Spazi vettoriali topologici

A. Grothendieck

Traduzione italiana dall'edizione inglese di Orlando Chaljub
Gordon and Breach, 1973

Institut des Hautes Études Mathématiques
Bures-sur-Yvette

Topological Vector Spaces
Tradotto dal francese da Orlando Chaljub.
Gordon and Breach, Science Publishers
New York · Londra · Parigi

Copyright © 1973, Gordon and Breach, Science Publishers Ltd, 42 William IV Street, Londra W.C.2.
Redazione per gli Stati Uniti d'America: Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1 Park Avenue, New York, N.Y. 10016.
Redazione per la Francia: Gordon & Breach, 7–9 rue Émile Dubois, Parigi, XIV arrondissement.

Scheda di catalogo della Library of Congress n. 72-83698. ISBN 0-677-30020-4 (edizione rilegata) e 0-677-30025-5 (brossura). Stampato in Gran Bretagna.

Avvertenza dell'edizione inglese. Tutti i diritti riservati. Nessuna parte del libro può essere riprodotta o utilizzata in alcuna forma o con alcun mezzo, elettronico o meccanico, compresi la fotocopia, la registrazione e i sistemi di archiviazione e recupero delle informazioni, senza autorizzazione scritta degli editori.

La collana dell'edizione inglese

Notes on Mathematics and Its Applications. Direttori: Jacob T. Schwartz, Courant Institute of Mathematical Sciences, e Maurice Lévy, Université de Paris.

E. Artin, *Algebraic Numbers and Algebraic Functions.*
R. P. Boas, *Collected Works of Hidehiko Yamabe.*
R. A. Bonic, *Linear Functional Analysis.*
R. B. Burckel, *Weakly Almost Periodic Functions on Semigroups.*
M. Davis, *A First Course in Functional Analysis.*
M. Davis, *Lectures on Modern Mathematics.*
J. Eells, Jr., *Singularities of Smooth Maps.*
K. O. Friedrichs, *Advanced Ordinary Differential Equations.*
K. O. Friedrichs, *Special Topics in Fluid Dynamics.*
A. Grothendieck, *Topological Vector Spaces.*
A. Guichardet, *Special Topics in Topological Algebras.*
M. Hausner e J. T. Schwartz, *Lie Groups; Lie Algebras.*
P. Hilton, *Homotopy Theory and Duality.*
S. Y. Husseini, *The Topology of Classical Groups and Related Topics.*
F. John, *Lectures on Advanced Numerical Analysis.*
A. M. Krall, *Stability Techniques for Continuous Linear Systems.*
R. L. Kruse e D. T. Price, *Nilpotent Rings.*
P. Lelong, *Plurisubharmonic Functions and Positive Differential Forms.*
H. Mullish, *An Introduction to Computer Programming.*
D. Ponasse, *Mathematical Logic.*
F. Rellich, *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems.*
J. T. Schwartz, *Differential Geometry and Topology.*
J. T. Schwartz, *Non-linear Functional Analysis.*
J. T. Schwartz, *W-* Algebras.*
M. Shinbrot, *Lectures on Fluid Mechanics.*
G. Sorani, *An Introduction to Real and Complex Manifolds.*
J. L. Soulé, *Linear Operators in Hilbert Space.*
J. J. Stoker, *Nonlinear Elasticity.*
F. Trèves, *Linear Partial Differential Equations.*
F. Trèves, *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients.*

Altri volumi in preparazione.

Prefazione

Questo libro consiste in una traduzione piuttosto letterale di un corso che tenni in francese a San Paolo nel 1954 e che da allora era disponibile soltanto in forma ciclostilata. Per i particolari sugli argomenti trattati, il lettore consulti l'introduzione (p. 1) e l'indice (p. vii).[1] L'autore non ha riveduto questa esposizione della teoria degli spazi vettoriali topologici, che risale a quattordici anni fa, soprattutto perché da quasi altrettanti anni non si occupa direttamente dell'argomento e perché altri impegni, alcuni dei quali di natura analoga, lo hanno tenuto fin troppo occupato. L'autore ritiene che la cosa non abbia conseguenze troppo gravi. La materia trattata nel corso di San Paolo è rimasta da allora pressoché immutata, sicché una revisione avrebbe dato luogo a poco più che lievi ritocchi stilistici, ai quali qualsiasi lettore dotato di senso estetico saprà provvedere da sé. In generale, sembra che la teoria degli spazi localmente convessi non abbia compiuto da allora progressi di rilievo, con ogni probabilità perché i campi affini non ne avevano bisogno.

