} - a_j \frac{\partial f_{N+1}}{\partial z_k} \right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

ne segua $\lambda = 0$. Ponendo $a_{N+1} = 1$ e $\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \partial f_{N+1}/\partial z_k$, si può riformulare la condizione dicendo che dalle equazioni

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \partial f_j/\partial z_k = \mu a_j, \qquad j = 1, \ldots, N+1,$$

deve seguire $\lambda = 0$. Poiché la matrice $(\partial f_j/\partial z_k)_{j=1,\ldots,N}^{k=1,\ldots,n}$ (con tutte le $N+1$ componenti di f) ha rango n, basta scegliere a in modo che $(a, 1)$ non appartenga all'immagine dell'applicazione

$$\mathbb{C}^n \times K \ni (\lambda, z) \longmapsto \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \partial f_j/\partial z_k \right\}_{j=1}^{N+1} \in \mathbb{C}^{N+1}. \tag{5.3.2}$$

Restringendo dapprima λ alle palle $|\lambda| \leq \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, dal lemma 5.3.3 segue che l'immagine di (5.3.2) ha misura nulla, essendo $N + 1 > 2n$. Poiché le intersezioni con i piani $a_{N+1} =$ costante a quota non nulla sono omotetiche, hanno tutte misura $2N$-dimensionale nulla. Il lemma è dimostrato.

Lemma 5.3.5. Se $f \in A(\Omega)^{N+1}$, $N \geq 2n + 1$, è regolare e iniettiva sul compatto K di Ω, esiste $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ arbitrariamente vicino all'origine tale che

$$(f_1 - a_1 f_{N+1}, \ldots, f_N - a_N f_{N+1}) \in A(\Omega)^N$$

sia regolare e iniettiva su K. Questo vale per ogni $a \in \mathbb{C}^N$ fuori di un insieme di misura nulla.

Dimostrazione. Dal lemma 5.3.4 sappiamo che l'applicazione è regolare su K quando a evita un insieme di misura nulla. Vogliamo scegliere a in modo che, per $z', z'' \in K$, le equazioni

$$f_j(z') - a_j f_{N+1}(z') = f_j(z'') - a_j f_{N+1}(z''), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

implichino $z' = z''$. Posto $a_{N+1} = 1$ e $\lambda = f_{N+1}(z') - f_{N+1}(z'')$, le possiamo scrivere

$$f_j(z') - f_j(z'') = \lambda a_j, \qquad j = 1, \ldots, N+1.$$

Basta quindi dimostrare che si possono scegliere $a_1, \ldots, a_{N+1}$, con $a_{N+1} = 1$, in modo che da queste $N + 1$ equazioni segua $\lambda = 0$ e quindi $z' = z''$, essendo f iniettiva. Ma l'immagine dell'applicazione

$$\mathbb{C} \times K \times K \ni (\mu, z', z'') \longmapsto \mu(f_1(z') - f_1(z''), \ldots, f_{N+1}(z') - f_{N+1}(z'')) \in \mathbb{C}^{N+1}$$

ha misura nulla poiché $N + 1 > 1 + 2n$. Questo dimostra il lemma.

Osservazione. Il significato geometrico delle dimostrazioni dei lemmi 5.3.4 e 5.3.5 è che abbiamo proiettato $\mathbb{C}^{N+1}$ sul sottospazio $\mathbb{C}^N$ definito da $z_{N+1} = 0$, parallelamente a una direzione che non è tangente a $f(K)$ e che, nel secondo caso, non è neppure la direzione di una sua corda.

È ora facile provare l'esistenza di applicazioni regolari e iniettive.

Teorema 5.3.6. Sia Ω una varietà complessa numerabile all'infinito che soddisfi le condizioni (β) e (γ) della definizione 5.1.3. Allora

(a) Se $N \geq 2n$, l'insieme delle $f \in A(\Omega)^N$ che non definiscono un'applicazione regolare di Ω in $\mathbb{C}^N$ è di prima categoria.

(b) Se $N \geq 2n + 1$, l'insieme delle $f \in A(\Omega)^N$ che non definiscono un'applicazione regolare e iniettiva di Ω in $\mathbb{C}^N$ è di prima categoria.

Ricordiamo che in uno spazio metrizzabile completo un insieme si dice di prima categoria se è contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di chiusi con interno vuoto. Un insieme di prima categoria ha interno vuoto, ossia il suo complementare è denso.

Dimostrazione del teorema 5.3.6. Dimostriamo dapprima (a). Poiché Ω è unione numerabile di compatti, basta provare che per ogni compatto K di Ω l'insieme M delle $f \in A(\Omega)^N$ che non sono regolari su K è di prima categoria. Ora M è evidentemente chiuso. Infatti se $f_j \in A(\Omega)^N$ e $f_j \to f$ per $j \to \infty$, e se f_j non è regolare in $z_j \in K$, allora f non è regolare in alcun punto di accumulazione della successione z_j. Basta dunque dimostrare che M ha interno vuoto. Scegliamo, secondo il lemma 5.3.2, funzioni $g_1, \ldots, g_r \in A(\Omega)$ tali che $g = (g_1, \ldots, g_r)$ sia un'applicazione in $\mathbb{C}^r$ regolare su K. Data $f \in A(\Omega)^N$, applichiamo ripetutamente il lemma 5.3.4 all'applicazione (f, g) a valori in $\mathbb{C}^{N+r}$ e concludiamo che

$$f'_j = f_j + \sum_{k=1}^{r} a_{jk} g_k, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

definisce un'applicazione regolare su K per opportuni coefficienti a_{jk} arbitrariamente piccoli. Dunque $f' \notin M$, perciò f non è interno a M. Ciò conclude la dimostrazione di (a). La dimostrazione di (b) è del tutto analoga, salvo che si usa il lemma 5.3.5 al posto del lemma 5.3.4. Possiamo quindi lasciarla al lettore.

Resta da discutere l'esistenza di applicazioni proprie, problema assai più difficile. Osserviamo anzitutto che, se $f : \Omega \to \mathbb{C}^N$ è propria, allora $\{z \in \Omega : |f_j(z)| < R,\ j = 1, \ldots, N\}$ è relativamente compatto in Ω per ogni R e questi poliedri analitici, tutti definiti da non più di N disuguaglianze, esauriscono Ω. Studieremo dunque dapprima i poliedri analitici su una varietà di Stein.

Diremo che un aperto relativamente compatto $P \subset \Omega$ è un *poliedro analitico di ordine* N se per opportune $f_j \in A(\Omega)$, $j = 1, \ldots, N$, l'insieme P è unione di componenti dell'aperto

$$\{z \in \Omega : |f_j(z)| < 1,\ j = 1, \ldots, N\}.$$

Lemma 5.3.7. Siano Ω una varietà di Stein, K un compatto di Ω con $K = \widehat{K}$ e ω un intorno di K. Esiste un poliedro analitico P tale che $K \subset P \Subset \omega$.

Dimostrazione. Possiamo supporre ω relativamente compatto in Ω. Per ogni $z \in \partial\omega$ possiamo trovare $f \in A(\Omega)$ con $|f| < 1$ su K e $|f(z)| > 1$. Per il lemma di Borel–Lebesgue possiamo dunque scegliere $f_1, \ldots, f_N \in A(\Omega)$ in modo che

$$\{z \in \Omega : |f_j(z)| < 1,\ j = 1, \ldots, N\}$$

contenga K e non incontri $\partial\omega$. L'intersezione di questo insieme con ω è quindi un poliedro analitico P con le proprietà richieste.

Il passo successivo consiste nel ridurre l'ordine del poliedro con un accorgimento dovuto a Bishop.

Lemma 5.3.8. Siano K un compatto e P un poliedro analitico di ordine $N+1$ in Ω con $K \subset P$. Se $N \geq 2n$, esiste un poliedro analitico P' di ordine N tale che $K \subset P' \subset P$.

Dimostrazione. Sia P un'unione di componenti dell'insieme

$$\{z \in \Omega : |f_j(z)| < 1,\ j = 1, \ldots, N+1\}.$$

Scegliamo numeri $c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < 1$ positivi, tali che $|f_j(z)| < c_0$ per $j = 1, \ldots, N+1$ e $z \in K$. Possiamo scegliere $f_1', \ldots, f_{N+1}'$ con $f_{N+1}' = f_{N+1}$ in modo che

$$(f_1'/f_{N+1}, \ldots, f_N'/f_{N+1}) \text{ abbia rango } n \text{ su } \{z \in \overline{P} : |f_{N+1}(z)| \geq c_2\},$$

e che f_j' sia tanto vicina a f_j da avere $|f_j'(z)| < c_0$ su K per $j = 1, \ldots, N$, e

$$\omega = \{z \in P : |f_j'(z)| < c_3,\ j = 1, \ldots, N+1\} \Subset P.$$

Questo segue immediatamente dalla dimostrazione del teorema 5.3.6, poiché $N \geq 2n$. Per f_j'/f_{N+1} possiamo prendere f_j/f_{N+1} più una combinazione lineare, a coefficienti piccoli, di opportune funzioni di $A(\Omega)$.

Consideriamo ora l'aperto

$$\Delta_\nu = \{z \in \Omega : |f_j'(z)^\nu - f_{N+1}(z)^\nu| < c_1^\nu,\ j = 1, \ldots, N\},$$

dove ν è un intero positivo da scegliere più avanti. Dimostreremo che l'unione P_ν' delle componenti di Δ_ν che incontrano K ha le proprietà richieste per ν abbastanza grande.

Osserviamo anzitutto che per $z \in K$ si ha

$$|f_j'(z)^\nu - f_{N+1}(z)^\nu| < 2c_0^\nu < c_1^\nu$$

se ν è abbastanza grande. Dunque $K \subset \Delta_\nu$ per ν grande. Se dimostriamo che per ν grande $P_\nu' \subset \omega$, avremo un poliedro analitico di ordine N con tutte le proprietà richieste. Se P_ν' non è contenuto in ω, qualche suo punto z deve appartenere alla frontiera di ω, poiché ogni componente di P_ν' incontra K e dunque contiene punti di ω. Se $|f_{N+1}(z)| < c_2$, allora

$$|f_j'(z)|^\nu < c_2^\nu + c_1^\nu < c_3^\nu \qquad (j \leq N,\ \nu \text{ grande}),$$

contro l'ipotesi $z \in \partial\omega$. Dunque z appartiene al compatto

$$L = \{z \in \partial\omega : |f_{N+1}(z)| \geq c_2\}.$$

Sia L_1 un compatto di L contenuto in una carta di coordinate $z_1, \ldots, z_n$. Se $z \in L_1 \cap \Delta_\nu$, ponendo $F_j = f_j'/f_{N+1}$ abbiamo

$$|F_j(z)^\nu - 1| < (c_1/c_2)^\nu, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Mostreremo che da ciò segue, per ν abbastanza grande,

$$\max_{1 \leq j \leq N} |f_j'(z+\zeta)^\nu - f_{N+1}(z+\zeta)^\nu| > c_1^\nu \quad \text{se } z \in L_1, \quad |\zeta| = 1/\nu^2. \tag{5.3.3}$$

Ne risulterà che nessun $z \in L_1$ può appartenere a una componente di Δ_ν che incontri K, sicché la dimostrazione sarà completa una volta verificata (5.3.3).

Per dimostrare (5.3.3) scriviamo

$$|f_j'(z+\zeta)^\nu - f_{N+1}(z+\zeta)^\nu| = |F_j(z+\zeta)^\nu - 1|\,|f_{N+1}(z+\zeta)|^\nu.$$

Poiché $|f_{N+1}(z+\zeta)| \geq c_2(1+O(\nu^{-2}))$, per ν grande vale $|f_{N+1}(z+\zeta)|^\nu \geq c_2^\nu(1+O(\nu^{-1})) > c_2^\nu/2$. Scriviamo ora

$$F_j(z+\zeta)^\nu - 1 = F_j(z)^\nu\big((F_j(z+\zeta)/F_j(z))^\nu - 1\big) + F_j(z)^\nu - 1.$$

Lo sviluppo di Taylor dà

$$F_j(z+\zeta)/F_j(z) = 1 + l_j(\zeta) + O(\nu^{-4}),$$

dove le forme lineari l_j non si annullano tutte simultaneamente su un vettore non nullo, perché le funzioni F_j, $j = 1, \ldots, N$, hanno rango n su L_1. Quindi $\max_{1\leq j\leq N} |l_j(\zeta)| \geq c|\zeta|$ per qualche $c > 0$. Si ha $(F_j(z+\zeta)/F_j(z))^\nu = 1 + \nu l_j(\zeta) + O(\nu^{-2})$. Riunendo le stime precedenti otteniamo quindi, per ν abbastanza grande,

$$\max_{1\leq j\leq N} |f_j'(z+\zeta)^\nu - f_{N+1}(z+\zeta)^\nu| > c_2^\nu 2^{-2}(c/\nu + O(\nu^{-2})) > c_1^\nu, \qquad |\zeta| = 1/\nu^2.$$

Le stime sono uniformi rispetto a $z \in L_1$. Il lemma è dimostrato.

Possiamo ora dimostrare il risultato principale di questo paragrafo.

Teorema 5.3.9. Se Ω è una varietà di Stein di dimensione n, esiste $f \in A(\Omega)^{2n+1}$ che definisce un'applicazione iniettiva, regolare e propria di Ω in $\mathbb{C}^{2n+1}$.

Dimostrazione. Per il teorema 5.3.6 esiste un'applicazione regolare e iniettiva g in $\mathbb{C}^{2n+1}$. Se riusciamo a costruire $f \in A(\Omega)^{2n+1}$ in modo che per ogni k

$$\{z \in \Omega : |f(z)| \leq k + |g(z)|\} \Subset \Omega, \tag{5.3.4}$$

il teorema ne seguirà. (Abbiamo scritto $|f(z)|$ per $\max_j |f_j(z)|$ e definito $|g(z)|$ analogamente.) Infatti, applicando i lemmi 5.3.4 e 5.3.5 all'applicazione regolare e iniettiva (f, g), si vede che esistono matrici (a_{jk}) a coefficienti costanti arbitrariamente piccoli, tali che

$$f_j'(z) = f_j(z) + \sum_{k=1}^{2n+1} a_{jk} g_k, \qquad j = 1, \ldots, 2n+1,$$

definisca un'applicazione f' regolare e iniettiva in $\mathbb{C}^{2n+1}$. Se $\sum_k |a_{jk}| \leq 1$, abbiamo

$$\{z \in \Omega : |f'(z)| \leq k\} \subset \{z \in \Omega : |f(z)| \leq k + |g(z)|\} \Subset \Omega,$$

sicché f' sarà anche propria.

Per costruire f osserviamo anzitutto che dalla condizione (α) della definizione 5.1.3 segue l'esistenza di una successione di compatti K_j di Ω tali che K_j sia interno a K_{j+1} per ogni j, $\widehat{K_j} = K_j$ e $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$. Per i lemmi 5.3.7 e 5.3.8 possiamo scegliere un poliedro analitico P_j di ordine $2n$ tale che $K_j \subset P_j \subset K_{j+1}$. Poniamo

$$M_j = \sup_{P_j} |g|.$$

La condizione (5.3.4) è allora conseguenza della seguente:

$$|f| \geq k + M_{k+1} \quad \text{in } P_{k+1} \setminus P_k \quad \text{per ogni } k. \tag{5.3.5}$$

Infatti (5.3.5) implica $|f| \geq k+|g|$ in $P_{k+1} \setminus P_k$, e quindi $|f| \geq k+|g|$ in $\bigcup_{j=k}^{\infty}(P_{j+1} \setminus P_j) = \Omega \setminus P_k$.

Costruiamo dapprima $f_1, \ldots, f_{2n} \in A(\Omega)$ tali che

$$\max_{1\leq j\leq 2n} |f_j(z)| > k + M_{k+1} \quad \text{su } \partial P_k \quad \text{per ogni } k. \tag{5.3.6}$$

Per definizione di poliedro analitico di ordine $2n$ si possono trovare $(h_1^k, \ldots, h_{2n}^k) \in A(\Omega)^{2n}$ tali che $\max_j |h_j^k| < 1$ su $\overline{P_{k-1}}$ e $\max_j |h_j^k| = 1$ su ∂P_k. Ponendo $f_j^k = (a_k h_j^k)^{m_k}$, con a_k poco maggiore di 1 e m_k intero grande, possiamo scegliere successivamente a_k e m_k in modo che per ogni k

$$\max_{1\leq j\leq 2n} |f_j^k| \leq 2^{-k} \quad \text{in } P_{k-1},$$

$$\max_{1\leq j\leq 2n} |f_j^k| > M_{k+1} + k + 1 + \max_{1\leq j\leq 2n} \left|\sum_{l=1}^{k-1} f_j^l\right| \quad \text{su } \partial P_k.$$

Queste condizioni implicano che le somme

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_j^k, \qquad j = 1, \ldots, 2n,$$

convergono a funzioni di $A(\Omega)$, e dalla costruzione segue subito (5.3.6). Poniamo ora

$$G_k = \{z \in P_{k+1} \setminus P_k : \max_{1\leq j\leq 2n} |f_j(z)| \leq k + M_{k+1}\},$$
$$H_k = \{z \in P_k : \max_{1\leq j\leq 2n} |f_j(z)| \leq k + M_{k+1}\}.$$

Da (5.3.6) segue che questi insiemi disgiunti sono compatti. L'inviluppo di $G_k \cup H_k$ rispetto ad $A(\Omega)$ è contenuto in K_{k+2} e si può evidentemente scrivere $G_k \cup H_k \cup H_k'$, con $H_k' \subset \Omega \setminus P_{k+1}$. (In realtà H_k' è vuoto, ma questo non ha importanza per noi.) Approssimando, mediante il teorema 5.2.8, con funzioni di $A(\Omega)$ una funzione nulla su $H_k \cup H_k'$ e uguale a una costante sufficientemente grande su G_k, otteniamo successivamente funzioni $h_k \in A(\Omega)$ tali che

$$|h_k| < 2^{-k} \text{ in } H_k, \qquad |h_k| \geq 1 + k + M_{k+1} + \left|\sum_{j<k} h_j\right| \text{ in } G_k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Poiché $G_k \subset H_{k+1} \subset H_{k+2} \subset \cdots$, la funzione analitica f_{2n+1} definita da

$$f_{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k$$

soddisfa la disuguaglianza $|f_{2n+1}(z)| \geq k + M_{k+1}$ per $z \in G_k$. Vale quindi (5.3.5), il che conclude la dimostrazione.

5.4. Inviluppi di olomorfia

Nel paragrafo 2.5 abbiamo dimostrato che, se Ω è un dominio di Reinhardt connesso contenente 0, oppure un tubo connesso, esiste un dominio di olomorfia $\widetilde{\Omega}$ dello stesso tipo al quale si possono prolungare tutte le funzioni analitiche in Ω. Esamineremo ora in generale risultati di questo genere. Non possiamo limitare lo studio agli aperti di $\mathbb{C}^n$, e le varietà di Stein prendono naturalmente il posto dei domini di olomorfia. In tutto questo paragrafo supporremo le varietà connesse e numerabili all'infinito, senza ripetere esplicitamente queste ipotesi in ogni enunciato.

Diremo che una varietà $\widetilde{\Omega}$ è un *prolungamento olomorfo* di una varietà Ω se

(i) Ω è un aperto di $\widetilde{\Omega}$.

(ii) La struttura analitica di Ω è indotta da quella di $\widetilde{\Omega}$.

(iii) Per ogni $u \in A(\Omega)$ esiste $\tilde{u} \in A(\widetilde{\Omega})$ tale che $u = \tilde{u}$ in Ω. (Poiché $\widetilde{\Omega}$ è connessa, u determina univocamente $\tilde{u}$.)

Ci interessa trovare una varietà di Stein $\widetilde{\Omega}$ che sia un prolungamento olomorfo di una data varietà Ω. È chiaro che Ω deve allora soddisfare le condizioni (β) e (γ) della definizione 5.1.3.

Lemma 5.4.1. Se $\widetilde{\Omega}$ è un prolungamento olomorfo di Ω, per ogni compatto $\widetilde{K}$ di $\widetilde{\Omega}$ esiste un compatto K di Ω il cui inviluppo rispetto ad $A(\widetilde{\Omega})$ contiene $\widetilde{K}$.

Dimostrazione. $A(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet per la topologia definita da tutte le seminorme della forma

$$u \longmapsto \sup_K |u|, \qquad u \in A(\Omega),$$

dove K è un compatto di Ω. Infatti la topologia è definita da una famiglia numerabile di seminorme, essendo Ω numerabile all'infinito, e la completezza segue dal corollario 2.2.4. Analogamente $A(\widetilde{\Omega})$ è uno spazio di Fréchet. Ora, dire che $\widetilde{\Omega}$ è un prolungamento olomorfo di Ω significa che la restrizione

$$A(\widetilde{\Omega}) \longrightarrow A(\Omega)$$

è suriettiva. Poiché è continua e iniettiva, per il teorema di Banach anche l'inversa è continua. Dunque, per ogni compatto $\widetilde{K} \subset \widetilde{\Omega}$, esistono un compatto $K \subset \Omega$ e una costante C tali che

$$\sup_{\widetilde{K}} |\tilde{u}| \leq C \sup_K |\tilde{u}|, \qquad \tilde{u} \in A(\widetilde{\Omega}).$$

Sostituendo $\tilde{u}$ con $\tilde{u}^k$, estraendo le radici k-esime e facendo tendere k a ∞, concludiamo che si può prendere $C = 1$. Il lemma è dimostrato.

Teorema 5.4.2. Se Ω è una varietà di Stein e $\widetilde{\Omega}$ un prolungamento olomorfo di Ω, allora $\Omega = \widetilde{\Omega}$.

Dimostrazione. Se $\Omega \neq \widetilde{\Omega}$, esiste in $\widetilde{\Omega}$ un punto di frontiera z di Ω, perché altrimenti $\widetilde{\Omega} \setminus \Omega$ sarebbe aperto e $\widetilde{\Omega}$ sarebbe sconnessa. Sia $\widetilde{K}$ un intorno compatto di z in $\widetilde{\Omega}$. Per il lemma 5.4.1, $\widetilde{K} \cap \Omega$ è allora contenuto nell'inviluppo, rispetto ad $A(\Omega)$, di un compatto di Ω. Ciò è impossibile perché Ω è di Stein.

Le varietà di Stein sono massimali anche in un altro senso. Se esiste un prolungamento olomorfo che è una varietà di Stein, esso contiene tutti i prolungamenti olomorfi naturali, come precisa il teorema seguente.

Teorema 5.4.3. Siano Ω_1 e Ω_2 prolungamenti olomorfi di Ω. Supponiamo che Ω_1 sia di Stein e che le funzioni di $A(\Omega_2)$ forniscano coordinate locali in ogni punto di Ω_2 e ne separino i punti. Esiste un isomorfismo analitico φ di Ω_2 sulla sua immagine in Ω_1, uguale all'identità su Ω. Se Ω_2 è di Stein, l'isomorfismo è suriettivo.

Dunque, a meno di isomorfismi, esiste al più un prolungamento olomorfo di Ω che sia una varietà di Stein. Quando esiste, lo chiamiamo *inviluppo di olomorfia* di Ω.

Dimostrazione del teorema 5.4.3. Per $u \in A(\Omega)$ indichiamo con $E_j u$ il prolungamento analitico di u a Ω_j, $j = 1, 2$. Per $z_2 \in \Omega_2$ e $z_1 \in \Omega_1$ poniamo $\varphi(z_2) = z_1$ se

$$(E_1 u)(z_1) = (E_2 u)(z_2) \quad \text{per ogni } u \in A(\Omega). \tag{5.4.1}$$

Poiché le funzioni analitiche separano i punti sia in Ω_1 sia in Ω_2, si definisce così una biiezione fra un sottoinsieme di Ω_2 e uno di Ω_1. L'applicazione φ è continua e il suo dominio è chiuso. Infatti supponiamo che φ sia definita nei punti z_2^ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, e che $z_2^\nu \to z_2$ in Ω_2. Questi punti, insieme al limite, formano un compatto $K_2 \subset \Omega_2$. Per il lemma 5.4.1 esiste dunque un compatto $K \subset \Omega$ il cui inviluppo rispetto ad $A(\Omega_2)$ contiene K_2. Per (5.4.1) si ha allora $\varphi(z_2^\nu) \in \widehat{K}_{\Omega_1}$ per ogni ν e, poiché Ω_1 è di Stein, questo insieme è compatto. La successione $\varphi(z_2^\nu)$ ammette quindi un punto di accumulazione z_1 e, passando al limite lungo la sottosuccessione corrispondente,

$$(E_1 u)(z_1) = \lim_{\nu\to\infty} (E_1 u)(\varphi(z_2^\nu)) = \lim_{\nu\to\infty} (E_2 u)(z_2^\nu) = (E_2 u)(z_2), \qquad u \in A(\Omega).$$

Dunque $z_1 = \varphi(z_2)$, il punto di accumulazione è unico e la successione $\varphi(z_2^\nu)$ converge.

Osserviamo ora che, dati $z_1 \in \Omega_1$ e $z_2 \in \Omega_2$, si possono trovare $f^1, \ldots, f^n \in A(\Omega)$ tali che $E_j f^1, \ldots, E_j f^n$ formino un sistema di coordinate locali in z_j per $j = 1, 2$. Fissato infatti $j = 1$ oppure 2, possiamo scegliere $f_j^1, \ldots, f_j^n \in A(\Omega)$ con questa proprietà in z_j. Ponendo $f^k = a_1 f_1^k + a_2 f_2^k$, le $E_j(f^k)$, $k = 1, \ldots, n$, formano un sistema di coordinate in z_j salvo quando (a_1, a_2) soddisfa un'equazione algebrica, quella che esprime l'annullarsi dello jacobiano rispetto a coordinate locali. Tale equazione non è identicamente soddisfatta. Possiamo quindi scegliere a_1, a_2 in modo da ottenere coordinate in entrambi i punti.

Sia ora M l'insieme degli z_2 nel dominio di φ tali che, per ogni $u \in A(\Omega)$, tutte le derivate di $E_j u$ in z_j ($z_1 = \varphi(z_2)$) rispetto a $E_j f^1, \ldots, E_j f^n$ siano uguali per $j = 1, 2$, scegliendo le f^k come sopra. È evidente che M è chiuso. Ma M è anche aperto. Infatti, se $z_2 \in M$, le equazioni $(E_1 f^k)(\zeta_1) = (E_2 f^k)(\zeta_2)$, $k = 1, \ldots, n$, stabiliscono un isomorfismo analitico fra intorni connessi di z_2 e di $z_1 = \varphi(z_2)$. Considerando gli sviluppi in serie di potenze nelle coordinate locali $E_j f^k$, $k = 1, \ldots, n$, vediamo che tali equazioni implicano (5.4.1) in ζ_1 e ζ_2. Dunque $M = \Omega_2$ e φ è un isomorfismo analitico di Ω_2 sulla sua immagine in Ω_1. Se Ω_2 è di Stein, anche $\varphi(\Omega_2)$ lo è e dal teorema 5.4.2 segue allora $\varphi(\Omega_2) = \Omega_1$.

Diamo ora una condizione sufficiente per l'esistenza dell'inviluppo di olomorfia.

Definizione 5.4.4. Una varietà complessa Ω di dimensione n si chiama *dominio di Riemann* se le funzioni analitiche separano i punti di Ω ed esiste un'applicazione analitica

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

regolare ovunque, ossia localmente un isomorfismo.

Si può naturalmente immaginare un dominio di Riemann come disteso sopra $\mathbb{C}^n$. Un modo equivalente di formulare l'ultima ipotesi è richiedere che esistano n funzioni (n è la dimensione) che costituiscano un sistema di coordinate locali in ogni punto. Il risultato principale del paragrafo è il seguente teorema di Oka.

Teorema 5.4.5. Ogni dominio di Riemann Ω ha un inviluppo di olomorfia $\widetilde{\Omega}$, anch'esso dominio di Riemann.

Prolungheremo dapprima Ω quanto più possibile con il metodo classico degli sviluppi in serie di potenze delle funzioni di $A(\Omega)$. Useremo poi i risultati del paragrafo 5.2 per dimostrare che la varietà così ottenuta è di Stein.

Sia $z \in \Omega$. Per ipotesi la restrizione di φ a un opportuno intorno di z è un isomorfismo analitico su un intorno di $\varphi(z)$. Sia π la sua inversa. Per $u \in A(\Omega)$ definiamo le derivate $\partial^\alpha u(z)$ ponendo

$$\partial^\alpha u(z) = \partial^\alpha (u(\pi(\zeta)))|_{\zeta=\varphi(z)}\,.$$

È chiaro che $\partial^\alpha u \in A(\Omega)$. Fissato z_0, formiamo la serie di potenze

$$\sum_\alpha (\zeta - \varphi(z_0))^\alpha \partial^\alpha u(z_0)/\alpha!. \tag{5.4.2}$$

Per $\zeta = \varphi(z)$, con z abbastanza vicino a z_0, la serie converge e ha somma $u(z)$. Sia r_{z_0} l'estremo superiore degli r tali che la serie converga in $\{\varphi(z_0)\} + rD$ per ogni $u \in A(\Omega)$, dove

$$D = \{z : |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Poniamo $D_{z_0} = \{\varphi(z_0)\} + r_{z_0} D$. Per ogni funzione u analitica in Ω la serie (5.4.2) definisce una funzione analitica u_{z_0} in D_{z_0} e per ogni α vale

$$(\partial^\alpha u)_{z_0} = \partial^\alpha (u_{z_0}). \tag{5.4.3}$$

Costruiamo ora un dominio di Riemann Ω_{z_0} a partire dall'unione disgiunta $\Omega \sqcup D_{z_0}$. Identifichiamo $z \in \Omega$ e $\zeta \in D_{z_0}$ se $u(z) = u_{z_0}(\zeta)$ per ogni $u \in A(\Omega)$. Prendendo per u una coordinata φ_j di φ si ottiene $\varphi_j(z) = \zeta_j$, ossia $\varphi(z) = \zeta$. L'applicazione φ si estende quindi a Ω_{z_0} ponendola uguale all'identità su D_{z_0}. Inoltre, se $z \in \Omega$ è identificato con $\zeta \in D_{z_0}$, per ogni w vicino a z si ha $u(w) = u_{z_0}(\varphi(w))$. Infatti

$$\begin{aligned} u(w) &= \sum_\alpha (\varphi(w) - \varphi(z))^\alpha \partial^\alpha u(z)/\alpha! \\ &= \sum_\alpha (\varphi(w) - \zeta)^\alpha \partial^\alpha u_{z_0}(\zeta)/\alpha! = u_{z_0}(\varphi(w)), \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue da (5.4.3) e dalla definizione della relazione di equivalenza. È ora chiaro che Ω_{z_0} è uno spazio di Hausdorff per la topologia più fine che rende continue le applicazioni naturali di Ω e D_{z_0} in Ω_{z_0}, e il prolungamento di φ a Ω_{z_0} ne fa un dominio di Riemann. Le applicazioni naturali $\Omega \to \Omega_{z_0}$ e $D_{z_0} \to \Omega_{z_0}$ sono isomorfismi analitici sulle rispettive immagini. Identificando Ω con la sua immagine, Ω_{z_0} è dunque un prolungamento olomorfo di Ω.

Prendiamo ora un sottoinsieme numerabile denso $z_0, z_1, \dots$ di Ω e formiamo successivamente $\Omega_{z_0}, (\Omega_{z_0})_{z_1}, \dots$. Queste varietà crescono fino a dare un dominio di Riemann Ω' che è un prolungamento olomorfo di Ω. Applichiamo a Ω' lo stesso metodo ottenendo un dominio di Riemann $\Omega'' = (\Omega')'$ e così via. Sia $\widetilde{\Omega}$ il limite di questi domini. È ancora un dominio di Riemann che prolunga olomorficamente Ω, ma ora $\widetilde{\Omega}' = \widetilde{\Omega}$. Infatti se, per qualche $\tilde{z} \in \widetilde{\Omega}$, la serie

$$\sum_\alpha (\zeta - \tilde{\varphi}(\tilde{z}))^\alpha \partial^\alpha \tilde{u}(\tilde{z})/\alpha!, \tag{5.4.4}$$

dove $\tilde{u}$ è il prolungamento analitico di $u \in A(\Omega)$, converge nel polidisco $D_{\tilde{z}} = \{\tilde{\varphi}(\tilde{z})\} + rD$ per ogni $u \in A(\Omega)$, esiste un intorno aperto $\widetilde{D}_{\tilde{z}}$ di $\tilde{z}$ che $\tilde{\varphi}$ manda omeomorficamente su $D_{\tilde{z}}$. Infatti, se $\tilde{z} \in \Omega^{(n)}$, per costruzione possiamo trovare $\widetilde{D}_{\tilde{z}} \subset \Omega^{(n+1)}$.

Per ogni $\tilde{z} \in \widetilde{\Omega}$ denotiamo con $d(\tilde{z})$ la distanza di $\tilde{z}$ dalla frontiera in $\widetilde{\Omega}$, ossia l'estremo superiore degli r per i quali esiste un intorno $\widetilde{D}$ di $\tilde{z}$ che $\tilde{\varphi}$ manda omeomorficamente su $\{\tilde{\varphi}(\tilde{z})\} + rD$. Per quanto appena visto, tale distanza è il raggio del più grande polidisco in cui (5.4.4) converge per ogni $u \in A(\Omega)$. Possiamo quindi ripetere le dimostrazioni dei teoremi 2.5.4 e 2.6.5 per provare che $-\log d$ è plurisubarmonica in $\widetilde{\Omega}$. (d è finita e continua ovunque salvo nel caso $\widetilde{\Omega} = \mathbb{C}^n$.) Il teorema 5.4.5 è quindi conseguenza del seguente risultato.

Teorema 5.4.6. Sia Ω un dominio di Riemann nel quale la distanza dalla frontiera d sia finita e $-\log d$ sia plurisubarmonica. Allora Ω è una varietà di Stein.

Si osservi lo stretto legame con il teorema 5.2.10. Tuttavia $-\log d$ può non essere liscia e $\{z : -\log d(z) < c\}$ può non essere compatto. Combinando il teorema 5.1.6 con la dimostrazione del teorema 2.6.7 si vede anche che $-\log d$ deve essere plurisubarmonica se Ω è una varietà di Stein.

Dimostrazione del teorema 5.4.6. Poniamo $\Omega_c = \{z \in \Omega : d(z) > c\}$. Affermiamo che per $c > 0$ gli insiemi Ω_c sono varietà di Stein e hanno la proprietà di Runge l'uno rispetto all'altro. (Cfr. il teorema 4.3.3, che in virtù del corollario 5.2.9 si estende evidentemente alle varietà di Stein.) A tal fine dobbiamo mostrare che, se $0 < b < c$ e K è un compatto di Ω_c, allora $\widehat{K}_{\Omega_b}$ è un compatto di Ω_c e quindi, per il teorema 4.3.3, è indipendente da b.

Per $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, K è contenuto in una componente di Ω_ε che indichiamo con Ω'_ε. Fissiamo $z_0 \in \Omega'_\varepsilon$ e indichiamo con $\rho(z)$ la distanza in Ω'_ε da z_0 a z rispetto all'elemento di lunghezza d'arco $|d\varphi(z)|$. L'insieme $\{z \in \Omega'_\varepsilon : \rho(z) < C\}$ è relativamente compatto in Ω per ogni C. Infatti, se questo vale per un valore di C, dal lemma di Borel–Lebesgue segue che vale anche sostituendo C con $C + \varepsilon/2$. Scegliamo $\chi \in C_0^\infty(D)$ con $\chi \geq 0$ e $\int \chi \, d\lambda = 1$ e poniamo

$$\rho_\delta(z) = \int \rho(\pi(\varphi(z) - \delta\zeta))\chi(\zeta)\, d\lambda(\zeta),$$

dove π è l'inversa analitica di φ definita in $\{\varphi(z)\} + d(z)D$ che manda $\varphi(z)$ in z. È chiaro che $\rho_\delta \in C^\infty(\Omega'_{2\varepsilon})$ se $\delta < \varepsilon$. Posto $\rho \circ \pi = f$, funzione lipschitziana di costante 1, per w in un intorno di $\varphi(z)$ abbiamo

$$\rho_\delta(\pi w) = \int f(w - \delta\zeta)\chi(\zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

Se D indica una derivata del primo ordine, derivando sotto il segno di integrale e cambiando variabili otteniamo

$$D\rho_\delta(\pi w) = \int (Df)(\zeta)\chi((w - \zeta)/\delta)\, d\lambda(\zeta)/\delta^{2n}.$$

Poiché $|Df| \leq 1$, segue che $|D\rho_\delta(\pi w)| \leq 1$ e che ogni derivata di $D\rho_\delta$ è limitata da una costante dipendente soltanto da δ. È quindi possibile scegliere una costante C_δ tale che

$$\rho'_\delta(z) = \rho_\delta(z) + C_\delta \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j(z)|^2$$

sia strettamente plurisubarmonica in $\Omega_{2\varepsilon}$. Poiché $\rho - \rho_\delta \leq \delta$, l'insieme $\{z \in \Omega'_{2\varepsilon} : \rho'_\delta(z) < C\}$ è ancora relativamente compatto in Ω per ogni C.

Sia ora p_δ la regolarizzazione di $-\log d$, definita allo stesso modo in Ω_δ. Dal teorema 2.6.3 segue che p_δ è plurisubarmonica. Abbiamo

$$-\log d \leq p_\delta \leq -\log(d - \delta).$$

Poniamo

$$O = \{z \in \Omega_\delta : p_\delta(z) < -\log(2\varepsilon)\}.$$

Allora O contiene $\Omega_{3\varepsilon}$ poiché $0 < \delta < \varepsilon$, ed è contenuto in $\Omega_{2\varepsilon}$. Siano $3\varepsilon < \varepsilon_0$ e $3\varepsilon < b$, e sia O' la componente di O che contiene K. Poniamo in O'

$$q(z) = -\frac{p_\delta(z) + \delta + \log c}{p_\delta(z) + \log(2\varepsilon)}.$$

Per δ abbastanza piccolo si ha $p_\delta(z) \le -\delta - \log c$ su K, poiché $K \subset \Omega_c$. Dunque $q \le 0$ su K, mentre $q(z) \to \infty$ quando z si avvicina a un punto di frontiera di O'. Essendo una funzione convessa crescente di p_δ, la funzione q è plurisubarmonica.

Consideriamo ora la funzione

$$\psi(z) = \rho'_\delta(z) + \lambda q(z),$$

dove λ è un parametro positivo. Se C è il massimo di ρ'_δ su K, si ha $\psi(z) \le C$ su K e $\{z \in O' : \psi(z) < \gamma\} \Subset O'$ per ogni γ. Infatti su questo insieme $\rho'_\delta < \gamma + 1$, perciò esso è relativamente compatto in Ω, e poiché $q < \gamma/\lambda$ la sua chiusura non contiene punti di frontiera di O'. Per il teorema 5.2.10, O' è dunque una varietà di Stein e $\psi(z) \le C$ su $\widehat{K}_{O'}$. Poiché ciò vale per ogni $\lambda > 0$, si ha $q \le 0$ su $\widehat{K}_{O'}$, e dunque $p_\delta(z) < -\log c$ su $\widehat{K}_{O'}$. Ne segue $-\log d(z) < -\log c$ su $\widehat{K}_{O'}$, sicché $\widehat{\widehat{K}_{O'}}$ è un compatto di Ω_c. Poiché O' contiene le componenti di Ω_b che incontrano K, anche $\widehat{K}_{\Omega_b}$ è un compatto di Ω_c. Dunque tutti gli Ω_c sono varietà di Stein e godono della proprietà relativa di Runge.

Sia ora $K_1, K_2, \ldots$ una successione crescente di compatti di Ω tale che ogni compatto di Ω sia contenuto in uno di essi. Sia $K_j \subset \Omega_{b_j}$ e supponiamo che K_j sia $A(\Omega_{b_j})$-convesso, dove b_j è una successione di numeri positivi che tende a 0. Ogni funzione analitica in un intorno di K_j si può allora approssimare uniformemente su K_j mediante una funzione analitica in $\Omega_{b_{j+1}}$. Questa funzione si può a sua volta approssimare arbitrariamente bene su K_{j+1} con funzioni analitiche in $\Omega_{b_{j+2}}$, e così via. Ogni funzione analitica in un intorno di K_j si può dunque approssimare uniformemente su K_j mediante funzioni analitiche in Ω. Ne segue che l'inviluppo di ogni K_j rispetto ad $A(\Omega)$ coincide con K_j. Pertanto Ω è una varietà di Stein.

5.5. I problemi di Cousin su una varietà di Stein

I risultati del paragrafo 5.2 permettono di estendere facilmente alle varietà di Stein i teoremi di Mittag–Leffler e di Weierstrass. Preferiamo formulare i risultati in modo analogo al teorema 1.4.5.

Teorema 5.5.1. Sia Ω una varietà di Stein e siano Ω_j aperti di Ω tali che $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$. Se $g_{jk} \in A(\Omega_j \cap \Omega_k)$, $j, k = 1, 2, \ldots$, e

$$g_{jk} = -g_{kj}, \qquad g_{ij} + g_{jk} + g_{ki} = 0 \quad \text{in } \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \quad \text{per ogni } i, j, k, \tag{5.5.1}$$

si possono trovare funzioni $g_j \in A(\Omega_j)$ tali che

$$g_{jk} = g_k - g_j \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \quad \text{per ogni } j, k. \tag{5.5.2}$$

In altre parole, il primo problema di Cousin ammette soluzione.

Dimostrazione. Basta ripetere la dimostrazione del teorema 1.4.5. Scegliamo dunque una partizione dell'unità e definiamo le funzioni h_k come in quella dimostrazione. Allora $h_k \in C^\infty(\Omega_k)$ e

$$h_k - h_j = g_{jk} \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k.$$

Ne segue che $\bar\partial h_k = \bar\partial h_j$ in $\Omega_j \cap \Omega_k$, perciò esiste una forma $\psi \in C^\infty_{(0,1)}(\Omega)$ tale che $\psi = \bar\partial h_k$ in Ω_k per ogni k. Per il corollario 5.2.6 l'equazione $\bar\partial u = -\psi$ ammette una soluzione $u \in C^\infty(\Omega)$ e le funzioni $g_k = h_k + u$ hanno allora tutte le proprietà richieste.

Consideriamo ora il secondo problema di Cousin, analogo al teorema di Weierstrass. Indichiamo con $A^*(\Omega)$ l'insieme delle funzioni di $A(\Omega)$ ovunque diverse da 0, i cui reciproci appartengono dunque anch'essi ad $A(\Omega)$.

Teorema 5.5.2. Sia Ω una varietà di Stein e siano Ω_j aperti di Ω tali che $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$. Se $g_{jk} \in A^*(\Omega_j \cap \Omega_k)$, $j, k = 1, 2, \ldots$, e

$$g_{jk} g_{kj} = 1, \qquad g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1 \quad \text{in } \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k \quad \text{per ogni } i, j, k, \tag{5.5.3}$$

si possono trovare $g_j \in A^*(\Omega_j)$ tali che

$$g_{jk} = g_k g_j^{-1} \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \quad \text{per ogni } j, k, \tag{5.5.4}$$

purché esistano funzioni continue $g_k \in C(\Omega_k)$ mai nulle che soddisfino (5.5.4).

Dimostrazione. Siano $c_j \in C(\Omega_j)$ funzioni mai nulle tali che

$$g_{jk} = c_k c_j^{-1}.$$

Supponiamo dapprima che tutti gli aperti Ω_j siano semplicemente connessi. Possiamo allora scrivere $c_j = e^{b_j}$, con $b_j \in C(\Omega_j)$. Se poniamo $h_{jk} = b_k - b_j$, otteniamo $g_{jk} = \exp h_{jk}$, sicché h_{jk} è una determinazione continua univoca del logaritmo di g_{jk} ed è dunque analitica in $\Omega_j \cap \Omega_k$. Abbiamo

$$h_{ij} = -h_{ji}, \qquad h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0 \quad \text{in } \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k. \tag{5.5.5}$$

Per il teorema 5.5.1 esistono funzioni $h_k \in A(\Omega_k)$ tali che

$$h_{jk} = h_k - h_j \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k.$$

Ponendo $g_k = \exp h_k \in A^*(\Omega_k)$, abbiamo così risolto il secondo problema di Cousin (5.5.4).

Abbandoniamo ora l'ipotesi che gli Ω_j siano semplicemente connessi. Sia $\{\Omega'_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ un altro ricoprimento di Ω, costituito da aperti semplicemente connessi e tale che per ogni ν esista un intero positivo i_ν con $\Omega'_\nu \subset \Omega_{i_\nu}$. (Il ricoprimento $\{\Omega'_\nu\}$ è cioè un raffinamento di $\{\Omega_j\}$.) Poniamo

$$g'_{\nu\mu} = g_{i_\nu i_\mu} \quad \text{in } \Omega'_\nu \cap \Omega'_\mu.$$

Allora $g'_{\nu\mu}$ soddisfa (5.5.3). Se (5.5.4) vale per funzioni continue mai nulle c_j, si ha $g'_{\nu\mu} = c'_\mu (c'_\nu)^{-1}$ con $c'_\nu = c_{i_\nu}$ sulle rispettive carte. Per la prima parte della dimostrazione esistono quindi $g'_\mu \in A^*(\Omega'_\mu)$ tali che per ogni ν, μ

$$g'_{\nu\mu} = g'_\mu (g'_\nu)^{-1} \quad \text{in } \Omega'_\nu \cap \Omega'_\mu.$$

In particolare in $\Omega_i \cap \Omega'_\nu \cap \Omega'_\mu \subset \Omega_i \cap \Omega_{i_\nu} \cap \Omega_{i_\mu}$ si ha

$$g'_\mu (g'_\nu)^{-1} g_{i_\mu i} g_{i i_\nu} = 1,$$

dove abbiamo usato (5.5.3). Ne risulta $g'_\mu g_{i_\mu i} = g'_\nu g_{i_\nu i}$ in $\Omega'_\nu \cap \Omega'_\mu \cap \Omega_i$, e quindi esiste un unico elemento $g_i \in A^*(\Omega_i)$ tale che $g_i = g'_\nu g_{i_\nu i}$ in $\Omega_i \cap \Omega'_\nu$ per ogni ν. Otteniamo ora

$$g_k g_j^{-1} = g'_\nu g_{i_\nu k} (g'_\nu g_{i_\nu j})^{-1} = g_{i_\nu k} g_{j i_\nu} = g_{jk}$$

in $\Omega'_\nu \cap \Omega_j \cap \Omega_k$ per ogni ν, j, k. Questo dimostra (5.5.4).

Il teorema 5.5.2 è un caso del principio di Oka: su una varietà di Stein ciò che si può fare in modo continuo si può «di solito» fare in modo analitico. Nel paragrafo 7.4 renderemo esplicita la restrizione topologica del teorema 5.5.2[4] interpretandola come l'annullarsi di una certa classe di coomologia. In particolare, questa condizione è sempre soddisfatta se e solo se $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$. Per ottenere un problema di Cousin privo di soluzione basta dunque scegliere una varietà di Stein sulla quale questo gruppo non sia nullo. Un esempio è stato dato dopo il teorema 4.2.7. Per una discussione diretta di un problema di Cousin insolubile si veda Oka [3].

È naturale chiedersi se le difficoltà topologiche incontrate nel teorema 5.5.2 scompaiano quando si enuncia il secondo problema di Cousin nella forma seguente (cfr. il teorema 1.4.3′).

Dati un ricoprimento aperto $\{\Omega_i\}$ *di* Ω *e funzioni* $f_i \in A(\Omega_i)$ *tali che* $f_j/f_k \in A^*(\Omega_j \cap \Omega_k)$ *per ogni* j, k, *trovare* $f \in A(\Omega)$ *tale che* $f/f_j \in A^*(\Omega_j)$ *per ogni* j.

Ponendo $g_{jk} = f_j/f_k$ in $\Omega_j \cap \Omega_k$ e $g_j = f/f_j$ ci si riconduce al problema di Cousin studiato nel teorema 5.5.2. (Si veda anche la dimostrazione del teorema 1.4.3′ mediante il teorema 1.4.5.) Non è tuttavia evidente a priori che, date g_{jk} arbitrarie soddisfacenti (5.5.3), esistano $f_j \in A(\Omega_j)$ tali che $g_{jk} = f_j/f_k$. Il problema di Cousin appena enunciato potrebbe dunque essere più particolare di quello considerato nel teorema 5.5.2. I due enunciati sono però equivalenti, in virtù del teorema seguente.

Teorema 5.5.3. Sia Ω_j, $j = 1, 2, \ldots$, un ricoprimento aperto di una varietà di Stein Ω e siano $g_{jk} \in A^*(\Omega_j \cap \Omega_k)$ soddisfacenti (5.5.3). Si possono allora trovare funzioni $f_j \in A(\Omega_j)$ non identicamente nulle tali che

$$f_j = g_{jk} f_k \quad \text{in } \Omega_j \cap \Omega_k \quad \text{per ogni } j, k. \tag{5.5.6}$$

Si osservi che non si afferma che $f_j \in A^*(\Omega_j)$: il teorema stabilisce soltanto l'equivalenza dei due modi di porre il secondo problema di Cousin. Daremo la dimostrazione del teorema 5.5.3 nel prossimo paragrafo in un contesto un po' più generale.

5.6. Teoremi di esistenza e di approssimazione per sezioni di un fibrato vettoriale analitico

Sia Ω una varietà complessa. Un *fibrato vettoriale analitico* B su Ω con fibra di dimensione N è una varietà analitica B munita

(i) di un'applicazione analitica $p : B \to \Omega$, detta *proiezione*,

(ii) di una struttura di spazio vettoriale su ogni fibra $B_z = p^{-1}(z)$,

tale che B sia localmente isomorfo al prodotto di un aperto di Ω e $\mathbb{C}^N$. Ciò significa che per ogni $z \in \Omega$ esistono un intorno aperto ω e un'applicazione analitica φ di $p^{-1}(\omega)$ su $\omega \times \mathbb{C}^N$ con inversa analitica, tali che per ogni $z \in \omega$ l'applicazione φ mandi B_z su $\{z\} \times \mathbb{C}^N$ e l'applicazione composta

$$B_z \xrightarrow{\varphi} \{z\} \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

sia lineare e dunque un isomorfismo lineare.

Sia $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Ω tale che per ogni i esista un'applicazione analitica φ_i di $p^{-1}(\Omega_i)$ su $\Omega_i \times \mathbb{C}^N$ con le proprietà elencate sopra. Allora

$$g_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$$

[4] In questo rinvio l'originale reca «5.6.2». [N.d.T.]

si può considerare come un'applicazione analitica di $\Omega_i \cap \Omega_j$ nel gruppo $GL(N, \mathbb{C})$ delle matrici invertibili $N \times N$ a coefficienti complessi, e si ha

$$\begin{aligned} g_{ij} g_{ji} &= \mathrm{id} \quad \text{in } \Omega_i \cap \Omega_j, \\ g_{ij} g_{jk} g_{ki} &= \mathrm{id} \quad \text{in } \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k. \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Una famiglia di matrici $N \times N$ siffatte, con coefficienti analitici in $\Omega_i \cap \Omega_j$, si chiama *sistema di matrici di transizione*. Ricordiamo che i dati del secondo problema di Cousin costituiscono precisamente un sistema di funzioni di transizione.

Il fibrato B si può ricostruire a partire dal sistema di matrici di transizione appena definito. Sia infatti B' l'insieme di tutte le terne $(i, z, w) \in I \times \Omega \times \mathbb{C}^N$ con $z \in \Omega_i$. Diciamo che (i, z, w) e (i', z', w') in B' sono equivalenti se $z = z'$ e $w' = g_{i'i}(z)w$. Che questa sia una relazione di equivalenza segue da (5.6.1). È facile verificare che, per ogni sistema di matrici di transizione, lo spazio delle classi di equivalenza, con la proiezione indotta dall'applicazione $B' \ni (i, z, w) \mapsto z$, è un fibrato vettoriale analitico. Se $\{g_{ij}\}$ proviene da un fibrato vettoriale analitico assegnato, la costruzione restituisce un fibrato isomorfo.

Se ω è un aperto di Ω, una *sezione* di classe C^∞ (o analitica) di B su ω è per definizione un'applicazione di classe C^∞ (o analitica)

$$\omega \ni z \longmapsto u(z) \in B, \qquad p(u(z)) = z.$$

Dato un ricoprimento $\{\Omega_i\}$ come sopra, questo significa che $\varphi_i \circ u$, identificata con la sua componente u_i lungo la fibra, è un'applicazione di classe C^∞ (o analitica) di $\omega \cap \Omega_i$ in $\mathbb{C}^N$ tale che

$$u_i = g_{ij} u_j \quad \text{in } \omega \cap \Omega_i \cap \Omega_j. \tag{5.6.2}$$

Viceversa, ogni sistema di applicazioni u_i di classe C^∞ (o analitiche) di $\omega \cap \Omega_i$ in $\mathbb{C}^N$ con queste proprietà corrisponde a una e una sola sezione C^∞ (o analitica) di B su ω. Dimostrare il teorema 5.5.3 significa dunque costruire *una sezione analitica non banale di un qualunque fibrato analitico in rette su una varietà di Stein*.

Possiamo anche definire lo spazio delle sezioni di B su ω localmente a quadrato integrabile come lo spazio dei sistemi di N-uple u_i di funzioni localmente a quadrato integrabile in $\omega \cap \Omega_i$ soddisfacenti (5.6.2). Analogamente si definiscono le sezioni distribuzionali. Scriveremo $A(\omega, B)$, $C^\infty(\omega, B)$, $L^2(\omega, B, \mathrm{loc})$, $W^s(\omega, B, \mathrm{loc}), \ldots$ per gli spazi di sezioni così definiti. Le definizioni sono indipendenti dalla scelta del ricoprimento.

Per estendere i metodi L^2 occorre definire anche i corrispondenti spazi di forme, ad esempio $C^\infty_{(p,q)}(\omega, B)$. A tal fine usiamo un ricoprimento $\{\Omega_i\}$ come sopra. Assegnare un elemento $u \in C^\infty_{(p,q)}(\omega, B)$ significa quindi assegnare per ogni i una N-upla u_i di forme di $C^\infty_{(p,q)}(\omega \cap \Omega_i)$ tali che

$$u_i = g_{ij} u_j \quad \text{in } \omega \cap \Omega_i \cap \Omega_j.$$

(Un altro ricoprimento dà uno spazio isomorfo.) Poiché g_{ij} è analitica, segue

$$\bar\partial u_i = g_{ij} \bar\partial u_j.$$

Dunque le N-uple $\bar\partial u_j$ di forme di tipo $(p, q+1)$ definiscono un elemento di $C^\infty_{(p,q+1)}(\omega, B)$. Analogamente l'operatore $\bar\partial$ è definito su $\mathcal{D}'_{(p,q)}(\omega, B)$.

Dobbiamo ora definire norme hermitiane per le forme di tipo (p, q) a valori in B. Come nel paragrafo 5.2, scegliamo dapprima una metrica hermitiana C^∞ in Ω per la quale valga (5.2.1). Scegliamo poi una metrica hermitiana C^∞ in B, ossia una funzione C^∞ in B la cui restrizione a ogni fibra B_z sia una forma hermitiana simmetrica definita positiva.

Ciò è possibile mediante una partizione dell'unità. In un intorno U di ogni punto di Ω il procedimento di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt permette di costruire sezioni C^∞ di B, $b_1, \dots, b_N$, tali che $b_1(z), \dots, b_N(z)$ formino una base ortonormale di B_z per ogni $z \in U$. Ogni forma u di tipo (p,q) in U a valori in B si può allora scrivere in uno e un solo modo come somma

$$u = \sum_{\nu=1}^{N} u^\nu b_\nu,$$

dove u^ν è una forma scalare di tipo (p,q) in U. Poniamo

$$|u|^2 = \sum_{\nu=1}^{N} |u^\nu|^2.$$

Questa definizione è evidentemente indipendente dalla scelta della base b_ν. Si definiscono ora, come nel paragrafo 5.2, gli spazi $L^2_{(p,q)}(\Omega, B, \varphi)$ e gli operatori T da $L^2_{(p,q)}(\Omega, B, \varphi)$ a $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, B, \varphi)$ e S da $L^2_{(p,q+1)}(\Omega, B, \varphi)$ a $L^2_{(p,q+2)}(\Omega, B, \varphi)$. Poiché per le definizioni precedenti

$$|\bar\partial(\eta_\nu u) - \eta_\nu \bar\partial u|^2 = |\bar\partial\eta_\nu \wedge u|^2 \le |\bar\partial\eta_\nu|^2 |u|^2,$$

la dimostrazione del lemma 5.2.1 si applica con modifiche puramente formali per provare che $D_{(p,q+1)}(\Omega, B, \varphi)$ è denso in $D_S \cap D_{T^*}$ rispetto alla norma del grafico. Inoltre

$$\bar\partial u = \sum_{\nu=1}^{N} \bar\partial u^\nu b_\nu + \cdots,$$

dove i puntini indicano termini privi di derivate di u. Se $f \in C^\infty_{(p,q+1)}(U, B, \varphi)$ e scriviamo $T^* f = \sum_{\nu=1}^N (T^* f)^\nu b_\nu$, segue che $(T^* f)^\nu$, a parte termini privi di derivate, è dato da (5.2.3) con f^ν al posto di f. Applicando (5.2.10) a f^ν e sommando per $\nu = 1, \dots, N$, concludiamo che (5.2.10) vale per $f \in D_{(p,q+1)}(U, B)$. Ripetendo la dimostrazione del teorema 5.2.3 si ottiene di nuovo (5.2.12), e i teoremi di esistenza e di approssimazione seguono come prima.

Teorema 5.6.1. Sia Ω una varietà di Stein e sia B un fibrato vettoriale analitico su Ω. Per ogni $f \in W^s_{(p,q+1)}(\Omega, B)$ con $\bar\partial f = 0$, l'equazione $\bar\partial u = f$ ha una soluzione $u \in W^{s+1}_{(p,q)}(\Omega, B)$. Se $q = 0$, ogni soluzione dell'equazione $\bar\partial u = f$ ha questa proprietà.

Teorema 5.6.2. Sia Ω una varietà di Stein e sia φ una funzione strettamente plurisubarmonica in Ω tale che $K_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) \le c\}$ sia compatto per ogni numero reale c. Sia B un fibrato vettoriale analitico su Ω. Ogni sezione analitica di B su un intorno di K_0 può allora essere approssimata uniformemente su K_0, nel senso della metrica hermitiana su B, mediante sezioni appartenenti ad $A(\Omega, B)$.

Non occorre ripetere le dimostrazioni.

Poiché ogni punto di una varietà di Stein costituisce un insieme olomorficamente convesso, dai teoremi 5.1.6 e 5.6.2 segue che per ogni $z_0 \in \Omega$ e $b_0 \in B_{z_0}$ esistono sezioni $u \in A(\Omega, B)$ con $u(z_0)$ arbitrariamente vicino a b_0. Si possono dunque trovare N sezioni analitiche $u^1, \dots, u^N$ di B su Ω tali che $u^1(z_0), \dots, u^N(z_0)$ siano linearmente indipendenti. Ne segue il corollario seguente.

Corollario 5.6.3. Sia B un fibrato vettoriale su una varietà di Stein Ω. Per ogni $z_0 \in \Omega$ e ogni $b_0 \in B_{z_0}$ si può trovare una sezione analitica u di B su Ω tale che $u(z_0) = b_0$.

In particolare, il fibrato definito dalle funzioni di transizione di un secondo problema di Cousin ammette una sezione non banale. Abbiamo così dimostrato il teorema 5.5.3.

5.7. Varietà quasi complesse

Sia Ω una varietà C^∞ di dimensione $2n$. Diremo che Ω ha una *struttura quasi complessa* se sono assegnate due applicazioni $P_{0,1}$ e $P_{1,0}$ dello spazio $C^\infty_{(1)}(\Omega)$ delle forme differenziali di grado uno a valori complessi in sé, tali che

(i) $P_{0,1}$ e $P_{1,0}$ siano lineari su $C^\infty(\Omega)$.

(ii) Siano proiezioni complementari nel senso che

$$P_{0,1} + P_{1,0} = \mathrm{id}, \qquad P_{0,1}P_{1,0} = 0.$$

(iii) Siano complesse coniugate nel senso che

$$P_{0,1}\bar f = \overline{P_{1,0} f}, \qquad f \in C^\infty_{(1)}(\Omega).$$

La condizione (i) implica che $P_{0,1}$ e $P_{1,0}$ inducono applicazioni lineari sullo spazio cotangente complessificato in ogni punto. Questi operatori si possono dunque definire anche su forme differenziali definite soltanto su aperti di Ω. Da (ii) segue che $P_{0,1}^2 = P_{0,1}$, $P_{1,0}^2 = P_{1,0}$ e $P_{1,0}P_{0,1} = 0$. In virtù di (iii) i due operatori proiettano lo spazio cotangente complessificato in ogni punto su due sottospazi di dimensione n complessi coniugati.

Ogni struttura complessa su Ω definisce in modo naturale una struttura quasi complessa, nella quale $P_{1,0}f$ e $P_{0,1}f$ sono le componenti di f generate rispettivamente dai differenziali delle funzioni analitiche e dai loro complessi coniugati. Le equazioni di Cauchy–Riemann si scrivono allora $P_{0,1}du = 0$, sicché lo spazio delle funzioni analitiche locali è determinato da $P_{0,1}$. Esiste dunque al più una struttura complessa che definisca una data struttura quasi complessa.

Per ogni struttura quasi complessa scriveremo $\bar\partial u = P_{0,1}du$ se u è una funzione differenziabile. La struttura quasi complessa è allora definita da una struttura analitica se e solo se per ogni $x \in \Omega$ esistono, in un intorno di x, funzioni C^∞ $u^1, \dots, u^n$ tali che $\bar\partial u^j = 0$ per ogni j e i differenziali $du^1, \dots, du^n$ siano linearmente indipendenti in x. Il problema di decidere quando una struttura quasi complessa sia definita da una struttura analitica è dunque puramente locale e possiamo supporre $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. Possiamo inoltre supporre che esistano n forme $\omega^1, \dots, \omega^n$ di grado uno, linearmente indipendenti in ogni punto di Ω, con $P_{0,1}\omega^j = 0$ (diciamo che ω^j è di tipo $(1,0)$ come nel caso analitico). Infatti, fissato un punto di Ω, possiamo scegliere forme $f^1, \dots, f^n$ tali che $P_{1,0}f^1, \dots, P_{1,0}f^n$ siano linearmente indipendenti in quel punto. Le forme $\omega^j = P_{1,0}f^j$ hanno allora la proprietà voluta in un suo intorno. Come nel paragrafo 5.2 possiamo perciò scrivere

$$du = \sum_j \frac{\partial u}{\partial \omega^j}\omega^j + \sum_j \frac{\partial u}{\partial \bar\omega^j}\bar\omega^j, \tag{5.7.1}$$

definendo così gli operatori differenziali lineari del primo ordine $\partial/\partial\omega^j$ e $\partial/\partial\bar\omega^j$. L'equazione $\bar\partial u = 0$ significa che $\partial u/\partial\bar\omega^j = 0$ per ogni j. Da (5.7.1) segue che tutti gli operatori differenziali del primo ordine (senza termine di ordine zero) sono combinazioni lineari di $\partial/\partial\omega^j$ e $\partial/\partial\bar\omega^j$. Questo permette di estendere il lemma 4.2.4. Scriviamo $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_m)^{\alpha_m}$ nelle coordinate reali, qui con $m = 2n$.

Lemma 5.7.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$, sia $u \in L^2(\Omega)$ a supporto compatto in Ω e supponiamo $\partial u/\partial\bar\omega^j \in L^2(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. Allora $u \in W^1(\Omega)$. Per ogni compatto K di Ω si ha

$$\sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha u\|_{L^2} \le C\left(\|u\|_{L^2} + \sum_{j=1}^n \|\partial u/\partial\bar\omega^j\|_{L^2}\right) \quad \text{se } \operatorname{supp} u \subset K. \tag{5.7.2}$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima (5.7.2) per $u \in C_0^\infty(K)$. Indichiamo con δ_j l'aggiunto di $\partial/\partial\bar\omega^j$. Allora

$$\int |\partial u/\partial\omega^j|^2 dx = \int |\partial u/\partial\bar\omega^j|^2 dx + \int \left(\left(\bar\delta_j \frac{\partial}{\partial\omega^j} - \delta_j \frac{\partial}{\partial\bar\omega^j} \right) u \right) \bar u \, dx.$$

Poiché $\delta_j + \partial/\partial\omega^j$ è di ordine zero, l'operatore differenziale nell'ultimo integrale è del primo ordine. Ricordando che gli operatori del primo ordine sono combinazioni lineari degli operatori $\partial/\partial\omega^j$ e $\partial/\partial\bar\omega^j$, si ottiene

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \le C \left(\sum_{j=1}^n \|\partial u/\partial\bar\omega^j\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2} \sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha u\|_{L^2} \right).$$

Il termine finale, compreso il fattore C, si può maggiorare con

$$(n+1)C^2\|u\|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2.$$

Ciò dà (5.7.2) per $u \in C_0^\infty(K)$. Se u soddisfa soltanto le ipotesi del lemma, dal lemma 5.2.2, con la notazione lì usata, segue

$$\partial J_\varepsilon u/\partial\bar\omega^j - J_\varepsilon(\partial u/\partial\bar\omega^j) \to 0 \quad \text{in } L^2 \quad \text{per } \varepsilon \to 0.$$

Applicando (5.7.2) a $J_\varepsilon u - J_\delta u$ si vede quindi che $D^\alpha J_\varepsilon u$ converge in L^2 per $\varepsilon \to 0$. Questo prova che $D^\alpha u \in L^2$ quando $|\alpha| \le 1$.

Lemma 5.7.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$ e sia $u \in L^2(\Omega, \mathrm{loc})$. Se $\partial u/\partial\bar\omega^j \in W^s(\Omega, \mathrm{loc})$, $j = 1, \dots, n$, per un intero positivo s, allora $u \in W^{s+1}(\Omega, \mathrm{loc})$. Se K è un compatto di Ω e $\Omega' \subset \Omega$ è un intorno di K, si ha

$$\sum_{|\alpha|\le s+1} \int_K |D^\alpha u|^2 dx \le C \left(\sum_{|\alpha|\le s} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega'} |D^\alpha(\partial u/\partial\bar\omega^j)|^2 dx + \int_{\Omega'} |u|^2 dx \right), \tag{5.7.3}$$

dove C non dipende da u.

La dimostrazione segue dal lemma 5.7.1 con gli argomenti usati nella parte (a) della dimostrazione del teorema 4.2.5 e la lasciamo per esercizio. Per uso successivo osserviamo che, per il lemma di Sobolev (si veda la dimostrazione del corollario 4.2.6), u ha derivate continue di ordine $s + 1 - 2n$. Prendendo $s = 2n$ in (5.7.3) otteniamo

$$\sum_{|\alpha|\le 1} \sup_K |D^\alpha u|^2 \le C \left(\sum_{|\alpha|\le 2n} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega'} |D^\alpha(\partial u/\partial\bar\omega^j)|^2 dx + \int_{\Omega'} |u|^2 dx \right). \tag{5.7.4}$$

Determiniamo ora quando una struttura quasi complessa è definita da una struttura analitica. Ricordiamo che le forme f di grado uno con $P_{0,1}f = 0$ (rispettivamente $P_{1,0}f = 0$) si dicono di tipo $(1,0)$ (rispettivamente $(0,1)$). Poiché ogni forma di grado uno si scrive in modo unico come somma di una forma di tipo $(1,0)$ e di una di tipo $(0,1)$, ogni forma di grado p si scrive in uno e un solo modo come somma di forme di tipo (a,b), $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a+b = p$. Per forma di tipo (a,b) intendiamo una combinazione lineare di prodotti esterni di a forme di tipo $(1,0)$ e b forme di tipo $(0,1)$. In generale il differenziale df di una forma f di tipo (p,q) può avere componenti di tipo (a,b) per tutti gli a, b con $a+b = p+q+1$. Se però la struttura quasi complessa è definita da una struttura analitica, sappiamo che df è somma di una forma di tipo $(p+1, q)$ e di una di tipo $(p, q+1)$. La condizione che figura nella definizione seguente è dunque necessaria affinché una struttura quasi complessa sia definita da una struttura analitica.

Definizione 5.7.3. Una struttura quasi complessa si dice *integrabile* se df non ha componente di tipo $(2,0)$ quando f è di tipo $(0,1)$.

Se f è di tipo $(1,0)$, segue che $d\bar f$ non ha componente di tipo $(2,0)$, ossia che df non ha componente di tipo $(0,2)$. Se dunque f è di tipo (p,q), df è somma di una forma ∂f di tipo $(p+1,q)$ e di una forma $\bar\partial f$ di tipo $(p,q+1)$. Basta infatti verificarlo per una forma

$$f = g_1 \wedge \cdots \wedge g_p \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_q,$$

dove $g_1, \dots, g_p$ sono di tipo $(1,0)$ e $h_1, \dots, h_q$ di tipo $(0,1)$, e in questo caso l'asserto segue dalla definizione 5.7.3 e dall'osservazione che la segue. Definiti così in generale gli operatori ∂ e $\bar\partial$, concludiamo che vale (2.1.4), ossia

$$\partial^2 = \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = \bar\partial^2 = 0.$$

Per una struttura quasi complessa integrabile abbiamo dunque lo stesso formalismo che per una struttura analitica, e dimostreremo anzi il seguente teorema.

Teorema 5.7.4. Ogni struttura quasi complessa integrabile è definita da un'unica struttura analitica.

Dimostrazione. L'unicità è evidente, come già osservato. Dobbiamo dunque dimostrare che per ogni $x \in \Omega$ esistono in un intorno di x funzioni C^∞ $u^1, \dots, u^n$ che soddisfano $\bar\partial u^j = 0$ e i cui differenziali $du^1, \dots, du^n$ sono linearmente indipendenti in x. Possiamo supporre $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$, $x = 0$, e che esistano forme $\omega^1, \dots, \omega^n$ di tipo $(1,0)$ linearmente indipendenti in ogni punto di Ω, come sopra. Nel paragrafo 5.2 abbiamo lavorato con forme di questo genere corrispondenti a una struttura analitica. Tuttavia il fatto che le forme ω^j provenissero da una struttura analitica è stato usato soltanto nella dimostrazione di (5.2.7), conseguenza dell'identità $\partial\bar\partial w + \bar\partial\partial w = 0$. Poiché questa vale anche nel caso quasi complesso integrabile, le dimostrazioni dei teoremi 5.2.3 e 5.2.4 rimangono valide. Per sfruttare questo fatto dobbiamo trovare una funzione φ «plurisubarmonica rispetto alla struttura quasi complessa». Osserviamo che, ponendo $\psi(x) = |x|^2$, nell'origine abbiamo

$$\sum_{j,k} \psi_{jk} t_j \bar t_k = \sum_j t_j \frac{\partial}{\partial\omega^j} \sum_k \bar t_k \frac{\partial}{\partial\bar\omega^k} \sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2 = 2 \sum_{\nu=1}^{2n} \left| \sum_k \bar t_k \frac{\partial x_\nu}{\partial\bar\omega^k} \right|^2 .$$

L'espressione è positiva per $t \neq 0$, perché gli operatori $\partial/\partial\omega^k$ sono linearmente indipendenti. Per un opportuno $\delta > 0$ la palla $\Omega' = \{x : |x| < \delta\}$ è dunque contenuta in Ω e la forma $\sum \psi_{jk} t_j \bar t_k$ vi è uniformemente definita positiva. Pertanto $1/(\delta^2 - \psi)$ soddisfa le ipotesi del teorema 5.2.4 in Ω'. Possiamo quindi scegliere come φ una funzione convessa crescente di $1/(\delta^2 - \psi)$ tale che per ogni f di tipo $(0,1)$ in Ω' con $\bar\partial f = 0$ e $\|f\|_\varphi < \infty$ esista una funzione u con $\bar\partial u = f$ e

$$\|u\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi. \tag{5.7.5}$$

Per servirci di questo fatto sceglieremo v in modo che $f = \bar\partial v$ sia prossima a zero, poi sceglieremo u tale che $\bar\partial u = f$ e u sia piccola quanto f. Allora $\bar\partial(u - v) = 0$, e se f è molto più piccola di v ci aspettiamo che $u - v$ non sia nulla. Possiamo però ottenere buone soluzioni approssimate dell'equazione per $\bar\partial$ soltanto molto vicino all'origine. Procediamo quindi nel modo seguente.

Siano $u^1, \dots, u^n$ forme lineari con $du^j = \omega^j$ nell'origine. Indichiamo con π_ε l'applicazione $x \mapsto \varepsilon x$, $\varepsilon > 0$, e consideriamo la struttura quasi complessa definita dalle forme $\pi_\varepsilon^*\omega^1, \dots, \pi_\varepsilon^*\omega^n$ in Ω'. Tutto quanto dimostrato sopra vale uniformemente

rispetto a ε per $0 < \varepsilon < 1$. Poiché $du^j - \pi_\varepsilon^* \omega^j/\varepsilon$ è $O(\varepsilon)$ insieme a tutte le sue derivate per $\varepsilon \to 0$, concludiamo che

$$D^\alpha \bar\partial_\varepsilon u^j = O(\varepsilon) \qquad \text{per ogni } \alpha,$$

dove $\bar\partial_\varepsilon$ è l'operatore $\bar\partial$ rispetto alla struttura quasi complessa definita dalle forme $\pi_\varepsilon^* \omega^k$. Da (5.7.5) segue che possiamo trovare v_ε^j con $\bar\partial_\varepsilon v_\varepsilon^j = \bar\partial_\varepsilon u^j$ in Ω' e $\|v_\varepsilon^j\|_\varphi = O(\varepsilon)$. Per (5.7.4) le derivate di v_ε^j nell'origine sono $O(\varepsilon)$. I differenziali delle funzioni $U^j = u^j - v_\varepsilon^j$ sono dunque linearmente indipendenti nell'origine per ε abbastanza piccolo e, poiché $\bar\partial_\varepsilon U^j = 0$, le funzioni $U^j(x/\varepsilon)$ sono soluzioni dell'equazione originaria per $\bar\partial$.

Note. La classe di varietà che oggi si chiamano varietà di Stein fu introdotta da Stein [1]. Nei seminari di Cartan [1] si sviluppò la teoria dei fasci analitici coerenti sulle varietà di Stein (si veda il capitolo VII). Essa comprende i risultati dei paragrafi 5.2, 5.5 e 5.6, eccettuata la soluzione del problema di Levi (teorema 5.2.10), dovuta a Grauert [1]. Per l'origine dei metodi qui usati si vedano le note al capitolo IV. La loro portata supera il caso delle varietà di Stein: in Hörmander [1] furono infatti usati per dimostrare risultati più generali dovuti ad Andreotti e Grauert [1]. Il teorema di immersione del paragrafo 5.3 è dovuto a Bishop [1] e a Narasimhan [1]. Abbiamo seguito principalmente la dimostrazione di Bishop, che provò anche l'esistenza di un'applicazione propria in $\mathbb{C}^{n+1}$. I risultati del paragrafo 5.4 sono dovuti a Oka [5]. La costruzione dell'inviluppo di olomorfia si può eseguire in modo un po' più elegante mediante la nozione di fascio che introdurremo nel capitolo VII (si vedano Cartan [1] e Malgrange [1]). La costruzione classica qui presentata è però sostanzialmente la stessa, salvo essere forse troppo esplicita. Rimandiamo a Bishop [2] per un'altra dimostrazione del fatto che l'inviluppo di olomorfia è una varietà di Stein, indipendente dalla soluzione del problema di Levi. I risultati sulle strutture quasi complesse integrabili dimostrati nel paragrafo 5.7 sono dovuti a Newlander e Nirenberg [1], ma la nostra dimostrazione è essenzialmente quella di Kohn [1]. Per le applicazioni allo studio delle perturbazioni delle strutture analitiche rimandiamo a un recente articolo di rassegna di Nirenberg [1].

Capitolo VI
Proprietà locali delle funzioni analitiche

Sommario. Dopo aver dimostrato il teorema di preparazione di Weierstrass, studieremo le proprietà di divisibilità nell'anello delle funzioni analitiche in un punto e alcuni risultati connessi al fatto che questo anello è noetheriano. Tutti questi risultati preparano la teoria dei fasci analitici coerenti del capitolo VII.

6.1. Il teorema di preparazione di Weierstrass

In questo capitolo studieremo localmente le funzioni analitiche in $\mathbb{C}^n$ procedendo per induzione su n. Il punto essenziale dell'argomento è la seguente estensione del corollario 1.2.10.

Teorema 6.1.1 (teorema di preparazione di Weierstrass). Sia f analitica in un intorno ω di 0 in $\mathbb{C}^n$ e supponiamo che $f(0, z_n)/z_n^p$ sia analitica e diversa da zero in 0. Esiste allora un polidisco $\Delta \subset \omega$ tale che ogni funzione g analitica e limitata in Δ si possa scrivere nella forma

$$g = qf + r, \tag{6.1.1}$$

dove q, r sono analitiche in Δ, r è un polinomio in z_n di grado $< p$ (con coefficienti dipendenti da $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$) e

$$\sup_{\Delta} |q| \leq C \sup_{\Delta} |g|, \tag{6.1.2}$$

con C indipendente da g. La rappresentazione (6.1.1) è unica. I coefficienti degli sviluppi in serie di potenze di q e r sono combinazioni lineari finite dei coefficienti dello sviluppo di g.

Dimostrazione. L'ipotesi su f significa che possiamo scrivere

$$f = f_1 + z_n^p f_2,$$

dove f_1 e f_2 sono analitiche in un intorno di 0, $f_2(0) \neq 0$ e f_1 è un polinomio in z_n di grado $< p$ che si annulla per $z' = 0$. Poiché $1/f_2$ è analitica in un intorno di 0, possiamo porre $h = f_1 f_2^{-1}$ e $s = f_2 q$. Abbiamo allora $h(0, z_n) = 0$ identicamente e dobbiamo trovare s tale che

$$g = (z_n^p + h)s + r. \tag{6.1.3}$$

Poniamo

$$\Delta = \{z : |z_j| < R_j,\ j = 1, \dots, n\},$$

scegliendo gli R_j così piccoli che f_1, f_2, f_2^{-1} siano analitiche e limitate in Δ, e poniamo $c = \sup_\Delta |h|$. Poiché $h(0, z_n) = 0$, a R_n fissato possiamo scegliere $R_1, \dots, R_{n-1}$ tanto piccoli da rendere c piccola a piacere.

Risolviamo (6.1.3) per approssimazioni successive. Poniamo $s_0 = 0$ e definiamo s_k, r_k per $k \geq 1$ mediante la ricorrenza

$$g = z_n^p s_k + h s_{k-1} + r_k, \tag{6.1.4}$$

dove r_k deve essere un polinomio in z_n di grado $< p$. Se φ è analitica in Δ e scriviamo

$$\varphi = z_n^p \varphi_1 + \varphi_2,$$

con φ_2 polinomio in z_n di grado $< p$ e φ_1 analitica, necessariamente

$$\varphi_2(z) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\partial^j \varphi(z', 0)}{\partial z_n^j} \frac{z_n^j}{j!}.$$

Se $|\varphi| \leq M$ in Δ, dalle disuguaglianze di Cauchy segue

$$|\varphi_2(z)| \leq pM, \qquad z \in \Delta,$$

poiché ogni termine della somma ha modulo al più M. Quindi $|\varphi_1(z) z_n^p| \leq (p+1)M$ e dal lemma di Schwarz si ottiene

$$|\varphi_1(z)| \leq (p+1)M/R_n^p.$$

La ricorrenza (6.1.4) determina dunque univocamente le due successioni s_k, r_k. Poiché

$$z_n^p(s_{k+1} - s_k) + r_{k+1} - r_k = -h(s_k - s_{k-1}),$$

ed essendo $|h| \leq c$, otteniamo

$$\sup_\Delta |s_{k+1} - s_k| \leq c(p+1) R_n^{-p} \sup_\Delta |s_k - s_{k-1}|.$$

Se Δ è scelto in modo che $c(p+1) < R_n^p/2$, concludiamo che

$$\sup |s_{k+1} - s_k| \leq 2^{-k} \sup |s_1|.$$

Esiste dunque, con convergenza uniforme in Δ,

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})$$

e vale

$$|s| \leq 2 \sup_\Delta |s_1| \leq 2(p+1) R_n^{-p} \sup_\Delta |g|.$$

La convergenza di r_k segue ora da (6.1.4) e, poiché per $k \to \infty$ la (6.1.4) tende alla (6.1.3), abbiamo ottenuto una soluzione di (6.1.3). Essa è unica. Infatti, se abbiamo una soluzione dell'equazione omogenea

$$(z_n^p + h)s + r = 0$$

con s, r limitate in Δ e r polinomio in z_n di grado $< p$, ne segue

$$\sup_\Delta |s| \leq c(p+1) R_n^{-p} \sup_\Delta |s| \leq \tfrac{1}{2} \sup_\Delta |s|,$$

da cui $s = 0$. L'ultima affermazione segue dal fatto che $s_{k+1} - s_k$ e $r_{k+1} - r_k$ si annullano nell'origine all'ordine k.

Corollario 6.1.2. Se f soddisfa l'ipotesi del teorema 6.1.1, si può scrivere in uno e un solo modo $f = hW$, dove h, W sono analitiche in un intorno di 0, $h(0) \neq 0$ e W è un *polinomio di Weierstrass*, ossia

$$W(z) = z_n^p + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z') z_n^j,$$

con a_j funzioni analitiche in un intorno di 0 che si annullano per $z' = 0$.

Dimostrazione. È il caso particolare del teorema 6.1.1 in cui $g(z) = z_n^p$. Si osservi che, viceversa, ogni f rappresentabile come nel corollario soddisfa le ipotesi del teorema 6.1.1.

Per uso successivo diamo due lemmi che collegano la divisibilità dei polinomi di Weierstrass in senso algebrico e in senso analitico.

Lemma 6.1.3. Siano F, G, W analitiche in un intorno di 0. Se $F = GW$, F è un polinomio in z_n e W è un polinomio di Weierstrass in z_n, allora anche G è un polinomio in z_n.

Dimostrazione. Poiché il coefficiente direttore di W come polinomio in z_n è 1, possiamo applicare l'algoritmo della divisione algebrica e ottenere

$$F = G_1 W + H,$$

dove H è un polinomio in z_n di grado inferiore a quello di W. Per l'unicità stabilita dal teorema di preparazione di Weierstrass si ha $G_1 = G$ e $H = 0$. Poiché G_1 è un polinomio, il lemma è dimostrato.

Il lemma può essere falso per un polinomio arbitrario W in z_n. Ad esempio, se W non si annulla in 0, possiamo prendere $F = 1$ e $G = 1/W$.

Lemma 6.1.4. Siano F, G, W analitiche in un intorno di 0, con W polinomio di Weierstrass e F, G polinomi in z_n. Se $W = FG$, anche F e G sono polinomi di Weierstrass a meno di un fattore $h(z')$ con $h(0) \neq 0$.

Dimostrazione. Sia p il grado di W e siano r, s i gradi di F, G. Allora $p = r + s$ e

$$z_n^p = W(0, z_n) = F(0, z_n) G(0, z_n).$$

Dunque $F(0, z_n)/z_n^r$ e $G(0, z_n)/z_n^s$ sono costanti non nulle. Ne segue che per $z' = 0$ i coefficienti direttori di F e G non si annullano, mentre tutti gli altri si annullano.

Definizione 6.1.5. Se f è analitica in un intorno di 0, diremo che f è *normalizzata nella direzione* z_n se $f(0, z_n)$ non è identicamente nulla.

Con questa terminologia l'ipotesi del teorema 6.1.1 significa che f è normalizzata nella direzione z_n. L'intero p è naturalmente determinato in modo unico. È evidente che mediante un cambiamento lineare di variabili possiamo rendere normalizzata nella direzione z_n qualunque f non identicamente nulla: basta scegliere l'asse z_n in modo che non annulli simultaneamente tutte le parti omogenee dello sviluppo di Taylor di f in 0.

6.2. Fattorizzazione nell'anello A_0 dei germi di funzioni analitiche

Già nel paragrafo 1.4 abbiamo dato la definizione seguente nel caso di una sola variabile complessa.

Definizione 6.2.1. Se $z \in \mathbb{C}^n$ (o, più generalmente, se z appartiene a una varietà complessa), indichiamo con $A_z(\mathbb{C}^n)$, o brevemente A_z, l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni f analitiche in qualche intorno di z, rispetto alla relazione $f \sim g$ se $f = g$ in un intorno di z. Se f è analitica in un intorno di z, denotiamo con f_z o $\gamma_z(f)$ la sua classe in A_z, detta *germe di f in z*.

Nello studio di A_z possiamo naturalmente supporre $z = 0$. È chiaro che A_0 è un anello con unità e senza divisori dello zero. I suoi elementi si identificano con tutte le serie di potenze

$$\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$$

che convergono in qualche intorno di 0, ossia con tutte le famiglie $\{a_\alpha\}$ tali che $\sum_\alpha |a_\alpha| r^{|\alpha|} < \infty$ per qualche $r > 0$. Se $f \in A_0$, il valore $f(0)$ è definito ed è il termine costante dello sviluppo in serie. È chiaro che f ha inverso in A_0 se e solo se $f(0) \neq 0$.

Gli elementi non invertibili di A_0 formano dunque un ideale (che contiene perciò tutti gli ideali propri).

Le unità di A_0, ossia gli elementi invertibili, sono i germi delle funzioni che non si annullano in 0. Se $f \in A_0$ e in ogni decomposizione $f = gh$ con $g, h \in A_0$ uno dei fattori deve essere un'unità, f si dice *irriducibile*.

Teorema 6.2.2. A_0 è un dominio a fattorizzazione unica, ossia ogni elemento non nullo di A_0 si può scrivere come prodotto di fattori irriducibili in uno e un solo modo, a meno di unità e dell'ordine dei fattori.

Dimostrazione. Ricordiamo dall'algebra che basta dimostrare i due fatti seguenti (si veda Zariski e Samuel [1], p. 21).

(a) Se f è irriducibile e divide gh, allora f divide g oppure h.

(b) Se in una successione $f_1, f_2, \ldots$ di elementi di A_0 ogni elemento divide il precedente, per k abbastanza grande f_{k+1} differisce da f_k soltanto per un fattore invertibile.

Infatti (b) implica che f si può decomporre in un prodotto di fattori irriducibili, e (a) implica l'unicità della decomposizione.

Supponiamo che il teorema sia già dimostrato per $n-1$ variabili e scriviamo $A_0' = A_0(\mathbb{C}^{n-1})$. Nel dimostrare (a) possiamo supporre inoltre, per il corollario 6.1.2, che f sia il germe di un polinomio di Weierstrass W (se necessario, prima di applicare il corollario cambiamo le coordinate). Per il teorema 6.1.1 possiamo anche ridurre g e h modulo f a polinomi g' e h' in $A_0'[z_n]$, e per il lemma 6.1.3 f divide $g'h'$ in $A_0'[z_n]$. Ora, per il lemma 6.1.4, f è irriducibile come polinomio in $A_0'[z_n]$. Poiché l'ipotesi induttiva implica che $A_0'[z_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica (si veda ad esempio Zariski e Samuel [1], p. 32), questo conclude la dimostrazione di (a).

Per dimostrare (b) possiamo supporre che f_1 sia il germe di un polinomio di Weierstrass. Ogni f_k deve allora essere normalizzato nella direzione z_n ed è dunque equivalente a un polinomio di Weierstrass di grado n_k, con n_k decrescente in senso lato al crescere di k. Per k grande il grado è quindi costante. Ma se un polinomio di Weierstrass W divide un altro polinomio di Weierstrass W' dello stesso grado, allora $W = W'$. Infatti da

$$W' = fW$$

ponendo $z' = 0$ si ottiene $f(0) = 1$, e l'unicità del corollario 6.1.2 mostra che $W = W'$. La dimostrazione è completa.

Teorema 6.2.3. Siano f, g analitiche in un intorno di 0 e supponiamo che $\gamma_0(f)$ e $\gamma_0(g)$ siano primi fra loro. Allora

(i) $\gamma_z(f)$ e $\gamma_z(g)$ sono primi fra loro in A_z per ogni z in un intorno di 0.

(ii) Se $f(0) = g(0) = 0$, per ogni numero complesso a e in ogni intorno di 0 si può trovare z tale che $g(z) \neq 0$ e $f(z)/g(z) = a$.

Non è quindi naturale attribuire al quoziente f/g in 0 alcun valore, finito o infinito.

Dimostrazione. Per provare (i) possiamo supporre che f e g siano polinomi di Weierstrass. Se $A_0' = A_0(\mathbb{C}^{n-1})$, allora f e g sono primi fra loro in $A_0'[z_n]$ (lemma 6.1.4) e quindi anche in $K_0'[z_n]$, dove K_0' è il campo dei quozienti di A_0' (lemma di Gauss, si veda Zariski

e Samuel [1], p. 32). Possiamo dunque trovare funzioni f_1, g_1, h analitiche in un intorno di 0, con f_1, g_1 polinomi in z_n e h indipendente da z_n e non identicamente nulla, tali che

$$h(z') = f_1(z)f(z) + g_1(z)g(z)$$

in un intorno di 0. Poiché f, g sono normalizzate rispetto a z_n nell'intorno di 0 in cui sono definite, ogni fattore comune di $\gamma_\zeta(f)$ e $\gamma_\zeta(g)$ in A_ζ deve essere normalizzato rispetto a z_n e si può quindi supporre che sia il germe di un polinomio di Weierstrass in ζ. Poiché deve dividere $\gamma_\zeta(h)$, il suo grado deve essere zero (lemma 6.1.3). Questo prova (i).

Per dimostrare (ii) possiamo supporre $a = 0$, poiché altrimenti basta sostituire f con $f - ag$. Come sopra possiamo poi supporre che f, g siano polinomi di Weierstrass. Se l'asserto fosse falso, esisterebbe un intorno di 0 in cui $f(z) = 0$ implica $g(z) = 0$. Per ogni z' fissato sufficientemente piccolo l'equazione $f(z', z_n) = 0$ ha qualche radice z_n piccola. Ne seguirebbe $h(z') = 0$ per ogni z' in un intorno di 0, il che è assurdo.

6.3. A_0-moduli finitamente generati

Cominciamo col rafforzare la parte (b) della dimostrazione del teorema 6.2.2.

Definizione 6.3.1. Un anello commutativo con unità A si dice *noetheriano* se ogni ideale $I \subset A$ è finitamente generato, ossia se esistono $f_1, \ldots, f_j \in I$ tali che ogni $f \in I$ si possa scrivere

$$f = \sum_{i=1}^{j} a_i f_i$$

per opportuni $a_i \in A$.

Lemma 6.3.2. Se A è noetheriano, ogni sottomodulo di A^p è finitamente generato.

Qui A^p indica il modulo delle p-uple di elementi di A.

Dimostrazione. Per $p = 1$ l'asserto coincide con la definizione di anello noetheriano. Sia M un qualunque sottomodulo di A^p e sia π la proiezione di A^p sulla prima componente, ossia

$$\pi(a_1, \ldots, a_p) = a_1.$$

Poiché πM è un ideale di A, è finitamente generato. Possiamo quindi scegliere $m_1, \ldots, m_j \in M$ tali che $\pi m_1, \ldots, \pi m_j$ generino πM. Ogni elemento $m \in M$ si scrive perciò

$$m = a_1 m_1 + \cdots + a_j m_j + m_0,$$

con $a_1, \ldots, a_j \in A$, $m_0 \in M$ e $\pi m_0 = 0$. Ma

$$M_0 = \{m \in M : \pi m = 0\}$$

si può considerare come un sottomodulo di A^{p-1}, sicché per induzione su p possiamo supporre M_0 finitamente generato. Ciò conclude la dimostrazione.

Teorema 6.3.3. A_0 è un anello noetheriano.

Dimostrazione. Per $n = 1$ il teorema è immediato, perché ogni ideale non nullo di A_0 è generato da una potenza di z_1. Supponiamo che il teorema sia già dimostrato per $A_0' = A_0(\mathbb{C}^{n-1})$. Se I è un ideale di A_0 che contiene un elemento non nullo, con un cambiamento di coordinate possiamo fare in modo che I contenga il germe f di una funzione normalizzata nella direzione z_n. Ogni $g \in I$ è allora congruo modulo f a un polinomio in z_n di grado $< p$,

dove p è l'ordine di $f(0, z_n)$ nell'origine. Sia M l'insieme di tutti i $g \in I$ che sono polinomi in z_n di grado $< p$. Possiamo considerare M come un sottomodulo di $(A_0')^p$, dunque M è finitamente generato come A_0'-modulo. I generatori di M, insieme a f, costituiscono quindi un sistema di generatori dell'ideale I. La dimostrazione è completa.

Introduciamo ora in A_0 la topologia della convergenza semplice, definita dalla famiglia numerabile di seminorme

$$f = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \longmapsto |a_\alpha|.$$

Dire $f_j \to f$ significa dunque che, per ogni α, il coefficiente di z^α in f_j converge al coefficiente di z^α in f. Evidentemente A_0 non è completo. Il suo completamento è lo spazio di tutte le serie di potenze *formali* $\sum a_\alpha z^\alpha$. Anch'esso è un anello, che indichiamo con F_0. La topologia definita in A_0 dà naturalmente anche una topologia in A_0^p.

Teorema 6.3.4. Sia M un sottomodulo di A_0^p e siano $U_1, \ldots, U_j$ generatori di M. Se $V_\nu \in M$ e $V_\nu \to 0$ per $\nu \to \infty$, esistono $f_\nu^i \in A_0$ tali che

$$V_\nu = \sum_{i=1}^{j} f_\nu^i U_i$$

e $f_\nu^i \to 0$ per $\nu \to \infty$, per ogni i.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n e su p, combinando i procedimenti delle dimostrazioni del lemma 6.3.2 e del teorema 6.3.3.

(a) Supponiamo $p > 1$ e il teorema già dimostrato per i sottomoduli di A_0^k con $k < p$. Con π definita come nella dimostrazione del lemma 6.3.2, applichiamo l'ipotesi induttiva alla successione $\pi V_\nu \in \pi M$. Esistono pertanto $f_\nu^i \in A_0$ con $f_\nu^i \to 0$ per $\nu \to \infty$ e

$$V_\nu^0 = V_\nu - \sum_{i=1}^{j} f_\nu^i U_i \in M_0 \qquad \text{per ogni } \nu.$$

Siano $u_1, \ldots, u_r$ generatori di M_0. Possiamo allora trovare $g_\nu^i \in A_0$ tali che $g_\nu^i \to 0$ per $\nu \to \infty$ e

$$V_\nu^0 = \sum_{i=1}^{r} g_\nu^i u_i.$$

Poiché ciascun u_i si può esprimere come combinazione lineare di $U_1, \ldots, U_j$ a coefficienti in A_0, segue l'asserto.