Il libro non contiene indicazioni bibliografiche. Il lettore le troverà in una qualsiasi delle varie opere sullo stesso argomento apparse di recente, tra cui quelle di Bourbaki e di Köthe (*Topologische Lineare Räume I*, Springer-Verlag, 1960). Quest'ultima contiene anche numerosi risultati che qui non figurano.

Desidero infine ringraziare di cuore O. Chaljub per la cura con cui ha tradotto in inglese l'originale francese e per il suo aiuto nella correzione delle bozze. Altrettanta gratitudine devo al signor E. Thomas, che ha sottoposto a lettura critica l'intero manoscritto, corretto vari errori e fornito preziosi suggerimenti terminologici per la traduzione inglese.

A. Grothendieck

[1] I rinvii di pagina nel testo si riferiscono all'edizione inglese.

Indice

La collana dell'edizione inglese **2**

Prefazione **3**

Capitolo 0 Introduzione topologica **7**
1 Estremo superiore di una famiglia di topologie 7
2 Estremo superiore di una famiglia di strutture uniformi 8
3 Spazi precompatti 9
4 $\mathfrak{S}$-convergenza 9
5 $\mathfrak{S}$-convergenza negli spazi di applicazioni continue 12
6 Insiemi equicontinui e uniformemente equicontinui 13
7 Insiemi relativamente compatti e precompatti di funzioni continue 15

Capitolo 1 Proprietà generali **17**
1 Definizione generale di spazio vettoriale topologico 17
2 Prodotti, sottospazi, quozienti 18
3 Applicazioni lineari continue, omomorfismi 19
4 Struttura uniforme di uno SVT 19
5 Topologia definita da una seminorma 20
6 Generalità sugli spazi definiti da famiglie di seminorme 23
7 Insiemi limitati. Criteri generali 24
8 Insiemi limitati e loro impiego nella $\mathfrak{S}$-convergenza 25
9 Esempi di spazi vettoriali topologici. Spazi di funzioni continue 27
10 Gli spazi $\mathcal{E}^{(m)}$ ed $\mathcal{E}$ di L. Schwartz 30
11 Somme dirette topologiche 32
12 Sottospazi vettoriali di dimensione o codimensione finita 34
13 Spazi vettoriali topologici localmente precompatti 36
14 Teorema degli omomorfismi e teorema del grafico chiuso 36
15 Il teorema di Banach–Steinhaus 39

Capitolo 2 I teoremi generali di dualità negli spazi localmente convessi **42**
1 Introduzione 42
2 Insiemi convessi e dischi 42
3 Coni convessi e spazi vettoriali ordinati 44
4 Seminorme e dischi assorbenti. Caratterizzazione degli spazi localmente convessi 45
5 Insiemi convessi negli spazi vettoriali topologici 46
6 Il teorema di Hahn–Banach 47
7 Separazione dei convessi e caratterizzazione della chiusura 49
8 Sistemi duali e topologia debole 51
9 Polarità 53
10 Le $\mathfrak{S}$-topologie su un duale 55
11 Gli spazi localmente convessi come duali muniti di $\mathfrak{S}$-topologie 57
12 Formulazione generale del teorema di Mackey. Biduale 58
13 Topologie compatibili con una dualità. La topologia di Mackey 60
14 Il completamento di uno spazio localmente convesso 62
15 Dualità per i sottospazi, i quozienti, i prodotti e i limiti proiettivi 64
16 Trasposta di un'applicazione lineare e caratterizzazione degli omomorfismi . 67

17 Riepilogo e complementi per gli spazi normati 72
18 Proprietà elementari della compattezza e della compattezza debole 74

Capitolo 3 Spazi di applicazioni lineari 82
1 Generalità sugli spazi di applicazioni lineari 82
2 Insiemi limitati negli spazi di applicazioni lineari 84
3 Relazioni fra insiemi limitati e insiemi equicontinui. Spazi tonnelé 87
4 Spazi bornologici 90
5 Funzioni bilineari. Tipi di continuità. Continuità e continuità separata . . . 94
6 Spazi di applicazioni bilineari. Definizioni e notazioni 99
7 Applicazioni lineari in spazi di funzioni continue 102
8 Funzioni vettoriali differenziabili 106