(b) Supponiamo ora $p = 1$ e il teorema già dimostrato per $n-1$ variabili e p arbitrario. Possiamo supporre che l'ideale M contenga un elemento non nullo f normalizzato nella direzione z_n. Per il teorema di preparazione di Weierstrass possiamo scrivere

$$V_\nu = q_\nu f + r_\nu,$$

dove $q_\nu \to 0$, $r_\nu \to 0$ e r_ν appartiene all'insieme dei polinomi in z_n di grado $< p$ con coefficienti in $A_0' = A_0(\mathbb{C}^{n-1})$ che appartengono a M. Qui p indica il grado nella divisione di Weierstrass. Siano $u_1, \ldots, u_s$ generatori di questo insieme considerato come A_0'-modulo. Per l'ipotesi induttiva si ha allora

$$r_\nu = \sum_{i=1}^{s} g_\nu^i u_i,$$

dove $g_\nu^i \in A_0'$ tende a 0 per $\nu \to \infty$. Poiché ogni u_i appartiene al modulo generato da $U_1, \ldots, U_j$, la dimostrazione è completa.

Nello stesso modo possiamo dimostrare il teorema seguente.

Teorema 6.3.5. Ogni sottomodulo di A_0^p è chiuso in A_0^p.

Dimostrazione. (a) Supponiamo $p > 1$ e il teorema già dimostrato per i sottomoduli di A_0^k con $k < p$. Siano $V_\nu \in M$ e $V_\nu \to V \in A_0^p$. Per l'ipotesi induttiva applicata alla successione πV_ν (con le notazioni della dimostrazione del lemma 6.3.2) si ha $\pi V \in \pi M$. Sia $U \in M$ con $\pi U = \pi V$. Se $U_1, \dots, U_j$ generano M, dal teorema 6.3.4, poiché $\pi V_\nu - \pi U \to 0$, segue che possiamo scegliere $f_\nu^i \in A_0$ con $f_\nu^i \to 0$ e

$$V_\nu^0 = V_\nu - U - \sum_{i=1}^{j} f_\nu^i U_i \in M_0.$$

Poiché $V_\nu^0 \to V - U$, per l'ipotesi induttiva $V - U \in M_0$, e pertanto $V \in M$.

(b) Supponiamo ora $p = 1$ e il teorema già dimostrato per $n - 1$ variabili. Possiamo supporre che l'ideale M contenga un elemento non nullo f normalizzato nella direzione z_n. Per il teorema di preparazione di Weierstrass possiamo scrivere

$$V_\nu = q_\nu f + r_\nu, \qquad V = qf + r,$$

con $q_\nu \to q$, $r_\nu \to r$ per $\nu \to \infty$. Dall'ipotesi induttiva segue dunque che r appartiene al sottomodulo di $(A_0')^p$ formato dai polinomi in z_n di grado $< p$ a coefficienti in A_0' che appartengono a M (dove di nuovo p è il grado nella divisione). Pertanto $V \in M$, il che conclude la dimostrazione.

Corollario 6.3.6. Siano $m_0, \dots, m_j \in A_0^p$ e supponiamo che

$$m_0 = \sum_{i=1}^{j} f^i m_i \tag{6.3.1}$$

per certe serie di potenze formali f^i. La stessa uguaglianza vale allora per opportuni $f^i \in A_0$.

Dimostrazione. Sia f_ν^i il germe della somma dei termini di grado $\leq \nu$ della serie formale f^i. Allora $m_0 - \sum_{i=1}^{j} f_\nu^i m_i \to 0$ per $\nu \to \infty$, sicché dal teorema 6.3.5 segue che m_0 appartiene all'A_0-modulo generato da $m_1, \dots, m_j$.

L'interesse del risultato sta nel fatto che, almeno in linea di principio, è elementare decidere se (6.3.1) vale per opportuni $f^i \in F_0$. Si tratta infatti di verificare se un sistema infinito di equazioni lineari ammette soluzione, e vale il lemma seguente.

Lemma 6.3.7. Siano $L_1, L_2, \dots$ forme lineari a coefficienti complessi nelle variabili complesse $\xi_1, \xi_2, \dots$, ciascuna delle quali dipende soltanto da un numero finito di variabili ξ_j. Un sistema di equazioni

$$L_j(\xi) = b_j, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

con b_j complessi, ammette una soluzione ξ se ogni sua parte finita è compatibile.

Dimostrazione. L'ipotesi significa che se una somma finita $\sum c_j L_j$ è identicamente nulla, allora $\sum c_j b_j = 0$. Distinguiamo due casi.

(a) Se una somma finita $\sum c_j L_j$ è uguale a ξ_1, possiamo formare un sistema equivalente in cui la prima equazione è $\xi_1 = b_1$ (rinumerando le nuove equazioni) e le altre non contengono ξ_1.

(b) Se nessuna combinazione lineare finita $\sum c_j L_j$ è uguale a ξ_1, allora $\sum c_j L_j(\xi) = 0$ per ogni ξ non appena tale somma si annulla per $\xi_1 = 0$. Possiamo pertanto porre $\xi_1 = 0$ e ottenere un nuovo sistema compatibile per $\xi_2, \dots$.

In entrambi i casi si può dunque assegnare a ξ_1 un valore tale che il sistema si riduca a un sistema nelle variabili $\xi_2, \dots$ che soddisfa le stesse ipotesi. Possiamo così scegliere successivamente $\xi_1, \xi_2, \dots$ in modo da soddisfare l'intero sistema infinito, poiché ogni equazione assegnata è soddisfatta non appena sono state scelte tutte le variabili che vi compaiono.

6.4. Il teorema di Oka

Finora abbiamo considerato gli A_z-moduli soltanto per z fissato. Nel prossimo capitolo ci occorrerà il risultato seguente, che, facendo variare z, va oltre la proprietà noetheriana di A_z.

Teorema 6.4.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e siano $F_1, \dots, F_q \in A(\Omega)^p$. Poniamo

$$R_z(F_1, \dots, F_q) = \left\{ G = (g^1, \dots, g^q) \in A_z^q : \sum_{j=1}^{q} g^j \gamma_z(F_j) = 0 \right\}, \qquad z \in \Omega.$$

È un sottomodulo di A_z^q, detto *modulo delle relazioni* fra $F_1, \dots, F_q$ in z. Per ogni punto di Ω esistono un intorno aperto $\omega \subset \Omega$ e un numero finito di elementi $G_1, \dots, G_r \in A(\omega)^q$ tali che per ogni $z \in \omega$ il modulo R_z coincida con l'A_z-modulo generato da $\gamma_z(G_1), \dots, \gamma_z(G_r)$.

Poiché A_z è noetheriano, sappiamo già che R_z è finitamente generato per ogni z. Il punto essenziale del teorema è che possiamo usare «gli stessi» generatori per tutti gli z in un intorno del punto assegnato.

Dimostrazione del teorema 6.4.1. Procediamo per induzione sostanzialmente come nel paragrafo 6.3. È sufficiente supporre $0 \in \Omega$ e costruire un intorno ω di 0 con le proprietà richieste.

(a) Supponiamo $p > 1$ e il teorema già dimostrato per valori inferiori di p. Scriviamo $F_j = (F_j^1, \dots, F_j^p)$. È evidente che

$$R_z(F_1, \dots, F_q) \subset R_z(F_1^1, \dots, F_q^1).$$

Per l'ipotesi induttiva esistono un intorno $\Omega' \subset \Omega$ di 0 ed elementi $H_1, \dots, H_r \in A(\Omega')^q$ tali che $\gamma_z(H_1), \dots, \gamma_z(H_r)$ generino l'A_z-modulo $R_z(F_1^1, \dots, F_q^1)$ per ogni $z \in \Omega'$. Dunque per $z \in \Omega'$ si ha

$$R_z(F_1, \dots, F_q) \subset \left\{ \sum_{j=1}^{r} c^j \gamma_z(H_j) : c^j \in A_z \right\}.$$

Ora la condizione $\sum_{j=1}^r c^j \gamma_z(H_j) \in R_z(F_1, \dots, F_q)$ significa esplicitamente

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} c^j \gamma_z(H_j^k F_k^i) = 0, \qquad i = 1, \dots, p. \tag{6.4.1}$$

La scelta degli H_j garantisce però che per $i = 1$ la (6.4.1) è soddisfatta. Restano quindi soltanto $p - 1$ equazioni (6.4.1). Per l'ipotesi induttiva esistono un intorno $\omega \subset \Omega'$ di 0 ed elementi $C_1, \dots, C_s \in A(\omega)^r$ tali che il modulo di tutte le $(c^1, \dots, c^r) \in A_z^r$ soddisfacenti (6.4.1) sia generato da $\gamma_z(C_1), \dots, \gamma_z(C_s)$ per $z \in \omega$. Gli s elementi

$$G_i = \sum_{j=1}^{r} C_i^j H_j, \qquad i = 1, \dots, s,$$

hanno dunque tutte le proprietà richieste.

(b) Supponiamo ora $p = 1$ e il teorema già dimostrato per ogni p nel caso di dimensione $n-1$. (Per $n = 0$ il teorema è immediato.) Con una trasformazione lineare possiamo rendere le funzioni analitiche $F_1, \dots, F_q$ normalizzate nella direzione z_n. Possiamo allora supporre che siano tutte polinomi di Weierstrass con coefficienti in $A(\Omega')$, dove Ω' è un intorno di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$. Per $z' \in \Omega'$ scriviamo $A'_{z'}$ per $A_{z'}(\mathbb{C}^{n-1})$. Per proseguire ci occorre un lemma.

Lemma 6.4.2. Se $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ e $\zeta' \in \Omega'$, l'A_ζ-modulo $R_\zeta(F_1, \dots, F_q)$ è generato da quegli elementi le cui componenti sono germi di funzioni di $A'_{\zeta'}[z_n]$ di grado in z_n non superiore a μ, il massimo dei gradi di $F_1, \dots, F_q$.

Dimostrazione. Sia F_q di grado μ rispetto a z_n,

$$F_q = z_n^\mu + \cdots,$$

con coefficienti in $A(\Omega')$. Se $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ e $\zeta' \in \Omega'$, per il teorema di preparazione possiamo scrivere

$$\gamma_\zeta(F_q) = F'F'',$$

dove $F', F'' \in A_\zeta$, F' è il germe di un polinomio di Weierstrass in $z - \zeta$ e $F''(\zeta) \neq 0$. Dal lemma 6.1.3 segue che F'' è un polinomio in z_n con coefficiente direttore 1. Siano μ' e μ'' i gradi di F' e F'' rispetto a z_n. Se $(c^1, \dots, c^q) \in R_\zeta(F_1, \dots, F_q)$, per il teorema di preparazione possiamo scrivere

$$c^i = \gamma_\zeta(F_q)t^i + r^i, \qquad i = 1, \dots, q-1,$$

dove $t^i, r^i \in A_\zeta$ e r^i è il germe di un polinomio in z_n di grado $< \mu'$ a coefficienti in $A'_{\zeta'}$. Ponendo $r^q = c^q + \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_\zeta(F_i)t^i$, scriviamo ora

$$\begin{aligned}(c^1, \dots, c^q) = {} & \gamma_\zeta(F_q, 0, \dots, 0, -F_1)t^1 + \cdots \\ & + \gamma_\zeta(0, \dots, 0, F_q, -F_{q-1})t^{q-1} + (r^1, \dots, r^q).\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Si ha necessariamente $(r^1, \dots, r^q) \in R_\zeta(F_1, \dots, F_q)$, perché tutti gli altri termini di (6.4.2) appartengono a questo modulo. Pertanto

$$\sum_{i=1}^{q-1} r^i \gamma_\zeta(F_i) + (r^q F'')F' = 0.$$

La somma è un polinomio in z_n di grado $< \mu + \mu'$. Dal lemma 6.1.3 segue che $r^q F''$ è un polinomio in z_n di grado $< \mu$. Ora

$$(r^1, \dots, r^q) = \frac{1}{F''}(F''r^1, \dots, F''r^q),$$

dove $F''r^j$ è di grado $< \mu$ per ogni j. Insieme a (6.4.2) ciò dimostra il lemma.

Conclusione della dimostrazione del teorema 6.4.1. Se $c = (c^1, \dots, c^q)$ è uno degli elementi di $R_\zeta(F_1, \dots, F_q)$ descritti nel lemma 6.4.2, possiamo scrivere

$$c^j = \sum_{k=0}^{\mu} c^{jk} \gamma_\zeta(z_n^k), \qquad c^{jk} \in A'_{\zeta'}.$$

La condizione affinché $(c^1, \dots, c^q)$ appartenga a $R_\zeta(F_1, \dots, F_q)$ consiste dunque di $2\mu + 1$ condizioni lineari omogenee nelle quantità c^{jk} con coefficienti in $A(\Omega')$. Per l'ipotesi induttiva si possono quindi trovare un intorno $\omega' \subset \Omega'$ di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$ ed elementi $C_1, \dots, C_r \in A(\omega')[z_n]^q$ di grado $\leq \mu$ rispetto a z_n, che per ogni $\zeta' \in \omega'$ generano l'$A'_{\zeta'}$-modulo delle soluzioni di queste equazioni. Dal lemma segue che, per ogni $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ con $\zeta' \in \omega'$, i germi di $C_1, \dots, C_r$ generano l'A_ζ-modulo $R_\zeta(F_1, \dots, F_q)$. Il teorema è dimostrato.

6.5. Insiemi analitici

Sia Ω una varietà complessa e sia V un suo sottoinsieme.

Definizione 6.5.1. V è un *sottoinsieme analitico* di Ω se ogni punto di Ω ha un intorno aperto $U \subset \Omega$ nel quale esiste una famiglia di funzioni $f_i \in A(U)$, $i \in J$, tale che

$$U \cap V = \{z \in U : f_i(z) = 0,\ i \in J\}.$$

La definizione implica che V è chiuso. Vedremo che si può sempre prendere J finito. Questo fatto, tutt'altro che immediato, è utile in situazioni come quella del teorema 4.4.12. In quel teorema, d'altra parte, l'insieme analitico era definito per mezzo di funzioni analitiche globali. Nel capitolo VII mostreremo che ciò è sempre possibile su una varietà di Stein. I risultati locali che ora dimostreremo costituiscono una parte essenziale della dimostrazione. Poiché la discussione è locale, possiamo supporre che Ω sia un aperto di $\mathbb{C}^n$.

Se V è un sottoinsieme analitico di Ω e $z \in \Omega$, poniamo

$$I_z(V) = \{\gamma_z(f) : f \text{ è analitica in un intorno } U \text{ di } z \text{ e } f = 0 \text{ su } U \cap V\}. \tag{6.5.1}$$

È evidentemente un ideale di A_z, e $I_z(V) = A_z$ se e solo se $z \notin V$. Vogliamo dimostrare per questi ideali un risultato simile al teorema di Oka (teorema 6.4.1).

Teorema 6.5.2. Se V è un sottoinsieme analitico dell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, ogni punto di Ω ha un intorno aperto $U \subset \Omega$ nel quale esistono un numero finito di funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in A(U)$ tali che, per ogni $z \in U$, $I_z(V)$ è l'ideale di A_z generato da $\gamma_z(\varphi_1), \dots, \gamma_z(\varphi_N)$. In particolare,

$$U \cap V = \{z \in U : \varphi_1(z) = \cdots = \varphi_N(z) = 0\}.$$

Cominciamo dallo studio di $I_z(V)$ per z fissato. Per alleggerire la notazione supponiamo per il momento $z = 0$.

Lemma 6.5.3. Esistono in A_0 un numero finito di ideali primi $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\mu$, nessuno dei quali è contenuto in un altro, tali che

$$I_0(V) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_\mu.$$

Dimostrazione. Per il teorema 6.3.3, A_0 è noetheriano. Possiamo dunque scrivere

$$I_0(V) = \bigcap_{\sigma=1}^{\mu} \mathfrak{q}_\sigma,$$

dove $\mathfrak{q}_\sigma$ è un ideale primario associato a un ideale primo $\mathfrak{p}_\sigma$ di A_0 (si vedano ad esempio Bourbaki [1] o Zariski–Samuel [1, p. 209]). Se $f \in \bigcap_1^\mu \mathfrak{p}_\sigma$, allora per s abbastanza grande si ha $f^s \in \bigcap_1^\mu \mathfrak{q}_\sigma = I_0(V)$. Si ha dunque $f = \gamma_0(F)$ con $F \in A(U)$ per un intorno U di 0, e $F^s = 0$ su $U \cap V$. Ma allora $F = 0$ su $U \cap V$, sicché $f \in I_0(V)$. Concludiamo che $I_0(V) = \bigcap_1^\mu \mathfrak{p}_\sigma$. Basta ora omettere dall'intersezione gli ideali che ne contengono un altro.

Il passo successivo consiste nel determinare in dettaglio la struttura di un ideale primo di A_0. Grazie al teorema di Oka (teorema 6.4.1) sarà poi facile trattare le intersezioni di ideali primi.

Proposizione 6.5.4. Dopo un opportuno cambiamento lineare di coordinate, un ideale primo $\mathfrak{p} \subset A_0$, con $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ e $\mathfrak{p} \neq A_0$, ha la forma seguente.

(i) Esiste un intero ν, $0 \leq \nu < n$, tale che $\mathfrak{p} \cap A_0' = \{0\}$, dove A_0' indica l'insieme dei germi in 0 delle funzioni analitiche di $z' = (z_1, \ldots, z_\nu)$.

(ii) Per ogni $j = \nu + 1, \ldots, n$ esiste un polinomio di Weierstrass irriducibile $Q_j(z', z_j)$ di grado $\mu > 0$ in z_j, tale che $\gamma_0(Q_j) \in \mathfrak{p}$. Indichiamo con $\lambda_1(z'), \ldots, \lambda_\mu(z')$ gli zeri di $Q_{\nu+1}$ rispetto a $z_{\nu+1}$ e poniamo

$$\Delta(z') = \prod_{k \neq l} (\lambda_k(z') - \lambda_l(z')).$$

Questo discriminante di $Q_{\nu+1}$ è analitico in 0 e non è identicamente nullo.

(iii) Per $j = \nu + 2, \ldots, n$ esistono polinomi $h_j(z', z_{\nu+1})$ di grado $< \mu$ in $z_{\nu+1}$, con coefficienti analitici in $0 \in \mathbb{C}^\nu$, tali che, ponendo

$$T_j(z', z_{\nu+1}, z_j) = \Delta(z') z_j - h_j(z', z_{\nu+1}) \quad (j > \nu + 1), \qquad T_{\nu+1} = Q_{\nu+1},$$

si abbia $\gamma_0(T_j) \in \mathfrak{p}$ per $j > \nu$.

(iv) Si possono scegliere un numero finito di polinomi F_j, $1 \leq j \leq J$, in $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$, con coefficienti analitici in un intorno di 0 in $\mathbb{C}^\nu$, tali che $\mathfrak{p}$ sia generato dai $\gamma_0(Q_j)$, $\nu < j \leq n$, e dai $\gamma_0(F_j)$, $1 \leq j \leq J$. Inoltre i germi appartenenti a $\mathfrak{p}$ di polinomi di grado $< \mu$ in z_j per ogni $j = \nu + 1, \ldots, n$ costituiscono l'A_0'-modulo generato dai $\gamma_0(F_j)$.

(v) Per ogni $r > 0$ si può trovare $r' > 0$ tale che Q_j, T_j, h_j, F_j abbiano coefficienti in $A(U')$, dove $U' = \{(z_1, \ldots, z_\nu) : |z_i| < r',\ i \leq \nu\}$, e tale che per $z' \in U'$ valga

$$Q_j(z', z_j) = 0 \implies |z_j| < r, \qquad j > \nu. \tag{6.5.2}$$

Posto $U = \{z : z' \in U',\ |z_j| < r \text{ per } j > \nu\}$, ne segue che

$$V^0 = \{z \in U : \Delta(z') \neq 0,\ T_j(z) = 0 \text{ per } j > \nu\}$$

è una sottovarietà complessa connessa di U, di dimensione ν. La proiezione

$$V^0 \ni z \longmapsto z' \in U'$$

è localmente biolomorfa e la controimmagine di ogni $z' \in U'$ con $\Delta(z') \neq 0$ è costituita da μ punti.

(vi) Ogni $f \in A(U)$ con $\gamma_0(f) \in \mathfrak{p}$ si annulla sulla chiusura V di V^0 in U, e

$$V = \{z \in U : Q_j(z) = 0,\ \nu < j \leq n, \quad F_j(z) = 0,\ 1 \leq j \leq J\}.$$

(vii) Esistono un numero finito di funzioni $\Phi^1, \ldots, \Phi^\kappa \in A(U)$ tali che $\gamma_\zeta(\Phi^1), \ldots, \gamma_\zeta(\Phi^\kappa)$ generino $I_\zeta(V)$ per ogni $\zeta \in U$.

Dimostrazione. Dopo un cambiamento lineare di coordinate possiamo supporre che $\mathfrak{p}$ contenga il germe di una funzione normalizzata nella direzione z_n, e dunque il germe di un polinomio di Weierstrass

$$P_n(z) = z_n^{m_n} + a_1 z_n^{m_n - 1} + \cdots + a_{m_n},$$

dove a_j è una funzione analitica di $z_1, \ldots, z_{n-1}$ in 0. Sia ora $A_0^{(1)}$ l'anello dei germi di funzioni analitiche indipendenti da z_n. Allora $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap A_0^{(1)}$ è un ideale primo di $A_0^{(1)}$. Se $\mathfrak{p}_1 = \{0\}$, la (i) vale con $\nu = n-1$. Altrimenti cambiamo di nuovo le coordinate $z_1, \ldots, z_{n-1}$ e scegliamo un polinomio di Weierstrass $P_{n-1} \in \mathfrak{p}_1$ normalizzato nella direzione z_{n-1}.

Possiamo continuare così finché il procedimento si arresta perché vale (i). Abbiamo quindi ottenuto elementi di $\mathfrak{p}$ simili a quelli di (ii), con Q_j sostituito da un polinomio di Weierstrass $P_j(z_1, \dots, z_j)$ in z_j, di grado che indichiamo con m_j.

Dividendo successivamente per i polinomi di Weierstrass $P_n, \dots, P_{\nu+1}$ mediante il teorema 6.1.1, si vede che ogni classe del dominio d'integrità $R = A_0/\mathfrak{p}$ contiene il germe di un polinomio di grado $< m_j$ in z_j per ogni $j > \nu$. Pertanto R è finitamente generato come modulo su A'_0, e ogni suo elemento è intero su A'_0 (si veda ad esempio Zariski–Samuel [1, pp. 254 e segg.]). Indicando con $\dot{z}_j$ l'immagine di z_j in R, ne segue in particolare che ogni combinazione lineare a coefficienti complessi

$$\zeta = c_{\nu+1}\dot{z}_{\nu+1} + \cdots + c_n\dot{z}_n$$

è intera su A'_0. Il campo delle frazioni $F_\mathfrak{p}$ di R ha grado finito μ sul campo delle frazioni K'_0 di A'_0, e $F_\mathfrak{p} = K'_0R$. Per una scelta generica dei coefficienti, ζ è un elemento primitivo che genera $F_\mathfrak{p}$ su K'_0. Esso soddisfa dunque un'equazione irriducibile

$$Q(\zeta) = \zeta^\mu + a_1(z')\zeta^{\mu-1} + \cdots + a_\mu(z') = 0, \qquad a_j \in A'_0.$$

Scegliamo ora nuove coordinate $z_{\nu+1}, \dots, z_n$ che siano combinazioni lineari delle precedenti del tipo appena considerato. Per ogni $j > \nu$ l'immagine $\dot{z}_j$ in R è allora intera di grado μ su A'_0, e soddisfa quindi un'equazione irriducibile $Q_j(z', \dot{z}_j) = 0$ di grado μ con coefficiente direttivo 1. In virtù del lemma 6.1.3, dall'irriducibilità segue che Q_j è un polinomio di Weierstrass. Anche (iii) discende da proprietà generali delle estensioni intere (si veda ad esempio Zariski–Samuel [1, V, §4]), ma ne ricordiamo la dimostrazione.

Possiamo scrivere

$$\dot{z}_j = \sum_{l=0}^{\mu-1} a_l \dot{z}_{\nu+1}^{\,l}, \qquad a_l \in K'_0.$$

Se $(Y_1, Z_1), \dots, (Y_\mu, Z_\mu)$ sono le coppie coniugate di $(\dot{z}_j, \dot{z}_{\nu+1})$ su K'_0, allora

$$Y_k = \sum_{l=0}^{\mu-1} a_l Z_k^l, \qquad k = 1, \dots, \mu.$$

Per la regola di Cramer, posto $D = \det(Z_k^l)$, si ottiene

$$D^2 a_l = D \begin{vmatrix} 1 & Z_1 & \cdots & Y_1 & \cdots & Z_1^{\mu-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & Z_\mu & \cdots & Y_\mu & \cdots & Z_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix},$$

dove la colonna $(Y_1, \dots, Y_\mu)$ sostituisce la $(l+1)$-esima colonna. Il secondo membro è intero su A'_0 perché lo sono tutti gli Z_j e gli Y_k, e $D^2 = \pm\gamma_0(\Delta)$. Per il teorema 6.2.2 possiamo scrivere $D^2 a_l = b_l/c_l$, dove $b_l, c_l \in A'_0$ sono primi fra loro. L'integralità di $D^2 a_l$ su A'_0 significa che si ha un'equazione

$$b_l^N + d_1 b_l^{N-1} c_l + \cdots + d_N c_l^N = 0$$

con $d_1, \dots, d_N \in A'_0$. Dal teorema 6.2.2 segue che c_l divide b_l. Dunque $b_l/c_l = \gamma_0(B_l)$, con B_l analitica in $0 \in \mathbb{C}^\nu$. Ne concludiamo che

$$\gamma_0(\Delta)\dot{z}_j = \pm D^2 \dot{z}_j = \pm \sum_{l=0}^{\mu-1} \gamma_0(B_l)\dot{z}_{\nu+1}^{\,l},$$

il che dimostra (iii) con $h_j(z', z_{\nu+1}) = \pm \sum_{l=0}^{\mu-1} B_l(z') z_{\nu+1}^l$.

Abbiamo già verificato (iv) nel corso della dimostrazione dividendo per i polinomi $P_n, \dots, P_{\nu+1}$, per i quali prendiamo ora $Q_n, \dots, Q_{\nu+1}$. Passiamo a (v). Poiché Q_j è un polinomio di Weierstrass, per r assegnato come in (v) possiamo scegliere r' in modo che

$$|Q_j(z', z_j)| > r^\mu/2, \quad z' \in U', \quad |z_j| = r, \quad j > \nu.$$

Ne segue la (6.5.2). L'insieme

$$W = \{(z', z_{\nu+1}) \in U' \times \mathbb{C} : Q_{\nu+1}(z', z_{\nu+1}) = 0,\ \Delta(z') \neq 0\}$$

è un'ipersuperficie analitica, poiché su W si ha $\partial Q_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1} \neq 0$, e la proiezione su $U' \setminus \Delta^{-1}(0)$ ne fa un rivestimento a μ fogli. Dalla (6.5.2) sappiamo che $|z_{\nu+1}| < r$ su W. Una componente W_0 di W deve avere lo stesso numero di punti al di sopra di ciascun $z' \in U' \setminus \Delta^{-1}(0)$, poiché quest'ultimo insieme è connesso. Il prodotto $\prod(z_{\nu+1} - \lambda(z'))$, esteso a tutti i $(z', \lambda(z')) \in W_0$ sopra z', è perciò un polinomio in $z_{\nu+1}$ con coefficienti limitati e analitici in $U' \setminus \Delta^{-1}(0)$. Dal teorema 2.2.8 e dal teorema sulle singolarità eliminabili in una variabile segue che questi coefficienti si prolungano analiticamente a U'. Dall'irriducibilità di $Q_{\nu+1}$ concludiamo che $W_0 = W$, ossia che W è connesso.

È ora chiaro che

$$\widehat{W} = \left\{ \left(z', z_{\nu+1}, \frac{h_{\nu+2}(z', z_{\nu+1})}{\Delta(z')}, \dots, \frac{h_n(z', z_{\nu+1})}{\Delta(z')} \right) : (z', z_{\nu+1}) \in W \right\}$$

è connesso ed è anch'esso un rivestimento a μ fogli di $U' \setminus \Delta^{-1}(0)$. Se proviamo che per $j > \nu + 1$ si ha $Q_j(z', z_j) = 0$ su $\widehat{W}$, dalla (6.5.2) seguirà $\widehat{W} \subset U$, quindi $\widehat{W} = V^0$, il che proverà (v). Ora $\Delta^\mu Q_j$ è un polinomio in $\Delta z_j = T_j + h_j$. Sostituendo h_j a Δz_j otteniamo un polinomio $q_j \in A(U')[z_{\nu+1}]$ che coincide con $\Delta^\mu Q_j$ su $\widehat{W}$ (dove $T_j = 0$) e tale che $\gamma_0(q_j) \in \mathfrak{p}$ (poiché $\gamma_0(T_j), \gamma_0(Q_j) \in \mathfrak{p}$). La divisione fra polinomi dà

$$q_j(z', z_{\nu+1}) = Q_{\nu+1}(z', z_{\nu+1}) g(z', z_{\nu+1}) + R(z', z_{\nu+1}),$$

con R di grado $< \mu$ in $z_{\nu+1}$. L'immagine di $\gamma_0(R)$ in $F_\mathfrak{p}$ dà un'equazione per $\dot{z}_{\nu+1}$ di grado $< \mu$, che deve dunque essere identicamente nulla. Per prolungamento analitico $R = 0$, e (v) è dimostrata.

Dimostriamo (vi). Per $f \in A(U)$ possiamo trovare $g_0, g_{\nu+1}, \dots, g_n$ analitiche in U, con g_0 polinomio di grado $< \mu$ in z_j per ogni $j > \nu$, tali che

$$f = g_0 + \sum_{j=\nu+1}^{n} g_j Q_j.$$

Ciò segue applicando ripetutamente una versione globale del teorema di preparazione di Weierstrass, che dimostreremo in grande generalità nel lemma 7.6.7. Esplicitamente,

$$g_0(z) = (2\pi i)^{\nu-n} \int_{|\tau_j|=r_j} \cdots \int f(z', \tau_{\nu+1}, \dots, \tau_n) \prod_{j=\nu+1}^{n} \frac{Q_j(z', \tau_j) - Q_j(z', z_j)}{(\tau_j - z_j) Q_j(z', \tau_j)}\, d\tau_{\nu+1} \cdots d\tau_n,$$

dove $|z_j| < r_j < r$. Per dimostrare che $f = 0$ su V^0 se $\gamma_0(f) \in \mathfrak{p}$, basta dimostrare che $g_0 = 0$ su V^0. Si procede come sopra per Q_j, osservando che $\Delta^{n\mu} g_0$ è un polinomio nelle Δz_j, $j > \nu$. Sostituendo h_j a Δz_j per $j > \nu + 1$ si ottiene un polinomio $q(z', z_{\nu+1})$ che su V^0 coincide con $\Delta^{n\mu} f$ ed è divisibile per $Q_{\nu+1}$ poiché $\gamma_0(f) \in \mathfrak{p}$ implica $\gamma_0(g_0) \in \mathfrak{p}$. Pertanto $f = 0$ su V^0.

Per la chiusura V di V^0 abbiamo così dimostrato in particolare che

$$V \subset \{z \in U : Q_j(z) = 0,\ \nu < j \le n, \quad F_j(z) = 0,\ 1 \le j \le J\}.$$

Resta da vedere come scegliere gli F_j per ottenere l'inclusione inversa. Ricordiamo che per una scelta generica di $c = (c_{\nu+1}, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-\nu}$ la combinazione lineare $\zeta = \langle c, \dot{z}'' \rangle = c_{\nu+1}\dot{z}_{\nu+1} + \cdots + c_n \dot{z}_n$ è un elemento primitivo che genera $F_{\mathfrak{p}}$ ed è intero su A_0'. Pertanto ζ soddisfa un'equazione irriducibile

$$q_c(\zeta, z') = \zeta^\mu + \gamma_0(a_1(z'))\zeta^{\mu-1} + \cdots + \gamma_0(a_\mu(z')) = 0$$

con coefficienti in A_0'. Dunque $q_c(\langle c, \gamma_0(z'')\rangle, z') \in \mathfrak{p}$, e si ha

$$\widehat{q}_c(t, z') = t^\mu + a_1(z')t^{\mu-1} + \cdots + a_\mu(z') = 0 \quad \text{se } t = \langle c, z'' \rangle,\ (z', z'') \in V,$$

purché r' sia tanto piccolo che tutte le a_j siano analitiche in U'. Quindi $Q_c(z) = \widehat{q}_c(\langle c, z''\rangle, z')$ si annulla su V. Se $z' \in U' \setminus \Delta^{-1}(0)$ e (z', z_j'') sono i punti di V^0 sopra z', si ottiene

$$\widehat{q}_c(t, z') = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \langle c, z_j'' \rangle).$$

Quando $\Delta(z') = 0$, prendiamo una successione $z_l' \to z'$ con $\Delta(z_l') \neq 0$ e concludiamo che la formula vale ancora per opportuni punti $(z', z_j'') \in V$, eventualmente ripetuti. Quindi

$$Q_c(z) = \widehat{q}_c(\langle c, z''\rangle, z') = \prod_{j=1}^{\mu} \langle c, z'' - z_j'' \rangle$$

può annullarsi soltanto se $\langle c, z'' - z_j''\rangle = 0$ per qualche j. Scegliamo ora $\mu(n-\nu-1)+1$ vettori $c^k \in \mathbb{C}^{n-\nu}$ con le proprietà richieste sopra, in modo che comunque si prendano $n-\nu$ di essi risultino linearmente indipendenti. Allora per ogni scelta di $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu \in \mathbb{C}^{n-\nu}$ vale

$$\zeta_j \neq 0 \text{ per ogni } j \implies \exists k \quad \langle c^k, \zeta_j \rangle \neq 0 \text{ per ogni } j.$$

Infatti $\langle c^k, \zeta_j \rangle = 0$ significa che c^k appartiene a un iperpiano e, per ipotesi, nessun iperpiano contiene più di $n-\nu-1$ dei vettori scelti. Il minimo $\min_{1\le j\le\mu} |\langle c^k, \zeta_j\rangle|$ può quindi annullarsi per al più $\mu(n-\nu-1)$ vettori c^k. Ne abbiamo scelto uno in più, e questo prova l'asserzione. Includendo i Q_{c^k} tra i polinomi F_j di (iv) si vede che gli zeri comuni di tutti gli F_j appartengono a V. Ciò conclude la dimostrazione di (vi).

Per dimostrare (vii), consideriamo una funzione f analitica in un intorno di $\zeta \in U$, con $\gamma_\zeta(f) \in I_\zeta(V)$. Per $j > \nu$ sia W_j il polinomio di Weierstrass in $z - \zeta$ equivalente a Q_j in ζ; si ha dunque $Q_j = H_j W_j$ vicino a ζ, dove H_j è un polinomio in z_j a coefficienti analitici in z' vicino a ζ', e $H_j(\zeta) \neq 0$. Dividendo $f_1 = f / \prod_{j>\nu} H_j$ per i W_j, $j > \nu$, mediante il teorema di preparazione di Weierstrass, si vede che $\gamma_\zeta(f_1)$ è congruo, modulo l'ideale generato da $\gamma_\zeta(Q_{\nu+1}), \dots, \gamma_\zeta(Q_n)$, al germe di un polinomio g il cui grado in z_j è inferiore a quello di W_j per $j > \nu$. Pertanto $\gamma_\zeta(f)$ è congruo al germe di $\Phi = g\prod_{j>\nu} H_j$, polinomio di grado $< \mu$ in ciascuna z_j, $j > \nu$. In ogni punto $(\zeta', z'') \in V$ con $z'' \neq \zeta''$ si ha $z_j \neq \zeta_j$ per qualche $j > \nu$; dunque $W_j \neq 0$ e $H_j = 0$ in un intorno relativo a V di quel punto, e anche Φ vi si annulla. Poiché $\gamma_\zeta(\Phi) \in I_\zeta(V)$, esiste allora una palla $U_\zeta' \subset \mathbb{C}^\nu$ di centro ζ' nella quale i coefficienti di Φ sono analitici e tale che

$$\Phi = 0 \quad \text{su } V \cap (U_\zeta' \times \mathbb{C}^{n-\nu}).$$

Scriviamo

$$\Phi(z) = \sum_{\alpha} \Phi_\alpha(z')(z'')^\alpha, \qquad \Phi_\alpha \in A(U'_\zeta), \tag{6.5.3}$$

dove $\alpha_j < \mu$ per ogni j. Il prodotto $\Delta^{\mu n}\Phi(z)$ è allora un polinomio in $\Delta z''$. Sostituendo $\Delta z_j = T_j + h_j$ per $j > \nu + 1$, otteniamo

$$\Delta^{\mu n}\Phi(z) = \sum_{j>\nu+1} \psi_j(z)T_j(z) + R(z', z_{\nu+1}),$$

dove ψ_j è un polinomio di grado fissato in z'' e $R(z', z_{\nu+1}) = 0$ in tutti gli zeri di $Q_{\nu+1}$ in $U'_\zeta \times \mathbb{C}^{n-\nu}$. Pertanto R è divisibile per $T_{\nu+1}$, e possiamo scrivere

$$\Delta^{\mu n}\Phi(z) = \sum_{j>\nu} \psi_j(z)T_j(z), \quad z \in U'_\zeta \times \mathbb{C}^{n-\nu}, \tag{6.5.4}$$

dove, per un certo N fissato,

$$\psi_j(z) = \sum_{|\alpha|<N} \psi_{j\alpha}(z')(z'')^\alpha, \qquad \psi_{j\alpha} \in A(U'_\zeta). \tag{6.5.5}$$

Scritte esplicitamente, le (6.5.3), (6.5.4), (6.5.5) costituiscono un sistema di relazioni nelle incognite Φ_α e $\psi_{j\alpha}$, a coefficienti in $A(U')$. Dal teorema 6.4.1 segue dunque che esistono un intorno $U'_1 \subset U'$ di 0 e un numero finito di polinomi $\Phi^1, \dots, \Phi^\kappa$ in $z_{\nu+1}, \dots, z_n$ a coefficienti in $A(U')$ che per ogni $\zeta' \in U'_1$ generano l'$A'_{\zeta'}$-modulo dei germi di tutti i polinomi Φ di grado $< \mu$ in z_j, $j > \nu$, con coefficienti analitici in ζ' e che si annullano su V in un intorno di $\{\zeta'\} \times \mathbb{C}^{n-\nu}$. Sostituendo U' con U'_1, le funzioni $\Phi^1, \dots, \Phi^\kappa$ insieme a $Q_{\nu+1}, \dots, Q_n$ hanno le proprietà richieste in (vii). La dimostrazione è conclusa.

Dimostrazione del teorema 6.5.2. Poiché l'enunciato è locale, possiamo supporre che esista una famiglia $f_i \in A(\Omega)$, $i \in J_\Omega$, tale che

$$V = \{z \in \Omega : f_i(z) = 0,\ i \in J_\Omega\}.$$

Mostreremo che se $0 \in \Omega$ esiste un intorno U di 0 con le proprietà enunciate. Per il lemma 6.5.3 si ha

$$I_0(V) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_\mu,$$

con $\mathfrak{p}_\sigma$ ideali primi di A_0. Per ciascuno di essi la proposizione 6.5.4 permette di scegliere un intorno $U_\sigma \subset \Omega$ di 0 e un insieme analitico $V_\sigma \subset U_\sigma$ con le proprietà ivi enunciate. Poiché $\gamma_0(f_i) \in I_0(V) \subset \mathfrak{p}_\sigma$, in particolare $f_i = 0$ su V_σ per ogni $i \in J_\Omega$, quindi $V_\sigma \subset V$ e $\bigcup_1^\mu V_\sigma \subset V$. Per ogni σ, dalla parte (vii) della proposizione 6.5.4 abbiamo un numero finito di funzioni $\Phi^k_\sigma \in A(U_\sigma)$, $1 \le k \le K(\sigma)$, tali che

$$V_\sigma = \{z \in U_\sigma : \Phi^k_\sigma(z) = 0,\ 1 \le k \le K(\sigma)\}.$$

Se $1 \le k(\sigma) \le K(\sigma)$, si ha

$$\Phi(z) = \prod_{\sigma=1}^{\mu} \Phi^{k(\sigma)}_\sigma(z) \in A\left(\bigcap_{\sigma=1}^{\mu} U_\sigma\right), \qquad \gamma_0(\Phi) \in \bigcap_{\sigma=1}^{\mu} \mathfrak{p}_\sigma = I_0(V).$$

Poiché tali prodotti sono in numero finito, possiamo scegliere un intorno $U \subset \bigcap_1^\mu U_\sigma$ di 0 tale che tutti questi Φ si annullino su $U \cap V$. L'insieme dei loro zeri comuni in U è $\bigcup_1^\mu (U \cap V_\sigma)$, quindi $U \cap V \subset \bigcup_1^\mu (U \cap V_\sigma)$. Avendo già provato l'inclusione inversa, otteniamo

$$U \cap V = \bigcup_{\sigma=1}^{\mu} (U \cap V_\sigma).$$

Per ogni $\zeta \in U$ si ha

$$I_\zeta(V) = \bigcap_{\sigma=1}^{\mu} I_\zeta(V_\sigma).$$

Infatti $I_\zeta(V) \subset I_\zeta(V_\sigma)$ poiché $U \cap V_\sigma \subset U \cap V$. Se poi f è analitica in un intorno di ζ e $\gamma_\zeta(f) \in \bigcap_1^\mu I_\zeta(V_\sigma)$, esiste un intorno $U_\zeta \subset U$ di ζ tale che $f = 0$ su $U_\zeta \cap V_\sigma$ per $\sigma = 1, \dots, \mu$; dunque $f = 0$ su $U_\zeta \cap V$.

Per $\mu = 1$ il teorema è così dimostrato. Per provarlo per valori maggiori di μ supponiamolo già dimostrato per i valori inferiori. Si può allora trovare un intorno U di 0 come sopra, tale che per $\zeta \in U$

$$\begin{aligned} &\bigcap_{\sigma=1}^{\mu-1} I_\zeta(V_\sigma) \text{ sia generato da } \gamma_\zeta(\varphi_1), \dots, \gamma_\zeta(\varphi_N), \\ &\qquad I_\zeta(V_\mu) \text{ sia generato da } \gamma_\zeta(\psi_1), \dots, \gamma_\zeta(\psi_{N'}), \end{aligned}$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_N, \psi_1, \dots, \psi_{N'} \in A(U)$. Se $f \in \bigcap_1^\mu I_\zeta(V_\sigma)$, possiamo quindi scrivere

$$f = \sum_{j=1}^{N} f_j \gamma_\zeta(\varphi_j) = \sum_{j=1}^{N'} g_j \gamma_\zeta(\psi_j), \qquad f_j, g_j \in A_\zeta.$$

Pertanto $(f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_{N'})$ è una relazione fra $(\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_{N'})$ del tipo considerato nel teorema 6.4.1. Per quel teorema, in un opportuno intorno $\widetilde{U} \subset U$ di 0 esistono

$$(f_1^l, \dots, f_N^l, g_1^l, \dots, g_{N'}^l) \in A(\widetilde{U})^{N+N'}, \qquad l = 1, \dots, L,$$

che generano tali relazioni in ogni $\zeta \in \widetilde{U}$. Quindi per $\zeta \in \widetilde{U}$

$$(f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_{N'}) = \sum_{l=1}^{L} h_l \gamma_\zeta(f_1^l, \dots, f_N^l, g_1^l, \dots, g_{N'}^l), \qquad h_l \in A_\zeta.$$

Poniamo

$$\Phi^l = f_1^l \varphi_1 + \cdots + f_N^l \varphi_N = g_1^l \psi_1 + \cdots + g_{N'}^l \psi_{N'} \in A(\widetilde{U}),$$

dove la seconda uguaglianza discende dalla definizione delle relazioni. Le due rappresentazioni di Φ^l mostrano che $\gamma_\zeta(\Phi^l) \in \bigcap_1^\mu I_\zeta(V_\sigma)$ per ogni $\zeta \in \widetilde{U}$. Poiché

$$f = \sum_{l=1}^{L} h_l \gamma_\zeta(\Phi^l),$$

il teorema è dimostrato.

Completiamo infine la proposizione 6.5.4 con un lemma che nel paragrafo 7.4 ci darà un importante risultato sulle funzioni analitiche su un insieme analitico.

Lemma 6.5.5. Nella situazione della proposizione 6.5.4, per ogni $f \in A(U)$ si può trovare $g \in A(U)$, dipendente linearmente da f, tale che $g = \Delta^{\mu n+1} f$ su V e, per ogni $K' \subset U'$,

$$\sup_{U \cap K} |g| \le C \sup_{V \cap K} |f|, \qquad K = K' \times \mathbb{C}^{n-\nu}. \tag{6.5.6}$$

Dimostrazione. Dividendo f per $Q_{\nu+1}, \dots, Q_n$ mediante il lemma 7.6.7 come nella dimostrazione della proposizione 6.5.4, si vede che esiste un polinomio F di grado $< \mu$ in ogni z_j, $j > \nu$, con coefficienti in $A(U')$, tale che $F = f$ su V. Dunque $\Delta^{\mu n} F$ è un

polinomio in $\Delta z''$ e, poiché $\Delta z_j = h_j(z', z_{\nu+1})$ su V per $j > \nu + 1$, la sostituzione di h_j a Δz_j dà un polinomio $F_1(z', z_{\nu+1})$ in $z_{\nu+1}$ con coefficienti in $A(U')$, uguale a $\Delta^{\mu n} f$ su V. Sia $R(z', z_{\nu+1})$ il resto della divisione polinomiale per $Q_{\nu+1}(z', z_{\nu+1})$. Allora $R(z', z_{\nu+1})$ ha grado $< \mu$ e $R(z', z_{\nu+1}) = \Delta^{\mu n} f(z)$ quando $Q_{\nu+1}(z', z_{\nu+1}) = 0$, $\Delta(z') \neq 0$, $z \in V$. Esprimendo $R(z', z_{\nu+1})$ con la formula di interpolazione di Lagrange e moltiplicando per Δ per eliminare i denominatori, otteniamo

$$\Delta(z')R(z', z_{\nu+1}) = \sum_{j=1}^{\mu} \prod_{i \neq j} \left((z_{\nu+1} - \lambda_i(z'))(\lambda_i(z') - \lambda_j(z'))\right) \times \prod_{i \neq l,\ l \neq j,\ j \neq i} (\lambda_i(z') - \lambda_l(z'))\, R(z', \lambda_j(z')),$$

dove $\lambda_1(z'), \ldots, \lambda_\mu(z')$ sono gli zeri di $Q_{\nu+1}(z', z_{\nu+1})$. Ciò dimostra che $g = \Delta R$ soddisfa la stima enunciata e conclude la dimostrazione, poiché $g = \Delta^{\mu n+1} f$ su V.

Note. Il teorema di Oka dimostrato nel paragrafo 6.4 è apparso per la prima volta in Oka [4]. Senza di esso non si potrebbe esporre la teoria dei fasci analitici coerenti. Nel paragrafo 6.5 gli insiemi analitici sono trattati brevemente. Il punto centrale è la dimostrazione della coerenza del fascio dei germi di funzioni che si annullano su un insieme analitico (Cartan [3], Oka [6]). Per una trattazione più dettagliata rimandiamo a Gunning e Rossi [1] o a Hervé [1].

Capitolo VII
Fasci analitici coerenti sulle varietà di Stein

Sommario. In questo capitolo lo studio dei problemi di Cousin viene esteso ai fasci analitici coerenti sulle varietà di Stein. Nel paragrafo 7.1 si danno le definizioni di fascio, di fascio analitico e di fascio analitico coerente. In termini approssimativi, esse significano che le sezioni di un fascio analitico coerente possono essere descritte localmente, per un opportuno intero p, come p-uple di funzioni analitiche modulo un sottomodulo finitamente generato di tali p-uple. È quindi facile estendere localmente alcuni risultati sulle funzioni analitiche a teoremi sulle sezioni di fasci analitici coerenti. Il principale problema nuovo consiste dunque nell'ottenere risultati globali. Il risultato fondamentale è l'esistenza di sezioni globali dei fasci analitici coerenti sulle varietà di Stein, dimostrata nel paragrafo 7.2 (teorema A di Cartan). Si esamina poi il primo problema di Cousin sostituendo alle funzioni analitiche le sezioni di un fascio analitico coerente. Questa estensione richiede una generalizzazione dei problemi di Cousin che si esprime mediante la nozione di gruppo di coomologia a valori in un fascio, introdotta nel paragrafo 7.3. (Per una trattazione più dettagliata delle proprietà fondamentali dei fasci e dei gruppi di coomologia si rimanda a Serre [1].) In questa terminologia, la risolubilità del primo problema di Cousin significa precisamente che il primo gruppo di coomologia è nullo. Nel paragrafo 7.4 dimostriamo dapprima che sono nulli tutti i gruppi di coomologia di ordine positivo del fascio dei germi di funzioni analitiche. Il fatto di considerare i gruppi di coomologia di tutti gli ordini permette di estendere facilmente questo risultato ai fasci analitici coerenti, grazie all'esistenza delle sezioni globali. Si ottiene così il teorema B di Cartan. Nel paragrafo 7.5 esponiamo il teorema classico di de Rham sul legame tra i gruppi di coomologia a coefficienti complessi e l'esistenza di forme differenziali chiuse. Nel paragrafo 7.6 torniamo ai fasci analitici coerenti. Limitandoci ai fasci su $\mathbb{C}^n$ con generatori polinomiali, stabiliamo una versione quantitativa del teorema B. Più precisamente, studiamo sistemi di equazioni della forma $Pu = f$, dove P è una matrice rettangolare a elementi polinomiali e u, f sono rispettivamente una s-upla e una t-upla di funzioni analitiche. Se per il dato analitico f esistono soluzioni locali, il teorema B implica l'esistenza di una soluzione analitica u. I risultati del paragrafo 7.6 danno inoltre una soluzione u che, in termini approssimativi, ha la stessa crescita di f. La dimostrazione segue quella del teorema B, ma richiede stime accurate a ogni passo. Dobbiamo quindi servirci dei risultati del paragrafo 4.4 e riesaminare la teoria locale del capitolo VI. Come applicazione, accenniamo brevemente alla dimostrazione di alcuni teoremi di esistenza per sistemi sovradeterminati di equazioni alle derivate parziali a coefficienti costanti. Infine il paragrafo 7.7 è dedicato allo studio dei moduli con generatori polinomiali. Gli argomenti sono strettamente legati a quelli del paragrafo 6.5, ma sono quantitativi e riguardano moduli generali. Lo scopo è dimostrare nella sua interezza il «principio fondamentale» di Ehrenpreis sulla rappresentazione delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti come integrali su famiglie di soluzioni esponenziali.

7.1. Definizione di fascio

Sia Ω una varietà complessa. Come si è spiegato nel paragrafo 6.2, per ogni $z \in \Omega$ abbiamo un anello A_z di germi in z di funzioni analitiche in un intorno di z. Poniamo

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in \Omega} A_z,$$

considerando gli anelli A_z come insiemi disgiunti. Per ogni aperto ω di Ω e ogni $f \in A(\omega)$ otteniamo un'applicazione

$$\omega \ni z \longmapsto \gamma_z(f) \in \mathcal{A}, \tag{7.1.1}$$

che naturalmente determina f in modo univoco, poiché $f(z) = (\gamma_z(f))(z)$. Se π è l'applicazione $\mathcal{A} \to \Omega$ che manda A_z in z, la composizione di (7.1.1) con π è l'identità su ω. Vogliamo introdurre su $\mathcal{A}$ una topologia tale che siano continue tutte le applicazioni della forma (7.1.1), con $f \in A(\omega)$, e viceversa ogni applicazione continua φ da un aperto $\omega \subset \Omega$ in $\mathcal{A}$ per la quale $\pi\varphi$ è l'identità su ω sia definita secondo (7.1.1) da una funzione $f \in A(\omega)$.

Supponiamo di avere su $\mathcal{A}$ una topologia per la quale l'applicazione (7.1.1) sia continua per ogni f analitica. Sia U un aperto di $\mathcal{A}$ e sia $F \in U$. Per definizione di $\mathcal{A}$ esistono un punto $z \in \Omega$ e una funzione f analitica in un intorno ω di z tali che $\gamma_z(f) = F$. Se (7.1.1) è continua, deve quindi esistere un intorno $\omega' \subset \omega$ di z tale che

$$\{f, \omega'\} = \{\gamma_\zeta(f) : \zeta \in \omega'\} \subset U.$$

Ogni aperto di $\mathcal{A}$ è pertanto unione di insiemi della forma $\{f, \omega\}$ con $f \in A(\omega)$ e ω aperto. Viceversa, tutte le applicazioni (7.1.1) sono continue se la topologia di $\mathcal{A}$ ha questa proprietà.

Se $f' \in A(\omega')$ e $f'' \in A(\omega'')$, con ω' e ω'' aperti, si ha

$$\{f', \omega'\} \cap \{f'', \omega''\} = \{f', \omega\} = \{f'', \omega\},$$

dove

$$\omega = \{z : z \in \omega' \cap \omega'',\ \gamma_z(f') = \gamma_z(f'')\}$$

è aperto. Possiamo dunque prendere gli insiemi $\{f, \omega\}$, con $f \in A(\omega)$ e ω aperto in Ω, come base degli aperti di una topologia su $\mathcal{A}$. Per definizione, gli aperti di $\mathcal{A}$ sono allora tutte le unioni di insiemi della forma $\{f, \omega\}$. Questa è la topologia più fine per la quale tutte le applicazioni (7.1.1) sono continue. Essa soddisfa l'assioma di separazione di Hausdorff. Infatti, se $f_z \neq g_w$, può accadere che $z \neq w$, e in tal caso f_z e g_w hanno evidentemente intorni disgiunti, oppure che $z = w$. In quest'ultimo caso sia ω un intorno connesso di z nel quale f e g sono analitiche. Gli intorni $\{f, \omega\}$ e $\{g, \omega\}$ di $\gamma_z(f)$ e $\gamma_z(g)$ sono disgiunti. Altrimenti f e g definirebbero lo stesso germe in un punto di ω e, per il principio del prolungamento analitico, avremmo $f = g$ in ω, in particolare $f_z = g_z$, il che è assurdo. Osserviamo infine che, se ω è aperto e $f \in A(\omega)$, la restrizione di π a $\{f, \omega\}$ è un omeomorfismo su ω, inverso di (7.1.1).

Sia ora ω un aperto di Ω e sia $\varphi : \omega \to \mathcal{A}$ un'applicazione continua per la topologia appena definita, tale che $\pi\varphi$ sia l'identità. Sia $f(z)$ il valore in z del germe $\varphi(z) \in A_z$. Allora $f \in A(\omega)$ e $\varphi(z) = \gamma_z(f)$ per ogni $z \in \omega$. Infatti, per la definizione della topologia di $\mathcal{A}$, ogni punto di ω ha un intorno ω' nel quale esiste una funzione analitica g tale che $\varphi(z) \in \{g, \omega'\}$, ossia $\varphi(z) = \gamma_z(g)$, per ogni $z \in \omega'$. Ne segue $g = f$ in ω'.

Con la topologia introdotta possiamo dunque identificare le funzioni analitiche con le sezioni di $\mathcal{A}$, adottando la definizione di sezione di un fibrato usata nel paragrafo 5.6. Lo spazio $\mathcal{A}$ è un esempio di fascio. Prendiamo come definizione le sue proprietà caratteristiche.

Definizione 7.1.1. Siano X e $\mathcal{F}$ due spazi topologici (anche non di Hausdorff) e sia $\pi : \mathcal{F} \to X$ un'applicazione tale che

(i) π manda $\mathcal{F}$ su tutto X;

(ii) π è un omeomorfismo locale, ossia ogni punto di $\mathcal{F}$ ha un intorno aperto che π manda omeomorficamente su un aperto di X.

Si dice allora che $\mathcal{F}$ è un *fascio* su X, e si chiama π la *proiezione* su X. Se U è un sottoinsieme di X, si chiama *sezione* di $\mathcal{F}$ su U un'applicazione continua $\varphi : U \to \mathcal{F}$ tale che $\pi\varphi$ sia l'identità su U. L'insieme di tutte le sezioni di $\mathcal{F}$ su U è indicato con $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Se $x \in X$, si chiama *spiga* di $\mathcal{F}$ in x l'insieme $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(\{x\})$.

Dalla (ii) segue che $\varphi(U)$ è aperto in $\mathcal{F}$ se U è aperto in X e $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, e che gli aperti di $\mathcal{F}$ sono unioni di insiemi di questo tipo. Osserviamo inoltre che, se $\varphi, \psi \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ e $\varphi(z) = \psi(z)$ per qualche $z \in U$, si ha $\varphi(\zeta) = \psi(\zeta)$ per tutti gli $\zeta \in U$ in un intorno di z. Possiamo perciò considerare ogni elemento di $\mathcal{F}$ come un germe di sezioni di $\mathcal{F}$. Per una sezione φ scriveremo spesso φ_z in luogo di $\varphi(z)$.

Esempi. (1) Il fascio $\mathcal{A}$ dei germi di funzioni analitiche su una varietà complessa Ω è un fascio su Ω.

(2) Su una varietà C^∞ si può definire allo stesso modo il fascio dei germi di funzioni C^∞, di solito denotato con $\mathcal{E}$, le cui sezioni sono le funzioni C^∞. In questo caso l'assioma di Hausdorff non è soddisfatto. Infatti, se f è di classe C^∞ in un intorno di x e x è un punto della frontiera del complementare del supporto di f, ogni intorno di f_x incontra ogni intorno di 0_x.

(3) Se F è uno spazio topologico con la topologia discreta, $\mathcal{F} = X \times F$ è un fascio (detto *fascio costante*).

I fasci che ci interessano hanno anche una struttura algebrica. Diremo che $\mathcal{F}$ è un *fascio di gruppi abeliani* se $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ è un gruppo abeliano per ogni x e, date due sezioni φ, ψ di $\mathcal{F}$ su un aperto U, l'applicazione $U \ni x \mapsto \varphi(x) - \psi(x) \in \mathcal{F}$ è una sezione. In modo analogo si definisce la nozione di fascio di anelli richiedendo che tutte le operazioni algebriche dell'anello, applicate alle sezioni, diano sezioni. È chiaro che il fascio $\mathcal{A}$ dei germi di funzioni analitiche su una varietà complessa è un fascio di anelli. Se $\mathcal{O}$ è un fascio di anelli su X, si chiama *fascio di $\mathcal{O}$-moduli* un fascio di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F}_x$ sia un $\mathcal{O}_x$-modulo per ogni $x \in X$ e il prodotto di una sezione di $\mathcal{O}$ per una sezione di $\mathcal{F}$ sia una sezione di $\mathcal{F}$. Quando X è una varietà complessa e $\mathcal{O}$ è il fascio $\mathcal{A}$ dei germi di funzioni analitiche, diciamo che $\mathcal{F}$ è un *fascio analitico*.

Esempio. Se B è un fibrato vettoriale analitico su una varietà complessa Ω, il fascio dei germi di sezioni analitiche di B è un fascio analitico.

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci di gruppi abeliani su X, si chiama *omomorfismo di fasci* un'applicazione $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tale che

(i) φ è continua;

(ii) la restrizione di φ a $\mathcal{F}_x$ è un omomorfismo di gruppi da $\mathcal{F}_x$ in $\mathcal{G}_x$.

La condizione (i) significa precisamente che la composizione di una sezione di $\mathcal{F}$ con φ è una sezione di $\mathcal{G}$.

Il nucleo $\ker\varphi$ e l'immagine $\operatorname{im}\varphi$ di φ sono *sottofasci* rispettivamente di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, ossia sono sottoinsiemi aperti di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Ciò segue immediatamente dalle definizioni.

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci di gruppi abeliani su X e $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{G}$, allora $\mathcal{H}_x = \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$ è un gruppo abeliano e $\mathcal{H} = \bigcup_x \mathcal{H}_x$, munito della topologia quoziente, è un fascio. Le sezioni di $\mathcal{H}$ sono allora localmente (ma non necessariamente globalmente!) immagini di sezioni di $\mathcal{G}$. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci analitici, anche $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ è un fascio analitico.

Esempio 1. Sia Ω una varietà complessa e sia $\mathcal{M}_z$ il campo delle frazioni di $\mathcal{A}_z$. Allora $\mathcal{M} = \bigcup_z \mathcal{M}_z$ è un fascio per la topologia generata dagli insiemi $\{f_z/g_z : z \in \omega\}$, dove

$\omega \subset \Omega$ è aperto, $f, g \in A(\omega)$ e $g_z \neq 0$ per ogni $z \in \omega$. Si chiama *fascio dei germi di funzioni meromorfe* e le sue sezioni si chiamano *funzioni meromorfe*. (Questa definizione è identica alla definizione 1.4.1, sebbene meno esplicita.) Osserviamo che, in virtù del teorema 6.2.3, parte (ii), non è possibile assegnare a ciascun germe di funzione meromorfa un valore nel piano complesso esteso in modo che ogni funzione meromorfa in ω dia luogo a una funzione continua $\omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Assegnare i dati del primo problema di Cousin equivale precisamente ad assegnare una sezione del fascio quoziente $\mathcal{M}/\mathcal{A}$. Il problema di Cousin consiste quindi nel determinare se una data sezione di $\mathcal{M}/\mathcal{A}$ sia immagine di una sezione di $\mathcal{M}$.

Esempio 2. Togliendo da $\mathcal{M}$ la sezione nulla, si ottiene un fascio $\mathcal{M}^*$ di gruppi abeliani (con la moltiplicazione come operazione di gruppo). Esso contiene come sottofascio il fascio $\mathcal{A}^*$ degli elementi invertibili di $\mathcal{A}$, ossia delle unità di $\mathcal{A}$. Il fascio $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{A}^*$ si chiama *fascio dei divisori* su Ω. La spiga $\mathcal{D}_z$ è un gruppo abeliano ordinato se si assume come insieme degli elementi positivi l'immagine di $\mathcal{A}_z \setminus \{0\}$ in $\mathcal{D}_z$. Dal teorema 6.2.2 segue che $\mathcal{D}_z$ è il gruppo abeliano libero generato dalle classi in $\mathcal{D}_z$ degli elementi irriducibili di A_z, con la relazione d'ordine naturale, per cui $\mathcal{D}_z$ è un reticolo. (Si osservi che per $n = 1$ le sezioni di $\mathcal{D}$ sono semplicemente le funzioni a valori interi su Ω nulle al di fuori di un insieme discreto di punti.) Se φ e ψ sono sezioni di $\mathcal{D}$, anche $\sup(\varphi, \psi)$ e $\inf(\varphi, \psi)$ sono sezioni di $\mathcal{D}$ nel dominio comune di definizione di φ e ψ. Basta provare l'asserzione per $\inf(\varphi, \psi)$ in un intorno di un punto z_0 dove $\inf(\varphi_{z_0}, \psi_{z_0}) = 0$. Per ogni z in un intorno ω di z_0, il germe $\varphi(z)$ è l'immagine in $\mathcal{D}_z$ del germe f_z di una funzione $f \in A(\omega)$, e $\psi(z)$ è l'immagine del germe g_z di una funzione $g \in A(\omega)$. I germi f_{z_0} e g_{z_0} sono primi fra loro. Per il teorema 6.2.3, parte (i), f_z e g_z sono allora primi fra loro per ogni z in un intorno ω' di z_0. Dunque $\inf(\varphi, \psi) = 0$ in ω', come si voleva.

Il secondo problema di Cousin si può formulare così. Data una sezione del fascio quoziente $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{A}^*$, trovare una sezione di $\mathcal{M}^*$ che abbia per immagine la sezione assegnata mediante l'applicazione canonica di $\mathcal{M}^*$ su $\mathcal{M}^*/\mathcal{A}^*$.

Definiamo infine la *somma diretta* $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ di due fasci di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. È il fascio la cui spiga in x è la somma diretta di $\mathcal{F}_x$ e $\mathcal{G}_x$, con la topologia indotta da $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ considerando $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ come sottoinsieme di questo prodotto topologico. Ciò significa che le sezioni di $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ sono le somme dirette delle sezioni di $\mathcal{F}$ e di quelle di $\mathcal{G}$. La somma di p copie del fascio $\mathcal{F}$ sarà indicata con $\mathcal{F}^p$.

I fasci analitici arbitrari sono troppo generali per i nostri scopi. Occorre introdurre una condizione restrittiva.

Definizione 7.1.2. Un fascio analitico $\mathcal{F}$ sulla varietà complessa Ω si dice *localmente finitamente generato* se per ogni $z \in \Omega$ esistono un intorno $\omega \subset \Omega$ e un numero finito di sezioni $f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(\omega, \mathcal{F})$ tali che per ogni $z \in \omega$ la spiga $\mathcal{F}_z$ sia generata, come A_z-modulo, da $(f_1)_z, \ldots, (f_q)_z$.

Esempio. Il fascio dei germi di sezioni analitiche di un fibrato vettoriale analitico è localmente finitamente generato.

Lemma 7.1.3. Se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico localmente finitamente generato e $f_1, \ldots, f_q$ sono sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di z tali che $(f_1)_z, \ldots, (f_q)_z$ generino $\mathcal{F}_z$, allora $(f_1)_\zeta, \ldots, (f_q)_\zeta$ generano $\mathcal{F}_\zeta$ per ogni ζ in un intorno di z.

Dimostrazione. Siano $g_1, \ldots, g_r$ sezioni tali che $(g_1)_\zeta, \ldots, (g_r)_\zeta$ generino $\mathcal{F}_\zeta$ per ogni ζ in un intorno di z. Per ipotesi esistono funzioni analitiche c_{ij} in un intorno di z tali che

$$(g_i)_z = \sum_{j=1}^{q} (c_{ij})_z (f_j)_z, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Allora si ha

$$(g_i)_\zeta = \sum_{j=1}^{q} (c_{ij})_\zeta (f_j)_\zeta$$

per tutti gli ζ in un intorno di z, il che dimostra il lemma.

Se $f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(\omega, \mathcal{F})$, con ω aperto in Ω, il nucleo dell'omomorfismo di fasci

$$\mathcal{A}^q \supset A_z^q \ni (g^1, \ldots, g^q) \longmapsto \sum_{j=1}^{q} g^j (f_j)_z \in \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}$$

è un sottofascio $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q)$ di $\mathcal{A}^q$ su ω, detto *fascio delle relazioni* fra $f_1, \ldots, f_q$.

Definizione 7.1.4. Un fascio analitico $\mathcal{F}$ su Ω si dice *coerente* se

(i) $\mathcal{F}$ è localmente finitamente generato;

(ii) per ogni aperto ω di Ω e ogni scelta di $f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(\omega, \mathcal{F})$, il fascio delle relazioni $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q)$ è localmente finitamente generato.

Teorema 7.1.5. Ogni sottofascio localmente finitamente generato di $\mathcal{A}^p$ è coerente.

Dimostrazione. È un'altra formulazione del teorema di Oka (teorema 6.4.1).

In particolare, $\mathcal{A}^p$ è un fascio analitico coerente, e lo stesso vale per il fascio dei germi di sezioni analitiche di un fibrato vettoriale analitico.

Teorema 7.1.6. Se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico coerente su Ω e $f_1, \ldots, f_q$ sono sezioni di $\mathcal{F}$ sull'aperto ω di Ω, anche il fascio $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q)$ è coerente.

Dimostrazione. Segue dal teorema 7.1.5 e dalla parte (ii) della definizione 7.1.4.

Esempio. Esistono sottofasci di $\mathcal{A}$ che non sono coerenti. Sia infatti ω un sottoinsieme di Ω con $\varnothing \neq \omega \neq \Omega$ e poniamo $\mathcal{F}_z = \mathcal{A}_z$ se $z \in \omega$, $\mathcal{F}_z = 0$ se $z \in \Omega \setminus \omega$. Si ottiene un sottofascio di $\mathcal{A}$ se e solo se ω è aperto. Una sua sezione su un aperto connesso che incontri $\Omega \setminus \omega$ deve però essere nulla per l'unicità del prolungamento analitico. Quindi $\mathcal{F}$ non è finitamente generato in alcun intorno di un punto della frontiera di ω.

Teorema 7.1.7. Sia $\mathcal{G}$ un sottofascio del fascio analitico $\mathcal{F}$. Se due dei fasci $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ sono coerenti, tutti e tre sono coerenti.

Lasciamo al lettore come esercizio la dimostrazione, semplice ma piuttosto lunga. (Si veda anche Serre [1] per una trattazione molto più approfondita di tutti gli argomenti toccati in questo paragrafo.)

7.2. Esistenza di sezioni globali di un fascio analitico coerente

In questo paragrafo estenderemo il corollario 5.6.3 a un teorema di esistenza di sezioni di un fascio analitico coerente arbitrario. Diamo dapprima una versione semiglobale. Per abbreviare gli enunciati diremo che le sezioni $f_1, \ldots, f_q$ di un fascio analitico $\mathcal{F}$ su un aperto ω vi generano $\mathcal{F}$ se, per ogni $z \in \omega$, i germi $(f_1)_z, \ldots, (f_q)_z$ generano l'A_z-modulo $\mathcal{F}_z$.

Teorema 7.2.1. Siano Ω una varietà di Stein, K un sottoinsieme compatto $A(\Omega)$-convesso di Ω e $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente in un intorno di K. Allora

(i) esistono un numero finito di sezioni $f_1, \dots, f_q$ di $\mathcal{F}$ in un intorno di K che vi generano $\mathcal{F}$;

(ii) se $f_1, \dots, f_q$ sono sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di K che vi generano $\mathcal{F}$ e se f è una sezione arbitraria di $\mathcal{F}$ in un intorno di K, si possono trovare funzioni $c_1, \dots, c_q$ analitiche in un intorno di K nel quale si abbia $f = \sum_{j=1}^{q} c_j f_j$.

Nella dimostrazione diremo che un compatto $A(\Omega)$-convesso K ha la proprietà (E) se l'enunciato del teorema vale per ogni fascio analitico coerente in un intorno di K. Dalla definizione di fascio analitico coerente segue che ogni K costituito da un solo punto ha la proprietà (E). Per dimostrare il teorema useremo un procedimento induttivo dovuto a Cartan.

Lemma 7.2.2. Sia K un sottoinsieme compatto $A(\Omega)$-convesso della varietà di Stein Ω. Sia $f \in A(\Omega)$ e supponiamo che $K_a = \{z \in K : \operatorname{Re} f(z) = a\}$ abbia la proprietà (E) per ogni numero reale a. Allora K ha la proprietà (E).

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente in un intorno di K. Poniamo

$$K_{a,b} = \{z \in K : a \le \operatorname{Re} f(z) \le b\}.$$

Questo insieme è $A(\Omega)$-convesso poiché le condizioni $a \le \operatorname{Re} f(z) \le b$ si possono scrivere $|e^{f(z)}| \le e^b$, $|e^{-f(z)}| \le e^{-a}$.

(i) Per dimostrare che esistono un numero finito di sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di K che vi generano $\mathcal{F}$, introduciamo l'estremo superiore α di tutti gli a per cui $K_{-\infty,a}$ ha questa proprietà. L'insieme di tali a è non vuoto, poiché $K_{-\infty,a} = \varnothing$ per a negativo di modulo abbastanza grande. Dobbiamo provare che $\alpha = +\infty$. Supponiamo dunque $\alpha < +\infty$. Per l'ipotesi del lemma possiamo scegliere un intorno ω_1 di $K_{\alpha,\alpha} = K_\alpha$ nel quale $\mathcal{F}$ è generato da un numero finito di sue sezioni $f_1, \dots, f_p$. Scegliamo $a < \alpha < b$ in modo che $\omega_1 \supset K_{a,b}$. Per definizione di α possiamo scegliere un intorno ω_2 di $K_{-\infty,a}$ in cui $\mathcal{F}$ è generato da un numero finito di sezioni $g_1, \dots, g_q$. Per ipotesi possiamo trovare un intorno ω_3 di $K_{a,a}$ nel quale esiste una matrice γ_1 con q righe e p colonne, a coefficienti analitici, tale che

$$\gamma_1 f = g \quad \text{in } \omega_3;$$

qui f è il vettore colonna di componenti $f_1, \dots, f_p$, e g è definito analogamente. Infatti l'esistenza di ω_3 segue dalla validità di (ii) per $K_{a,a}$. Allo stesso modo possiamo trovare una matrice analitica γ_2 con p righe e q colonne in un intorno ω_4 di $K_{a,a}$, tale che

$$\gamma_2 g = f \quad \text{in } \omega_4.$$

Restringendo, se necessario, gli intorni, possiamo ottenere

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \omega_3 = \omega_4.$$

L'insieme $K_{-\infty,b}$ è $A(\Omega)$-convesso ed è contenuto in $\omega_1 \cup \omega_2$. Ha quindi un intorno ω contenuto in $\omega_1 \cup \omega_2$ che è un poliedro analitico e dunque una varietà di Stein (lemma 5.3.7). Sostituendo gli intorni ω_j con le loro intersezioni con ω, otteniamo che $\omega_1 \cup \omega_2 = \omega$ è una varietà di Stein.

Per ottenere sezioni di $\mathcal{F}$ su ω, cerchiamo ora funzioni analitiche $u_1^j, \dots, u_{p+q}^j$ in ω_j, $j = 1, 2$, tali che le sezioni $\sum_{k=1}^{p} u_k^1 f_k$ e $\sum_{k=1}^{q} u_{p+k}^2 g_k$ di $\mathcal{F}$, definite rispettivamente su ω_1

e ω_2, coincidano in $\omega_1 \cap \omega_2$. Indichiamo con $\{f, 0\}$ e $\{0, g\}$ le $(p+q)$-uple (vettori colonna) $(f_1, \dots, f_p, 0, \dots, 0)$ e $(0, \dots, 0, g_1, \dots, g_q)$ di sezioni di $\mathcal{F}$. La condizione si scrive

$$\langle \{f, 0\}, u^1 \rangle = \langle \{0, g\}, u^2 \rangle \quad \text{in } \omega_1 \cap \omega_2. \tag{7.2.1}$$

Ora si ha

$$\{f, g\} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \gamma_1 & I_q \end{pmatrix} \{f, 0\} = \begin{pmatrix} I_p & \gamma_2 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \{0, g\},$$

dove I_p e I_q sono le matrici identità di ordine p e q. Ne segue che

$$\{f, 0\} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -\gamma_1 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & \gamma_2 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \{0, g\}.$$

Quindi la (7.2.1) è soddisfatta se $c_{21} u^1 = u^2$ in $\omega_1 \cap \omega_2$, dove

$$c_{21} = c_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \gamma_2^t & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -\gamma_1^t \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

e γ_j^t indica la trasposta di γ_j. Consideriamo ora il fibrato B su ω definito dal ricoprimento ω_1, ω_2 e dalle matrici di transizione c_{12}, c_{21}. Per il corollario 5.6.3 esso ammette sezioni analitiche su ω e, per la costruzione di B, ogni sua sezione analitica dà luogo a una sezione di $\mathcal{F}$. Inoltre il corollario 5.6.3 implica che per ogni $z \in \omega$ l'A_z-modulo generato dai germi delle sezioni analitiche di B su ω è il modulo di tutti i germi in z delle sezioni locali di B. Quindi l'A_z-modulo generato dai germi in z delle sezioni di $\mathcal{F}$ su ω coincide con $\mathcal{F}_z$ per ogni $z \in \omega$. Per il lemma 7.1.3 e il lemma di Borel–Lebesgue si possono allora trovare un numero finito di sezioni di $\mathcal{F}$ su ω che generano su A_z la spiga $\mathcal{F}_z$ per ogni $z \in K_{-\infty,b}$. Ciò contraddice la definizione di α e dimostra (i).

(ii) Siano $f_1, \dots, f_q$ sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di K che vi generano $\mathcal{F}$, e sia f una sezione arbitraria di $\mathcal{F}$ in un intorno di K. Sia α l'estremo superiore di tutti gli a per cui si possono trovare funzioni $c_1, \dots, c_q$ analitiche in un intorno di $K_{-\infty,a}$ nel quale $f = \sum_{j=1}^q c_j f_j$. Vogliamo mostrare che $\alpha = +\infty$. Supponiamo dunque $\alpha < +\infty$ e cerchiamo una contraddizione come nella parte (i). Come allora possiamo scegliere numeri $a < \alpha < b$, un intorno ω_1 di $K_{a,b}$ e un intorno ω_2 di $K_{-\infty,a}$ tali che $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ sia una varietà di Stein ed esistano funzioni analitiche $c_1^k, \dots, c_q^k$ in ω_k, $k = 1, 2$, per le quali

$$f = \sum_{j=1}^q c_j^k f_j \quad \text{in } \omega_k, \qquad k = 1, 2.$$

Ciò implica che

$$\sum_{j=1}^q (c_j^1 - c_j^2) f_j = 0 \quad \text{in } \omega_1 \cap \omega_2.$$

Quindi $(c_1^1 - c_1^2, \dots, c_q^1 - c_q^2)$ è una sezione su $\omega_1 \cap \omega_2$ del fascio delle relazioni $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_q)$, che è un fascio analitico coerente in ω. Per la parte (i) della dimostrazione, valida per ogni fascio analitico coerente, possiamo trovare un intorno ω' di K in cui questo fascio è generato da un numero finito di sue sezioni $r^1, \dots, r^N$. Per la parte (ii) dell'ipotesi si ha

$$c_j^1 - c_j^2 = \sum_{k=1}^N \gamma_k r_j^k, \qquad j = 1, \dots, q,$$

in un intorno di $K_{a,a}$, dove le γ_k sono analitiche. Restringendo se necessario ω_1 e ω_2, possiamo supporre che ciò valga in $\omega_1 \cap \omega_2$ e che $\omega_1 \cup \omega_2 = \omega \subset \omega'$. Poiché in ω il

primo problema di Cousin è risolubile (teorema 5.5.1), esistono funzioni $\gamma_k^\nu \in A(\omega_\nu)$, $k = 1, \dots, N$, $\nu = 1, 2$, tali che

$$\gamma_k = \gamma_k^2 - \gamma_k^1 \quad \text{in } \omega_1 \cap \omega_2.$$

Dunque

$$c_j^1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k^1 r_j^k = c_j^2 + \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 r_j^k \quad \text{in } \omega_1 \cap \omega_2,$$

e i due membri dell'uguaglianza definiscono insieme una funzione $C_j \in A(\omega)$. Poiché r^k è una sezione di $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_q)$, ne segue che

$$\sum_{j=1}^q C_j f_j = f \quad \text{in } \omega_1 \cup \omega_2 = \omega \supset K_{-\infty,b}.$$

Ciò contraddice la definizione di α, quindi $\alpha = +\infty$. Il lemma è dimostrato.

Dimostrazione del teorema 7.2.1. Possiamo scegliere un numero finito di funzioni $F_1, \dots, F_N \in A(\Omega)$ tra le quali si trovano sistemi di coordinate in ogni punto di K. Allora l'insieme

$$\{z \in K : \operatorname{Re} F_j(z) = a_j,\ \operatorname{Re}(iF_j(z)) = b_j,\ j = 1, \dots, N\}$$

ha la proprietà (E) per ogni scelta di a_j e b_j, essendo un insieme discreto di punti. Per il lemma 7.2.2, sopprimendo una delle condizioni $\operatorname{Re} F_j(z) = a_j$, $\operatorname{Re}(iF_j(z)) = b_j$, si ottiene ancora un insieme con la proprietà (E). Ripetendo l'argomento $2N$ volte concludiamo che K ha la proprietà (E).

Siano Ω una varietà di Stein e $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su Ω. Costruiremo ora sezioni globali di $\mathcal{F}$. Introduciamo dapprima delle seminorme sulle sezioni di $\mathcal{F}$ definite in un intorno di un compatto $A(\Omega)$-convesso K. A tale scopo scegliamo, mediante il teorema 7.2.1, un numero finito di sezioni $f_1, \dots, f_q$ di $\mathcal{F}$ in un intorno di K che vi generano il fascio. Ogni sezione f di $\mathcal{F}$ in un intorno di K si può allora scrivere

$$f = \sum_{j=1}^q c_j f_j, \tag{7.2.2}$$

con c_j analitiche in un intorno di K. Poniamo

$$\|f\|_K = \inf_c \sup_{z \in K} \sum_{j=1}^q |c_j(z)|,$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le c tali che (7.2.2) valga in un qualche intorno di K. È chiaro che $\|f\|_K$ può dipendere dalla scelta dei generatori $f_1, \dots, f_q$. Un'altra scelta dà tuttavia una seminorma equivalente, poiché si passa da un sistema di generatori a un altro moltiplicando per una matrice i cui elementi sono analitici in un intorno di K.

Lemma 7.2.3. Se f è una sezione di $\mathcal{F}$ in un intorno di K e $\|f\|_K = 0$, allora $f_z = 0$ per ogni z interno a K.

Dimostrazione. Sia (7.2.2) una rappresentazione di f. Se $\|f\|_K = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare funzioni c_j^ε analitiche in un intorno di K tali che

$$f = \sum_{j=1}^q c_j^\varepsilon f_j \tag{7.2.2$'$}$$

in un intorno di K, e $|c_j^\varepsilon(z)| < \varepsilon$ in K per $j = 1, \dots, q$. Dalle (7.2.2) e (7.2.2′) segue

$$\gamma_z(c_1 - c_1^\varepsilon, c_2 - c_2^\varepsilon, \dots, c_q - c_q^\varepsilon) \in \mathcal{R}_z(f_1, \dots, f_q).$$

Se z è interno a K, per il teorema 2.2.3 tutte le derivate di c_j^ε in z tendono a zero per $\varepsilon \to 0$. Il teorema 6.3.5 dà dunque $\gamma_z(c_1, \dots, c_q) \in \mathcal{R}_z(f_1, \dots, f_q)$, il che significa che $f_z = 0$.

Lemma 7.2.4. Siano K e K' compatti $A(\Omega)$-convessi con K contenuto nell'interno di K'. Se $g_1, g_2, \dots$ è una successione di sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di K' tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{K'} < \infty,$$

esiste una sezione g di $\mathcal{F}$ in un intorno di K tale che

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{j} g_k \right\|_K \longrightarrow 0 \quad \text{per } j \to \infty.$$

Si osservi che, per il lemma 7.2.3, questa condizione determina univocamente g_z se z è interno a K.

Dimostrazione. Siano $f_1, \dots, f_q$ sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di K' i cui germi generano $\mathcal{F}_z$ per ogni $z \in K'$. Possiamo allora scrivere

$$g_k = \sum_{j=1}^{q} c_{kj} f_j,$$

dove le c_{kj} sono analitiche in un intorno di K' e

$$\sum_{j=1}^{q} |c_{kj}(z)| \le \|g_k\|_{K'} + 2^{-k}, \qquad z \in K'.$$

Ne segue che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{kj} = C_j$$

converge uniformemente in K' e che C_j è quindi analitica nell'interno di K'. Poiché $C_j - \sum_{k=1}^{\nu} c_{kj} \to 0$ uniformemente in K per $\nu \to \infty$, si ottiene il lemma ponendo $g = \sum_{j=1}^{q} C_j f_j$. (Possiamo supporre che la norma $\| \ \|_K$ sia definita per mezzo delle stesse sezioni $f_1, \dots, f_q$.)

Sia ora $K_1, K_2, \dots$ una successione di sottoinsiemi compatti $A(\Omega)$-convessi di Ω, con $\bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = \Omega$, ciascuno contenuto nell'interno del successivo. Dal lemma 7.2.4 otteniamo allora il risultato seguente.

Teorema 7.2.5. Sia g_p una sezione del fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su Ω in un intorno di K_p, e supponiamo che per ogni p fissato

$$\|g_i - g_j\|_{K_p} \to 0 \quad \text{per } i, j \to \infty.$$

Allora esiste una sezione $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ tale che $\|g - g_j\|_{K_p} \to 0$ per $j \to \infty$, per ogni p.

Dimostrazione. Scegliamo N_ν in modo che $\|g_i - g_j\|_{K_p} < 2^{-\nu}$ per $i, j \ge N_\nu$ e $p \le \nu$. La serie di termini $g_{N_{\nu+1}} - g_{N_\nu}$ soddisfa allora le ipotesi del lemma 7.2.4 con K sostituito

da K_{p+1}. Esiste quindi una sezione h^p di $\mathcal{F}$ in un intorno di K_p tale che $\|h^p - g_{N_\nu}\|_{K_p} \to 0$ per $\nu \to \infty$. Si ha $h^p = h^{p+1}$ nell'interno di K_p. Esiste pertanto una sezione $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ uguale a h^p nell'interno di K_p per ogni p. Ne segue che $\|g - g_{N_\nu}\|_{K_{p-1}} \to 0$ per ogni p quando $\nu \to \infty$. La disuguaglianza triangolare dà allora $\|g - g_j\|_{K_{p-1}} \to 0$ per $j \to \infty$, il che conclude la dimostrazione.

Corollario 7.2.6. $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ è uno spazio di Fréchet per la topologia definita dalle seminorme

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{F}) \ni f \longmapsto \|f\|_{K_p}, \qquad p = 1, 2, \ldots.$$

Possiamo ora estendere i teoremi di approssimazione dimostrati per le funzioni analitiche o per le sezioni di fibrati vettoriali analitici.

Teorema 7.2.7. Sia K un sottoinsieme compatto $A(\Omega)$-convesso della varietà di Stein Ω, e sia f una sezione in un intorno di K del fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su Ω. Esiste allora una successione $f_j \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ tale che $\|f - f_j\|_K \to 0$ per $j \to \infty$.

Dimostrazione. Possiamo scegliere una successione di compatti come sopra con $K_1 = K$. Poniamo $g_1 = f$. Fissato $\varepsilon > 0$, troveremo per ogni p una sezione g_p di $\mathcal{F}$ in un intorno di K_p tale che

$$\|g_{p+1} - g_p\|_{K_\nu} < \varepsilon/2^p, \qquad p = 1, 2, \ldots, \quad \nu \leq p.$$

Per il teorema 7.2.5 ne segue che esiste una sezione $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ tale che $\|g - g_j\|_{K_p} \to 0$ per $j \to \infty$, per ogni p. In particolare si ottiene $\|g - f\|_K = \lim_j \|g_j - g_1\|_{K_1} \leq \varepsilon$. Prendendo per f_ν il limite g corrispondente a $\varepsilon = 1/\nu$ si ottiene il teorema.

Per dimostrare che esistono sezioni g_p con le proprietà richieste, supponiamo già scelte $g_1, \ldots, g_p$. Siano $h_1, \ldots, h_N$ sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di K_{p+1} che vi generano $\mathcal{F}$. Possiamo scrivere

$$g_p = \sum_{j=1}^{N} c_j h_j,$$

dove c_j è analitica in un intorno di K_p. Per il corollario 5.2.9 possiamo approssimare con precisione arbitraria su K_p le funzioni c_j mediante funzioni $c'_j \in A(\Omega)$. Allora

$$g_{p+1} = \sum_{j=1}^{N} c'_j h_j$$

è una sezione di $\mathcal{F}$ in un intorno di K_{p+1} che ha le proprietà richieste se $\sum_{j=1}^{N} |c'_j - c_j|$ è abbastanza piccola su K_p. La dimostrazione è conclusa.

Teorema 7.2.8. Sia Ω una varietà di Stein e sia $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su Ω. Per ogni $z \in \Omega$, l'A_z-modulo $\mathcal{F}_z$ è generato dai germi in z delle sezioni appartenenti a $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$.

Questo risultato è noto come *teorema A di Cartan*.

Dimostrazione. Siano $f_1, \ldots, f_N$ sezioni di $\mathcal{F}$ in un intorno di z tali che $(f_1)_z, \ldots, (f_N)_z$ generino $\mathcal{F}_z$. Poiché $\{z\}$ è $A(\Omega)$-convesso, per il teorema 7.2.7 possiamo scegliere, per ogni $\varepsilon > 0$, sezioni $g_1, \ldots, g_N \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ tali che

$$g_j - f_j = \sum_{k=1}^{N} c_{jk} f_k, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

dove le c_{jk} sono analitiche in un intorno di z e $|c_{jk}(z)| < \varepsilon$ per ogni j, k. Se ε è abbastanza piccolo, la matrice $I + (c_{jk})$, dove I è la matrice identità di ordine N, ammette un'inversa (b_{jk}) analitica in un intorno di z. Poiché

$$f_j = \sum_{k=1}^{N} b_{jk} g_k$$

in un intorno di z, i germi di $g_1, \ldots, g_N$ in z generano $\mathcal{F}_z$.

Possiamo anche dare facilmente una formulazione globale della parte (ii) del teorema 7.2.1.

Teorema 7.2.9. Sia Ω una varietà di Stein e sia $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su Ω. Se $f, f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ e se, per ogni $z \in \Omega$, la spiga contiene f_z nell'A_z-modulo generato da $(f_1)_z, \ldots, (f_q)_z$, esistono funzioni $c_1, \ldots, c_q \in A(\Omega)$ tali che

$$f = \sum_{j=1}^{q} c_j f_j.$$

Dimostrazione. Scegliamo una successione di compatti $A(\Omega)$-convessi K_p come nel teorema 7.2.5. Il sottofascio analitico $\mathcal{F}'$ di $\mathcal{F}$ generato dai germi delle sezioni $f_1, \ldots, f_q$ è coerente. Per la parte (ii) del teorema 7.2.1, per ogni p possiamo dunque scegliere funzioni $c_1^p, \ldots, c_q^p$ analitiche in un intorno di K_p nel quale si abbia

$$f = \sum_{j=1}^{q} c_j^p f_j.$$

Allora

$$\sum_{j=1}^{q} (c_j^{p+1} - c_j^p) f_j = 0 \quad \text{in un intorno di } K_p,$$

ossia $(c_1^{p+1} - c_1^p, \ldots, c_q^{p+1} - c_q^p)$ è una sezione del fascio delle relazioni $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q)$ in un intorno di K_p. Per il teorema 7.2.7 possiamo approssimarla con precisione arbitraria su K_p mediante sezioni di $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q)$ su Ω. Ciò significa che, sottraendo una tale sezione, si possono modificare le funzioni c_j^{p+1} in modo che

$$\sup_{K_p} \sum_{j=1}^{q} |c_j^{p+1} - c_j^p| < 2^{-p}.$$

Ma ciò implica che per ogni j esiste $c_j = \lim_{p\to\infty} c_j^p$. Si ha $c_j \in A(\Omega)$ e dal lemma 7.2.3 segue che $f = \sum_{j=1}^{q} c_j f_j$.

Diamo ora alcune applicazioni degli ultimi due teoremi.

Teorema 7.2.10. Sia K un sottoinsieme compatto $A(\Omega)$-convesso della varietà di Stein Ω, e sia B la chiusura uniforme su K delle restrizioni a K delle funzioni di $A(\Omega)$. Lo spazio degli ideali massimali dell'algebra così ottenuta si identifica con K, ossia ogni funzionale lineare moltiplicativo su B è della forma $B \ni f \mapsto f(z_0)$ per qualche $z_0 \in K$.

Dimostrazione. Sia I un ideale massimale di B, con $I \neq B$. Allora $I = \{f \in B : m(f) = 0\}$, dove m è un funzionale lineare moltiplicativo continuo (teorema 3.1.12). Poiché $A(\Omega)|_K$ è denso in B, segue che $I \cap A(\Omega)|_K$ è denso in I. Dobbiamo dimostrare che esiste un punto $z_0 \in K$ tale che $f(z_0) = 0$ per ogni $f \in I$. Supponiamo che un tale z_0 non esista.

Allora per ogni $z \in K$ possiamo trovare $f \in A(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ la cui restrizione a K appartiene a I. Possiamo quindi scegliere un numero finito di funzioni $f_1, \dots, f_q \in A(\Omega)$ con restrizioni a K in I e prive di zeri comuni in K. Sia ω una varietà di Stein con $K \subset \omega \subset \Omega$ tale che $\sum_{j=1}^{q} |f_j(z)| \neq 0$ per $z \in \omega$. Il sottofascio analitico di $\mathcal{A}(\omega)$ generato dalle sezioni $f_1, \dots, f_q$ deve allora coincidere con $\mathcal{A}(\omega)$ poiché $(f_1)_z, \dots, (f_q)_z$ generano A_z per ogni $z \in \omega$. Per il teorema 7.2.9 possiamo dunque trovare $g_1, \dots, g_q \in A(\omega)$ tali che $\sum_{j=1}^{q} g_j f_j = 1$ in ω. Ma $g_1, \dots, g_q$ si possono approssimare uniformemente su K mediante funzioni di $A(\Omega)$, quindi le loro restrizioni a K appartengono a B. Ne segue che l'unità appartiene a I. Ciò significa che $I = B$, e conclude la dimostrazione.

Osservazione. È chiaro che nella dimostrazione sarebbe bastato usare il teorema 7.2.1.

Il teorema 7.2.10 fornisce una dimostrazione semplice del teorema 5.4.3. Infatti, se Ω è una varietà di Stein, il teorema 7.2.10 mostra che ogni funzionale lineare moltiplicativo continuo L su $A(\Omega)$ è della forma $L(f) = f(z_0)$ per qualche $z_0 \in \Omega$. Dalle ipotesi del teorema 5.4.3 si ottiene quindi immediatamente un'applicazione $\Omega_2 \to \Omega_1$.

Teorema 7.2.11. Sia Ω una varietà di Stein e sia V un suo sottoinsieme analitico. Per ogni $z \notin V$ si può trovare $f \in A(\Omega)$ tale che $f(z) \neq 0$ e $f = 0$ su V.

Dimostrazione. Sia I_z l'insieme dei germi in z di funzioni analitiche in un intorno di z che si annullano su V. Il fascio $\mathcal{I} = \bigcup_z I_z$ è coerente per il teorema 6.5.2. L'asserto segue quindi dal teorema 7.2.8.

Per un uso successivo dimostriamo anche il risultato seguente.

Teorema 7.2.12. Siano Ω una varietà di Stein, $f_1, \dots, f_q \in A(\Omega)^p$, e sia $\mathcal{F}$ il sottofascio di $\mathcal{A}^p$ generato da $f_1, \dots, f_q$. Allora $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ è completo per la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di Ω. L'applicazione

$$A(\Omega)^q \ni (h_1, \dots, h_q) \longmapsto \sum_{j=1}^{q} h_j f_j \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F}) \tag{7.2.3}$$

è suriettiva, continua e aperta per questa topologia.

Dimostrazione. $\Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Fréchet $A(\Omega)^p$. Se infatti $f^j \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ converge a $f \in A(\Omega)^p$, dal teorema 6.3.5 segue $\gamma_z(f) \in \mathcal{F}_z$ per ogni $z \in \Omega$, quindi $f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$. Per il teorema 7.2.9 l'applicazione continua (7.2.3) è suriettiva. È dunque aperta per il teorema di Banach, poiché tutti gli spazi che intervengono sono spazi di Fréchet.

7.3. Gruppi di coomologia a valori in un fascio

Il primo problema di Cousin, nella formulazione del teorema 5.5.1, conduce naturalmente alla definizione dei gruppi di coomologia a valori in un fascio. Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Per ogni intero $p \geq 0$ indichiamo con $s = (s_0, \dots, s_p)$ un elemento di I^{p+1} e poniamo $U_s = U_{s_0} \cap \cdots \cap U_{s_p}$. Una *p-cocatena* c del ricoprimento $\mathcal{U}$ a valori in $\mathcal{F}$ è un'applicazione che a ogni $s \in I^{p+1}$ associa una sezione $c_s \in \Gamma(U_s, \mathcal{F})$ alternante in s (ossia c_s cambia segno scambiando due indici di s). Qui poniamo $\Gamma(\varnothing, \mathcal{F}) = 0$, il gruppo abeliano con un solo elemento. L'insieme $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ di tutte le p-cocatene di $\mathcal{U}$ a valori in $\mathcal{F}$ è naturalmente un gruppo abeliano.