Capitolo 4 Studio di alcune classi particolari di spazi 110
Parte I Limiti induttivi e spazi $(\mathcal{LF})$ 110
1 Generalità 110
2 Esempi 112
3 Limiti induttivi stretti 113
4 Somme dirette 114
5 Spazi $(\mathcal{LF})$ 118
6 Prodotti e somme dirette di rette 120
Parte II Spazi localmente convessi metrizzabili 123
1 Preliminari 123
2 Sottoinsiemi limitati di uno spazio localmente convesso metrizzabile 125
3 La topologia T_c sul duale 127
Parte III Spazi $(\mathcal{DF})$ 131
1 Generalità 131
2 Applicazioni bilineari sul prodotto di due spazi $(\mathcal{DF})$ 133
3 Proprietà di stabilità 135
4 Risultati complementari 138
Parte IV Spazi quasi-normabili e spazi di Schwartz 140
1 Definizione degli spazi quasi-normabili 140
2 Prolungamento di successioni fortemente convergenti di forme lineari su un sottospazio 142
3 Quasi-normabilità e compattezza 143
4 Spazi di Schwartz 145

Capitolo 5 Compattezza negli spazi vettoriali topologici localmente convessi 148
Parte I Il teorema di Krein–Milman 148
1 Punti estremi 148
2 Generatrici estreme 149
Parte II Teoria degli operatori compatti 153
1 Generalità 153
2 Teoremi generali di finitezza 154
3 Generalità sullo spettro di un operatore 155
4 La teoria di Riesz degli operatori compatti 160
Parte III Criteri generali di compattezza 163
1 Il teorema di Šmulian 163
2 Il teorema di Eberlein 164

3 Il teorema di Krein 167
Esercizi supplementari 169
Parte IV Compattezza debole in L^1 171
1 Il criterio di Dunford–Pettis e le sue prime conseguenze 171
2 Applicazione del criterio di Dunford–Pettis 182
Esercizi supplementari 188

Corrispondenza delle pagine **193**

Capitolo 0 Introduzione topologica

Per seguire questo corso il lettore dovrebbe conoscere alcune nozioni di topologia generale, quali sono esposte nella *Topologie générale* di Bourbaki. Ci riferiamo in particolare ai capitoli I, II, IV e IX, ai paragrafi 1 e 2 del capitolo VI (proprietà topologiche di $\mathbf{R}^n$), al capitolo VIII (numeri complessi) e, soprattutto, al capitolo III (gruppi topologici). Non faremo uso dei gruppi topologici non abeliani. Dell'*Algebra* di Bourbaki utilizzeremo i capitoli I e II. Supporremo sempre che il campo degli scalari sia il campo reale $\mathbf{R}$ o il campo complesso $\mathbf{C}$.

Vogliamo qui richiamare alcuni punti di topologia generale che ci interesseranno particolarmente e, più specificamente, una parte del capitolo X della *Topologie générale* di Bourbaki. La maggior parte delle dimostrazioni richiede soltanto semplici verifiche ed è lasciata al lettore.

1 Estremo superiore di una famiglia di topologie

Consideriamo una famiglia non vuota $(T_i)_{i\in I}$ di topologie su un insieme E. Sappiamo che esiste una topologia *estremo superiore* delle T_i, ossia la meno fine tra le topologie su E che sono più fini di ciascuna T_i. Se $\mathcal{V}_i$ è l'insieme degli aperti di T_i ($i \in I$), la topologia estremo superiore è generata dall'unione delle $\mathcal{V}_i$.

Siano E un insieme qualsiasi, $(E_i)_{i\in I}$ una famiglia non vuota di spazi topologici e, per ogni $i \in I$, f_i un'applicazione di E in E_i. Si chiama *topologia iniziale* su E indotta dagli E_i mediante le f_i la meno fine delle topologie che rendono continue tutte le f_i. Essa è l'estremo superiore delle topologie immagini inverse, mediante le f_i, delle topologie degli spazi E_i.

Condizione di separazione. Affinché E, munito della topologia iniziale indotta dagli E_i mediante le f_i, sia di Hausdorff, è necessario che per ogni coppia $x \neq y$ di punti di E esista una f_i tale che $f_i(x) \neq f_i(y)$. Se gli E_i sono di Hausdorff, la condizione è anche sufficiente.

Transitività della topologia iniziale. Supponiamo che la topologia di E sia quella iniziale indotta dagli E_i mediante le f_i e che, per ciascun i, la topologia di E_i sia a sua volta quella iniziale indotta da spazi E_{ik} mediante applicazioni $\phi_{ik}\colon E_i \to E_{ik}$ ($k \in A_i$). Allora la topologia di E è quella iniziale indotta dagli E_{ik} mediante le applicazioni $\phi_{ik} \circ f_i$ ($i \in I$, $k \in A_i$).