Sul modello delle (5.5.1) e (5.5.2) definiamo un operatore di cobordo δ^p (che spesso denoteremo semplicemente con δ) da $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ in $C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Se $c \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, poniamo

$$(\delta^p c)_s = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{s_0 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_{p+1}},$$

dove il cappello su s_j indica che l'indice va omesso. Con questa definizione, i dati del primo problema di Cousin costituiscono una 1-cocatena c a valori in $\mathcal{A}$ tale che $\delta c = 0$, e il problema consiste nel mostrare che $c = \delta c'$ per qualche 0-cocatena c'.

Dalla definizione di δ segue immediatamente $\delta \circ \delta = 0$. Introduciamo

$$Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{c \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \delta c = 0\},$$

il gruppo dei *p-cocicli* a valori in $\mathcal{F}$, e (ponendo $C^{-1} = 0$)

$$B^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{\delta c : c \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})\},$$

il gruppo dei *p-cobordi*. Allora B^p è un sottogruppo di Z^p. Possiamo dunque introdurre il gruppo quoziente

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^p(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

che si chiama *p-esimo gruppo di coomologia* di $\mathcal{U}$ a valori in $\mathcal{F}$. Se c è uno 0-cociclo, $c_{s_0} - c_{s_1} = 0$ in $U_{s_0} \cap U_{s_1}$ per tutti gli s_0, s_1. Ciò significa che esiste una sezione $f \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ la cui restrizione a U_s è c_s per ogni s. Dunque

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \simeq \Gamma(X,\mathcal{F}).$$

Osserviamo anche che il teorema 5.5.1 si può formulare così. Se X è una varietà di Stein e $\mathcal{A}$ è il fascio dei germi di funzioni analitiche su X, allora $H^1(\mathcal{U},\mathcal{A}) = 0$. Il nostro scopo è estendere il risultato ai fasci analitici coerenti in generale e ai gruppi di coomologia di ordine superiore.

Sia ora $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ un altro ricoprimento di X, più fine di $\mathcal{U}$, ossia tale che esista un'applicazione $\rho : J \to I$ con $V_j \subset U_{\rho(j)}$ per ogni $j \in J$. Data $c \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, definiamo una cocatena $\rho c \in C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ prendendo per $(\rho c)_s$ la restrizione di $c_{\rho(s_0)\cdots\rho(s_p)}$ a V_s. Questa applicazione commuta evidentemente con gli operatori di cobordo in $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e $C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$, perciò induce un'applicazione $\rho^* : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$.

Proposizione 7.3.1. L'applicazione ρ^* è indipendente dalla scelta di ρ.

Dimostrazione. Sia ρ' un'altra applicazione con le stesse proprietà di ρ. Possiamo supporre $p \geq 1$, poiché per $p = 0$ l'asserto è evidente. Fissato un ordinamento totale di J, per $s_0 < s_1 < \cdots < s_p$ poniamo

$$(kc)_s = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j c_{\rho(s_0)\cdots\rho(s_j)\rho'(s_j)\cdots\rho'(s_p)}.$$

Si definisce così un'applicazione da $C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ in $C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Un calcolo diretto, che omettiamo, dà

$$(k\delta + \delta k)c = \rho' c - \rho c.$$

Se c è un cociclo, $\rho' c - \rho c = \delta k c$ è quindi un cobordo. Le applicazioni ρ^* e $(\rho')^*$ coincidono, come si voleva.

Abbiamo così ottenuto un unico omomorfismo $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$, che denotiamo con $\sigma(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Come funzione di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, esso gode delle evidenti proprietà di transitività.

Proposizione 7.3.2. L'omomorfismo $\sigma(\mathcal{U},\mathcal{V})$ è iniettivo per $p=1$.

Dimostrazione. Sia $c \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e supponiamo $\rho c = \delta\gamma$ per qualche $\gamma \in C^0(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Esplicitamente, $c_{\rho(s)\rho(t)} = \gamma_t - \gamma_s$ in $V_s \cap V_t$ per tutti gli $s,t \in J$. Poiché c è un cociclo, ne segue che

$$\gamma_t + c_{\rho(t)i} = \gamma_s + c_{\rho(s)i} \quad \text{in } U_i \cap V_s \cap V_t.$$

Esiste dunque una sezione $c_i \in \Gamma(U_i,\mathcal{F})$ tale che $c_i = \gamma_s + c_{\rho(s)i}$ in $U_i \cap V_s$ per ogni s. In $U_i \cap U_j \cap V_s$ si ottiene

$$c_j - c_i = \gamma_s + c_{\rho(s)j} - \gamma_s - c_{\rho(s)i} = c_{\rho(s)j} + c_{i\rho(s)} = c_{ij},$$

il che prova che c è un cobordo. (Si osservi che la dimostrazione ripete sostanzialmente la seconda parte della dimostrazione del teorema 5.5.2.)

Se i ricoprimenti $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono equivalenti, cioè se ciascuno è un raffinamento dell'altro, dalla proposizione 7.3.1 risulta evidente che $\sigma(\mathcal{U},\mathcal{V})$ è un isomorfismo. Le classi di equivalenza dei ricoprimenti aperti formano un insieme, poiché si possono identificare con elementi dell'insieme delle parti dell'insieme delle parti di X. Si ha un ordinamento parziale naturale nel quale per ogni coppia di (classi di) ricoprimenti ne esiste uno maggiore, ossia più fine. Possiamo dunque introdurre il limite diretto $H^p(X,\mathcal{F})$ dei gruppi $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ rispetto alle applicazioni $\sigma(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Esplicitamente, gli elementi di $H^p(X,\mathcal{F})$ sono le classi di equivalenza nell'unione disgiunta dei gruppi $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, identificando un elemento di $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e uno di $H^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ se le loro immagini in $H^p(\mathcal{W},\mathcal{F})$ coincidono per qualche raffinamento comune $\mathcal{W}$ di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. In particolare, se esistono ricoprimenti $\mathcal{U}$ arbitrariamente fini per i quali $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$, allora $H^p(X,\mathcal{F}) = 0$. Per $p=1$ la proposizione 7.3.2 dà il risultato inverso. Se $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$, allora $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ per ogni ricoprimento $\mathcal{U}$.

Proposizione 7.3.3. Sia Ω una varietà C^∞ numerabile all'infinito e sia $\mathcal{E}$ il fascio dei germi di funzioni C^∞ su Ω. Se $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{E}$-moduli su Ω, allora $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ per ogni $p > 0$ e ogni ricoprimento $\mathcal{U}$. In particolare, $H^p(\Omega,\mathcal{F}) = 0$ per ogni $p > 0$.

Dimostrazione. Sia $c \in Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e sia (φ_ν) una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$. Ciò significa che

(i) $\varphi_\nu \in C_0^\infty(U_{i_\nu})$ per un certo indice i_ν;

(ii) su ogni compatto di Ω tutte le funzioni φ_ν, salvo un numero finito, si annullano identicamente;

(iii) $\sum_\nu \varphi_\nu = 1$.

Per $s \in I^p$ possiamo allora porre

$$c'_s = \sum_\nu \varphi_\nu c_{i_\nu s}.$$

È chiaro che $c' \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ e che

$$(\delta c')_s = \sum_\nu \sum_{j=0}^{p} \varphi_\nu (-1)^j c_{i_\nu s_0 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_p} = \sum_\nu \varphi_\nu c_s = c_s, \qquad s \in I^{p+1}.$$

Abbiamo qui usato, naturalmente, il fatto che $\delta c = 0$. La dimostrazione è conclusa. Si osservi che essa ripete sostanzialmente la prima parte della dimostrazione del teorema 1.4.5.

Siano $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$ tre fasci di gruppi abeliani su X e siano φ,ψ omomorfismi di fasci tali che la successione

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

sia esatta, ossia che φ sia iniettivo, ψ suriettivo e l'immagine di φ coincida con il nucleo di ψ. Si hanno allora evidentemente successioni esatte

$$0 \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{H}),$$

ma l'ultima applicazione può non essere suriettiva. Indichiamo la sua immagine con $C^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$ e la chiamiamo gruppo delle *cocatene sollevabili*. Per definizione abbiamo quindi una successione esatta

$$0 \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to 0.$$

Poiché δ manda $C^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$ in $C^{p+1}_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$, possiamo formare i gruppi di coomologia $H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$ di questo complesso. Esplicitamente, $H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) = Z^p_a/B^p_a$, dove Z^p_a è il gruppo di tutti i p-cocicli sollevabili e B^p_a quello dei cobordi delle $(p-1)$-cocatene sollevabili a valori in $\mathcal{H}$, relativi al ricoprimento. Consideriamo il diagramma commutativo a colonne esatte

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\
\downarrow\varphi & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi \\
C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) \\
\downarrow\psi & & \downarrow\psi & & \downarrow\psi \\
C^{p-1}_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} & C^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1}_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Se $h \in Z^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$, si ha $h = \psi g$ per qualche $g \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$, e $\psi\delta g = \delta\psi g = \delta h = 0$, ossia $\delta g \in \varphi C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Poiché φ è iniettivo e $\delta\delta g = 0$, segue che $\delta g \in \varphi Z^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Se ora $h \in B^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$, abbiamo $h = \delta h'$ per qualche $h' \in C^{p-1}_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$ e possiamo trovare $g' \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{G})$ con $\psi g' = h'$. Allora $\delta g' - g \in \varphi C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, il che dimostra che $\delta g \in \varphi B^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$. La classe di coomologia di $\varphi^{-1}\delta g$ in $H^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ è dunque univocamente determinata dalla classe di h in $H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$. Si ottiene così un omomorfismo

$$\delta^* : H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Teorema 7.3.4. La successione

$$\begin{aligned}
0 \to H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^0_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi^*} \\
\to H^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\psi^*} H^1_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \cdots
\end{aligned}$$

è esatta. Qui le applicazioni φ^* e ψ^* si ottengono nel modo evidente da φ e ψ, poiché le applicazioni sulle cocatene definite da φ e ψ commutano con gli operatori di cobordo.

Dimostrazione del teorema 7.3.4. L'esattezza in $H^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ è evidente. Dimostriamo quella in $H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$. Sia $h \in Z^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$. Dal diagramma precedente vediamo che h è immagine di un cociclo $g \in Z^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ se e solo se la classe di coomologia di h appartiene al nucleo di δ^*. Per dimostrare l'esattezza in $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ osserviamo che l'immagine di δ^* in $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ consiste delle classi di coomologia di tutti i cocicli di $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cap \varphi^{-1}B^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$, cioè precisamente delle classi mandate in 0 da φ^*.

Se $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ e $\rho : J \to I$ è tale che $V_j \subset U_{\rho(j)}$ per ogni $j \in J$, possiamo definire come sopra un'applicazione

$$\rho^* : H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H}) \to H^p_a(\mathcal{V},\mathcal{H}).$$

La dimostrazione della proposizione 7.3.1 si applica senza modifiche e mostra che ρ^* è indipendente dalla scelta di ρ. Indichiamo anche questo omomorfismo con $\sigma(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Valgono di nuovo le evidenti proprietà di transitività.

Proposizione 7.3.5. Se X è paracompatto (ossia soddisfa l'assioma di separazione di Hausdorff e ogni suo ricoprimento ammette un raffinamento localmente finito), l'applicazione naturale del limite diretto degli $H^p_a(\mathcal{U},\mathcal{H})$ in $H^p(X,\mathcal{H})$ è un isomorfismo suriettivo.

Dimostrazione. L'asserto è conseguenza immediata del lemma seguente.

Lemma 7.3.6. Per ogni $h \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$ esistono un raffinamento $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ e un'applicazione $\rho : J \to I$ tali che $\rho h \in C^p_a(\mathcal{V},\mathcal{H})$.

Dimostrazione. Poiché X è paracompatto, possiamo supporre $\mathcal{U}$ localmente finito; poiché X è normale, possiamo scegliere un ricoprimento aperto $\{W_i\}_{i\in I}$ con $\overline{W}_i \subset U_i$. Per ogni $x \in X$ scegliamo ora un intorno aperto V_x di x tale che

(i) se $x \in U_s$ ($s \in I^{p+1}$), allora $V_x \subset U_s$ ed esiste una sezione di $\mathcal{G}$ su V_x che ψ manda in $h_s|_{V_x}$;

(ii) se $x \in W_i$, allora $V_x \subset W_i$, e se $V_x \cap W_i \neq \varnothing$, allora $V_x \subset U_i$.

Un tale intorno esiste poiché, per la definizione di omomorfismo di fasci e la suriettività di ψ, ogni sezione di $\mathcal{H}$ si può sollevare localmente a una sezione di $\mathcal{G}$, e le ulteriori condizioni su V_x sono soltanto in numero finito. Definiamo $\rho : X \to I$ in modo che $x \in W_{\rho(x)}$, e quindi $V_x \subset W_{\rho(x)}$. Se $V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_p} \neq \varnothing$, allora V_{x_0} incontra $W_{\rho(x_k)}$ per ogni k; per (ii) segue che $V_{x_0} \subset U_{\rho(x_0)} \cap \cdots \cap U_{\rho(x_p)}$. La sezione $h_{\rho(x_0)\cdots\rho(x_p)}$ di $\mathcal{H}$ si può dunque sollevare su $V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_p}$ a una sezione di $\mathcal{G}$. Ciò significa che ρh è una cocatena sollevabile del ricoprimento $\{V_x\}_{x\in X}$.

Dalla proposizione 7.3.5 e dal teorema 7.3.4 si ottiene, con un argomento evidente che lasciamo per esercizio, il risultato seguente.

Teorema 7.3.7. Se X è paracompatto e $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X, è esatta la successione

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \\ \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to \cdots . \end{aligned}$$

7.4. Gruppi di coomologia di una varietà di Stein a coefficienti in un fascio analitico coerente

Utilizzando i teoremi di esistenza per l'operatore $\bar\partial$, abbiamo già dimostrato nel teorema 5.5.1 che $H^1(\Omega,\mathcal{A}) = 0$ se Ω è una varietà di Stein e $\mathcal{A}$ è il fascio dei germi di funzioni analitiche. Dimostreremo ora che i teoremi di esistenza per $\bar\partial$ sono del tutto equivalenti a enunciati riguardanti $H^p(\Omega,\mathcal{A})$ (isomorfismo di Dolbeault).

Teorema 7.4.1. Sia Ω una varietà complessa numerabile all'infinito e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento in cui ogni U_i è una varietà di Stein. Per $p > 0$, $H^p(\mathcal{U},\mathcal{A})$ è isomorfo allo spazio quoziente

$$\{f \in C^\infty_{(0,p)}(\Omega) : \bar\partial f = 0\}/\{\bar\partial g : g \in C^\infty_{(0,p-1)}(\Omega)\},$$

e $H^p(\Omega,\mathcal{A})$ è isomorfo a $H^p(\mathcal{U},\mathcal{A})$.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{E}_q$ il fascio dei germi di forme C^∞ di tipo $(0,q)$ e consideriamo la successione esatta di omomorfismi di fasci

$$0 \to \mathcal{Z}_q \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}_q \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{Z}_{q+1} \to 0,$$

dove $\mathcal{Z}_q$ è il fascio dei germi di forme di tipo $(0,q)$ chiuse rispetto a $\bar\partial$. L'esattezza segue dal teorema 2.3.3. Dal corollario 5.2.6 otteniamo anzi l'esattezza della successione

$$0 \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_q) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}_q) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{q+1}) \to 0,$$

poiché l'intersezione di un numero qualsiasi degli aperti U_i è anch'essa una varietà di Stein, essendo evidentemente olomorficamente convessa. In altri termini, $C^p_a(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{q+1}) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{q+1})$. Dal teorema 7.3.4 segue quindi l'esattezza della successione

$$\begin{aligned} 0 \to \Gamma(\Omega, \mathcal{Z}_q) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{E}_q) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(\Omega, \mathcal{Z}_{q+1}) \to H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_q) \\ \to H^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}_q) \to H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{q+1}) \to H^2(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_q) \to H^2(\mathcal{U}, \mathcal{E}_q) \to \cdots . \end{aligned}$$

Per la proposizione 7.3.3 concludiamo che

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{q+1}) \simeq H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_q), \qquad p \geq 1,$$

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{Z}_{q+1})/\bar\partial\Gamma(\Omega, \mathcal{E}_q) \simeq H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_q).$$

Per $p > 0$ si ottiene dunque

$$\begin{aligned} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_0) &\simeq H^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_1) \simeq \cdots \simeq H^1(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{p-1}) \\ &\simeq \Gamma(\Omega, \mathcal{Z}_p)/\bar\partial\Gamma(\Omega, \mathcal{E}_{p-1}). \end{aligned}$$

Il teorema segue osservando che esistono «ricoprimenti di Stein» arbitrariamente fini.

Corollario 7.4.2. Se Ω è una varietà di Stein, $H^p(\Omega, \mathcal{A}) = 0$ per ogni $p > 0$. Più precisamente, $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = 0$ per ogni ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ in cui ogni U_i è una varietà di Stein. (Per $p = 1$ si può sopprimere quest'ultima condizione, per la proposizione 7.3.2.)

Estendiamo ora il risultato appena dimostrato ai fasci analitici coerenti in generale. Si ottiene il cosiddetto teorema B di Cartan.

Teorema 7.4.3. Se $\mathcal{F}$ è un fascio analitico coerente sulla varietà di Stein Ω, allora $H^p(\Omega, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $p > 0$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento in cui ogni U_i è una varietà di Stein relativamente compatta in Ω. Sia Ω' una varietà di Stein relativamente compatta in Ω e poniamo $U_i' = U_i \cap \Omega'$. Dimostriamo dapprima che $H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) = 0$ per $p > 0$ e per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su Ω. A tal fine scegliamo $f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ che generino $\mathcal{F}$ in Ω'. Questo è possibile per il teorema 7.2.8, il lemma 7.1.3 e il lemma di Borel–Lebesgue. Otteniamo così una successione esatta di omomorfismi di fasci

$$0 \to \mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q) \to \mathcal{A}^q \to \mathcal{F} \to 0,$$

dove tutti i fasci sono considerati su Ω'. Per il teorema 7.2.9 e poiché ogni intersezione degli aperti U_i' è una varietà di Stein, abbiamo anche la successione esatta

$$0 \to C^p(\mathcal{U}', \mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q)) \to C^p(\mathcal{U}', \mathcal{A}^q) \to C^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \to 0,$$

ossia tutte le cocatene di $C^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ sono sollevabili. Otteniamo dunque una successione esatta

$$H^p(\mathcal{U}', \mathcal{A}^q) \to H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \to H^{p+1}(\mathcal{U}', \mathcal{R}) \to H^{p+1}(\mathcal{U}', \mathcal{A}^q).$$

Poiché i due gruppi agli estremi sono nulli per il corollario 7.4.2, si ha $H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \simeq H^{p+1}(\mathcal{U}', \mathcal{R})$. Se già sappiamo che $H^{p+1}(\mathcal{U}', \mathcal{G}) = 0$ per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{G}$ su Ω, ne segue $H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) = 0$ per ogni fascio analitico coerente su Ω. Ma se scegliamo il ricoprimento in modo che più di N aperti distinti U_i abbiano sempre intersezione vuota, il che è possibile per $N > 2n$, è evidente che $H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) = 0$ per $p > N$ e per ogni fascio $\mathcal{F}$. È così dimostrato che $H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) = 0$ per $p > 0$.

Per passare da $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{U}$ occorre distinguere due casi (si confronti la dimostrazione del teorema 2.7.8).

(a) $p > 1$. Scegliamo una successione crescente di varietà di Stein $\Omega^1, \Omega^2, \ldots$ relativamente compatte in Ω e aventi unione Ω. Sia c un cociclo di $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e sia c^j la sua restrizione, cociclo di $C^p(\mathcal{U}^j, \mathcal{F})$, dove $\mathcal{U}^j = \{\Omega^j \cap U_i\}_{i \in I}$. Abbiamo appena visto che esiste una cocatena $b^j \in C^{p-1}(\mathcal{U}^j, \mathcal{F})$ tale che $\delta b^j = c^j$. La differenza tra b^j e la restrizione di b^{j+1} a Ω^j è quindi un cociclo, e perciò è uguale a δa per qualche $a \in C^{p-2}(\mathcal{U}^j, \mathcal{F})$. Definiamo $a' \in C^{p-2}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ponendo $a'_s = a_s$ se $U_s \subset \Omega^j$ e $a'_s = 0$ altrimenti. Sottraendo da b^{j+1} la restrizione a Ω^{j+1} del cobordo di a', si ottiene $(b^{j+1})_s = (b^j)_s$ se $U_{s_k} \subset \Omega^j$ per ogni k. Poiché ogni U_i è relativamente compatto in Ω per ipotesi, per ogni s fissato $(b^j)_s$ è indipendente da j per j abbastanza grande. Dunque b^j converge, in senso evidente, per $j \to \infty$, a una cocatena $b \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ con $\delta b = c$.

(b) Supponiamo ora $p = 1$. Scegliendo le cocatene b^j come sopra, la restrizione di b^{j+1} a Ω^j differisce da b^j per uno 0-cociclo, ossia per una sezione di $\mathcal{F}$ su Ω^j. Sia K^j un sottoinsieme compatto $A(\Omega)$-convesso di Ω^j, scelto in modo che K^j sia interno a K^{j+1} per ogni j e $\bigcup_j K^j = \Omega$. Per il teorema 7.2.7 possiamo trovare una sezione $a \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ tale che

$$\|b^{j+1} - b^j - a\|_{K^\nu} < 2^{-j}, \qquad \nu \leq j.$$

Sottraiamo da b^{j+1} il cociclo di $C^0(\mathcal{U}^{j+1}, \mathcal{F})$ definito da a, ottenendo così successivamente, per ogni j,

$$\|b^{j+1} - b^j\|_{K^\nu} < 2^{-j}, \qquad \nu \leq j,$$

dove naturalmente $b^{j+1} - b^j$ indica la sezione su Ω^j corrispondente alla differenza fra la restrizione di b^{j+1} a Ω^j e b^j. Dal lemma 7.2.4 segue allora che, fissato j, $b^k - b^j$ converge per $k \to \infty$ a una sezione s^j di $\mathcal{F}$ sull'interno di K^j. È chiaro che $b^j + s^j = b^{j-1} + s^{j-1}$ nell'interno di K^{j-1}. Risulta così ben definita una 0-cocatena $b \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la cui restrizione all'interno di K^j è $b^j + s^j$ per ogni j. Poiché $\delta b^j = c$ in Ω^j per ogni j, otteniamo $\delta b = c$. Ciò conclude la dimostrazione che $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $p > 0$. Poiché esistono ricoprimenti $\mathcal{U}$ arbitrariamente fini con le proprietà richieste, segue ora $H^p(\Omega, \mathcal{F}) = 0$. La dimostrazione è conclusa.

Nelle applicazioni useremo ripetutamente il fatto che, se

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

è una successione esatta di omomorfismi di fasci su X e $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$, allora l'applicazione $\Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H})$ è suriettiva (si confrontino i teoremi 7.3.4 e 7.3.7). Si ottiene subito una nuova dimostrazione del teorema 7.2.9 considerando la successione di omomorfismi di fasci

$$0 \to \mathcal{R}(f_1, \ldots, f_q) \to \mathcal{A}^q \to \mathcal{F} \to 0.$$

Con le notazioni dell'esempio 1 del paragrafo 7.1, consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{A} \to 0.$$

Ne segue che $\Gamma(\Omega, \mathcal{M}) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{M}/\mathcal{A})$ è suriettiva se Ω è una varietà di Stein. Ritroviamo quindi la risolubilità del primo problema di Cousin in questo caso. Per studiare il secondo problema di Cousin consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{A}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D} \to 0$$

con le notazioni dell'esempio 2 del paragrafo 7.1. (I fasci $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{M}^*$ sono gruppi moltiplicativi.) Otteniamo la successione esatta

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{D}) \to H^1(\Omega, \mathcal{A}^*)$$

e concludiamo che il secondo problema di Cousin è risolubile per una sezione di $\mathcal{D}$ se e solo se la sua immagine in $H^1(\Omega, \mathcal{A}^*)$ è nulla. Per studiare questo gruppo consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{A} \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{A}^* \to 0,$$

dove $\mathbf{Z}$ è il fascio costante del gruppo additivo degli interi e l'applicazione da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}^*$ è $f \mapsto \exp(2\pi i f)$. Dalla successione esatta di coomologia si ricava

$$H^1(\Omega, \mathcal{A}) \to H^1(\Omega, \mathcal{A}^*) \to H^2(\Omega, \mathbf{Z}) \to H^2(\Omega, \mathcal{A}),$$

dove entrambi i gruppi agli estremi sono nulli. Dunque

$$H^1(\Omega, \mathcal{A}^*) \simeq H^2(\Omega, \mathbf{Z}).$$

Possiamo pertanto considerare l'applicazione $\Gamma(\Omega, \mathcal{D}) \to H^1(\Omega, \mathcal{A}^*)$ come un'applicazione

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{D}) \to H^2(\Omega, \mathbf{Z}), \tag{7.4.1}$$

e il secondo problema di Cousin è risolubile precisamente per i divisori appartenenti al suo nucleo. L'applicazione (7.4.1) è suriettiva. Infatti il teorema 5.5.3 significa che ogni 1-cociclo di $\mathcal{A}^*$ è immagine di un divisore positivo, ossia di una sezione di $\mathcal{D}$ che in ogni punto è il divisore di una funzione analitica. Già i soli divisori positivi hanno quindi per immagine tutto $H^1(\Omega, \mathcal{A}^*)$, e si ottiene il risultato seguente.

Teorema 7.4.4. Il secondo problema di Cousin su una varietà di Stein è risolubile per un divisore arbitrario se e solo se $H^2(\Omega, \mathbf{Z}) = 0$.

La discussione che precede è soltanto una forma meno esplicita di quella del paragrafo 5.5.

Teorema 7.4.5. Se F è una funzione meromorfa su una varietà di Stein Ω con $H^2(\Omega, \mathbf{Z}) = 0$, si possono trovare funzioni analitiche f, g tali che $F = f/g$ e i germi f_z, g_z siano primi fra loro in ogni punto. Questa rappresentazione è unica a meno di un fattore analitico che non si annulla mai.

Dimostrazione. F definisce una sezione $\operatorname{div} F$ di $\mathcal{D}$, e nel paragrafo 7.1 abbiamo dimostrato che $d^+ = \sup(0, \operatorname{div} F)$ e $d^- = \sup(0, -\operatorname{div} F)$ sono sezioni di $\mathcal{D}$ e che $\operatorname{div} F = d^+ - d^-$. Per il teorema 7.4.4 possiamo quindi trovare funzioni meromorfe f^+ e f^- con questi divisori. Ma allora f^+ e f^- sono analitiche e f^+/f^- definisce lo stesso divisore di F. Dunque $f^+/f^- = F/h$ per qualche h analitica che non si annulla mai. Ponendo $f = hf^+$ e $g = f^-$ otteniamo il teorema, poiché l'unicità è evidente.

Senza fare alcuna ipotesi su $H^2(\Omega, \mathbf{Z})$ si ottiene un risultato più debole.

Teorema 7.4.6. Ogni funzione meromorfa F sulla varietà di Stein Ω si può scrivere nella forma f/g con $f, g \in A(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}_z$ l'ideale dei germi g_z di funzioni analitiche in z tali che $g_z F_z$ sia il germe di una funzione analitica. Poiché ogni punto di Ω ha un intorno nel quale si applica il teorema 7.4.5, vi possiamo trovare una funzione analitica g tale che $\mathcal{F}_z = g_z A_z$ per ogni z nell'intorno. Quindi $\mathcal{F}$ è un sottofascio analitico coerente di $\mathcal{A}$. Sia g una sezione non banale di questo fascio, che esiste per il teorema 7.2.8. Allora $gF = f$ è analitica e il teorema è dimostrato. Si osservi che per il teorema 7.2.8 possiamo scegliere g come generatore di $\mathcal{F}$ in un punto assegnato, in modo cioè che f_z e g_z siano primi fra loro in quel punto, ma non possiamo ottenere che ciò accada ovunque in Ω.

Trattiamo infine le funzioni analitiche su un insieme analitico.

Definizione 7.4.7. Se Ω è una varietà complessa e V un suo sottoinsieme analitico, una funzione $f : V \to \mathbb{C}$ si dice *analitica* se per ogni $\zeta \in V$ esistono un intorno U di ζ in Ω e una funzione analitica F in U che coincide con f in $U \cap V$.

Su una varietà di Stein si ha una descrizione più semplice.

Teorema 7.4.8. Se Ω è una varietà di Stein e V è un suo sottoinsieme analitico, ogni funzione analitica su V è la restrizione a V di una funzione $F \in A(\Omega)$.

Dimostrazione. Per la definizione 7.4.7 possiamo scegliere un ricoprimento $\mathcal{U}$ di Ω mediante varietà di Stein U_i, $i \in I$, tali che per ogni i esista in U_i una funzione analitica f_i coincidente con f in $U_i \cap V$. Le differenze $c_{ij} = f_i - f_j \in A(U_i \cap U_j)$ definiscono un cociclo di $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{I})$, dove $\mathcal{I}$ è il fascio coerente dei germi di funzioni che si annullano su V (si vedano il teorema 6.5.2 e la dimostrazione del teorema 7.2.11). Dal corollario 7.4.2 e dalla sua estensione ai fasci coerenti segue quindi che esistono $v_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{I})$ tali che $v_j - v_i = c_{ij}$ per tutti gli $i, j \in I$. La condizione $F = f_i + v_i$ in U_i per ogni $i \in I$ definisce ora univocamente una funzione $F \in A(\Omega)$ la cui restrizione a V è f.

Il teorema seguente mostra che lo spazio delle funzioni analitiche su un insieme analitico è completo per la topologia della convergenza localmente uniforme.

Teorema 7.4.9. Siano Ω una varietà complessa e V un suo sottoinsieme analitico. Se una successione f_j di funzioni analitiche su V converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di V a una funzione f, anche f è analitica su V.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che ogni punto di V ha un intorno $U \subset \Omega$ nel quale esiste $F \in A(U)$ tale che $F = f$ in $U \cap V$. Possiamo supporre $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e $0 \in V$, e provare l'asserzione per un intorno U di 0. Supponiamo dapprima che $I_0(V)$ sia un ideale primo e scegliamo le coordinate locali e U in modo che $U \subset \Omega$ e $U \cap V$ abbia la forma descritta nella proposizione 6.5.4. Per il teorema 7.4.8 possiamo estendere ogni f_j a una funzione analitica in U. Applicando il lemma 6.5.5 a questi prolungamenti otteniamo una successione $g_j \in A(U)$ con $g_j = \Delta^{\mu n+1} f_j$ su $U \cap V$ tale che $g_j \to g$ uniformemente in U, con $g \in A(U)$. Poiché $g_j - \Delta^{\mu n+1} f_j$ si annulla su $U \cap V$, g_j è una sezione del sottofascio di $\mathcal{A}$ generato da $\Delta^{\mu n+1}$ e dalle funzioni Φ^i della condizione (vii) della proposizione 6.5.4. Per il teorema 6.3.5 anche il limite g è una sezione di questo fascio, e per il teorema 7.2.9 possiamo scrivere

$$g = \Delta^{\mu n+1} h + \sum_{i=1}^{\kappa} h_i \Phi^i$$

con $h, h_1, \ldots, h_\kappa \in A(U)$. Ma allora $h = f$ su $U \cap V$, il che dimostra l'asserto in questo caso.

Prima di proseguire useremo l'analisi funzionale per dare alla conclusione una forma più quantitativa. Nel caso particolare appena considerato abbiamo infatti dimostrato che le funzioni analitiche in $U \cap V$ formano uno spazio di Fréchet $A(U \cap V)$ per la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Anche $A(U)$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti è uno spazio di Fréchet, e il sottospazio $N(U)$ delle funzioni che si annullano su V è chiuso. Poiché l'applicazione iniettiva di restrizione

$$A(U)/N(U) \to A(U \cap V)$$

è suriettiva per il teorema 7.4.8, dal teorema di Banach segue che è un omeomorfismo. Per ogni successione convergente $f_j \in A(U \cap V)$ possiamo dunque scegliere $g_j \in A(U)$ coincidenti con f_j su V e tali che g_j converga in $A(U)$.

Passiamo al caso generale in cui I_0 è intersezione di ideali primi $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\mu$ in A_0. Come nella dimostrazione del teorema 6.5.2 possiamo trovare intorni aperti U_σ di 0 e insiemi analitici $V_\sigma \subset U_\sigma$ cui si applicano i risultati della prima parte, e si ha

$$U \cap V = \bigcup_{\sigma=1}^{\mu} (U \cap V_\sigma)$$

se $U \subset \bigcap_{\sigma=1}^{\mu} U_\sigma$ è un intorno abbastanza piccolo di 0 scelto come dominio di olomorfia. Per $\sigma = 1, \dots, \mu$ possiamo allora scegliere una successione convergente $g_j^\sigma \in A(U_\sigma)$ uguale a f_j in $U \cap V_\sigma$. Dimostreremo per induzione che per $\alpha = 1, \dots, \mu$ esiste una successione convergente $g_j \in A(U)$ uguale a f_j in $\bigcup_{\sigma=1}^{\alpha}(U \cap V_\sigma)$. Per $\alpha = \mu$ la restrizione del limite g a $U \cap V$ è f, il che prova il teorema. Per $\alpha = 1$ possiamo prendere $g_j = g_j^1$. Supponiamo $\alpha > 1$ e di avere già una successione convergente $g_j \in A(U)$ coincidente con f_j in $\bigcup_{\sigma=1}^{\alpha-1}(U \cap V_\sigma)$. Siano $\psi_1, \dots, \psi_\ell$ generatori del fascio dei germi di funzioni analitiche che si annullano su $\bigcup_{\sigma=1}^{\alpha-1}(U \cap V_\sigma)$ e siano $\Phi_1, \dots, \Phi_l$ generatori per quelle che si annullano su $U \cap V_\alpha$. Poiché $g_j - g_j^\alpha = g_j - f_j + f_j - g_j^\alpha$, possiamo trovare $r_j^i, s_j^i \in A(U)$ tali che

$$g_j - g_j^\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} r_j^i \psi_i - \sum_{i=1}^{l} s_j^i \Phi_i.$$

Poiché il primo membro converge in $A(U)$, dal teorema 7.2.12 segue che possiamo scegliere r_j^i e s_j^i convergenti in $A(U)$ per $j \to \infty$. Ma allora

$$G_j = g_j - \sum_{i=1}^{\ell} r_j^i \psi_i = g_j^\alpha - \sum_{i=1}^{l} s_j^i \Phi_i$$

coincide con f_j in $\bigcup_{\sigma=1}^{\alpha}(U \cap V_\sigma)$ e converge in $A(U)$ per $j \to \infty$. La dimostrazione è conclusa.

7.5. Il teorema di de Rham

Sia Ω una varietà C^∞ numerabile all'infinito e indichiamo con $\mathcal{E}_q$ il fascio dei germi di q-forme C^∞ su Ω. Sia $\mathcal{Z}_q$ il fascio dei germi di quelle forme che sono annullate dall'operatore di differenziazione esterna d. Si ha allora una successione esatta di omomorfismi di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_q \longrightarrow \mathcal{E}_q \xrightarrow{d} \mathcal{Z}_{q+1} \longrightarrow 0.$$

Infatti, se f è una $(q+1)$-forma con $df = 0$ in un intervallo di $\mathbf{R}^n$ definito da $a_j < x_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$, si può trovare una q-forma u con $du = f$. Questo fatto, noto come *lemma*

di Poincaré, segue dall'argomento usato per dimostrare il teorema 2.3.3 se si sostituisce all'esistenza di soluzioni dell'equazione di Cauchy–Riemann in una variabile complessa l'esistenza di una primitiva per ogni funzione C^∞ di una variabile reale. Si può ora applicare la dimostrazione del teorema 7.4.1 e, poiché $\mathcal{Z}_0$ è il fascio costante $\mathbb{C}$, si ottiene il risultato seguente.

Teorema 7.5.1. Per ogni $p > 0$ il gruppo di coomologia $H^p(\Omega, \mathbb{C})$ è isomorfo allo spazio quoziente

$$\{f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}_p) : df = 0\}/\{dg : g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{E}_{p-1})\}.$$

È così conclusa la dimostrazione del teorema 2.7.10. Per completare quella del teorema 2.7.11 occorrono ricoprimenti particolari. Conviene pertanto considerare ora soltanto aperti Ω di $\mathbf{R}^n$, sebbene, in virtù di un teorema di Weil [2], gli argomenti si possano applicare in generale. Scegliamo dunque un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di Ω nel quale ogni U_i è un intervallo aperto contenuto in Ω e I è numerabile. Allora anche la successione

$$0 \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_q) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}_q) \xrightarrow{d} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{q+1}) \to 0$$

è esatta, e con gli argomenti della dimostrazione del teorema 7.4.1 si ottiene

$$H^p(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \simeq \Gamma(\mathcal{Z}_p)/d\mathcal{E}_{p-1}.$$

Se per ogni p fissiamo un operatore che dia un'inversa destra di d nella successione precedente, si vede facilmente che la dimostrazione associa a ogni $f \in \Gamma(\mathcal{Z}_p)$ un cociclo che rappresenta una classe $c \in H^p(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, in modo che per ogni $s \in I^{p+1}$ la componente c_s dipenda con continuità da f (per la topologia C^∞), e che $f \in d\mathcal{E}_{p-1}$ se e solo se il cociclo c è un cobordo. Poiché l'equazione $\delta b = c$ è un sistema lineare del tipo studiato nel lemma 6.3.7, ne segue che $d\mathcal{E}_{p-1}$ è chiuso in $\Gamma(\mathcal{Z}_p)$. Questo conclude la dimostrazione del teorema 2.7.11.

Dimostriamo infine il teorema 2.7.12. Basta considerare ricoprimenti finiti di K della forma $\{U_i \cap K\}_{i\in I}$, con U_i aperto in $\mathbb{C}^n$. Restringendo se necessario gli U_i, possiamo ottenere che, per ogni $s \in I^{p+1}$ e ogni intero p, si abbia $U_s \cap K \neq \varnothing$ oppure $\overline{U}_s \cap K = \varnothing$. Sia Ω' un dominio di Runge contenuto in $\bigcup_i U_i$ tale che $\Omega' \cap U_s \neq \varnothing$ implichi $K \cap U_s \neq \varnothing$. L'esistenza di Ω' segue dal fatto che K ha un sistema fondamentale di intorni costituito da domini di Runge e dalla condizione imposta inizialmente al ricoprimento. Sia ora c un cociclo di $C^r(\{U_i \cap K\}, \mathbb{C})$. Possiamo supporre che c_s abbia valore costante in $U_s \cap K$ per ogni $s \in I^{r+1}$. Infatti, poiché il valore è localmente costante, ci si può ricondurre a questo caso passando a un ricoprimento più fine. Esiste allora un'unica cocatena $c' \in C^r(\{U_i \cap \Omega'\}, \mathbb{C})$ che per ogni s ha valore costante in $U_s \cap \Omega'$, uguale al valore di c in $U_s \cap K$. È chiaro che c' è un cociclo. Se $r \geq n$, dal teorema 2.7.11 segue dunque che in un opportuno raffinamento del ricoprimento $\{U_i \cap \Omega'\}$ di Ω' il cociclo c' è mandato in un cobordo. Restringendo questo ricoprimento a K concludiamo che anche c è mandato in un cobordo nel ricoprimento così ottenuto. Pertanto $H^r(K, \mathbb{C}) = 0$ per $r \geq n$. La dimostrazione è conclusa.

7.6. Coomologia con stime ed equazioni differenziali a coefficienti costanti

Abbiamo dimostrato il teorema B (teorema 7.4.3) combinando la teoria dell'esistenza per l'operatore $\bar\partial$ con i risultati locali del capitolo VI. D'altra parte, nel paragrafo 4.4 abbiamo ottenuto stime precise per le soluzioni dell'equazione $\bar\partial$ in $\mathbb{C}^n$. In questo paragrafo dimostreremo che, insieme a uno studio più preciso della situazione locale, esse conducono

a un «teorema B con stime». Questo risultato comprende teoremi di esistenza per sistemi sovradeterminati di operatori differenziali a coefficienti costanti.

Il primo passo consiste nel dare una versione quantitativa del teorema 7.4.1. Ci occorrono a tal fine alcuni ricoprimenti di $\mathbb{C}^n$ che ora definiremo. Si potrebbero usare ricoprimenti molto più generali, ma ci limiteremo a quanto occorre qui. (Per questo paragrafo basterebbero ricoprimenti molto più particolari, che però non basterebbero nel paragrafo 7.7.)

Lemma 7.6.1. Sia $d(x)$, $x \in \mathbf{R}^{2n}$, una funzione a valori in $(0, 1]$ tale che

$$d(x+y) \le 2d(x) \quad \text{se } |y|_\infty = \max_j |y_j| \le 1.$$

Esistono allora un ricoprimento aperto $\mathcal{U}^d$ costituito da cubi aperti U_i^d, $i \in I(d)$, e una partizione dell'unità $\chi_i^d \in C_0^\infty(U_i^d)$ tali che

(i) se $x, y \in U_i^d$, allora $|x-y|_\infty \le d(x)$;

(ii) al più 2^{8n} insiemi U_i^d possono avere un punto in comune;

(iii) con C indipendente da d e da x, si ha

$$|\partial \chi_i^d / \partial x| \le C/d(x), \qquad x \in \mathbf{R}^{2n};$$

(iv) se $0 < d' \le d$, $\mathcal{U}^{d'}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}^d$ definito da un'applicazione $\varrho_{d,d'} : I(d') \to I(d)$, con $\varrho_{d,d''} = \varrho_{d,d'}\varrho_{d',d''}$ per $d'' \le d' \le d$. Se $d' \le \varepsilon d$, $\varepsilon < 1$, $i' \in I(d')$ e $i = \varrho_{d,d'} i'$, da $x \in U_{i'}^{d'}$ segue che $U_{i'}^{d'}$ è contenuto nel cubo di centro x e lato $2\varepsilon d(x)$, e che U_i^d contiene il cubo di centro x e lato $d(x)(1/32 - 2\varepsilon)$.

Dimostrazione. Per cubi diadici intendiamo i cubi

$$I_{k,g} = \{x : 0 \le 2^k x_j - g_j \le 1,\ j = 1, \dots, 2n\},$$

dove la generazione k è un intero non negativo e $g \in \mathbf{Z}^{2n}$. Indichiamo con $L(I_{k,g}) = 2^{-k}$ la lunghezza del lato. Ogni cubo diadico è contenuto in un unico cubo diadico di ciascuna generazione precedente. Sia ora $I(d)$ l'insieme dei cubi diadici massimali i tali che

$$L(i) \le d(x)/4, \qquad x \in i.$$

Suddividendo successivamente i cubi $I_{0,g}$ si vede che $I(d)$ ricopre $\mathbf{R}^{2n}$ con cubi dagli interni disgiunti. Se $i \in I(d)$, allora $d(x) \le 16L(i)$ per $x \in i$. Infatti $L(i) \le 1/4$, poiché $d \le 1$, e per la massimalità di i si ha $2L(i) > d(x)/4$ per qualche x nel cubo padre di i, onde $d(y) \le 16L(i)$ per ogni $y \in i$. Due cubi adiacenti possono differire al più di una generazione, sicché un cubo di $I(d)$ ha al più $4^{2n} - 1$ vicini in $I(d)$.

Per $i \in I(d)$ prendiamo come U_i^d il cubo aperto i^* con lo stesso centro di i e lato doppio. Esso è contenuto nell'unione di i e dei suoi vicini. Al più 4^{4n} di questi cubi possono dunque sovrapporsi, il che dimostra (ii). La (i) segue dalla costruzione. Sia

$$0 \le \psi \in C_0^\infty(I_{0,0}^*), \qquad \psi = 1 \text{ in } I_{0,0},$$

e poniamo $\psi_{I_{k,g}} = \psi(2^k x - g)$. Allora $\psi_{I_{k,g}} = 1$ in $I_{k,g}$, il suo supporto è contenuto in $I_{k,g}^*$ e

$$\sup |\partial \psi_{I_{k,g}} / \partial x| = L(I_{k,g})^{-1} \sup |\partial \psi / \partial x|.$$

In virtù di (ii) concludiamo che le funzioni

$$\chi_i^d = \psi_i \Big/ \sum_{k \in I(d)} \psi_k, \qquad i \in I(d),$$

definiscono una partizione dell'unità con le proprietà richieste.

Se $0 < d' \le d$, ogni cubo di $I(d')$ è contenuto in un unico cubo di $I(d)$, il che fornisce l'applicazione di raffinamento $\varrho_{d,d'} : I(d') \to I(d)$. Se $i' \in I(d')$, $i = \varrho_{d,d'} i'$ e $x \in U^{d'}_{i'}$, allora $|y - x|_\infty \le d'(x) \le \varepsilon d(x)$ per $y \in U^{d'}_{i'}$ e $d' \le \varepsilon d$. In particolare $|x' - x|_\infty \le \varepsilon d(x)$ se $x' \in i'$. Un tale x' appartiene a i, quindi $L(i) \ge d(x')/16 \ge d(x)/32$. Ora U^d_i contiene ogni y con $|y - x'|_\infty < L(i)/2$, condizione soddisfatta se $|y - x'|_\infty < d(x)/64$. Dalla disuguaglianza triangolare concludiamo che $y \in U^d_i$ se $|y - x|_\infty < d(x)(1/64 - \varepsilon)$, il che conclude la dimostrazione di (iv).

Sia c una cocatena di $C^p(\mathcal{U}^d, \mathcal{A})$ e sia φ una funzione semicontinua superiormente. Scriveremo

$$\|c\|^2_\varphi = \sum_{|s|=p+1} \int_{U^d_s} |c_s|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda,$$

dove $d\lambda$ indica come al solito la misura di Lebesgue in $\mathbb{C}^n$.

Proposizione 7.6.2. Siano φ e $-\log d$ funzioni plurisubarmoniche in $\mathbb{C}^n$, con

$$0 < d \le 1, \qquad d(z + \zeta) \le 2d(\zeta) \quad \text{se } |\operatorname{Re} z_j| \le 1,\ |\operatorname{Im} z_j| \le 1,\ j = 1, \dots, n.$$

Per ogni cocatena $c \in C^p(\mathcal{U}^d, \mathcal{A})$, $p > 0$, con $\delta c = 0$ e $\|c\|_\varphi < \infty$, esiste una cocatena $c' \in C^{p-1}(\mathcal{U}^d, \mathcal{A})$ tale che $\delta c' = c$ e

$$\|c'\|_\psi \le K \|c\|_\varphi. \tag{7.6.1}$$

Qui K è una costante indipendente da φ, d, c e ψ è definita da

$$\psi(z) = \varphi(z) - p \log d(z) + 2 \log(1 + |z|^2), \qquad z \in \mathbb{C}^n.$$

Dimostrazione. Per riprendere la dimostrazione del teorema 7.4.1 introduciamo lo spazio $C^p(\mathcal{U}^d, \mathcal{Z}_q, \varphi)$ di tutte le cocatene alternanti $c = \{c_s\}$, $s \in I(d)^{p+1}$, dove $c_s \in L^2_{(0,q)}(U^d_s, \varphi)$, $\bar\partial c_s = 0$ e

$$\|c\|^2_\varphi = \sum_{|s|=p+1} \int_{U^d_s} |c_s|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda < \infty.$$

Vogliamo dimostrare che, se $\delta c = 0$ e $p > 0$, si può trovare $c' \in C^{p-1}(\mathcal{U}^d, \mathcal{Z}_q, \psi)$ tale che $\delta c' = c$ e valga (7.6.1). Per $q = 0$ questa affermazione è precisamente la proposizione 7.6.2. La dimostreremo supponendo, quando $p > 1$, di averla già provata per valori inferiori di p e per ogni q. Come nella dimostrazione del teorema 7.4.1, il buon esito dell'induzione dipende dal fatto che q è arbitrario.

Seguendo la dimostrazione della proposizione 7.3.3 introduciamo dapprima

$$b_s = \sum_{i \in I(d)} \chi^d_i c_{i,s}, \qquad s \in I(d)^p,$$

dove le χ^d_i costituiscono la partizione dell'unità del lemma 7.6.1 subordinata a $\mathcal{U}^d$. La dimostrazione della proposizione 7.3.3 dà $\delta b = c$. Dalla disuguaglianza di Cauchy otteniamo

$$|b_s|^2 \le \sum_i \chi^d_i |c_{i,s}|^2, \qquad \text{quindi } \|b\|^2_\varphi \le \|c\|^2_\varphi.$$

Sia $\bar\partial b$ la cocatena di $C^{p-1}(\mathcal{U}^d, \mathcal{Z}_{q+1}, \varphi_1)$ definita da

$$(\bar\partial b)_s = \bar\partial(b_s) = \sum_i \bar\partial \chi^d_i \wedge c_{i,s}, \qquad s \in I(d)^p.$$

Poiché nessun punto appartiene ai supporti di più di 2^{8n} funzioni χ_i^d, usando (iii) del lemma 7.6.1 otteniamo, con una costante K,

$$\|\bar\partial b\|_{\varphi_1} \le K\|c\|_\varphi, \qquad \varphi_1(z) = \varphi(z) - \log d(z).$$

Ora $\delta\bar\partial b = \bar\partial\delta b = \bar\partial c = 0$. Per $p > 1$ l'ipotesi induttiva fornisce dunque $b' \in C^{p-2}(\mathcal{U}^d, \mathcal{Z}_{q+1}, \psi)$ tale che $\delta b' = \bar\partial b$ e, per una costante K_1,

$$\|b'\|_\psi \le K_1\|\bar\partial b\|_{\varphi_1} \le KK_1\|c\|_\varphi.$$

Poiché $\bar\partial b'_s = 0$ per ogni $s \in I^{p-1}$ e ψ è plurisubarmonica, per il teorema 4.4.2 possiamo scegliere per ogni $s \in I^{p-1}$ una forma $b''_s \in L^2_{(0,q)}(U_s^d)$ con $\bar\partial b''_s = b'_s$ in U_s^d e, con una costante K_2,

$$\int_{U_s^d} |b''_s|^2 e^{-\psi}\, d\lambda \le K_2 \int_{U_s^d} |b'_s|^2 e^{-\psi}\, d\lambda.$$

Infatti, dopo un'opportuna traslazione, il fattore $(1 + |z|^2)^2$ in (4.4.5) è uniformemente limitato per $z \in U_s^d$. Poniamo

$$c' = b - \delta b''.$$

Allora $\delta c' = \delta b = c$ e

$$\bar\partial c' = \bar\partial b - \delta\bar\partial b'' = \bar\partial b - \delta b' = 0.$$

Riunendo le stime appena ottenute per b, b', b'', si ricava (7.6.1).

Resta il caso $p = 1$. La condizione $\delta\bar\partial b = 0$ significa allora che $\bar\partial b$ definisce univocamente una forma f di tipo $(0, q+1)$ in $\mathbb{C}^n$, con $\bar\partial f = 0$ e

$$\int |f|^2 e^{-\varphi_1}\, d\lambda \le \|\bar\partial b\|^2_{\varphi_1} \le K^2\|c\|^2_\varphi.$$

Per il teorema 4.4.2 possiamo trovare una forma $u \in L^2_{(0,q)}(\mathbb{C}^n, \psi)$ con $\bar\partial u = f$ e

$$\int |u|^2 e^{-\psi}\, d\lambda \le \int |f|^2 e^{-\varphi_1}\, d\lambda.$$

Ponendo $c'_s = b_s - u$ otteniamo dunque una cocatena con le proprietà richieste.

Siano P_{jk} $(j = 1, \dots, p,\ k = 1, \dots, q)$ polinomi in z e consideriamo l'omomorfismo di fasci

$$P : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^p \tag{7.6.2}$$

che manda $(f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{A}^q$ in $\{\sum_k P_{jk} f_k\}_{j=1}^p$. Vogliamo dare stime per la coomologia a valori nel nucleo o nell'immagine, entrambi, naturalmente, fasci analitici coerenti. A tal fine ripeteremo sostanzialmente la dimostrazione del teorema 7.4.3, ma occorre prima riesaminarne tutti gli ingredienti locali. Il primo è il teorema di Oka in questo caso particolare.

Lemma 7.6.3. Il nucleo $\mathcal{R}_P$ dell'omomorfismo (7.6.2) è generato dai germi di tutte le q-uple $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ a componenti polinomiali tali che

$$\sum_{k=1}^q P_{jk} Q_k = 0, \qquad j = 1, \dots, p; \tag{7.6.3}$$

basta anzi un numero finito di tali Q.

Dimostrazione. Poiché l'anello dei polinomi è noetheriano (si vedano Zariski e Samuel [1, p. 201]), il modulo di tutti i Q a componenti polinomiali che soddisfano (7.6.3) è

finitamente generato sull'anello dei polinomi. Se dunque tutte le soluzioni polinomiali di (7.6.3) generano $\mathcal{R}_P$, si può trovare un numero finito di generatori.

La dimostrazione segue da vicino quella del teorema di Oka (teorema 6.4.1), perciò saremo piuttosto brevi.

(a) Supponiamo $p > 1$ e il lemma già dimostrato per valori inferiori di p. Scriviamo $P_k = (P_{1k}, \dots, P_{pk})$, $k = 1, \dots, q$. Evidentemente

$$\{(f_1, \dots, f_q) \in A_z^q : f_1\gamma_z(P_1) + \cdots + f_q\gamma_z(P_q) = 0\} = R_z(P_1, \dots, P_q) \subset R_z(P_{11}, \dots, P_{1q}).$$

Per l'ipotesi induttiva esistono $H_1, \dots, H_r \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^q$ che generano $R_z(P_{11}, \dots, P_{1q})$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Ogni $f \in R_z(P_1, \dots, P_q)$ si può dunque scrivere

$$f = \sum_{i=1}^{r} c^i \gamma_z(H_i), \qquad c^i \in A_z,$$

e $f \in R_z(P_1, \dots, P_q)$ se e solo se

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} c^i \gamma_z(H_{ik}P_{jk}) = 0, \qquad j = 2, \dots, p.$$

Per l'ipotesi induttiva il modulo di tutte queste $(c^1, \dots, c^r) \in A_z^r$ è generato dai germi delle soluzioni polinomiali $(C^1, \dots, C^r)$ di

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} C^i H_{ik}P_{jk} = 0, \qquad j = 2, \dots, p,$$

il che dimostra il lemma in questo caso.

(b) Supponiamo ora $p = 1$ e il teorema già dimostrato per ogni p nel caso di dimensione $n-1$. Possiamo supporre che per ciascuno dei polinomi $P_1, \dots, P_q$ il grado in z_n coincida con il grado totale. Per $\zeta \in \mathbb{C}^n$ sia $P_j = W_j h_j$ la fattorizzazione in ζ nel prodotto di un polinomio di Weierstrass W_j in $z - \zeta$ e di un fattore analitico h_j con $h_j(\zeta) \neq 0$. Supponiamo che il grado μ di W_q sia almeno pari a quello di W_j per $j < q$. Se $(c^1, \dots, c^q) \in R_\zeta(P_1, \dots, P_q)$, per il teorema di preparazione di Weierstrass possiamo scrivere

$$c^i = \gamma_\zeta(P_q)t^i + r^i, \qquad i = 1, \dots, q-1,$$

dove $t^i, r^i \in A_\zeta$ e r^i è il germe di un polinomio in z_n di grado $< \mu$. Posto $r^q = c^q + \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_\zeta(P_i)t^i$, si ha

$$\begin{aligned}(c^1, \dots, c^q) = {} & \gamma_\zeta(P_q, 0, \dots, 0, -P_1)t^1 + \cdots \\ & + \gamma_\zeta(0, \dots, 0, P_q, -P_{q-1})t^{q-1} + (r^1, \dots, r^q).\end{aligned}$$

Poiché gli altri termini sono relazioni, anche $(r^1, \dots, r^q) \in R_\zeta(P_1, \dots, P_q)$, dunque

$$\sum_{i=1}^{q-1} r^i \gamma_\zeta(P_i) + r^q \gamma_\zeta(W_q h_q) = 0.$$

Poiché la somma è un polinomio in z_n di grado $< \mu + m$, dove m è il massimo dei gradi dei P_j, dal lemma 6.1.3 segue che $r^q\gamma_\zeta(h_q)$ è il germe di un polinomio in z_n di grado $< m$. Ora

$$(r^1, \dots, r^q) = \gamma_\zeta(1/h_q)(\gamma_\zeta(h_q)r^1, \dots, \gamma_\zeta(h_q)r^q)$$

e $R = (\gamma_\zeta(h_q)r^1, \dots, \gamma_\zeta(h_q)r^q)$ è il germe di un polinomio in z_n di grado $< 2m$. Dall'ipotesi induttiva segue che R appartiene al modulo generato, sui germi di funzioni analitiche di $(z_1, \dots, z_{n-1})$, dalle relazioni polinomiali $(C^1, \dots, C^q)$ di grado $< 2m$ rispetto a z_n. Ciò conclude la dimostrazione.

Siano $(Q_{1l}, \dots, Q_{ql})$, $l = 1, \dots, r$, generatori a componenti polinomiali del fascio $\mathcal{R}_P$. Dal teorema 7.2.9 otteniamo allora il lemma seguente.

Lemma 7.6.4. Se Ω è un dominio di olomorfia e $f_k \in A(\Omega)$, $k = 1, \dots, q$, soddisfano le equazioni $\sum_{k=1}^q P_{jk} f_k = 0$, $j = 1, \dots, p$, si possono trovare $g_l \in A(\Omega)$, $l = 1, \dots, r$, tali che

$$f_k = \sum_{l=1}^r Q_{kl} g_l, \qquad k = 1, \dots, q. \tag{7.6.4}$$

Viceversa, (7.6.4) implica evidentemente $\sum_k P_{jk} f_k = 0$. Abbiamo così trovato Q la cui immagine coincide con il nucleo di P. Possiamo dunque concentrare l'attenzione sull'immagine di un omomorfismo della forma (7.6.2). Il prossimo obiettivo è una versione quantitativa del teorema 6.3.5 in questo caso.

Proposizione 7.6.5. Sia (P_{jk}), $j = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, q$, una matrice a elementi polinomiali e sia Ω un intorno di 0. Esiste un intorno Ω' di 0 tale che, per ogni $\varrho \in (0, 1)$ e ogni $u \in A(\varrho\Omega + z)^q$, si può trovare $v \in A(\varrho\Omega' + z)^q$ con $Pv = Pu$ e, con costanti C, N indipendenti da u e da $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\sup_{\varrho\Omega'+z} |v| \le C(1 + |z|)^N \varrho^{-N} \sup_{\varrho\Omega+z} |Pu|. \tag{7.6.5}$$

Qui $\varrho\Omega + z = \{\zeta + z : \zeta \in \varrho\Omega\}$ e $|v|^2 = \sum_{j=1}^q |v_j|^2$.

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione del teorema 6.3.5 si può ripetere senza modifiche. Supponiamo infatti $p > 1$ e la proposizione già dimostrata per sistemi con meno di p equazioni. In particolare possiamo considerare l'equazione

$$\sum_{k=1}^q P_{1k} v_k^1 = \sum_{k=1}^q P_{1k} u_k$$

e concludere che essa ammette in $\varrho\Omega' + z$ soluzioni v^1 tali che

$$\sup_{\varrho\Omega'+z} |v^1| \le C(1 + |z|)^N \varrho^{-N} \sup_{\varrho\Omega+z} |Pu|.$$

Poniamo $v = v^1 + w$. Dobbiamo trovare w tale che $Pw = P(u - v^1)$ e stimarne la grandezza. Applichiamo il lemma 7.6.4 all'equazione $\sum_k P_{1k} w_k = 0$. Se $(Q_{1l}, \dots, Q_{ql})$, $l = 1, \dots, r$, sono generatori polinomiali di queste relazioni e Ω' è un dominio di olomorfia, possiamo scrivere

$$u - v^1 = Qf,$$

con $f = (f_1, \dots, f_r) \in A(\varrho\Omega' + z)^r$. Cerchiamo w nella forma $w = Qg$. L'equazione $Pw = P(u - v^1)$ diventa $PQg = PQf$, e la prima di queste p equazioni è soddisfatta automaticamente per la definizione di Q. Rimangono soltanto $p-1$ equazioni. Per l'ipotesi induttiva, in un opportuno intorno Ω'' di 0 si può quindi trovare g tale che, con certe costanti C', N',

$$\begin{aligned} \sup_{\varrho\Omega''+z} |g| &\le C'(1 + |z|)^{N'} \varrho^{-N'} \sup_{\varrho\Omega'+z} |PQf| \\ &= C'(1 + |z|)^{N'} \varrho^{-N'} \sup_{\varrho\Omega'+z} |Pu - Pv^1|. \end{aligned}$$

Se m è un maggiorante dei gradi dei polinomi P_{jk} e Q_{kl}, ponendo $v = v^1 + Qg$ si ottiene

$$\sup_{\varrho\Omega''+z} |v| \le C''(1+|z|)^{N+N'+2m} \varrho^{-N-N'} \sup_{\varrho\Omega+z} |Pu|.$$

Poiché $Pv = Pv^1 + PQg = Pv^1 + PQf = Pv^1 + P(u - v^1) = Pu$, ciò dimostra l'asserto.

Resta tuttavia da provare la proposizione per $p = 1$ nell'ipotesi che valga per un numero minore di variabili e per p arbitrario. A tal fine occorre studiare più da vicino le proprietà dei polinomi e riesaminare il teorema di preparazione di Weierstrass. Rimandiamo la conclusione della dimostrazione della proposizione 7.6.5 a dopo questi preparativi. Restringendo Ω e operando un cambiamento lineare di variabili possiamo naturalmente supporre che Ω sia la palla unitaria.

Lemma 7.6.6. Dato un intero $m > 0$, esiste un insieme finito $\Theta \subset \Omega \setminus \{0\}$, dove $\Omega = \{\vartheta \in \mathbb{C}^n : |\vartheta| < 1\}$ è la palla unitaria, tale che per tutti i polinomi $p(z) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha z^\alpha$ di grado $\le m$ valgano

$$\sup_{|z|<1} |p(z)| \le C_0 \sup_{\vartheta\in\Theta} \inf_{|w|=1} |p(w\vartheta)|, \tag{7.6.6}$$

$$C_1 \sum_{|\alpha|\le m} |a_\alpha| \le \sup_{|z|<1} |p(z)| \le C_2 \sum_{|\alpha|\le m} |a_\alpha|, \tag{7.6.7}$$

dove C_0, C_1, C_2 dipendono soltanto da n e da m.

Dimostrazione. Scegliamo un insieme finito $\Theta_0 \subset \Omega \setminus \{0\}$ tale che $p \equiv 0$ se $p = 0$ su Θ_0. Possiamo prendere, ad esempio, i punti $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)/\sqrt{2n}$ con $\vartheta_j^{m+1} = 1$. Allora

$$\sup_{z\in\Omega} |p(z)| \le C \sup_{\vartheta\in\Theta_0} |p(\vartheta)|,$$

poiché i due estremi superiori sono norme su uno spazio vettoriale di dimensione finita. La (7.6.7) segue per la stessa ragione. Possiamo scrivere

$$|p(w\vartheta)| = \left| A \prod_{j=1}^{\mu} (w - w_j) \right| \ge |A| \prod_{j=1}^{\mu} ||w| - |w_j|| \ge |p(\vartheta)| \prod_{j=1}^{\mu} \frac{||w| - |w_j||}{1 + |w_j|}.$$

Si può scegliere $r = k/(m+1)$ con k intero fra 1 e $m+1$ in modo che $|r - |w_j|| \ge 1/(2m+2)$ per $j = 1, \dots, \mu$. Ne segue

$$\frac{|r - |w_j||}{1 + |w_j|} \ge (2m+2)^{-1} \big(2 + 1/(2m+2)\big)^{-1} = 1/(4m+5)$$

se $|w_j| \le 1 + (2m+2)^{-1}$. La disuguaglianza vale ancora per $|w_j| > 1 + (2m+2)^{-1}$ perché allora il primo membro cresce. Si ottiene quindi (7.6.6) con $C_0 = C(4m+5)^m$ e $\Theta = \bigcup_{k=1}^{m+1} k\Theta_0/(m+1)$.

Consideriamo ora il teorema di preparazione di Weierstrass quando il massimo a secondo membro di (7.6.6) è raggiunto per il vettore $\vartheta = (0, \dots, 0, r)$. Usiamo la notazione

$$\widetilde{p}(z) = \sup_{|\zeta|<1} |p(z + \zeta)|.$$

È importante osservare che $\widetilde{p}(z)$ è limitata inferiormente da una costante positiva in $\mathbb{C}^n$ se p non è identicamente nullo. Infatti, se $a_\alpha z^\alpha$ è un termine non nullo di grado massimo in p, da (7.6.7) segue $\widetilde{p}(z) \ge C_1 |a_\alpha|$.

Lemma 7.6.7. Sia p un polinomio di grado $\le m$, sia $0 < r < 1$ e supponiamo

$$\widetilde{p}(0) \le C \inf_{|z_n|=r} |p(0, z_n)|, \tag{7.6.8}$$

con la costante C di (7.6.6). Esiste allora un numero r', $0 < r' < 1$, dipendente soltanto da r, n, m, tale che il polidisco

$$\Delta = \{z : |z_j| < r' \ (j < n), \ |z_n| < r\}$$

sia contenuto nella palla unitaria e ogni funzione limitata $f \in A(\Delta)$ si possa scrivere

$$f = pg + h,$$

dove $g, h \in A(\Delta)$, h è un polinomio in z_n di grado inferiore al numero m^+ degli zeri di $p(0, z_n)$ con $|z_n| < r$, e

$$\sup_{\Delta} |h| \le C' \sup_{\Delta} |f|, \qquad \sup_{\Delta} |g| \le C' \sup_{\Delta} |f|/\widetilde{p}(0), \tag{7.6.9}$$

con C' dipendente soltanto da n, m.

Dimostrazione. Possiamo supporre $\widetilde{p}(0) = 1$. Per (7.6.7) i coefficienti di p sono allora uniformemente limitati. Poniamo

$$p(z) = p_0(z_n) + p_1(z),$$

dove $p_0(z_n) = p(0, z_n)$ e dunque $p_1(0, z_n) = 0$. Si ha allora

$$|p_1(z)| < Kr' \quad \text{in } \Delta \text{ se } \Delta \subset \Omega, \tag{7.6.10}$$

con una costante K. (In tutta la dimostrazione richiediamo che le costanti dipendano soltanto da n, m.) Inoltre, poiché $|p_0(z_n)| \ge 1/C$ per $|z_n| = r$ e disponiamo di stime per i coefficienti di p_0, esiste una costante $\varepsilon > 0$ tale che

$$|p_0(z_n)| \ge 1/(2C) \quad \text{quando } \big||z_n| - r\big| < \varepsilon.$$

In particolare p_0 non ha zeri in questa corona. Scriviamo $p_0 = p_0^+ p_0^-$, dove gli zeri di p_0^+ giacciono nel disco $|z_n| < r$ e quelli di p_0^- fuori dal disco, e il coefficiente direttivo di p_0^+ è uno. Allora

$$|p_0^+(z_n)| \ge (|z_n| - r + \varepsilon)^{m^+} \quad \text{per } |z_n| > r - \varepsilon.$$

Abbiamo inoltre stime uniformi per i coefficienti di p_0^+. Possiamo ora scrivere ogni $f \in A(\Delta)$ limitata nella forma

$$f = p_0 g + h,$$

dove h è un polinomio in z_n di grado $< m^+$ e, con una costante K',

$$\sup_{\Delta} |g| \le K' \sup_{\Delta} |f|, \qquad \sup_{\Delta} |h| \le K' \sup_{\Delta} |f|. \tag{7.6.11}$$

Infatti per $z \in \Delta$ basta porre

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i p_0^-(z_n)} \int \frac{f(z', \tau)}{p_0^+(\tau)(\tau - z_n)} \, d\tau,$$
$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z', \tau)}{p_0^+(\tau)} \frac{p_0^+(\tau) - p_0^+(z_n)}{\tau - z_n} \, d\tau,$$

integrando sulla circonferenza $|\tau| = \rho$ con $|z_n| < \rho$ e $r - \varepsilon < \rho < r$. Qui z' indica $(z_1, \dots, z_{n-1})$. Poiché $(p_0^+(\tau) - p_0^+(z_n))/(\tau - z_n)$ è un polinomio in z_n, τ, è chiaro che h è un polinomio in z_n e che vale la stima richiesta per h. Otteniamo così una stima di $|p_0 g|$ e pertanto

$$|g| \le K' \sup_\Delta |f|$$

in Δ quando $r - \varepsilon/2 < |z_n| < r$. Per il principio del massimo ne segue (7.6.11).

Possiamo ora dimostrare il lemma con lo stesso metodo iterativo usato nella dimostrazione del teorema 6.1.1. Poniamo $g_0 = 0$ e per $k > 0$ definiamo $g_k, h_k \in A(\Delta)$ mediante la formula ricorsiva

$$f = p_0 g_k + p_1 g_{k-1} + h_k$$

e la condizione che h_k sia per ogni k un polinomio in z_n di grado $< m^+$. Allora g_k, h_k sono funzioni analitiche limitate in Δ per ogni k, e poiché

$$p_1(g_k - g_{k-1}) = p_0(g_k - g_{k+1}) + h_k - h_{k+1},$$

da (7.6.10) e (7.6.11) segue

$$\sup_\Delta |g_{k+1} - g_k| \le KK'r' \sup_\Delta |g_k - g_{k-1}|.$$

Se $r' < 1/(2KK')$, ciò implica l'esistenza di $g = \lim_{k\to\infty} g_k = \sum_{k=0}^\infty (g_{k+1} - g_k)$ e la stima

$$\sup_\Delta |g| \le 2 \sup_\Delta |g_1| \le 2K' \sup_\Delta |f|.$$

L'esistenza di $h = \lim h_k$ segue dalla formula ricorsiva, che dà inoltre $f = pg + h$. La stima asserita per h segue ora immediatamente.

Prendendo $f(z) = z_n^{m^+}$ nel lemma 7.6.7 otteniamo un analogo del corollario 6.1.2.

Lemma 7.6.8. Il polidisco Δ del lemma 7.6.7 si può scegliere in modo che ogni p di grado $\le m$ che soddisfi (7.6.8) si fattorizzi nella forma $p = p^+ p^-$, dove

(i) p^+, p^- sono polinomi in z_n analitici e limitati in Δ;

(ii) p^+ ha coefficiente direttivo 1 e tutti i suoi zeri in Δ per $|z_j| < r'$, $j < n$;

(iii) $\widetilde{p}(0)/C' \le \inf_\Delta |p^-| \le \sup_\Delta |p^-| \le C''\widetilde{p}(0)$, dove C', C'' dipendono soltanto da n, m.

Dimostrazione. Poiché tutti i coefficienti di p sono $O(\widetilde{p}(0))$, possiamo scegliere r' abbastanza piccolo affinché, per un certo $\varepsilon > 0$,

$$p(z) \ne 0 \quad \text{se } |z_j| < r' \ (j < n), \quad ||z_n| - r| < \varepsilon.$$

Concludiamo allora che $p(z', z_n)$ ha precisamente m^+ zeri con $|z_n| \le r - \varepsilon$ se $|z_j| < r'$ per $j < n$. Il lemma 7.6.7 assicura l'esistenza di $g, h \in A(\Delta)$ tali che $z_n^{m^+} = pg - h$, con h polinomio in z_n di grado $< m^+$. Il polinomio $p^+ = z_n^{m^+} + h$ deve dunque avere tutti i suoi zeri nel disco $|z_n| \le r - \varepsilon$, onde $|p^+(z)| \ge \varepsilon^{m^+}$ se $|z_n| = r$ e $|z_j| < r'$ per $j < n$. Ne segue che $|g| \ge \varepsilon^{m^+}/\widetilde{p}(0)$ in Δ. Ponendo $p^- = 1/g$ il lemma segue da (7.6.9).

Ripetendo la dimostrazione del lemma 6.1.3 si ottiene ora il risultato seguente.

Lemma 7.6.9. Siano p e Δ come nel lemma 7.6.8. Se $f \in A(\Delta)$ e pf è un polinomio in z_n, anche $p^- f$ è un polinomio in z_n.

Dimostrazione. Per l'algoritmo della divisione algebrica si ha $pf = p^+ g + h$, con g, h polinomi in z_n e h di grado $< m^+$. Poiché per z' fissato h deve annullarsi in tutti gli m^+ zeri di p^+, segue $h = 0$. Dunque $p^- f = g$ è un polinomio in z_n.

Conclusione della dimostrazione della proposizione 7.6.5. Resta da provare che, se Ω è la palla unitaria e $p = 1$, la proposizione vale purché valga in generale per un numero minore di variabili. Possiamo supporre $P_1 \not\equiv 0$ e che il grado m di P_1 sia almeno pari a quello di P_j per $j = 2, \dots, q$. Applichiamo il lemma 7.6.6 a $p(\zeta) = P_1(z + \varrho\zeta)$. Si ha

$$\varrho^m / C \le \widetilde{p}(0) \le C(1 + |z|)^m.$$

Per ogni $\vartheta \in \Theta$ sia E_ϑ l'insieme degli $z \in \mathbb{C}^n$ tali che

$$\widetilde{p}(0) \le C \inf_{|w|=1} |P_1(z + \varrho w\vartheta)|.$$

Basta provare che, per ogni $\vartheta \in \Theta$ fissato, la proposizione vale per $z \in E_\vartheta$. Un cambiamento lineare di variabili ci riconduce al caso $\vartheta = (0, \dots, 0, r)$. Poniamo

$$P_1 u_1 + \cdots + P_q u_q = f$$

e scegliamo Δ in modo da poter applicare i lemmi 7.6.7 e 7.6.8. Per ogni $z \in E_\vartheta$ possiamo allora scrivere

$$f = P_1 g + h,$$

dove $g, h \in A(z + \varrho\Delta)$, h è un polinomio in ζ_n di grado inferiore a m^+, numero degli zeri dell'equazione $P_1(z', \zeta_n) = 0$ in $z + \varrho\Delta$, e per una costante K

$$\widetilde{p}(0) \sup_{z+\varrho\Delta} |g| + \sup_{z+\varrho\Delta} |h| \le K \sup_{z+\varrho\Delta} |f|. \tag{7.6.12}$$

Per $j > 1$ scriviamo anche $u_j = P_1 U_j + w_j$, con w_j polinomio in ζ_n di grado $< m^+$. Ponendo $U_1 = u_1 + P_2 U_2 + \cdots + P_q U_q$ otteniamo

$$P_1 U_1 + P_2 w_2 + \cdots + P_q w_q = P_1 g + h.$$

Poniamo $U_1 = g + w_1$. Allora

$$P_1 w_1 + \cdots + P_q w_q = h.$$

Poiché tutti i termini, tranne forse il primo, sono polinomi in ζ_n di grado $< m + m^+$, concludiamo che anche $P_1 w_1$ è un polinomio in ζ_n di grado $< m + m^+$. Tuttavia ciò non implica che w_1 sia un polinomio in ζ_n. Per poter applicare il lemma 7.6.9 scomponiamo quindi P_1 applicando il lemma 7.6.8 al polinomio $P_1(z + \varrho\zeta)$. Possiamo scrivere $P_1 = p^+ p^-$ con p^+, p^- analitiche in $z + \varrho\Delta$, entrambe polinomiali in ζ_n. Il rapporto fra $|p^-|$ e $\widetilde{p}(0)$ è compreso fra due costanti positive in $z + \varrho\Delta$, e gli zeri di p^+, p^- sono situati come descritto nel lemma. Ne segue che le funzioni $w_j' = p^- w_j$, $j = 1, \dots, q$, e $h' = p^- h$ sono analitiche in $z + \varrho\Delta$ e polinomiali in ζ_n di grado $< 2m$. Si ha

$$P_1 w_1' + \cdots + P_q w_q' = h' \quad \text{in } z + \varrho\Delta,$$

e dalla (7.6.12) si ottiene

$$\sup_{z+\varrho\Delta} |h'| \le K' \widetilde{p}(0) \sup_{z+\varrho\Delta} |f|. \tag{7.6.13}$$

Ora possiamo scrivere

$$w'_j(\zeta) = \sum_{k=0}^{2m-1} w_{jk}(\zeta')\zeta_n^k, \qquad h'(\zeta) = \sum_{k=0}^{2m-1} h_k(\zeta')\zeta_n^k,$$

con coefficienti analitici e limitati in $z' + \varrho\Delta'$, dove $\Delta' = \{\zeta' \in \mathbb{C}^{n-1} : |\zeta_j| < r',\ j < n\}$. Dal caso unidimensionale di (7.6.7) e da (7.6.13) segue

$$\begin{aligned}\sum_k \sup_{z'+\varrho\Delta'} |h_k(\zeta')| &\le K(1+|z_n|)^{2m-1}\varrho^{1-2m} \sup_{z+\varrho\Delta} |h'(\zeta)| \\ &\le K'\widetilde{P}_1(z)(1+|z_n|)^{2m-1}\varrho^{1-2m} \sup_{z+\varrho\Delta} |f(\zeta)|.\end{aligned} \tag{7.6.14}$$

L'equazione

$$P_1 w'_1 + \cdots + P_q w'_q = h'$$

equivale a un sistema di $3m$ equazioni nelle w_{jk}, aventi per secondi membri le funzioni h_k e degli zeri. Per l'ipotesi induttiva esiste dunque un intorno Δ'' di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$ tale che in $z' + \varrho\Delta''$ vi siano funzioni analitiche W_{jk} per le quali i polinomi

$$W_j(\zeta) = \sum_{k=0}^{2m-1} W_{jk}(\zeta')\zeta_n^k$$

soddisfano l'equazione

$$P_1 W_1 + \cdots + P_q W_q = h'$$

e la stima

$$\sum_{j,k} \sup_{z'+\varrho\Delta''} |W_{jk}| \le K(1+|z'|)^N \varrho^{-N} \sum_k \sup_{z'+\varrho\Delta'} |h_k|. \tag{7.6.15}$$

Ponendo $v_1 = g + W_1/p^-$ e $v_j = W_j/p^-$ per $j > 1$, otteniamo

$$P_1 v_1 + \cdots + P_q v_q = P_1 g + h'/p^- = P_1 g + h = f$$

nel sottoinsieme di $z + \varrho\Delta$ dove $\zeta' \in z' + \varrho\Delta''$. Dalle (7.6.12), (7.6.14), (7.6.15) e dal fatto che $|p^-|$ è limitato inferiormente da una costante positiva per $\widetilde{p}(0) \ge \varrho^m/C$, otteniamo (7.6.5). La dimostrazione è così conclusa.

Si osservi che una parte della dimostrazione segue quella del lemma 6.4.2. In realtà ogni suo ingrediente è già stato usato nel capitolo VI; è soltanto la necessità di seguire tutte le stime a rendere laboriosa la dimostrazione.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare un teorema B con stime. Siano P_{jk}, $j = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, q$, polinomi e sia $\mathcal{M}_P$ il sottofascio di $\mathcal{A}^p$ generato da $(P_{1k}, \ldots, P_{pk})$, $k = 1, \ldots, q$. Indichiamo con $C^\sigma(\mathcal{U}^d, \mathcal{M}_P, \varphi)$ l'insieme delle cocatene alternanti $c = \{c_s\}$, $s \in I(d)^{\sigma+1}$, con $c_s \in \Gamma(U_s^d, \mathcal{M}_P)$ e

$$\|c\|_\varphi^2 = \sum_{|s|=\sigma+1} \int_{U_s^d} |c_s|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda < \infty.$$

Qui $|f|^2 = |f_1|^2 + \cdots + |f_q|^2$ per $f = (f_1, \ldots, f_q) \in A(\Omega)^q$, con Ω aperto.

Teorema 7.6.10. Siano φ e $-\log d$ funzioni plurisubarmoniche in $\mathbb{C}^n$ tali che

$$\begin{aligned} &0<d\le 1, \quad d(z+\zeta)\le 2d(\zeta) && \text{se } |\operatorname{Re} z_j|\le 1,\ |\operatorname{Im} z_j|\le 1,\ j=1,\dots,n;\\ &|\varphi(z+\zeta)-\varphi(\zeta)|\le C_0 && \text{se } |z_j|<d(\zeta),\ j=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{7.6.16}$$

Per una matrice polinomiale P come sopra esistono costanti positive $\varepsilon<1, N, K$ tali che, per ogni cocatena $c\in C^\sigma(\mathcal{U}^d,\mathcal{M}_P,\varphi)$, $\sigma>0$, con $\delta c=0$, esista una cocatena $c'\in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}^{\varepsilon d},\mathcal{M}_P,\varphi_N)$ con $\delta c'=\varrho^*_{d,\varepsilon d}c$ e

$$\|c'\|_{\varphi_N}\le K\|c\|_\varphi. \tag{7.6.17}$$

Qui $\varphi_N(z)=\varphi(z)-N\log d(z)+N\log(1+|z|^2)$ per $z\in\mathbb{C}^n$. Si possono usare le stesse costanti per tutte le φ, d che soddisfano (7.6.16) con C_0 fissato.

Dimostrazione. Se ε è abbastanza piccolo, dalla proposizione 7.6.5 segue che, per $s'\in I(\varepsilon d)^{\sigma+1}$, $s=\varrho_{d,\varepsilon d}s'\in I(d)^{\sigma+1}$ e per ogni $u\in A(U^d_s)^q$, si può trovare $v\in A(U^{\varepsilon d}_{s'})^q$ con $Pv=Pu$ in $U^{\varepsilon d}_{s'}$ e, per opportune costanti N, C,

$$\int_{U^{\varepsilon d}_{s'}}|v|^2e^{-\varphi(z)}d(z)^N(1+|z|^2)^{-N}\,d\lambda(z)\le C\int_{U^d_s}|Pu|^2e^{-\varphi(z)}\,d\lambda(z). \tag{7.6.5$'$}$$

Infatti il fattore $e^{-\varphi}$ è qui inessenziale per la seconda condizione (7.6.16). Dal lemma 7.6.1 (iv) segue che, se ε è abbastanza piccolo e $\zeta\in U^{\varepsilon d}_{s'}$, si può applicare la proposizione 7.6.5 con ϱ uguale a una costante per $d(\zeta)$. Poiché il massimo di una funzione analitica in un cubo di lato δ si stima mediante δ^{-n} per la norma L^2 sul cubo concentrico di lato doppio (teorema 2.2.3), dalle norme del massimo in (7.6.5) si passa alle norme L^2 in (7.6.5$'$). (Le costanti C, N possono variare da una stima all'altra.)

Dimostriamo il teorema per induzione discendente su σ. Esso vale per $\sigma>2^{8n}$ perché allora non esistono cocicli non nulli in $C^\sigma(\mathcal{U}^d,\mathcal{M}_P,\varphi)$. Supponiamolo dunque dimostrato per ogni P con σ sostituito da $\sigma+1$. Per il teorema 7.2.9 possiamo scrivere $c_s=P\gamma_s$, dove $\gamma\in C^\sigma(\mathcal{U}^d,\mathcal{A}^q)$. Per stimare γ_s passiamo al raffinamento $\mathcal{U}^{\varepsilon d}$ a cui è applicabile (7.6.5$'$). Possiamo così scegliere $\gamma'_{s'}\in A(U^{\varepsilon d}_{s'})^q$, $s'\in I(\varepsilon d)^{\sigma+1}$, in modo che, per $s=\varrho_{d,\varepsilon d}s'$, si abbia $P\gamma'_{s'}=P\gamma_s=c_s$ in $U^{\varepsilon d}_{s'}$ e

$$\int_{U^{\varepsilon d}_{s'}}|\gamma'_{s'}|^2e^{-\varphi(z)}d(z)^N(1+|z|^2)^{-N}\,d\lambda(z)\le C\int_{U^d_s}|c_s|^2e^{-\varphi(z)}\,d\lambda(z).$$

Sommando otteniamo, con un'altra costante C,

$$\|\gamma'\|_{\varphi_N}\le C\|c\|_\varphi,\qquad P\gamma'=\varrho^*_{d,\varepsilon d}c.$$

Poiché $\delta c=0$, si ha $P\delta\gamma'=\delta P\gamma'=0$. Dunque $\delta\gamma'=\gamma''$ appartiene a $C^{\sigma+1}(\mathcal{U}^{\varepsilon d},\mathcal{R}_P,\varphi_N)$ e $\delta\gamma''=0$. Scegliendo una matrice $q\times r$ Q come nel lemma 7.6.4 si ottiene $\mathcal{R}_P=\mathcal{M}_Q$ e possiamo applicare l'ipotesi induttiva. Esistono dunque $\varepsilon'<\varepsilon$, $N'>N$ e una $\gamma'''\in C^\sigma(\mathcal{U}^{\varepsilon' d},\mathcal{R}_P,\varphi_{N'})$ per la quale

$$\|\gamma'''\|_{\varphi_{N'}}\le C\|\gamma''\|_{\varphi_N},\qquad \delta\gamma'''=\varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d}\gamma''.$$

Ponendo $\widetilde{\gamma}=\varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d}\gamma'-\gamma'''\in C^\sigma(\mathcal{U}^{\varepsilon' d},\mathcal{A}^q)$, si ha

$$\delta\widetilde{\gamma}=\varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d}\gamma''-\delta\gamma'''=0,\qquad \|\widetilde{\gamma}\|_{\varphi_{N'}}\le C\|c\|_\varphi.$$

La proposizione 7.6.2 mostra quindi che per un certo N'' esiste $\widehat{\gamma}\in C^{\sigma-1}(\mathcal{U}^{\varepsilon' d},\mathcal{A}^q)$ con $\widetilde{\gamma}=\delta\widehat{\gamma}$ e

$$\|\widehat{\gamma}\|_{\varphi_{N''}}\le C\|\widetilde{\gamma}\|_{\varphi_{N'}}\le C'\|c\|_\varphi. \tag{7.6.18}$$

Se poniamo $c' = P\widehat{\gamma}$, risulta

$$\begin{aligned}\delta c' &= P\delta\widehat{\gamma} = P\widetilde{\gamma} = P\varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d}\gamma' - P\gamma''' = \varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d}P\gamma' \\ &= \varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d}\varrho^*_{d,\varepsilon d}c = \varrho^*_{d,\varepsilon' d}c.\end{aligned}$$

Poiché per un'opportuna scelta di N la (7.6.18) implica (7.6.17), il teorema è dimostrato.

Nelle principali applicazioni, che daremo ora, le cocatene scompariranno infine dagli enunciati. Sono state però essenziali nelle dimostrazioni per induzione.

Teorema 7.6.11. Dato il sistema P, esiste un intero N tale che per tutte le $\varphi, -\log d$ plurisubarmoniche soddisfacenti (7.6.16) e ogni $u \in A(\mathbb{C}^n)^q$ si può trovare $v \in A(\mathbb{C}^n)^q$ con $Pv = Pu$ e

$$\int |v|^2 e^{-\varphi_N}\, d\lambda \le K \int |Pu|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda, \tag{7.6.19}$$

dove K è indipendente da u, φ, d quando C_0 in (7.6.16) è fissato. Qui φ_N è definita come nel teorema 7.6.10.

Dimostrazione. Non c'è nulla da dimostrare a meno che

$$\int |Pu|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda < \infty,$$

quindi possiamo supporre soddisfatta questa condizione. Dalla proposizione 7.6.5 concludiamo, come nella dimostrazione del teorema 7.6.10, che si può scegliere $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $i \in I(\varepsilon d)$ esista $u_i \in A(U_i^{\varepsilon d})^q$ con $Pu_i = Pu$ in $U_i^{\varepsilon d}$ e, per certe costanti C, N indipendenti da u, i,

$$\int_{U_i^{\varepsilon d}} |u_i|^2 e^{-\varphi_N}\, d\lambda \le C \int_{U_j^d} |Pu|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda, \tag{7.6.20}$$

dove $j = \varrho_{d,\varepsilon d} i$.

Non vi è motivo perché le u_i coincidano nelle intersezioni dei cubi $U_i^{\varepsilon d}$, e dobbiamo quindi studiare le differenze

$$c_{i_1 i_2} = u_{i_1} - u_{i_2}.$$

Esse definiscono un cociclo $c \in C^1(\mathcal{U}^{\varepsilon d}, \mathcal{R}_P, \varphi_N)$ e da (7.6.20) otteniamo

$$\|c\|^2_{\varphi_N} \le C \int |Pu|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda. \tag{7.6.21}$$

(Come al solito C indica costanti diverse nelle diverse stime.) Ora $\mathcal{R}_P = \mathcal{M}_Q$, con Q definita come nel lemma 7.6.4. Per il teorema 7.6.10 esistono dunque $\varepsilon' < \varepsilon$, $N' > N$ e $c' \in C^0(\mathcal{U}^{\varepsilon' d}, \mathcal{R}_P, \varphi_{N'})$ tali che $\delta c' = \varrho^*_{\varepsilon d,\varepsilon' d} c$ e

$$\|c'\|_{\varphi_{N'}} \le C\|c\|_{\varphi_N}. \tag{7.6.22}$$

Ciò significa che ponendo

$$v = u_j + c'_i \quad \text{in } U_i^{\varepsilon' d}, \qquad j = \varrho_{\varepsilon d,\varepsilon' d} i,$$

si definisce univocamente un elemento $v \in A(\mathbb{C}^n)^q$. Poiché $Pc'_i = 0$, si ha $Pv = Pu$, e dalle stime (7.6.20), (7.6.21), (7.6.22) segue (7.6.19) con N sostituito da N'. La dimostrazione è conclusa.

Combinando il lemma 7.6.4 con il teorema 7.6.11 si ottiene anche il corollario seguente.

Corollario 7.6.12. Dato P, esiste un intero N tale che, per tutte le $\varphi, -\log d$ plurisubarmoniche soddisfacenti (7.6.16) e ogni $f \in A(\mathbb{C}^n)^q$ con $Pf = 0$, si può trovare $g \in A(\mathbb{C}^n)^r$ con $f = Qg$ e

$$\int |g|^2 e^{-\varphi_N}\, d\lambda \leq K \int |f|^2 e^{-\varphi}\, d\lambda.$$

Qui Q ha lo stesso significato che nel lemma 7.6.4 e K è indipendente dalla funzione assegnata, da φ e da d quando C_0 in (7.6.16) è fissato.

Dimostreremo ora teoremi di esistenza per sistemi di equazioni alle derivate parziali a coefficienti costanti, utilizzando il teorema 7.6.11 e il corollario 7.6.12 insieme alla trasformata di Fourier e alla dualità. Siano P_{jk}, $j = 1, \ldots, J$, $k = 1, \ldots, K$, polinomi in n variabili a coefficienti complessi. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\sum_{k=1}^{K} P_{jk}(D) u_k = f_j, \qquad j = 1, \ldots, J, \tag{7.6.23}$$

dove $D = -i\partial/\partial x$, in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Consideriamo l'insieme di tutte le J-uple di polinomi $Q = (Q_1, \ldots, Q_J)$ tali che

$$\sum_{j=1}^{J} Q_j P_{jk} = 0, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Questo è un modulo finitamente generato sull'anello dei polinomi. Scegliamo un sistema di generatori

$$(Q_{11}, \ldots, Q_{1J}), \ldots, (Q_{I1}, \ldots, Q_{IJ}).$$

Scrivendo (7.6.23) nella forma $P(D)u = f$ e interpretando analogamente $Q(D)$, si ha $Q(D)P(D) = 0$. Una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione di (7.6.23) è quindi $Q(D)f = 0$. Viceversa dimostreremo il teorema seguente.

Teorema 7.6.13. Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^n$. Esiste allora un intero N tale che il sistema di equazioni $P(D)u = f$ ammetta una soluzione $u \in C^\nu(\Omega)^K$ per ogni $f \in C^{\nu+N}(\Omega)^J$ tale che $Q(D)f = 0$.

Dimostreremo anche un teorema di approssimazione analogo al teorema di Runge. Per soluzione esponenziale dell'equazione $P(D)u = 0$ intendiamo una soluzione della forma $u(x) = e^{i\langle x, \zeta\rangle} u_0(x)$, dove le componenti di u_0 sono polinomi.

Teorema 7.6.14. Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^n$. La chiusura in $C^\nu(\Omega)^K$ delle combinazioni lineari delle soluzioni esponenziali del sistema $P(D)u = 0$ è costituita da tutte le soluzioni del sistema in $C^\nu(\Omega)^K$.

Cominceremo dal teorema 7.6.14, che occorre nella dimostrazione del teorema 7.6.13, così come il teorema di Runge occorreva, ad esempio, nella dimostrazione del teorema 1.4.4.

Dimostrazione del teorema 7.6.14. Sia L una forma lineare continua su $C^\nu(\Omega)^K$ che si annulla su tutte le soluzioni esponenziali. La restrizione di L a $C^\infty(\Omega)^K$ è allora una K-upla $f = (f_1, \ldots, f_K)$ di distribuzioni di $\mathcal{E}'(\Omega)$. Sia M un sottoinsieme compatto convesso di Ω contenente il supporto di f, e sia H la funzione di supporto di M,

$$H(\xi) = \sup_{x \in M} \langle x, \xi \rangle.$$

Per il teorema di Paley–Wiener (si veda ad esempio Hörmander [2, §7.3]) si ha, per qualche intero N,

$$\int |\widehat{f}(\zeta)|^2 e^{-2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^{-N}\,d\lambda(\zeta) < \infty. \tag{7.6.24}$$

Indichiamo con ${}^tP(D)$ la trasposta della matrice $P(-D)$. Se riusciamo a dimostrare che

$$f = {}^tP(D)g \tag{7.6.25}$$

per qualche $g \in \mathcal{E}'(\Omega)^J$, ne seguirà

$$L(u) = \langle u, f\rangle = \langle P(D)u, g\rangle$$

per ogni $u \in C^\infty(\Omega)^K$. Dunque $L(u) = 0$ se $P(D)u = 0$ in un intorno di $\operatorname{supp} g$. Poiché L è continua su $C^\nu(\Omega)^K$, applicando il risultato a $u * \chi_\varepsilon$, con χ_ε definita come nella dimostrazione del lemma 4.1.4, segue che $L(u) = 0$ per ogni $u \in C^\nu(\Omega)^K$ a supporto compatto in Ω tale che $Pu = 0$ in un intorno di $\operatorname{supp} g$. Quindi $L(u) = 0$ per ogni $u \in C^\nu(\Omega)^K$ che soddisfi $P(D)u = 0$, e il teorema segue dal teorema di Hahn–Banach. Resta dunque soltanto da provare l'esistenza di g. (Per l'argomento fin qui svolto si veda anche Hörmander [2, teorema 7.3.6].)

L'equazione $f = {}^tP(D)g$ equivale a $\widehat{f}(\zeta) = {}^tP(\zeta)\widehat{g}(\zeta)$, dove i cappelli indicano le trasformate di Fourier–Laplace. Costruiamo $\widehat{g}$ in tre passi.