In particolare, se F è un sottoinsieme di E, la topologia indotta su F dalla topologia di E è quella iniziale indotta dagli E_i mediante le restrizioni delle f_i a F. In un altro caso particolare, la topologia iniziale indotta dagli E_i mediante le f_i è l'immagine inversa della topologia dello spazio prodotto $\prod_{i\in I} E_i$ mediante l'applicazione

$$E \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i, \qquad x \longmapsto f(x) = (f_i(x))_{i\in I}.$$

Se per ogni $x, y \in E$ con $x \neq y$ esiste $i \in I$ tale che $f_i(x) \neq f_i(y)$, allora f è un isomorfismo di E su un sottospazio del prodotto. Si osservi che, per definizione, la topologia di $\prod_{i\in I} E_i$ è quella iniziale indotta dagli E_i mediante le proiezioni naturali sui fattori.

Proposizione 1. *Sia E uno spazio topologico munito della topologia iniziale indotta dagli spazi E_i mediante le applicazioni f_i.*

1. *Sia ϕ un'applicazione di uno spazio topologico F in E. Affinché ϕ sia continua è necessario e sufficiente che, per ogni i, l'applicazione $f_i \circ \phi$ di F in E_i sia continua.*

2. *Un filtro Φ su E converge a $x \in E$ se e soltanto se, per ogni i, la base di filtro $f_i(\Phi)$ su E_i converge a $f_i(x)$.*

Siano ora E un insieme, $(E_i)_{i\in I}$ una famiglia non vuota di spazi topologici e f_i $(i \in I)$ applicazioni di E_i in E. Possiamo considerare la più fine delle topologie su E che rendono continue le f_i. Gli aperti (rispettivamente, i chiusi) di questa topologia sono i sottoinsiemi U di E tali che $f_i^{-1}(U)$ sia aperto (rispettivamente, chiuso) in E_i per ogni $i \in I$. Questa topologia si chiama *topologia finale* indotta dagli E_i mediante le f_i. Un'applicazione f di E in uno spazio topologico F è continua se e soltanto se ciascuna $f \circ f_i$ è continua.

Un caso particolare. Sia $(A_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di E, ciascuno munito di una topologia T_i. Esiste allora su E una topologia T, la più fine tra quelle che inducono su ciascun A_i una topologia meno fine di T_i. Gli aperti (rispettivamente, i chiusi) di T sono i sottoinsiemi la cui intersezione con ciascun A_i è aperta (rispettivamente, chiusa) per T_i. Un'applicazione f di E in uno spazio topologico è continua se e soltanto se la sua restrizione a ogni A_i è continua rispetto a T_i. Se esiste su E una topologia T' che induce esattamente T_i su ciascun A_i, allora $T \geq T'$ e quindi anche T induce T_i su ciascun A_i.[2] Il caso più importante di questa situazione si presenterà nel capitolo 4, parte 2, paragrafo 3, teorema 2.

2 Estremo superiore di una famiglia di strutture uniformi

Consideriamo su un insieme E una famiglia non vuota $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ di strutture uniformi. Sappiamo che esiste una struttura uniforme $\mathcal{U}$ estremo superiore delle $\mathcal{U}_i$, ossia la meno fine tra le strutture uniformi su E più fini di ciascuna $\mathcal{U}_i$. Il suo filtro degli intorni della diagonale è generato dall'unione dei filtri degli intorni della diagonale delle $\mathcal{U}_i$. Le intersezioni di un numero finito di intorni W_i, presi nelle rispettive strutture, formano un sistema fondamentale di intorni della diagonale per $\mathcal{U}$. *La topologia associata a $\mathcal{U}$ è l'estremo superiore delle topologie associate alle $\mathcal{U}_i$.*

Siano E un insieme, $(E_i)_{i\in I}$ una famiglia non vuota di spazi uniformi e, per ogni $i \in I$, f_i un'applicazione di E in E_i. Esiste su E una struttura uniforme, detta *struttura uniforme iniziale* indotta dagli E_i mediante le f_i, che è la meno fine tra quelle che rendono le f_i uniformemente continue. Essa è l'estremo superiore delle immagini inverse, mediante le f_i, delle strutture uniformi degli E_i. La topologia che se ne deduce è la meno fine su E per cui le f_i sono continue.[3] Viceversa, la struttura uniforme $\mathcal{U}$, estremo superiore di una famiglia $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$, si può considerare come la meno fine per cui le applicazioni identiche $E \to E_i$ sono uniformemente continue (qui E_i indica E munito di $\mathcal{U}_i$).