1. Per ogni ζ esiste una serie formale di potenze G_ζ centrata in ζ tale che, in ζ,

$$\widehat{f} = {}^tPG_\zeta.$$

Si tratta infatti di un sistema infinito di equazioni lineari nei coefficienti di G_ζ, del tipo studiato nel lemma 6.3.7. Esso ammette quindi soluzione se è compatibile. Le equazioni si possono scrivere

$$D^\alpha \widehat{f}_k(\zeta) = D^\alpha \left(\sum_j P_{jk}(-z)G_j(z) \right)\Bigg|_{z=\zeta},$$

dove α è un multiindice arbitrario e $k = 1, \dots, K$. La compatibilità significa che per polinomi arbitrari q_k vale

$$\sum_k q_k(D) \left(\sum_j P_{jk}(-z)G_j(z) \right)\Bigg|_{z=\zeta} = 0 \text{ per tutti i } G_j \implies \sum_k q_k(D)\widehat{f}_k(\zeta) = 0. \tag{7.6.26}$$

Poniamo

$$u_k(x) = q_k(-x)e^{-i\langle x,\zeta\rangle}.$$

Allora

$$\sum_k P_{jk}(D)u_k(x) = \sum_k P_{jk}(D_x)q_k(D_\zeta)e^{-i\langle x,\zeta\rangle} = \sum_k q_k(D_\zeta)(P_{jk}(-\zeta)e^{-i\langle x,\zeta\rangle}).$$

Se vale l'ipotesi a primo membro di (7.6.26), scegliendo $G_j(z) = e^{-i\langle x,z\rangle}$ e tutti gli altri $G_i = 0$ si ottiene quindi $Pu = 0$. Per ipotesi abbiamo

$$0 = \langle u, f\rangle = \sum_k \langle q_k(-x)e^{-i\langle x,\zeta\rangle}, f_k\rangle = \sum_k q_k(D)\widehat{f}_k(\zeta).$$

Vale dunque (7.6.26) e l'equazione $\widehat{f} = {}^tPG_\zeta$ ammette una soluzione in serie formali di potenze in ζ.

2. Per il corollario 6.3.6 possiamo ora trovare soluzioni analitiche dell'equazione $\widehat{f} = {}^tPG$ in un intorno di ogni punto di $\mathbb{C}^n$. Dal teorema 7.2.9 segue dunque che l'equazione ammette soluzioni intere.

3. Possiamo applicare il teorema 7.6.11 con

$$d = 1, \qquad \varphi(\zeta) = 2H(\operatorname{Im}\zeta) + N\log(1+|\zeta|^2),$$

usando (7.6.24) e il fatto che $H(\operatorname{Im}\zeta)$ è convessa e quindi plurisubarmonica. Ne segue che esiste una J-upla G di funzioni analitiche tali che $\widehat{f} = {}^tPG$ e, per un opportuno intero N',

$$\int |G(\zeta)|^2 e^{-2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^{-N'}\,d\lambda(\zeta) < \infty.$$

Per il teorema 2.2.3 e la continuità lipschitziana di H, ciò implica

$$|G(\zeta)| \le Ce^{H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{N'}$$

con una costante C. Per il teorema di Paley–Wiener si ha dunque $G = \widehat{g}$ con $g \in \mathcal{E}'(M)^J$. La dimostrazione è conclusa. Osserviamo che essa vale anche per l'approssimazione delle soluzioni C^∞ su un compatto convesso.

Dimostrazione del teorema 7.6.13. Sia ω un aperto convesso relativamente compatto in Ω. Costruiremo dapprima una soluzione dell'equazione $Pu = f$ in ω. Questa equazione significa che per $v \in C_0^\infty(\omega)^J$ si ha

$$\langle f, v\rangle = \langle Pu, v\rangle = \langle u, {}^tPv\rangle.$$

Per costruire u dobbiamo quindi prolungare la forma lineare

$${}^tPv \longmapsto \langle f, v\rangle, \qquad v \in C_0^\infty(\omega)^J.$$

A priori non è neppure chiaro che essa sia ben definita. Sia H la funzione di supporto di ω e poniamo

$$|v|_\nu^2 = \int |\widehat{v}(\zeta)|^2 e^{-2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^{-\nu}\,d\lambda(\zeta).$$

Se $v \in C_0^\infty(\omega)^J$ e ${}^tP(D)v = w$, sappiamo dal teorema 7.6.11 che esiste una J-upla V di funzioni intere tale che ${}^tP(\zeta)V(\zeta) = \widehat{w}(\zeta)$ e

$$\int |V(\zeta)|^2 e^{-2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^{-\nu-N}\,d\lambda(\zeta) \le C|w|_\nu^2, \tag{7.6.27}$$

dove C, N sono costanti. Per il teorema di Paley–Wiener si ha $V = \widehat{v}_1$ per qualche $v_1 \in \mathcal{E}'(\overline{\omega})^J$ di ordine al più $\nu + N$. Si osservi che ${}^tP(D)v_1 = {}^tP(D)v = w$. Poiché ${}^tP(\zeta)(V(\zeta) - \widehat{v}(\zeta)) = 0$ e le colonne di ${}^tQ$ generano $\mathcal{R}_{{}^tP}$, per il corollario 7.6.12 si ha

$$V(\zeta) - \widehat{v}(\zeta) = {}^tQ(\zeta)\Phi(\zeta),$$

dove, per un certo intero N' dipendente soltanto da P, Q,

$$\int |\Phi(\zeta)|^2 e^{-2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^{-\nu-N'}\,d\lambda(\zeta) < \infty.$$

Dal teorema di Paley–Wiener segue $\Phi = \widehat{\phi}$ con il supporto di ϕ contenuto in $\overline{\omega}$. Per $F \in C^\infty(\Omega)^J$ concludiamo che

$$\langle F, v_1\rangle - \langle F, v\rangle = \langle F, {}^tQ(D)\phi\rangle = \langle Q(D)F, \phi\rangle.$$

Come all'inizio della dimostrazione del teorema 7.6.14, ne segue

$$\langle f, v\rangle = \langle f, v_1\rangle$$

se $f \in C^{\nu+N}(\Omega)^J$ e $Q(D)f = 0$. Scegliamo $f_0 \in C_0^{\nu+N}(\Omega)^J$ tale che $f = f_0$ in un intorno di $\overline{\omega}$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}|\langle f, v\rangle|^2 = |\langle f, v_1\rangle|^2 = |\langle f_0, v_1\rangle|^2 &\le \Big(\int |\widehat{f}_0(-\xi)\widehat{v}_1(\xi)|\, d\xi\Big)^2 \\ &\le \int |\widehat{v}_1(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-\nu-N}\, d\xi \int |\widehat{f}_0(-\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{\nu+N}\, d\xi,\end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale converge poiché $\widehat{f}_0(\xi)\xi^\alpha \in L^2$ per $|\alpha| \le \nu + N$. Dalla (7.6.27) otteniamo quindi, tenuto conto del teorema 2.2.3,

$$|\langle f, v\rangle| \le C|{}^tPv|_\nu.$$

Per il teorema di Hahn–Banach la forma lineare

$${}^tPv \longmapsto \langle f, v\rangle, \qquad v \in C_0^\infty(\omega)^J,$$

si può dunque prolungare a una forma lineare sullo spazio L^2 di $\mathbb{C}^n$ rispetto alla misura

$$e^{-2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^{-\nu}\, d\lambda(\zeta).$$

Esiste quindi una K-upla U di funzioni misurabili tali che

$$\int |U(\zeta)|^2 e^{2H(\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|^2)^\nu\, d\lambda(\zeta) < \infty \tag{7.6.28}$$

e

$$\langle f, v\rangle = \int \langle U(\zeta), {}^tP(\zeta)\widehat{v}(\zeta)\rangle\, d\lambda(\zeta), \qquad v \in C_0^\infty(\omega)^J.$$

Trasponendo la matrice P e introducendo la definizione di $\widehat{v}$, si ottiene

$$f(x) = \int P(-\zeta)U(\zeta)e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\, d\lambda(\zeta), \qquad x \in \omega, \tag{7.6.29}$$

purché $\nu - n - 1$ superi il grado di P, in modo che gli integrali convergano assolutamente. Ponendo

$$u(x) = \int U(\zeta)e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\, d\lambda(\zeta), \qquad x \in \omega,$$

da (7.6.28) segue che $u \in C^{\nu-n-1}(\omega)$ e per (7.6.29) si ha $P(D)u = f$ in ω. Sostituendo ν con $\nu + n + 1$, abbiamo così dimostrato che, per ogni $f \in C^{\nu+N+n+1}(\Omega)^J$ con $Q(D)f = 0$, l'equazione $P(D)u = f$ ammette una soluzione in $C^\nu(\omega)$ purché ν superi il grado di P.

Per completare la dimostrazione basta prendere una successione crescente di aperti convessi $\omega_j \Subset \Omega$ con unione Ω e determinare in ciascuno di essi una soluzione $u_j \in C^\nu(\omega_j)^K$ dell'equazione $P(D)u_j = f$. Usando il teorema 7.6.14 si può fare in modo che la successione u_j converga a una soluzione $u \in C^\nu(\Omega)^K$ di $P(D)u = f$. Lasciamo al lettore i dettagli di questo argomento, già ripetuto più volte a partire dal paragrafo 1.4.

Nella dimostrazione del teorema 7.6.13 si è usato soltanto un caso molto particolare del teorema 7.6.11. Utilizzando i risultati dei paragrafi 15.2 e 15.4 di Hörmander [2] si possono ottenere nello stesso modo teoremi di esistenza in molti altri spazi di distribuzioni.

7.7. Quozienti di A^K per sottomoduli e principio fondamentale di Ehrenpreis

Nel paragrafo 7.6 abbiamo studiato piuttosto estesamente i sottofasci di $\mathcal{A}^K$ generati da J elementi $P_1, \dots, P_J$ di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$. Nella dimostrazione del teorema 7.6.14 abbiamo visto come si possano caratterizzare le sezioni del sottomodulo mediante condizioni sugli sviluppi in serie di potenze. Tuttavia, per rafforzare il teorema 7.6.14 fino a ottenere una rappresentazione delle soluzioni come integrali su famiglie di soluzioni esponenziali, occorre una descrizione molto più precisa del modulo come nucleo di un'opportuna applicazione. Ciò permette di controllare la topologia del modulo quoziente. Quando $J = K = n = 1$, il sottomodulo di $\mathbb{C}[z]$ o di $A(\mathbb{C})$ generato da $P = P_1$ è costituito da tutte le f tali che $D^\alpha f(\zeta) = 0$ per $|\alpha| < m_\zeta$ se ζ è uno zero di P di molteplicità m_ζ. Cerchiamo un analogo generale di questo fatto. Inizialmente considereremo soltanto sottomoduli primari.

Definizione 7.7.1. Un $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$-sottomodulo M di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$ si dice *primario* se per ogni $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ vale una delle condizioni seguenti:

(i) $m \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$, $\varphi m \in M$ implicano $m \in M$;

(ii) $\varphi^s \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K \subset M$ per s abbastanza grande.

Le due condizioni si escludono a vicenda se $M \neq \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$. L'insieme $\mathfrak{p}$ delle $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ che soddisfano (ii) è allora un ideale primo di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, cioè $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/\mathfrak{p}$ è un dominio d'integrità. Poiché $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ è noetheriano, $\mathfrak{p}$ è finitamente generato. In (ii) si può quindi prendere s indipendente da φ, ossia

$$\mathfrak{p}^s \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K \subset M \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K. \tag{7.7.1}$$

Basterà studiare i sottomoduli primari grazie all'esistenza delle decomposizioni primarie.

Proposizione 7.7.2. Ogni sottomodulo M di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$ è un'intersezione

$$M = M_1 \cap \cdots \cap M_\mu$$

di sottomoduli primari di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$.

Per le dimostrazioni di questi fatti si veda ad esempio Bourbaki [1, pp. 139–143]. Se M è primario e $\mathfrak{p}$ è l'ideale primo associato, la (7.7.1) suggerisce che si possa definire M mediante condizioni sull'insieme degli zeri di $\mathfrak{p}$,

$$V_\mathfrak{p} = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) = 0 \text{ per ogni } \varphi \in \mathfrak{p}\}. \tag{7.7.2}$$

Lo illustriamo dapprima con un esempio semplice ma istruttivo dovuto a Palamodov.

Esempio. Sia M il sottomodulo di $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ generato da $z_2^2, z_3^2, z_2 - z_1 z_3$. Allora M è un ideale primario associato all'ideale primo $\mathfrak{p}$ generato da z_2, z_3, e

$$M = \{f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] : f = 0,\ z_1 \partial f/\partial z_2 + \partial f/\partial z_3 = 0 \text{ su } V_\mathfrak{p}\}, \quad V_\mathfrak{p} = \{(z_1, 0, 0)\}.$$

Ciò diventa chiaro introducendo le nuove variabili

$$\zeta_1 = z_1, \quad \zeta_2 = z_2 - z_1 z_3, \quad \zeta_3 = z_3; \qquad z_1 = \zeta_1, \quad z_2 = \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2, \quad z_3 = \zeta_3.$$

La condizione $f \in M$ significa che $F(\zeta) = f(\zeta_1, \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_3, \zeta_3)$ appartiene all'ideale generato da ζ_2, ζ_3^2. Dunque su $V_\mathfrak{p}$ si ha $F = \partial F/\partial \zeta_3 = z_1 \partial f/\partial z_2 + \partial f/\partial z_3 = 0$. Viceversa queste condizioni implicano che

$$F(\zeta) = F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - F(\zeta_1, 0, \zeta_3) + F(\zeta_1, 0, \zeta_3) - F(\zeta_1, 0, 0)$$

appartiene all'ideale generato da ζ_2, ζ_3^2. Se $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$, $g \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] \setminus \mathfrak{p}$ e $gf \in M$, allora su $V_\mathfrak{p}$ si ha $f = 0$ e $g(z_1 \partial f/\partial z_2 + \partial f/\partial z_3) = 0$. Quindi $z_1 \partial f/\partial z_2 + \partial f/\partial z_3 = 0$ su $V_\mathfrak{p}$. Ciò significa che $f \in M$ e che M è un ideale primario associato a $\mathfrak{p}$.

È impossibile definire M servendosi soltanto di operatori differenziali a coefficienti costanti. Altrimenti M sarebbe invariante per traslazioni nella direzione dell'asse z_1. Poiché $z_2 - z_1 z_3 \in M$, si avrebbe $z_2 - (z_1 + 1)z_3 \in M$ e quindi $z_3 \in M$, il che è assurdo. Per definire un modulo mediante operatori differenziali come in questo esempio occorre dunque ammettere in generale coefficienti polinomiali. (Si veda il teorema 7.7.6 più avanti. L'argomento precedente si può sempre usare quando $V_\mathfrak{p}$ è uno spazio lineare.)

Per studiare il sottomodulo M su $V_\mathfrak{p}$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$ qualsiasi occorre una parametrizzazione esplicita di $V_\mathfrak{p}$, strettamente legata alla proposizione 6.5.4.

Proposizione 7.7.3. Dopo un'opportuna trasformazione lineare in $\mathbb{C}^n$, un ideale primo $\mathfrak{p} \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, con $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ e $\mathfrak{p} \neq \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, ha la forma seguente.

(i) Esiste un intero ν, $0 \leq \nu < n$, tale che $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu] = \{0\}$.

(ii) Per ogni $j = \nu + 1, \dots, n$ esiste un polinomio irriducibile $Q_j \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu, z_j]$ della forma

$$Q_j(z) = z_j^\mu + a_{j1}(z')z_j^{\mu-1} + \cdots + a_{j\mu}(z'), \qquad z' = (z_1, \dots, z_\nu),$$

di grado $\mu > 0$ in (z', z_j). Indichiamo con $\lambda_1(z'), \dots, \lambda_\mu(z')$ gli zeri $z_{\nu+1}$ di $Q_{\nu+1}$, e sia

$$\Delta(z') = \prod_{k \neq l} (\lambda_k(z') - \lambda_l(z'))$$

il discriminante di $Q_{\nu+1}$, polinomio non identicamente nullo.

(iii) Per $j = \nu + 2, \dots, n$ esistono polinomi $h_j(z', z_{\nu+1})$ tali che

$$T_j(z', z_{\nu+1}, z_j) = \Delta(z')z_j - h_j(z', z_{\nu+1}) \in \mathfrak{p}.$$

Poniamo $T_{\nu+1} = Q_{\nu+1}$.

(iv) Esiste una costante C tale che $|z| \leq C(1 + |z'|)$ per $z \in V_\mathfrak{p}$.

(v) $V^0 = V_\mathfrak{p} \setminus \Delta^{-1}(0)$ è una sottovarietà complessa di $\mathbb{C}^n$ di dimensione ν. La proiezione

$$V_\mathfrak{p} \ni z \xrightarrow{\pi} z' \in \mathbb{C}^\nu$$

è localmente biolomorfa quando $\Delta(z') \neq 0$, e in tal caso la fibra $\pi^{-1}(z')$ consiste di μ punti.

(vi) V^0 è connessa e densa in $V_\mathfrak{p}$.

Dimostrazione. Dopo una trasformazione lineare possiamo supporre che $\mathfrak{p}$ contenga un polinomio irriducibile

$$P_n(z) = z_n^{m_n} + a_1 z_n^{m_n - 1} + \cdots + a_{m_n},$$

dove $a_j \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}]$ e $\deg a_j \leq j$. Ciò significa semplicemente che l'asse z_n non è caratteristico. Applichiamo lo stesso procedimento all'ideale primo $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}]$ di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}]$ se $\mathfrak{p}_1 \neq \{0\}$, con una nuova trasformazione lineare delle coordinate $z_1, \dots, z_{n-1}$. (Se $\mathfrak{p}_1 = \{0\}$ vale (i) con $\nu = n - 1$.) Possiamo continuare così finché il procedimento si arresta perché è soddisfatta (i). Abbiamo allora elementi di $\mathfrak{p}$ simili a quelli di (ii), ma con Q_j sostituito da un polinomio $P_j(z_1, \dots, z_j)$ il cui grado m_j in z_j è uguale al grado totale. Ne concludiamo che

$$|z_j| \leq C(1 + |z_1| + \cdots + |z_{j-1}|), \qquad z \in V_\mathfrak{p}, \quad j = \nu + 1, \dots, n.$$

Ciò implica (iv).

Dividendo per i polinomi $P_n, \dots, P_{\nu+1}$ si vede che ogni classe nel dominio d'integrità $R = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/\mathfrak{p}$ contiene un polinomio di grado $< m_j$ in z_j per $j > \nu$. Dunque R è finitamente generato su $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$, e ogni elemento di R è intero su $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$ (si vedano ad esempio Zariski–Samuel [1, pp. 254 e segg.]). Indicando con $\dot{z}_j$ l'immagine di z_j in R, ne segue in particolare che ogni combinazione lineare

$$\zeta = c_{\nu+1}\dot{z}_{\nu+1} + \cdots + c_n\dot{z}_n$$

a coefficienti complessi è intera su $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$. Il campo delle frazioni $F_\mathfrak{p}$ di R ha grado finito μ sul campo delle frazioni $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_\nu)$ di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$ e $F_\mathfrak{p} = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_\nu)R$. Per una scelta generica dei coefficienti, ζ è un elemento primitivo che genera $F_\mathfrak{p}$ su $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_\nu)$, quindi soddisfa un'equazione irriducibile

$$Q(\zeta) = \zeta^\mu + a_1(z')\zeta^{\mu-1} + \cdots + a_\mu(z') = 0,$$

con a_j polinomi. Scegliamo ora nuove coordinate $z_{\nu+1}, \dots, z_n$, ciascuna combinazione lineare delle precedenti del tipo appena considerato. Per ogni $j > \nu$ l'immagine $\dot{z}_j$ in R è allora intera di grado μ su $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$. Abbiamo per $\dot{z}_j$ un'equazione irriducibile della forma (ii), benché ancora non sappiamo che il grado totale di Q_j è soltanto μ. Ciò seguirà da (iv), che non risente del cambiamento di coordinate. Per simmetria basterà provarlo per $j = \nu + 1$. Anche (iii) segue da proprietà generali delle estensioni intere (si vedano Zariski–Samuel [1, V, §4] o la dimostrazione della proposizione 6.5.4).

L'insieme

$$W = \{(z', z_{\nu+1}) \in \mathbb{C}^{\nu+1} : Q_{\nu+1}(z', z_{\nu+1}) = 0,\ \Delta(z') \neq 0\}$$

è un'ipersuperficie complessa poiché $\partial Q_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1} \neq 0$ su W. La proiezione su $\mathbb{C}^\nu \setminus \Delta^{-1}(0)$ ne fa un rivestimento a μ fogli. W contiene la proiezione di $V_\mathfrak{p}$ in $\mathbb{C}^{\nu+1} \setminus \Delta^{-1}(0)$ poiché $Q_{\nu+1} = 0$ su $V_\mathfrak{p}$. Sia ψ l'applicazione analitica

$$(z', z_{\nu+1}) \in W \longmapsto \left(z', z_{\nu+1}, \frac{h_{\nu+2}(z', z_{\nu+1})}{\Delta(z')}, \dots, \frac{h_n(z', z_{\nu+1})}{\Delta(z')}\right).$$

Per (iii) è chiaro che $V_\mathfrak{p} \setminus \Delta^{-1}(0) \subset \psi(W)$. Affermiamo che $\psi(W) \subset V_\mathfrak{p}$, il che proverà (v). Sia infatti q un polinomio arbitrario di $\mathfrak{p}$. Per un intero r abbastanza grande $\Delta(z')^r q(z)$ è un polinomio in z' e $\Delta(z')z''$, con $z'' = (z_{\nu+1}, \dots, z_n)$, e quindi per (iii)

$$\Delta(z')^r q(z) = \widetilde{q}(z', z_{\nu+1}) + \sum_{j>\nu+1} T_j(z)q_j(z)$$

con $\widetilde{q}, q_j$ polinomi. Poiché $\widetilde{q} \in \mathfrak{p}$, esso è divisibile per $Q_{\nu+1}$ e segue $q(\psi(z)) = 0$ per $z \in W$. Ciò dimostra $\psi(W) \subset V_\mathfrak{p}$. In particolare da (iv) otteniamo

$$|z_{\nu+1}| \leq C(1 + |z'|), \qquad z \in W.$$

Poiché i coefficienti di un polinomio monico sono, a meno del segno, le funzioni simmetriche elementari degli zeri, il grado del coefficiente a_{jk} di $z_j^{\mu-k}$ in Q_j è al più k se $j = \nu + 1$. Come già osservato, per simmetria ciò vale per ogni $j > \nu$, e (ii) è dimostrata.

W è connesso poiché $Q_{\nu+1}$ è irriducibile (altrimenti il prodotto corrispondente agli zeri in una componente sarebbe un fattore polinomiale). Quindi $\psi(W)$ è connesso. Dobbiamo mostrare che $\overline{\psi(W)} = V_\mathfrak{p}$. Ricordiamo che, per una scelta generica di $c = (c_{\nu+1}, \dots, c_n) \in$

$\mathbb{C}^{n-\nu}$, la combinazione lineare $\zeta = \langle c, \dot{z}'' \rangle = c_{\nu+1}\dot{z}_{\nu+1} + \cdots + c_n \dot{z}_n$ è un elemento primitivo che genera $F_{\mathfrak{p}}$ ed è intero su $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_\nu]$. Dunque ζ soddisfa un'equazione irriducibile

$$q_c(\zeta, z') = \zeta^\mu + a_1(z')\zeta^{\mu-1} + \cdots + a_\mu(z') = 0$$

a coefficienti polinomiali. Quindi $Q_c(z) = q_c(\langle c, z'' \rangle, z') \in \mathfrak{p}$, e $q_c(t, z') = 0$ se $t = \langle c, z'' \rangle$ e $(z', z'') \in V_{\mathfrak{p}}$. Se $\Delta(z') \neq 0$ concludiamo che

$$q_c(t, z') = \prod_{i=1}^{\mu} (t - \langle c, \psi(z', \lambda_i(z''))'' \rangle), \qquad Q_c(z) = \prod_{i=1}^{\mu} \langle c, z'' - \psi(z', \lambda_i(z''))'' \rangle,$$

dove le $\lambda_i(z')$ sono gli zeri di $Q_{\nu+1}(z', \lambda)$. Sia $\Delta(z'_0) = 0$ e scegliamo una successione $z'_l \to z'_0$ con $\Delta(z'_l) \neq 0$ tale che $\psi(z'_l, \lambda_i(z'_l))$ converga, per $l \to \infty$, a un punto (z'_0, z''_i), per $i = 1, \ldots, \mu$. Allora

$$Q_c(z'_0, z'') = \prod_{i=1}^{\mu} \langle c, z'' - z''_i \rangle$$

si annulla su $V_{\mathfrak{p}} \cap \pi^{-1}(z'_0)$. Poiché c è generico, se $(z'_0, z'') \in V_{\mathfrak{p}}$ si deve avere $z'' = z''_i$ per qualche i. Ciò prova che $V_{\mathfrak{p}} \cap \pi^{-1}(z'_0) = \overline{\psi(W)} \cap (\{z'_0\} \times \mathbb{C}^{n-\nu})$, ossia (vi).

Per estendere la discussione dell'esempio precedente a un modulo primario qualsiasi dobbiamo anche considerare lo sviluppo di Taylor negli zeri di un ideale primo arbitrario $\mathfrak{p}$. Manteniamo le notazioni della proposizione 7.7.3 e scriviamo $z'' = (z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$.

Lemma 7.7.4. Per ogni $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ e ogni intero positivo s esistono polinomi

$$f_\alpha(z', z_{\nu+1}) = \sum_{j<\mu} f_{\alpha j}(z') z_{\nu+1}^j, \qquad |\alpha| < s,$$

dove $\alpha = (\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_n)$ è un multiindice, tali che

$$\Delta(z')^{\mu n s} f(z) - \sum_{|\alpha|<s} f_\alpha(z', z_{\nu+1}) T^\alpha(z)/\alpha!$$

appartenga all'ideale $I_s \subset \mathfrak{p}^s$ generato da $T^\alpha(z)$, $|\alpha| = s$. Se $\partial^\alpha f(z', z'')/\partial z''^\alpha = 0$ su $V_{\mathfrak{p}}$ per $|\alpha| < s$, allora $f_\alpha = 0$ per $|\alpha| < s$. Quindi $\Delta^{\mu n s} f \in I_s \subset \mathfrak{p}^s$ se $(\partial/\partial z'')^\alpha f \in \mathfrak{p}$ per $|\alpha| < s$.

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima parte per $s = 1$. La divisione di f per i polinomi Q_j di (ii) dà

$$f = g_0 + \sum_{j=\nu+1}^{n} g_j Q_j, \qquad g_j \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n],$$

dove g_0 ha grado $< \mu$ in ogni z_j, $j > \nu$. Quindi $\Delta^{\mu n} g_0$ e $\Delta^{\mu n} Q_j$ sono polinomi in z' e $\Delta z''$. Sostituiamo a Δz_j l'espressione $T_j(z) + h_j(z', z_{\nu+1})$ per $j > \nu + 1$, ottenendo

$$\Delta^{\mu n} g_0 \equiv \widetilde{g}_0(z', z_{\nu+1}) \pmod{I_1}, \qquad \Delta^{\mu n} Q_j \equiv \widetilde{Q}_j(z', z_{\nu+1}) \pmod{I_1}.$$

Poiché $I_1 \subset \mathfrak{p}$ e $Q_j \in \mathfrak{p}$, anche $\widetilde{Q}_j \in \mathfrak{p}$, dunque $T_{\nu+1} = Q_{\nu+1}$ divide $\widetilde{Q}_j$. Dividendo $\widetilde{g}_0$ per $Q_{\nu+1}$ si ottiene un resto della forma richiesta per f_0, il che dimostra la prima parte.

Supponiamo ora che $\partial^\alpha f/\partial z''^\alpha = 0$ su $V_{\mathfrak{p}}$ per $|\alpha| < s$. Affermiamo che ne segue $f_\alpha = 0$ per $|\alpha| < s$. Per $s = 1$ è chiaro, poiché $f_0 = 0$ su $V_{\mathfrak{p}} \setminus \Delta^{-1}(0)$, e quindi $f_0(z) = 0$ per $\Delta(z') \neq 0$. Supponiamo già dimostrato che $f_\alpha = 0$ per $|\alpha| < s - 1$. Poiché il determinante jacobiano $\partial(T_{\nu+1}, \ldots, T_n)/\partial(z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$ non si annulla su $V_{\mathfrak{p}} \setminus \Delta^{-1}(0)$, per $|\alpha| = s - 1$ si ha $f_\alpha = 0$ su tale insieme. Quindi $f_\alpha = 0$ per $|\alpha| = s - 1$, e la dimostrazione è conclusa.

Osservazione. Il lemma dà uno sviluppo di Taylor simultaneo nelle variabili z'' in tutti i punti della fibra di $V_{\mathfrak{p}}$ sopra z'.

Il lemma seguente è strettamente legato alla seconda parte del lemma 7.7.4.

Lemma 7.7.5. Assegnati arbitrariamente $f_\alpha \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, $|\alpha| < s$, dove $\alpha = (\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_n)$ è un multiindice, si può trovare $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tale che

$$(\partial/\partial z'')^\alpha f - \Delta^{s(s-1)} f_\alpha \in \mathfrak{p}, \qquad |\alpha| < s.$$

Dimostrazione. Per $s = 1$ ciò è immediato. Supponiamo il lemma già dimostrato per un intero positivo s e proviamolo per $s+1$. Per ipotesi si può scegliere un polinomio F tale che

$$(\partial/\partial z'')^\alpha F - \Delta^{s(s-1)} f_\alpha \in \mathfrak{p}, \qquad |\alpha| < s.$$

Poiché $(s+1)s - s(s-1) = 2s$, scrivendo $\Phi = f - \Delta^{2s} F$ dobbiamo trovare Φ tale che

$$(\partial/\partial z'')^\alpha \Phi \in \mathfrak{p} \ (|\alpha| < s), \qquad (\partial/\partial z'')^\alpha \Phi - \Delta^{2s} g_\alpha \in \mathfrak{p} \ (|\alpha| = s),$$

dove $g_\alpha = \Delta^{s(s-1)} f_\alpha - (\partial/\partial z'')^\alpha F$ è un polinomio. Queste condizioni sono soddisfatte da

$$\Phi = \sum_{|\alpha|=s} g_\alpha S^\alpha/\alpha!$$

se $S_{\nu+1}, \dots, S_n \in \mathfrak{p}$ e

$$\partial S_j/\partial z_k \in \mathfrak{p} \quad (j,k > \nu,\ j \neq k), \qquad \partial S_j/\partial z_j - \Delta^2 \in \mathfrak{p} \quad (j > \nu).$$

Per costruire tali polinomi osserviamo che il discriminante Δ appartiene all'ideale generato da $T_{\nu+1}$ e $\partial T_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1}$:

$$\Delta = a T_{\nu+1} + b\, \partial T_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1},$$

con $a, b \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{\nu+1}]$, onde $b\, \partial T_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1} \equiv \Delta \pmod{\mathfrak{p}}$. Con le notazioni della proposizione 7.7.3 (iii) poniamo

$$S_{\nu+1} = \Delta b T_{\nu+1}, \qquad S_j = \Delta T_j + b T_{\nu+1} \partial h_j/\partial z_{\nu+1} \quad (j > \nu+1).$$

È allora chiaro che $S_j \in \mathfrak{p}$ per $j > \nu$, e la dimostrazione è conclusa poiché

$$\begin{aligned}
\partial S_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1} &\equiv \Delta b\, \partial T_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1} \equiv \Delta^2 \pmod{\mathfrak{p}}, \\
\partial S_{\nu+1}/\partial z_j &= 0 \quad (j > \nu+1), \\
\partial S_j/\partial z_j &= \Delta^2, \quad \partial S_j/\partial z_k = 0 \quad (j,k > \nu+1,\ j \neq k), \\
\partial S_j/\partial z_{\nu+1} &\equiv -\Delta\, \partial h_j/\partial z_{\nu+1} + b(\partial T_{\nu+1}/\partial z_{\nu+1})(\partial h_j/\partial z_{\nu+1}) \\
&\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad (j > \nu+1).
\end{aligned}$$

Possiamo ora dimostrare un teorema di dualità che caratterizza i moduli primari. Conserviamo le notazioni della proposizione 7.7.3.

Teorema 7.7.6. Sia M un $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$-sottomodulo primario di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$ associato all'ideale primo $\mathfrak{p}$. Scegliamo s in modo che valga (7.7.1) e indichiamo con $\mathcal{N}_s(M)$ l'insieme degli operatori differenziali

$$\mathcal{B} = \sum_{|\alpha|<s} a_\alpha \cdot (\partial/\partial z'')^\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K, \tag{7.7.3}$$

tali che $\mathcal{B}m \in \mathfrak{p}$ per ogni $m \in M$. Qui $a \cdot b = \sum_{j=1}^{K} a_j b_j$ per $a, b \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$. Allora

$$f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K, \quad \mathcal{B}f \in \mathfrak{p} \text{ per ogni } \mathcal{B} \in \mathcal{N}_s(M) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in M. \tag{7.7.4}$$

Si possono scegliere $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\varrho \in \mathcal{N}_s(M)$ tali che

$$f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K, \quad \mathcal{B}_\iota f \in \mathfrak{p} \ (\iota = 1, \dots, \varrho) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in M, \tag{7.7.4$'$}$$

e, per $\varphi_1, \dots, \varphi_\varrho \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ arbitrarie, esistono polinomi $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$ e $q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu] \setminus \{0\}$ tali che

$$\mathcal{B}_\iota f \equiv q\varphi_\iota \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad \iota = 1, \dots, \varrho. \tag{7.7.5}$$

Dimostrazione. Sia J_s l'applicazione $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$-lineare

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K \ni f \longmapsto \{((\partial/\partial z'')^\alpha f) \bmod \mathfrak{p}\}_{|\alpha|<s} \in (F_\mathfrak{p}^K)^\sigma,$$

dove σ è la dimensione dello spazio dei polinomi di grado $< s$ in $n-\nu$ variabili. Dal lemma 7.7.4 segue che $\Delta^{\mu n s} \ker J_s \subset M$. Per linearità di J_s si ha $gJ_sM \subset J_sM$ se $g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$. Per $g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ arbitrario il lemma 7.7.5 fornisce $G \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tale che

$$G - \Delta^{s(s-1)} g \in \mathfrak{p}, \qquad (\partial/\partial z'')^\alpha G \in \mathfrak{p}, \quad 0 < |\alpha| < s.$$

Indicando con un punto la classe residua modulo $\mathfrak{p}$, ne segue

$$\Delta^{s(s-1)} \dot{g} J_s M = \dot{G} J_s M = J_s(GM) \subset J_s M.$$

L'inviluppo $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_\nu)$-lineare di J_sM nello spazio vettoriale di dimensione finita $F_\mathfrak{p}^{K\sigma}$ su $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_\nu)$ è quindi anche $F_\mathfrak{p}$-lineare. Poniamo

$$M^\perp = \left\{ \{\dot{a}_\alpha\}_{|\alpha|<s} \in (F_\mathfrak{p}^K)^\sigma : \sum_{|\alpha|<s} \dot{a}_\alpha \cdot (J_s m)_\alpha = 0 \text{ per ogni } m \in M \right\}.$$

Come spazio vettoriale su $F_\mathfrak{p}$, $M^\perp$ ha una base di elementi $\gamma_\iota = \{\dot{a}_\alpha^\iota\}_{|\alpha|<s}$, $\iota = 1, \dots, \varrho$, con $a_\alpha^\iota \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$. Dunque

$$\gamma_\iota \cdot J_s f \equiv \sum_{|\alpha|<s} a_\alpha^\iota \cdot (\partial/\partial z'')^\alpha f \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Dire che $\gamma_\iota \in M^\perp$ significa precisamente che $\mathcal{B}_\iota = \sum a_\alpha^\iota \cdot (\partial/\partial z'')^\alpha \in \mathcal{N}_s(M)$. Se $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$ e $\mathcal{B}_\iota f \in \mathfrak{p}$ per $\iota = 1, \dots, \varrho$, allora J_sf appartiene all'inviluppo $F_\mathfrak{p}$-lineare di J_sM, che coincide con l'inviluppo $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_\nu)$-lineare del $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$-modulo J_sM. Esistono quindi $q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_\nu]$, $q \neq 0$, e $m \in M$ con $qJ_sf = J_sm$. Dunque $J_s(qf - m) = 0$ e per il lemma 7.7.4, come osservato all'inizio della dimostrazione, $\Delta^{\mu n s}(qf - m) \in M$. Quindi $\Delta^{\mu n s} qf \in M$. Poiché M è primario e $\Delta^{\mu n s} q \notin \mathfrak{p}$, si ha $f \in M$.

Se $\dot{\varphi}_\iota$ è la classe residua di φ_ι in $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/\mathfrak{p} \subset F_\mathfrak{p}$, l'indipendenza lineare delle γ_ι su $F_\mathfrak{p}$ permette di trovare $F \in F_\mathfrak{p}^{K\sigma}$ tale che $\gamma_\iota \cdot F = \dot{\varphi}_\iota$ per $\iota = 1, \dots, \varrho$. In virtù del lemma 7.7.5 possiamo scegliere q tale che $qF = J_sf$ per qualche $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$, e ne segue (7.7.5).

È chiaro che $\mathcal{N}_s(M)$ è un $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$-modulo finitamente generato. Se $\mathcal{B} \in \mathcal{N}_s(M)$, il commutatore $[z_j, \mathcal{B}] = z_j\mathcal{B} - \mathcal{B}z_j$ appartiene a $\mathcal{N}_s(M)$ ed è di ordine inferiore a $\mathcal{B}$, per $j = \nu + 1, \dots, n$. Si dice che $\mathcal{B}$ è *noetheriano* rispetto al modulo M.

Teorema 7.7.7. Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ e sia $\mathcal{N}_s$ un insieme di operatori differenziali della forma (7.7.3) tale che da $\mathcal{B}\in\mathcal{N}_s$ segua $[z_j,\mathcal{B}]\in\mathcal{N}_s$ per $j=\nu+1,\dots,n$. Allora

$$M=\{f\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K : \mathcal{B}f\in\mathfrak{p} \text{ per ogni } \mathcal{B}\in\mathcal{N}_s\}$$

è un sottomodulo primario e $\mathfrak{p}$ è l'ideale primo associato.

Dimostrazione. È evidente che $\mathfrak{p}^s\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K\subset M$. Dobbiamo provare che

$$g\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]\setminus\mathfrak{p},\quad f\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K,\quad gf\in M\quad\Longrightarrow\quad f\in M,$$

ossia che $\mathcal{B}f\in\mathfrak{p}$ se $\mathcal{B}\in\mathcal{N}_s$. Se $\mathcal{B}$ è di ordine zero ciò è chiaro perché $g\mathcal{B}f=\mathcal{B}(gf)\in\mathfrak{p}$. Per un operatore $\mathcal{B}$ qualsiasi, dalla regola di Leibniz si ha

$$g\mathcal{B}f=\mathcal{B}(gf)-\sum_{|\alpha|\neq 0}((\partial/\partial z'')^\alpha g)\mathcal{B}^{(\alpha)}f/\alpha!,$$

dove $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ è un commutatore iterato di $\mathcal{B}$, preso α_j volte con z_j per $j>\nu$. Se l'asserto è già dimostrato per gli operatori di $\mathcal{N}_s$ di ordine inferiore, otteniamo di nuovo $g\mathcal{B}f\in\mathfrak{p}$, e quindi $\mathcal{B}f\in\mathfrak{p}$. La dimostrazione è conclusa.

Terminati i preliminari algebrici, passiamo a studiare l'$A(\Omega)$-sottomodulo $M(\Omega)$ di $A(\Omega)^K$ e il sottofascio $\mathcal{M}$ di $\mathcal{A}^K$ generati da un $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$-sottomodulo M di $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K$. La proposizione 7.7.2 permette di ricondurre la discussione al caso primario.

Proposizione 7.7.8. Sia $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un dominio di olomorfia. Se $M_1,\dots,M_\mu$ sono $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$-sottomoduli di $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K$ e $M=M_1\cap\dots\cap M_\mu$, allora

$$M(\Omega)=M_1(\Omega)\cap\dots\cap M_\mu(\Omega).$$

Dimostrazione. Basta considerare $\mu=2$. Infatti, scrivendo $M=M_1\cap(M_2\cap\dots\cap M_\mu)$, il caso $\mu>2$ segue subito per induzione. Supponiamo quindi $\mu=2$. Essendo evidente che $M(\Omega)\subset M_1(\Omega)\cap M_2(\Omega)$, occorre provare che $f\in M_1(\Omega)\cap M_2(\Omega)$ implica $f\in M(\Omega)$. Siano $m_{j1},\dots,m_{jr_j}$ generatori di M_j su $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ per $j=1,2$. Per ipotesi esistono $f_{jk}\in A(\Omega)$ tali che

$$f=\sum_{k=1}^{r_j}f_{jk}m_{jk},\quad j=1,2;\qquad \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{r_j}(-1)^j f_{jk}m_{jk}=0.$$

L'insieme delle famiglie $\{\varphi_{jk}\}_{j=1,2;\,k=1,\dots,r_j}$ con $\varphi_{jk}\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ tali che

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{r_j}(-1)^j\varphi_{jk}m_{jk}=0 \tag{7.7.6}$$

è un $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$-modulo finitamente generato. Siano $\{\varphi^l_{jk}\}$, $l=1,\dots,L$, suoi generatori. Per il lemma 7.6.4 esistono $\psi_l\in A(\Omega)$ tali che

$$f_{jk}=\sum_{l=1}^{L}\psi_l\varphi^l_{jk}.$$

Quindi

$$f=\sum_{l=1}^{L}\psi_l m_l,\qquad m_l=\sum_{k=1}^{r_j}\varphi^l_{jk}m_{jk},$$

dove m_l è indipendente da j per (7.7.6). Dunque $m_l\in M_1\cap M_2=M$, il che prova $f\in M(\Omega)$.

Mostreremo ora che la descrizione di un modulo primario M data nel teorema 7.7.6 rimane valida per la sua estensione $M(\Omega)$. Premettiamo un lemma legato al lemma 7.7.4.

Lemma 7.7.9. Sia $U' \subset \mathbb{C}^\nu$ aperto e sia, per un certo N,

$$f(z) = \sum_{|\alpha|<N} f_\alpha(z')(z'')^\alpha, \qquad f_\alpha \in A(U').$$

Se $f = 0$ su $(U' \times \mathbb{C}^{n-\nu}) \cap V_\mathfrak{p}$, allora, con N' dipendente soltanto da N,

$$\Delta^{\mu n} f = \sum_{j>\nu} \varphi_j(z) T_j(z), \qquad \varphi_j(z) = \sum_{|\alpha|<N'} \varphi_{j\alpha}(z')(z'')^\alpha, \qquad \varphi_{j\alpha} \in A(U').$$

Dimostrazione. Come nel lemma 7.7.4 dividiamo per Q_j, $j > \nu$, ottenendo

$$f = g_0 + \sum_{j=\nu+1}^{n} g_j Q_j,$$

dove g_0 ha grado $< \mu$ rispetto a ogni z_j, $j > \nu$, e $g_{\nu+1}, \dots, g_n$ hanno grado $\le N$. Di nuovo $\Delta^{\mu n} g_0$ e $\Delta^{\mu n} Q_j$ sono polinomi in $\Delta z''$. Sostituendo Δz_j con $T_j + h_j(z', z_{\nu+1})$ per $j > \nu + 1$, troviamo come prima che $\Delta^{\mu n} Q_j$ appartiene all'ideale polinomiale generato da $T_{\nu+1}, \dots, T_n$, e che

$$\Delta^{\mu n} g_0(z) = \widetilde{g}_0(z', z_{\nu+1}) + \sum_{j>\nu} \psi_j(z) T_j(z),$$

dove ψ_j è un polinomio di grado limitato in z''. Poiché $\widetilde{g}_0$ si annulla quando $T_{\nu+1} = 0$, esso è divisibile per $T_{\nu+1}$ come polinomio in $z_{\nu+1}$, e il lemma è dimostrato.

Il risultato seguente è strettamente legato alla dimostrazione del teorema 6.5.2.

Teorema 7.7.10. Valgano le ipotesi del teorema 7.7.6 e sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio di olomorfia. Se $f \in A(\Omega)^K$, allora $f \in M(\Omega)$ se e solo se

$$\mathcal{B} f = 0 \quad \text{su } V_\mathfrak{p} \cap \Omega \quad \text{per ogni } \mathcal{B} \in \mathcal{N}_s(M). \tag{7.7.8}$$

Basta imporre questa condizione per operatori $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\varrho \in \mathcal{N}_s(M)$ per cui valga la (7.7.4′).

Dimostrazione. Se $m \in M$, $\varphi \in A(\Omega)$ e $\zeta \in \Omega$, le somme parziali φ_N dello sviluppo di φ in serie di potenze in ζ convergono a φ in un intorno U di ζ. Pertanto

$$\mathcal{B}(\varphi m) = \lim \mathcal{B}(\varphi_N m) = 0 \quad \text{in } U \cap V_\mathfrak{p}, \qquad \mathcal{B} \in \mathcal{N}_s(M),$$

il che prova la necessità. Per provare la sufficienza basta, per il teorema 7.2.9, mostrare che in ogni $\zeta \in \Omega$ il germe f_ζ appartiene all'A_ζ-modulo generato da M. Per semplificare la notazione supponiamo $\zeta = 0$. Per $j > \nu$ sia W_j il polinomio di Weierstrass equivalente a Q_j in 0 secondo il teorema di preparazione di Weierstrass. Si ha dunque $Q_j = h_j W_j$ vicino a 0, con h_j analitica, polinomiale in z_j e $h_j(0) \neq 0$. Scegliamo s in modo che valga (7.7.1). Dividendo $f_1 = f / \prod_{j>\nu} h_j^s$ per Q_j^s, $j > \nu$, con il teorema di preparazione di Weierstrass, si vede che il germe di f_1 in 0 è congruo modulo $\mathfrak{p}^s A_0^K \subset M_0$ al germe di un polinomio g il cui grado in z_j è inferiore a quello di W_j^s per ogni $j > \nu$. Dunque il germe di f è congruo modulo M_0 al germe di $F = g \prod_{j>\nu} h_j^s$, polinomio di grado $< \mu s$ in ciascuna z_j, $j > \nu$. In ogni punto $(0, z'') \in V_\mathfrak{p}$ con $z'' \neq 0$ si ha $z_j \neq 0$ per qualche $j > \nu$. Allora $W_j \neq 0$ e $h_j = 0$ in un intorno relativo in $V_\mathfrak{p}$, sicché F vi si annulla di ordine s. Esiste quindi una palla $U' \subset \mathbb{C}^\nu$ di centro 0 in cui i coefficienti di F sono analitici e tale che

$$\mathcal{B}_\iota F = 0 \quad \text{su } V_\mathfrak{p} \cap (U' \times \mathbb{C}^{n-\nu}), \qquad \iota = 1, \dots, \varrho. \tag{7.7.9}$$

Il teorema sarà provato se mostriamo che $F \in M(U' \times \mathbb{C}^{n-\nu})$.

Per il lemma 7.7.9 la condizione (7.7.9) equivale a

$$\Delta^{\mu n}\mathcal{B}_\iota F = \sum_{j>\nu} T_j(z)\Phi_j^\iota(z), \qquad \iota = 1,\dots,\varrho, \tag{7.7.9$'$}$$

dove le Φ_j^ι sono polinomi in z'' di grado, diciamo, $< N$, con coefficienti in $A(U')$. Se scriviamo

$$F = \sum_{|\alpha|<\mu s} F_\alpha(z')(z'')^\alpha, \qquad \Phi_j^\iota(z) = \sum_{|\alpha|<N} \Phi_{j\alpha}^\iota(z')(z'')^\alpha,$$

con $F_\alpha \in A(U')^K$, $\Phi_{j\alpha}^\iota \in A(U')$, le (7.7.9$'$) diventano un sistema di relazioni a coefficienti polinomiali fra le $\{F_\alpha\}$ e le $\{\Phi_{j\alpha}^\iota\}$. Per il lemma 7.6.3 le soluzioni sono generate da polinomi che soddisfano queste condizioni. Ma se $\widetilde{F} \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K$, $\widetilde{\Phi}_j^\iota \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ e vale (7.7.9$'$), allora $\mathcal{B}_\iota\widetilde{F} \in \mathfrak{p}$ poiché $\Delta \notin \mathfrak{p}$, e dunque $\widetilde{F} \in M$ per il teorema 7.7.6. Ne segue che F appartiene all'$A(U')$-modulo generato da M, e quindi a $M(U' \times \mathbb{C}^{n-\nu})$. La dimostrazione è conclusa.

Resta da mostrare che, se $f \in A(\mathbb{C}^n)^K$ e si danno stime con peso per $\mathcal{B}_\iota f$ su $V_\mathfrak{p}$, $\iota = 1,\dots,\varrho$, la classe di f modulo $M(\mathbb{C}^n)$ in $A(\mathbb{C}^n)^K$ contiene un elemento g che soddisfa una stima analoga in $\mathbb{C}^n$. Combineremo una costruzione locale con un argomento coomologico sulla linea del paragrafo 7.6. Nei due lemmi seguenti M denoterà sempre un sottomodulo primario di $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$, $\mathfrak{p}$ sarà l'ideale primo associato e le coordinate saranno scelte in modo che si applichi la proposizione 7.7.3. Occorre anzitutto esaminare come usare i lemmi di divisione 7.6.7 e 7.6.8 in questa situazione, nella quale non possiamo cambiare coordinate a piacere.

Lemma 7.7.11. Per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e $r \in (0,1]$ si possono scegliere $r_j \in [r/2, r]$, $j > \nu$, tali che

$$|Q_j(\zeta', z_j + \zeta_j)| \geq (r/4\mu)^\mu, \qquad |z_j| = r_j, \tag{7.7.10}$$

e per c abbastanza piccolo ne segue che

$$|Q_j(z' + \zeta', z_j + \zeta_j)| \geq (r/5\mu)^\mu, \qquad |z_j| = r_j, \quad |z'| < cr^\mu(1 + |\zeta|)^{1-\mu}. \tag{7.7.11}$$

Il numero μ_j degli zeri di $Q_j(z' + \zeta', z_j + \zeta_j)$ con $|z_j| < r_j$ è indipendente da z' quando $|z'| < cr^\mu(1 + |\zeta|)^{1-\mu}$. Esiste un'unica funzione analitica $W_j(z', z_j)$, polinomiale in z_j di grado μ_j e con coefficiente direttivo 1, che ha precisamente questi zeri. Se f è analitica e limitata nel polidisco

$$\Omega_{\zeta,r} = \{z + \zeta : |z'| < cr^\mu(1 + |\zeta|)^{1-\mu},\ |z_j| < r_j \text{ per } j > \nu\}, \tag{7.7.12}$$

esiste un'unica decomposizione

$$f = Q_j g + h \tag{7.7.13}$$

con g, h analitiche in $\Omega_{\zeta,r}$, h polinomiale in z_j di grado $< \mu_j$, e

$$r^\mu \sup_{\Omega_{\zeta,r}} |g| + \sup_{\Omega_{\zeta,r}} |h| \leq K \sup_{\Omega_{\zeta,r}} |f|, \tag{7.7.14}$$

dove K è indipendente da ζ, r, f.

Dimostrazione. Possiamo supporre $j = n$, e allora l'enunciato è assai vicino al lemma 7.6.7. Si può scegliere $r_n \in [r/2, r]$ tale che

$$|r_n - |\tau|| \geq r/4\mu \quad \text{se } Q_n(\zeta', \tau + \zeta_n) = 0,$$

poiché $[r/2, r]$ non si può ricoprire con μ intervalli aperti di lunghezza $r/2\mu$. Ciò implica (7.7.10), poiché il coefficiente direttivo di Q_n è 1. Dato che

$$|Q_n(z'+\zeta', z_n+\zeta_n) - Q_n(\zeta', z_n+\zeta_n)| \le C|z'|(1+|\zeta|)^{\mu-1}, \qquad |z_n|<1,\ |z'|<1,$$

la disuguaglianza (7.7.11) segue scegliendo $Cc < 4^{-\mu} - 5^{-\mu}$. La stima elementare

$$\max_{|z_n|=r} |z_n - \tau| \le (1+8\mu) \min_{|z_n|=r_n} |z_n - \tau|, \qquad |r_n - |\tau|| \ge r/4\mu,$$

implica che

$$\max_{|z_n|<r} |Q_n(\zeta', z_n+\zeta_n)| \le (1+8\mu)^\mu \min_{|z_n|=r_n} |Q_n(\zeta', z_n+\zeta_n)|.$$

Poiché

$$|Q_n(z'+\zeta', z_n+\zeta_n) - Q_n(\zeta', z_n+\zeta_n)| < \min_{|z_n|=r_n} |Q_n(\zeta', z_n+\zeta_n)|$$

se $|z'| < cr^\mu(1+|\zeta|)^{1-\mu}$, $|z_n|<1$, il polinomio

$$p(z) = Q_n(z' cr^\mu (1+|\zeta|)^{1-\mu} + \zeta', rz_n + \zeta_n)$$

soddisfa le ipotesi del lemma 7.6.7, e l'asserto segue dai lemmi 7.6.7 e 7.6.8.

Possiamo ora dimostrare un teorema di interpolazione locale per il modulo quoziente $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K/M$.

Lemma 7.7.12. Valgano le ipotesi e le conclusioni del teorema 7.7.6 e si definisca $\Omega_{\zeta,r}$ mediante (7.7.12), scegliendo gli r_j come nel lemma 7.7.11. Per ogni $f \in A(\Omega_{\zeta,r})^K$ limitata si può allora trovare $g \in A(\Omega_{\zeta,r})^K$ tale che, per un certo $q \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_\nu]\setminus\{0\}$ e costanti C, E indipendenti da ζ, r, f, si abbia $qf - g \in M(\Omega_{\zeta,r})$ e

$$\sup_{\Omega_{\zeta,r}} |g| \le C(1+|\zeta|)^E \max_{\iota=1,\dots,\varrho} \sup_{V_\mathfrak{p}\cap\Omega_{\zeta,r}} |\mathcal{B}_\iota f|. \tag{7.7.15}$$

Dimostrazione. Per il teorema 7.7.10 basta costruire g in modo che $\mathcal{B}_\iota g = \mathcal{B}_\iota(qf)$ su $V_\mathfrak{p}\cap\Omega_{\zeta,r}$ per $\iota = 1,\dots,\varrho$ e che valga (7.7.15). Cominciamo come nella dimostrazione del teorema 7.7.10, ma ora su scala semilocale. Con la notazione del lemma 7.7.11 scriviamo $Q_j = h_j W_j$, dove h_j è un polinomio in z_j a coefficienti analitici per $z' \in \Omega'_{\zeta,r}$, proiezione di $\Omega_{\zeta,r}$ su $\mathbb{C}^\nu$. Applicando il lemma 7.7.11 a $f_1 = f/\prod_{j>\nu} h_j^s$ si trova

$$f_1 = f_2 + \sum_{j>\nu} Q_j^s g_j$$

con $f_2, g_j \in A(\Omega_{\zeta,r})^K$. Poniamo $f_3 = f_2 \prod_{j>\nu} h_j^s$. Allora $f - f_3 \in M(\Omega_{\zeta,r})$, f_3 è un polinomio di grado $< s\mu$ in ciascuna variabile z_j, $j>\nu$, e f_3 si annulla di ordine s su $V_\mathfrak{p}\cap(\widehat{\Omega}_{\zeta,r}\setminus\Omega_{\zeta,r})$, dove $\widehat{\Omega}_{\zeta,r} = \Omega'_{\zeta,r}\times\mathbb{C}^{n-\nu}$. Ne segue

$$\sup_{V_\mathfrak{p}\cap\widehat{\Omega}_{\zeta,r}} |\mathcal{B}_\iota f_3| = \sup_{V_\mathfrak{p}\cap\Omega_{\zeta,r}} |\mathcal{B}_\iota f|. \tag{7.7.16}$$

Ora $\mathcal{B}_\iota f_3$ è un polinomio in z'' di grado limitato, diciamo $< N$. Pertanto $\Delta^N \mathcal{B}_\iota f_3$ è un polinomio in $\Delta z''$ e, per la condizione (iii) della proposizione 7.7.3, su $V_\mathfrak{p}\cap\widehat{\Omega}_{\zeta,r}$ è uguale

a un polinomio in $z_{\nu+1}$ con coefficienti analitici in $\Omega'_{\zeta,r}$. Dividendo per $Q_{\nu+1}$ se ne può ridurre il grado a $< \mu$. Dunque

$$\Delta^N \mathcal{B}_\iota f_3 = \varphi_\iota \quad \text{su } V_\mathfrak{p} \cap \widehat{\Omega}_{\zeta,r}, \qquad \varphi_\iota(z) = \sum_{k=0}^{\mu-1} \varphi_{\iota k}(z') z_{\nu+1}^k.$$

Quando $z_{\nu+1}$ è uno zero di $Q_{\nu+1}$, per (7.7.16) si ha $|\varphi_\iota(z)| \le \sup_{V_\mathfrak{p}\cap\Omega_{\zeta,r}} |\Delta^N \mathcal{B}_\iota f|$. Esprimendo φ_ι con la formula di interpolazione di Lagrange e moltiplicando per Δ per eliminare i denominatori, come nella dimostrazione del lemma 6.5.5, dalla (iv) della proposizione 7.7.3 si deduce che

$$|\Delta \varphi_{\iota k}(z')| \le C(1+|\zeta|)^E \sup_{V_\mathfrak{p}\cap\Omega_{\zeta,r}} |\mathcal{B}_\iota f|, \qquad z' \in \Omega'_{\zeta,r},$$

per opportune costanti C, E. Per il teorema 7.7.6 possiamo scegliere $g_{\kappa k} \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K$, $\kappa = 1,\dots,\varrho$, $k = 0,\dots,\mu-1$, e $q_0 \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_\nu] \setminus \{0\}$ tali che

$$\mathcal{B}_\iota g_{\kappa k} \equiv q_0 \delta_{\iota\kappa} z_{\nu+1}^k \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad \iota,\kappa = 1,\dots,\varrho, \quad k = 0,\dots,\mu-1.$$

Qui $\delta_{\iota\kappa}$ è il simbolo di Kronecker. Per

$$g(z) = \sum_{\kappa=1}^{\varrho} \sum_{k=0}^{\mu-1} \Delta(z') \varphi_{\kappa k}(z') g_{\kappa k}(z)$$

si ha su $V_\mathfrak{p} \cap \widehat{\Omega}_{\zeta,r}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\iota g &= \sum_{\kappa=1}^{\varrho} \sum_{k=0}^{\mu-1} \Delta(z') \varphi_{\kappa k}(z') \mathcal{B}_\iota g_{\kappa k}(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\mu-1} \Delta(z') \varphi_{\iota k}(z') q_0(z') z_{\nu+1}^k = q(z') \mathcal{B}_\iota f_3, \end{aligned}$$

dove abbiamo scritto $q = q_0 \Delta^{N+1}$. Poiché $q\mathcal{B}_\iota f_3 = \mathcal{B}_\iota(qf)$ su $V_\mathfrak{p} \cap \Omega_{\zeta,r}$, il lemma è dimostrato.

Teorema 7.7.13. Valgano le ipotesi e le conclusioni del teorema 7.7.6 e sia φ una funzione plurisubarmonica in $\mathbb{C}^n$ tale che, per certi $\kappa, \kappa_0, \kappa_1 > 0$,

$$|\varphi(z+\zeta) - \varphi(\zeta)| \le \kappa_1, \qquad |z| \le \kappa_0 (1+|\zeta|)^{-\kappa}. \tag{7.7.17}$$

Per ogni $f \in A(\mathbb{C}^n)^K$ si può allora trovare $g \in A(\mathbb{C}^n)^K$ tale che $f - g \in M(\mathbb{C}^n)$ e, per opportune costanti C, N,

$$\sup_{\mathbb{C}^n} |g| e^{-\varphi_N} \le C \max_{\iota=1,\dots,\varrho} \sup_{V_\mathfrak{p}} |\mathcal{B}_\iota f| e^{-\varphi}, \tag{7.7.18}$$

dove $\varphi_N(z) = \varphi(z) + N \log(1+|z|^2)$.

Dimostrazione. Basta considerare il caso in cui il secondo membro di (7.7.18) è finito. Possiamo pertanto supporre che

$$|\mathcal{B}_\iota f| \le e^{\varphi} \quad \text{su } V_\mathfrak{p}, \qquad \iota = 1,\dots,\varrho, \tag{7.7.19}$$

e dobbiamo trovare g in modo che il primo membro di (7.7.18) ammetta una maggiorazione fissata. La funzione $d(z) = (1+|z|/4nk)^{-k}$ soddisfa la prima condizione in (7.6.16), poiché se $|\operatorname{Re} z_j| \le 1$ e $|\operatorname{Im} z_j| \le 1$ si ha

$$\begin{aligned} 1/d(\zeta) &\le (1+|z+\zeta|/4nk+1/2k)^k \le (1+1/2k)^k/d(z+\zeta) \\ &< e^{1/2}/d(z+\zeta) < 2/d(z+\zeta). \end{aligned}$$

La plurisubarmonicità di $-\log d$ segue dal corollario 1.6.8. Scegliamo $k > \mu + \mu\kappa$. La condizione (7.6.16) segue da (7.7.17). Sostituendo d con εd, con ε abbastanza piccolo, il lemma 7.7.12 (con r uguale a una costante per $(1+|\zeta|)^{-\kappa}$) mostra che per ogni $i \in I(\varepsilon d)$ si può trovare $g_i \in A(U_i^{\varepsilon d})^K$ con $qf - g_i \in M(U_i^{\varepsilon d})$ e

$$|g_i| \le Ce^{\varphi}(1+|z|)^E \quad \text{in } U_i^{\varepsilon d}.$$

Qui $q \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_\nu]\setminus\{0\}$. Pertanto $c_{i_1 i_2} = g_{i_1} - g_{i_2}$ definisce un cociclo in $C^1(\mathcal{U}^{\varepsilon d}, \mathcal{M}, \varphi_N)$ con

$$\|c\|_{\varphi_N} \le C$$

per N, C abbastanza grandi. Dal teorema 7.6.10 segue che, per $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$ abbastanza piccolo e $N' > N$ abbastanza grande, si può trovare $c' \in C^0(\mathcal{U}^{\varepsilon' d}, \mathcal{M}, \varphi_{N'})$ con $\delta c' = \varrho^*_{\varepsilon d, \varepsilon' d} c$ e

$$\|c'\|_{\varphi_{N'}} \le C'.$$

Scrivendo

$$G = g_j + c'_i \quad \text{in } U_i^{\varepsilon' d}, \qquad j = \varrho_{\varepsilon d, \varepsilon' d}\, i, \quad i \in I(\varepsilon' d),$$

si ottiene un'unica $G \in A(\mathbb{C}^n)^K$ con

$$\int |G|^2 e^{-\varphi_{N'}}\, d\lambda \le C'', \qquad \mathcal{B}_\iota(qf - G) = 0 \quad \text{su } V_{\mathfrak{p}}, \quad \iota = 1,\dots,\varrho.$$

Dunque $qf - G \in M(\mathbb{C}^n)$.

Siano $m_1,\dots,m_J \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K$ generatori di M come $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$-modulo. Sia M_1 il $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$-modulo generato da $(q,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,q), m_1,\dots,m_J$. Allora $G \in M_1(\mathbb{C}^n)$ e dal teorema 7.6.11 segue che si possono trovare $g \in A(\mathbb{C}^n)^K$ e $h_j \in A(\mathbb{C}^n)$ tali che per opportuni N'', C''' si abbia

$$G = qg + \sum_{j=1}^{J} h_j m_j, \qquad \int |g|^2 e^{-\varphi_{N''}}\, d\lambda \le C'''.$$

Per il teorema 2.2.3 ciò implica una stima

$$|g| \le \widetilde{C} e^{\varphi_{\widetilde{N}}}$$

per opportuni $\widetilde{N}, \widetilde{C}$. Poiché $q(f-g) = qf - G + G - qg \in M(\mathbb{C}^n)$, la dimostrazione si conclude con il lemma seguente.

Lemma 7.7.14. Se M è primario, $q \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ non appartiene all'ideale primo associato $\mathfrak{p}$ e $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia, allora $f \in M(\Omega)$ ogni volta che $f \in A(\Omega)^K$ e $qf \in M(\Omega)$.

Dimostrazione. Siano $m_1,\dots,m_J$ generatori di M come $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$-modulo. Per ipotesi possiamo scegliere $g_j \in A(\Omega)$ tali che

$$qf - \sum_{j=1}^{J} g_j m_j = 0.$$

L'insieme di tutte le relazioni polinomiali

$$q\varphi - \sum_{j=1}^{J} \gamma_j m_j = 0, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_K), \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_K, \gamma_1, \dots, \gamma_J) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^{K+J},$$

ha, come $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$-modulo, un numero finito di generatori $(\varphi_1^i, \dots, \varphi_K^i, \gamma_1^i, \dots, \gamma_J^i)$, $i = 1, \dots, I$. Per ciascuno di essi $q\varphi^i \in M$, dunque $\varphi^i \in M$ poiché M è primario e $q \notin \mathfrak{p}$. Per il lemma 7.6.4 esistono $\psi_i \in A(\Omega)$ tali che

$$(f_1, \dots, f_K, g_1, \dots, g_J) = \sum_{i=1}^{I} \psi_i(\varphi_1^i, \dots, \varphi_K^i, \gamma_1^i, \dots, \gamma_J^i).$$

Pertanto $f = \sum_{i=1}^{I} \psi_i \varphi^i \in M(\Omega)$ e il lemma è provato.

L'estensione del teorema 7.7.13 a moduli arbitrari è ora facile.

Teorema 7.7.15. Sia M un sottomodulo arbitrario di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^K$,

$$M = M_1 \cap \cdots \cap M_\mu,$$

dove M_σ è un sottomodulo primario con ideale primo associato $\mathfrak{p}_\sigma$. Per $\sigma = 1, \dots, \mu$ siano $\mathcal{B}_{\sigma\iota}$, $1 \le \iota \le \varrho_\sigma$, operatori di $\mathcal{N}_{s_\sigma}(M_\sigma)$ con le proprietà elencate nel teorema 7.7.6 relativamente a M_σ, e siano φ, φ_N come nel teorema 7.7.13. Per ogni $f \in A(\mathbb{C}^n)^K$ si può allora trovare $g \in A(\mathbb{C}^n)^K$ tale che $f - g \in M(\mathbb{C}^n)$ e per opportune costanti C, N si abbia

$$\sup_{\mathbb{C}^n} |g| e^{-\varphi_N} \le C \max_{\sigma=1,\dots,\mu} \max_{\iota=1,\dots,\varrho_\sigma} \sup_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} |\mathcal{B}_{\sigma\iota} f| e^{-\varphi}. \tag{7.7.18$'$}$$

Dimostrazione. Per il teorema 7.7.13 possiamo supporre che $\mu > 1$ e che l'asserto sia già dimostrato per valori minori di μ. Poniamo $M_0 = M_2 \cap \cdots \cap M_\mu$. Per l'ipotesi induttiva e il teorema 7.7.13 possiamo trovare f_j con $f - f_j \in M_j(\mathbb{C}^n)$, $j = 0, 1$, e

$$\sup_{\mathbb{C}^n} |f_j| e^{-\varphi_N} \le C \quad \text{se} \quad \max_{\sigma=1,\dots,\mu} \max_{\iota=1,\dots,\varrho_\sigma} \sup_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} |\mathcal{B}_{\sigma\iota} f| e^{-\varphi} \le 1.$$

Dunque $f_0 - f_1 \in \widetilde{M}(\mathbb{C}^n)$, dove $\widetilde{M}$ è il modulo generato da M_0 e M_1. Per il teorema 7.6.11 possiamo trovare $\widetilde{f}_j \in M_j(\mathbb{C}^n)$ tali che $f_0 - f_1 = \widetilde{f}_0 - \widetilde{f}_1$ e, per certi $N' > N$ e C',

$$\sup_{\mathbb{C}^n} |\widetilde{f}_j| e^{-\varphi_{N'}} \le C', \qquad j = 0, 1.$$

Ma allora $g = f_0 - \widetilde{f}_0 = f_1 - \widetilde{f}_1$, $f - g = f - f_j + \widetilde{f}_j \in M_j(\mathbb{C}^n)$, $j = 0, 1$, e

$$\sup_{\mathbb{C}^n} |g| e^{-\varphi_{N'}} \le C' + C.$$

Per la proposizione 7.7.8 ne segue $f - g \in M(\mathbb{C}^n)$, il che conclude la dimostrazione.

Torniamo ora al sistema di equazioni differenziali (7.6.23), più precisamente al sistema omogeneo

$$\sum_{k=1}^{K} P_{jk}(D) u_k = 0, \qquad j = 1, \dots, J, \tag{7.7.20}$$

dove $u_k \in C^\nu(\overline{\Omega})$ per un ν abbastanza grande, da precisare in seguito, e Ω denota un aperto convesso limitato. Ricordiamo che una soluzione esponenziale è una soluzione della forma

$$u(x) = (B^1(x), \dots, B^K(x)) e^{i\langle x, \vartheta \rangle}$$

dove $\vartheta \in \mathbb{C}^n$ e $B^1, \dots, B^K$ sono polinomi. Le equazioni (7.7.20) significano che per $\zeta = \vartheta$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^K P_{jk}(D_x) B^k(x) e^{i\langle x,\zeta\rangle} = \sum_{k=1}^K P_{jk}(D_x) B^k(D_\zeta) e^{i\langle x,\zeta\rangle} \\ &= \sum_{k=1}^K B^k(D_\zeta) P_{jk}(D_x) e^{i\langle x,\zeta\rangle} = \sum_{k=1}^K B^k(D_\zeta) P_{jk}(\zeta) e^{i\langle x,\zeta\rangle}, \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

Poiché tanto le combinazioni lineari delle funzioni $\zeta \mapsto e^{i\langle x,\zeta\rangle}$ quanto i polinomi sono densi nello spazio di tutte le funzioni intere, ciò equivale a richiedere

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K B^k(D_\zeta) P_{jk}(\zeta) f_j(\zeta) = 0, \qquad \zeta = \vartheta,$$

per tutti i polinomi f_j. Dunque $(B^1(D_\zeta), \dots, B^K(D_\zeta))$ deve annullare, per $\zeta = \vartheta$, il sottomodulo M di $\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n]^K$ generato dai vettori riga $P_j(\zeta) = (P_{j1}(\zeta), \dots, P_{jK}(\zeta))$. Applichiamo a questo modulo il teorema 7.7.15. Scrivendo gli operatori $\mathcal{B}_{\sigma\iota}$ che vi compaiono nella forma

$$(\mathcal{B}^1_{\sigma\iota}(\zeta, D_\zeta), \dots, \mathcal{B}^K_{\sigma\iota}(\zeta, D_\zeta))$$

con le derivazioni a destra dei coefficienti polinomiali, abbiamo appena visto che

$$\begin{gathered} x \longmapsto (\mathcal{B}^1_{\sigma\iota}(\zeta, x), \dots, \mathcal{B}^K_{\sigma\iota}(\zeta, x)) e^{i\langle x,\zeta\rangle}, \qquad \zeta \in V_{\mathfrak{p}_\sigma}, \\ \iota = 1, \dots, \varrho_\sigma, \qquad \sigma = 1, \dots, \mu, \end{gathered} \tag{7.7.21}$$

è una soluzione esponenziale. Dimostreremo che tutte le soluzioni sono, in un senso molto forte, sovrapposizioni delle soluzioni esponenziali (7.7.21).

Se m è l'ordine di P e $u \in C^{m+\nu}(\overline{\Omega})^K$, la (7.7.20) significa che

$$\langle u, {}^tP(-D)w\rangle = 0, \qquad w \in \mathcal{E}'^\nu(\overline{\Omega})^J.$$

Qui ${}^tP$ è la trasposta della matrice P. Ora $v \in \mathcal{E}'^\kappa(\overline{\Omega})$ implica, per la trasformata di Fourier–Laplace $\widehat{v}$, una stima

$$|\widehat{v}(\zeta)| \le C e^{H(\operatorname{Im}\zeta)} (1 + |\zeta|)^\kappa,$$

dove H è la funzione di supporto di $\overline{\Omega}$. Viceversa, se V è una funzione intera tale che

$$|V(\zeta)| \le C e^{H(\operatorname{Im}\zeta)} (1 + |\zeta|)^{\kappa - n - 1},$$

il teorema di Paley–Wiener–Schwartz afferma che $V = \widehat{v}$ per qualche $v \in \mathcal{E}'^\kappa(\overline{\Omega})$ (si veda per esempio Hörmander [2, paragrafo 7.3]). Sullo spazio

$$\mathcal{F} = \{V \in A(\mathbb{C}^n)^K : \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^n} |V(\zeta)| e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)} (1 + |\zeta|)^{n+1-m-\nu} < \infty\} \tag{7.7.22}$$

definiamo ora una forma lineare L mediante

$$L(V) = \langle u, v\rangle, \qquad \widehat{v}(\zeta) = V(-\zeta). \tag{7.7.23}$$

Allora

$$|L(V)| \le C \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^n} |V(\zeta)| e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)} (1 + |\zeta|)^{n+1-m-\nu}, \quad V \in \mathcal{F}, \tag{7.7.24}$$

e

$$L({}^tPW) = 0,$$
$$\text{se } W \in A(\mathbb{C}^n)^J, \quad \sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n} |W(\zeta)|e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{n+1-\nu} < \infty. \tag{7.7.25}$$

(Si osservi che la condizione su W implica ${}^tPW \in \mathcal{F}$.) Dal teorema 7.7.15 segue ora che per ogni $\tau \geq 0$ possiamo trovare $G \in A(\mathbb{C}^n)^K$[5] con $G - V \in M(\mathbb{C}^n)$, dove M è il sottomodulo di $\mathbb{C}[\zeta_1, \dots, \zeta_n]^K$ generato dai vettori riga P_j di P, tale che

$$\begin{aligned}&\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n} |G(\zeta)|e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau-N}\\ &\quad\leq C \max_{\sigma=1,\dots,\mu} \max_{\iota=1,\dots,\varrho_\sigma} \sup_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} |\mathcal{B}_{\sigma\iota}V(\zeta)|e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau},\end{aligned}$$

purché il secondo membro sia finito. Se inoltre

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n} |V(\zeta)|e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau-N} < \infty,$$

il teorema 7.6.11 mostra che possiamo trovare $W \in A(\mathbb{C}^n)^J$ tale che, per un certo intero N',

$$G - V = {}^tPW, \qquad \sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n} |W(\zeta)|e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau-N-N'} < \infty.$$

Se $\tau+N+N' \leq \nu-n-1$, si ha $0 = L({}^tPW) = L(G)-L(V)$, e poiché $\tau+N \leq m+\nu-n-1$ concludiamo che

$$|L(V)| \leq C \max_{\sigma=1,\dots,\mu} \max_{\iota=1,\dots,\varrho_\sigma} \sup_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} |\mathcal{B}_{\sigma\iota}V(\zeta)|e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau}. \tag{7.7.26}$$

Quando $V(\zeta) = \widehat{v}(-\zeta)$ con $v \in C_0^\infty(\Omega)^K$, si ha $(\mathcal{B}_{\sigma\iota}V)e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau} \to 0$ all'infinito, sicché si applica (7.7.26). Per il teorema di Hahn–Banach esistono misure limitate $d\mu_{\sigma\iota}$ su $V_{\mathfrak{p}_\sigma}$ tali che

$$\langle u, v\rangle = \sum_{\sigma=1}^{\mu}\sum_{\iota=1}^{\varrho_\sigma} \int_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} (\mathcal{B}_{\sigma\iota}\widehat{v}(-\zeta))e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau}\, d\mu_{\sigma\iota}(\zeta), \quad v \in C_0^\infty(\Omega)^K.$$

Sostituendo la definizione di $\widehat{v}(-\zeta)$ si ottiene

$$\begin{aligned}&\int \langle u(x), v(x)\rangle\, dx\\ &= \int dx \sum_{\sigma=1}^{\mu}\sum_{\iota=1}^{\varrho_\sigma} \int_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} \langle v(x), \mathcal{B}_{\sigma\iota}(\zeta, x)\rangle e^{i\langle x,\zeta\rangle}e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau}\, d\mu_{\sigma\iota}(\zeta).\end{aligned}$$

Dunque per $x \in \Omega$ vale

$$u(x) = \sum_{\sigma=1}^{\mu}\sum_{\iota=1}^{\varrho_\sigma} \int_{V_{\mathfrak{p}_\sigma}} \mathcal{B}_{\sigma\iota}(\zeta, x)e^{i\langle x,\zeta\rangle}e^{-H(-\operatorname{Im}\zeta)}(1+|\zeta|)^{-\tau}\, d\mu_{\sigma\iota}(\zeta). \tag{7.7.27}$$

Poiché $-\langle x, \operatorname{Im}\zeta\rangle = \langle x, -\operatorname{Im}\zeta\rangle \leq H(-\operatorname{Im}\zeta)$, l'integrale a destra converge assolutamente e uniformemente per $x \in \overline{\Omega}$ se τ è almeno uguale al grado di $\mathcal{B}_{\sigma\iota}$ in ζ. Rimane convergente dopo κ derivazioni se $\tau \geq \kappa + \max\deg \mathcal{B}_{\sigma\iota}$, ossia se

$$\nu + m \geq m + n + 1 + N + N' + \kappa + \max\deg \mathcal{B}_{\sigma\iota}.$$

Cambiando notazione abbiamo dimostrato il seguente teorema.

[5] Nella stampa originale compare qui J. Poiché $G - V \in M(\mathbb{C}^n)$ e V ha K componenti, si deve leggere K.

Teorema 7.7.16. Dato un sistema di equazioni differenziali (7.7.20), sia M il sottomodulo di $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^K$ generato dai vettori riga $(P_{j1}(z),\dots,P_{jK}(z))$. Sia $M=\bigcap_{\sigma=1}^{\mu} M_\sigma$ una decomposizione primaria di M e denotiamo con $\mathfrak{p}_\sigma$ l'ideale primo associato a M_σ. Sia $V_{\mathfrak{p}_\sigma}$ la varietà degli zeri di $\mathfrak{p}_\sigma$ e siano $\mathcal{B}_{\sigma\iota}$, $\iota=1,\dots,\varrho_\sigma$, gli operatori noetheriani che definiscono M_σ, dati dal teorema 7.7.6. Esiste allora un intero positivo N tale che, se Ω è un aperto convesso limitato di $\mathbb{R}^n$ e $u\in C^{\nu+N}(\overline{\Omega})^K$, $\nu\geq 0$, è una soluzione di (7.7.20), vale (7.7.27) con misure $d\mu_{\sigma\iota}$ supportate da $V_{\mathfrak{p}_\sigma}$. L'integrale converge assolutamente e uniformemente in $\overline{\Omega}$ e conserva tali proprietà dopo al più ν derivazioni. Viceversa, ogni integrale siffatto definisce una soluzione di (7.7.20) appartenente a $C^\nu(\overline{\Omega})^K$.

Nel teorema 7.7.16 abbiamo considerato soltanto soluzioni su un insieme convesso compatto. Utilizzando i risultati di Hörmander [2, paragrafi 15.2 e 15.4] si ottengono risultati analoghi, senza modifiche sostanziali della dimostrazione, per soluzioni in un aperto convesso appartenenti a spazi di funzioni e di distribuzioni assai più generali degli spazi C^ν.

Note. Tutti i risultati dei paragrafi da 7.1 a 7.4 si trovano nei seminari di Cartan [1], ai quali rinviamo per ulteriori applicazioni. A prima vista le nostre dimostrazioni possono apparire assai diverse da quelle di Cartan [1], avendo noi a disposizione fin dall'inizio alcuni casi particolari dei teoremi A e B dimostrati nel capitolo V. I punti essenziali sono tuttavia gli stessi. Così, nella dimostrazione del teorema 7.2.1 (esistenza di sezioni globali di un fascio analitico coerente) utilizziamo il procedimento di induzione di Cartan [1], pur basandoci sui teoremi di esistenza di sezioni di fibrati vettoriali analitici dimostrati nel paragrafo 5.6 al posto del teorema di Cartan [2] sulle funzioni olomorfe a valori in matrici invertibili. La semplificazione non è grande, ma elimina l'unico elemento non lineare della teoria. L'isomorfismo di Dolbeault (teorema 7.4.1) è dovuto a Dolbeault [1]. L'analogo per l'operatore di differenziazione esterna è il teorema di de Rham, che nel paragrafo 7.5 abbiamo dimostrato con il metodo ormai classico risalente a Weil [2]. La dimostrazione dell'isomorfismo di Dolbeault è parallela. L'esposizione dei paragrafi 7.4 e 7.5 segue in larga misura Malgrange [1], con le modifiche imposte dal diverso punto di partenza.

Risultati del tipo discusso nel paragrafo 7.6 furono annunciati per la prima volta da Ehrenpreis [2]. Una versione più dettagliata fu presentata alla conferenza sull'analisi armonica tenuta a Stanford nell'agosto 1961. Le dimostrazioni complete si trovano in Ehrenpreis [4]. Si fondano sulle tecniche classiche di Oka e Cartan, dalle quali le maggiorazioni si ottengono con minore facilità che dalle stime L^2 usate qui. Così Ehrenpreis dà il teorema 7.6.11 e il corollario 7.6.12 soltanto per alcune funzioni φ particolarmente importanti nelle applicazioni alle equazioni differenziali. Dopo l'annuncio di Ehrenpreis del 1960, la maggior parte dei suoi enunciati è stata dimostrata da Malgrange [2] e Palamodov [1, 2]. (Palamodov ha segnalato e corretto un errore nell'annuncio originale di Ehrenpreis [2].) Tutti e tre gli autori danno versioni assai più forti del teorema 7.6.14, nelle quali le soluzioni dell'equazione differenziale $P(D)u=0$ vengono rappresentate come integrali assolutamente convergenti di soluzioni esponenziali. Poiché ciò richiede una quantità assai maggiore di algebra, abbiamo rinviato la discussione al paragrafo 7.7. Le dimostrazioni che vi abbiamo dato si basano in larga misura sulle semplificazioni dovute a Björk [1, capitolo 8] e a Hansen [1]. Abbiamo ridotto al minimo i rinvii all'algebra. In particolare abbiamo dimostrato i teoremi di piattezza dove occorrevano, senza dare una presentazione formale di questa nozione. Per ulteriori applicazioni dell'analisi complessa alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali si consultino i libri di Ehrenpreis [4] e di Palamodov [2].

Bibliografia

Elenchiamo i lavori citati nel testo come fonti del materiale esposto o come riferimenti per ulteriori studi. L'elenco non pretende di essere completo e omette pertanto numerosi lavori fondamentali connessi agli argomenti trattati.

Andreotti, A., e Grauert, H. [1] Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. France* 90, 193–259 (1962).

Andreotti, A., e Vesentini, E. [1] Carleman estimates for the Laplace–Beltrami equations on complex manifolds, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 25, 81–130 (1965).

Arens, R. F., e Calderón, A. P. [1] Analytic functions of several Banach algebra elements, *Ann. Math.* (2) 62, 204–216 (1955).

Ash, M. E. [1] The basic estimate of the $\bar{\partial}$-Neumann problem in the non-Kählerian case, *Amer. J. Math.* 86, 247–254 (1964).

Behnke, H., e Stein, K. [1] Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen, *Math. Ann.* 116, 204–216 (1938).

Bishop, E. [1] Mappings of partially analytic spaces, *Amer. J. Math.* 83, 209–242 (1961).

Bishop, E. [2] Lecture notes, University of California, Berkeley, Calif., 1963.

Björk, J. E. [1] Rings of differential operators, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

Bochner, S. [1] Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, *Ann. Math.* (2) 44, 652–673 (1943).

Bochner, S., e Martin, W. T. [1] Functions of several complex variables, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1948.

Bombieri, E. [1] Algebraic values of meromorphic maps, *Inv. Math.* 10, 267–287 (1970).

Bourbaki, N. [1] Algèbre Commutative, cap. 4, Hermann, Parigi, 1961.

Bremermann, H. [1] Complex convexity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 82, 17–51 (1956).

Bremermann, H. [2] Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, *Math. Ann.* 128, 63–91 (1954).

Browder, A. [1] Cohomology of maximal ideal spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 515–516 (1961).

Cartan, H. [1] Séminaires E.N.S., 1951/52.

Cartan, H. [2] Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *J. Math. Pures Appl.* 19, 1–26 (1940).

Cartan, H. [3] Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. France* 78, 29–64 (1950).

Cartan, H., e Thullen, P. [1] Regularitäts- und Konvergenzbereiche, *Math. Ann.* 106, 617–647 (1932).

Dolbeault, P. [1] Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* 236, 175–177 (1953).

Ehrenpreis, L. [1] A new proof and an extension of Hartog's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 507–509 (1961).

Ehrenpreis, L. [2] A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, *Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces*, 161–174, Gerusalemme, 1961.

Ehrenpreis, L. [3] Mean periodic functions, *Amer. J. Math.* 77, 293–328 (1955).

Ehrenpreis, L. [4] Fourier analysis in several complex variables, Pure and Applied Mathematics XVII, Wiley-Interscience Publ., New York, 1970.

Garabedian, P., e Spencer, D. C. [1] Complex boundary problems, *Trans. Amer. Math. Soc.* 73, 223–242 (1952).

Grauert, H. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, *Ann. Math.* (2) 68, 460–472 (1958).

Gunning, R. C., e Rossi, H. [1] Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

Hansen, S. [1] Das Fundamentalprinzip für Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Paderborn, Habilitationsschrift, 1982.

Helson, H., Kahane, J. P., Katznelson, Y., e Rudin, W. [1] The functions which operate on Fourier transforms, *Acta Math.* 102, 135–157 (1959).

Hervé, M. [1] Several complex variables. Local theory. Oxford University Press, Londra, e Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1963.

Hörmander, L. [1] L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.* 113, 89–152 (1965).

Hörmander, L. [2] The analysis of linear partial differential operators I, II, Springer-Verlag, Berlino, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

Kalin, E. [1] A non-local function algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 49, 821–824 (1963).

Kiselman, C. O. [1] On unique supports of analytic functionals, *Arkiv för Matematik* 6, 307–318 (1965).

Kiselman, C. O. [2] Densité des fonctions plurisousharmoniques, *Bull. Soc. Math. France* 107, 295–304 (1979).

Kiselman, C. O. [3] La teoremo de Siu por abstraktaj nombroj de Lelong, *Aktoj de Internacia Scienca Akademio Comenius*, vol. 1, Pechino (in corso di pubblicazione).

Kohn, J. J. [1] Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I, *Ann. Math.* (2) 78, 206–213 (1963).

Kohn, J. J. [2] Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds II, *Ann. Math.* 79, 450–472 (1964).

Kohn, J. J., e Nirenberg, L. [1] Non-coercive boundary problems, *Comm. Pure and Appl. Math.* 18, 443–492 (1965).

Kohn, J. J., e Rossi, H. [1] On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, *Ann. Math.* (2) 81, 451–472 (1965).

Lelong, P. [1] La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, *J. Math. pures Appl.* 31, 191–219 (1952).

Lelong, P. [2] Sur la structure des courants positifs fermés. Sém. P. Lelong 1975/1976, 135–136, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 578 (1977).

Lewy, H. [1] On the local character of the solution of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables, *Ann. Math.* (2) 64, 514–522 (1956).

Loomis, L. H. [1] An introduction to abstract harmonic analysis, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1953.

Malgrange, B. [1] Lectures on the theory of functions of several complex variables, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1958.

Malgrange, B. [2] Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, *Coll. C.N.R.S.*, 113–122, Parigi, 1963.

Malgrange, B. [3] Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier* 6, 271–354 (1955).

Martineau, A. [1] Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, *J. Analyse Math.* 9, 1–164 (1963).

Mergelyan, S. N. [1] Uniform approximation of functions of a complex variable, *Usp. Mat. Nauk* (N.S.) 7, n. 2 (48), 31–122 (1952). Anche in *Amer. Math. Soc. Transl.* 101.

Milnor, J. [1] Morse theory, *Ann. Math. Studies*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1959.

Morrey, C. B. [1] The analytic embedding of abstract real analytic manifolds, *Ann. Math.* (2) 68, 159–201 (1958).

Naimark, M. [1] Normed rings, Groningen, 1959.

Narasimhan, R. [1] Holomorphically complete complex spaces, *Amer. J. Math.* 82, 917–934 (1961).

Newlander, A., e Nirenberg, L. [1] Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.* (2) 65, 391–404 (1957).

Nirenberg, L. [1] Partial differential equations with applications in geometry, Lectures on modern mathematics, vol. II, John Wiley and Sons, New York, 1964, pp. 1–41.

Norguet, F. [1] Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes, *Bull. Soc. Math. France* 82, 137–159 (1954).

Oka, K. [1] Sur les fonctions de plusieurs variables. I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, *J. Sc. Hiroshima Univ.* 6, 245–255 (1936).

Oka, K. [2] Sur les fonctions de plusieurs variables. II. Domaines d'holomorphie, *J. Sc. Hiroshima Univ.* 7, 115–130 (1937).

Oka, K. [3] Sur les fonctions de plusieurs variables. III. Deuxième problème de Cousin, *J. Sc. Hiroshima Univ.* 9, 7–19 (1939).

Oka, K. [4] Sur les fonctions de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* 78, 1–27 (1950).

Oka, K. [5] Sur les fonctions de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur, *Jap. J. Math.* 23, 97–155 (1953).

Oka, K. [6] Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII. – Lemme fondamental, *J. Math. Soc. Japan* 3, 204–214 e 259–278 (1951).

Osgood, W. F. [1] Lehrbuch der Funktionentheorie II_1, Lipsia, 1924.

Palamodov, V. P. [1] The general theorems on the system of linear equations with constant coefficients. Outlines of the joint Soviet-American symposium on partial differential equations, agosto 1963, pp. 206–213.

Palamodov, V. P. [2] Linear differential operators with constant coefficients. Grundl. d. Math. Wiss. 168, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlino, 1970.

Pólya, G. [1] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Z.* 19, 549–640 (1929).

Radó, T. [1] Subharmonic functions, Berlino, 1937.

de Rham, G. [1] Variétés différentiables, Parigi, 1955.

Rossi, H. [1] The local maximum modulus principle, *Ann. Math.* (2) 72, 1–11 (1960).

Royden, H. L. [1] Function algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 69, 281–298 (1963).

Schwartz, L. Théorie des distributions I, Parigi, Francia, 1950.

Serre, J. P. [1] Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.* (2) 61, 197–278 (1955).

Serre, J. P. [2] Une propriété topologique des domaines de Runge, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6, 133–134 (1955).

Serre, J. P. [3] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Coll. sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, 57–68.

Shilov, G. E. [1] On decomposition of a commutative normed ring in a direct sum of ideals, Mat. Sb. (N.S.) 32(74) (1953), 353–364 (in russo). Anche in *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 1, 37–48 (1955).

Sigurdsson, R. [1] Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order, *Math. Scand.* 59, 235–304 (1986).

Siu, Y.-T. [1] Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Inv. Math.* 27, 53–156 (1974).

Skoda, H. [1] Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, *Bull. Soc. Math. France* 100, 353–408 (1972).

Skoda, H. [2] Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, *Ann. Éc. Norm. Sup.* 5(4), 545–579 (1972).

Stein, K. [1] Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen und das zweite Cousin'sche Problem, *Math. Ann.* 123, 201–222 (1951).

Weil, A. [1] Variétés Kähleriennes, Parigi, 1957.

Weil, A. [2] Sur les théorèmes de de Rham, *Comm. Math. Helv.* 26, 119–145 (1952).

Weil, A. [3] L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, *Math. Ann.* 111, 178–182 (1935).

Wermer, J. [1] Seminar über Funktionenalgebren, Springer Lecture Notes in Mathematics 1 (1964).

Zariski, O., e Samuel, P. [1] Commutative algebra, vol. I, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1958.

Indice analitico

I numeri riproducono le pagine dell'edizione originale. Nel PDF, ciascun numero rimanda al paragrafo corrispondente della traduzione.

A
Algebra di Banach, 61.
Anello noetheriano, 161.
Applicazione propria, 129.
Applicazione regolare, 129.
Approssimazione, teorema di, 6, 53, 91, 126, 148, 189, 223.

B
Borel, trasformata di, 109.

C
Cartan, teorema A di, 190.
Cartan, teorema B di, 199.
Cauchy, formula integrale di, 3, 26.
Cauchy–Riemann, equazioni di, 1, 3, 12, 23, 30, 32, 84, 86, 92, 94, 125, 126, 148, 198.
Cobordo, 193.
Cocatena sollevabile, 195.
Cocatena, 192.
Cociclo, 193.
Convergenza normale, 27.
Cousin, primo e secondo problema di, 143, 144.

D
de Rham, teorema di, 205.
Divisore, 181.
Dolbeault, isomorfismo di, 198.
Dominio di convergenza di una serie di potenze, 34.
Dominio di olomorfia, 36.
Dominio pseudoconvesso, 47.
Dominio tubolare, 41.

F
Fascio analitico coerente, 183.
Fascio analitico, 182.
Fascio di gruppi, di anelli, di moduli, 180.
Fascio quoziente, 180.
Fascio, analitico e analitico coerente, 182, 183.
Fascio, 179.
Fibrato vettoriale, 146.
Forma olomorfa, 58.
Friedrichs, lemma di, 121.
Frontiera di un'algebra di Banach, 67.
Frontiera distinta, 26.
Frontiera pseudoconvessa, 49.
Funzionale analitico, 107.
Funzionale lineare moltiplicativo, 62.
Funzione analitica, 1, 23.
Funzione meromorfa, 10, 181.
Funzione plurisubarmonica, 44.
Funzione strettamente plurisubarmonica, 48.
Funzione subarmonica, 16.
Funzioni implicite, teorema delle, 2, 24, 71.

G
Gelfand, trasformata e rappresentazione di, 63.
Germe di una funzione, 159.
Gruppo di coomologia, 193, 194.

H
Hartogs, teorema di, 28, 30.

I
Ideale, 65.
Insieme analitico, 167.
Inviluppo di olomorfia, 137.

L
Laplace, trasformata di un funzionale analitico, 108.
Lelong, numero di, 102.
Levi, condizione di, 49.

M
Massimo, principio del, 6.
Matrici di transizione, 146.
Metrica hermitiana, 119, 147.
Mittag-Leffler, teorema di, 11.

O
Oka, principio di, 145.
Oka, teorema di, 165.
Omomorfismo di fasci, 180.
Operatore noetheriano, 235.

P
Paley–Wiener, teorema di, 111.
Partizione dell'unità, 13, 195.
Polidisco, 25.
Poliedro analitico, 132.
Poliedro polinomiale, 53.
Portante di un funzionale analitico, 107.

R
Radicale, 72.
Raffinamento di un ricoprimento, 144, 193.
Reinhardt, dominio di, 35.
Riemann, dominio di, 139.
Runge, dominio di, 52, 91.

S
Serie di potenze, 5, 27, 34, 35, 36.
Serie formale di potenze, 162.
Sezione di un fascio, 179.
Sezione di un fibrato, 147.
Shilov, frontiera di, 67.

Sottofascio, 180.
Sottomodulo primario, 227.
Sottovarietà, 116.
Spazio degli ideali massimali, 65.
Spazio paracompatto, 197.
Spettro congiunto, 65.
Spettro, 63, 65.
Stein, varietà di, 116.
Successione esatta di coomologia, 198.
Supporto, 3.

T

Tipo (p, q) di una forma differenziale, 24.

U

Unicità del prolungamento analitico, 5.

V

Varietà analitica, 115.
Varietà quasi complesse, 149.
Varietà, analitica complessa, 115.
Varietà, di Stein, 116.
Varietà, numerabile all'infinito, 116.
Varietà, quasi complessa, 149.
Varietà, 114.

W

Weierstrass, polinomio di, 157.
Weierstrass, teorema del prodotto di, 14.
Weierstrass, teorema di preparazione di, 155.