Condizione di separazione. Lo spazio E munito della struttura uniforme iniziale indotta dagli E_i mediante le f_i è di Hausdorff se e soltanto se per ogni $x, y \in E$, $x \neq y$, esistono un indice i e un intorno della diagonale V_i di E_i tali che $(f_i(x), f_i(y)) \notin V_i$. Se poi gli E_i sono spazi uniformi di Hausdorff, è necessario e sufficiente che per ogni coppia $x \neq y$ esista un indice i per cui $f_i(x) \neq f_i(y)$.

[2] La scansione inglese reca $T \geq T_i$. Si legge $T \geq T'$, poiché il confronto è tra due topologie su E.

[3] A p. 3 l'edizione inglese reca *finest*. La topologia iniziale è la meno fine, come risulta dal paragrafo precedente.

Transitività della struttura uniforme iniziale. Sostituendo «struttura uniforme» a «topologia» e «spazio uniforme» a «spazio topologico», si può ripetere parola per parola quanto detto sulla transitività della topologia iniziale.

Proposizione 2. *Sia E uno spazio uniforme munito della struttura uniforme iniziale indotta dagli E_i mediante le f_i.*

1. *Un filtro Φ su E è di Cauchy se e soltanto se, per ogni $i \in I$, $f_i(\Phi)$ è base di un filtro di Cauchy su E_i.*
2. *Sia ϕ un'applicazione di uno spazio uniforme F in E. L'applicazione ϕ è uniformemente continua se e soltanto se, per ogni $i \in I$, $f_i \circ \phi$ è uniformemente continua da F in E_i.*

3 Spazi precompatti

Uno spazio uniforme E si dice *precompatto* se il completamento dello spazio di Hausdorff associato a E è compatto. (A differenza della convenzione di Bourbaki, uno spazio precompatto non è necessariamente di Hausdorff.) Un sottoinsieme A di E è precompatto se è precompatto il sottospazio uniforme A. Anche la chiusura di A in E è allora precompatta.

Proposizione 3.

1. *Uno spazio uniforme E è precompatto se e soltanto se, per ogni intorno della diagonale V di E, esiste un ricoprimento finito di E mediante insiemi V-piccoli.*
2. *Sia f un'applicazione uniformemente continua di uno spazio precompatto E in uno spazio uniforme F. Allora $f(E)$ è un sottoinsieme precompatto di F.*
3. *Sia E uno spazio munito della meno fine tra le strutture uniformi per le quali le applicazioni f_i negli spazi uniformi E_i sono uniformemente continue. Allora E è precompatto se e soltanto se, per ogni i, $f_i(E)$ è precompatto.*

Da 3) segue inoltre che un sottoinsieme A di E è precompatto se e soltanto se, per ogni $i \in I$, $f_i(A)$ è un sottoinsieme precompatto di E_i.

Esercizio. Uno spazio E è precompatto se e soltanto se ogni ultrafiltro su E è un filtro di Cauchy.

4 $\mathfrak{S}$-convergenza

Siano E un insieme qualsiasi e F uno spazio uniforme. Indichiamo con $\mathcal{F}(E, F)$ lo spazio di tutte le applicazioni di E in F. Siano A un sottoinsieme di E, U un intorno della diagonale di F e $W(A, U)$ l'insieme delle coppie (u, v) di applicazioni di E in F tali che $(u(x), v(x)) \in U$ per ogni $x \in A$. Se teniamo fisso A e facciamo variare U nel filtro degli intorni della diagonale di F (o in un suo sistema fondamentale), gli insiemi $W(A, U)$ formano un sistema fondamentale di intorni della diagonale per una struttura uniforme su $\mathcal{F}(E, F)$, detta *struttura uniforme della convergenza uniforme su A*, o della *A-convergenza.* Di un filtro Φ che converge a u_0 per la topologia dedotta da questa struttura si dice che converge uniformemente a u_0 su A.

Sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E. L'estremo superiore delle strutture uniformi della A-convergenza ($A \in \mathfrak{S}$) si chiama *struttura uniforme della $\mathfrak{S}$-convergenza.* Indichiamo con $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ l'insieme $\mathcal{F}(E, F)$ munito di tale struttura. Si ottiene un sistema

fondamentale di intorni della diagonale prendendo, per ogni U del filtro degli intorni della diagonale di F (o di un suo sistema fondamentale) e per ogni successione finita $A_1, \ldots, A_n$ di elementi di $\mathfrak{S}$, l'intorno

$$W\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, U\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} W(A_i, U).$$

Nota alla traduzione. A sinistra la stampa inglese reca un'intersezione. La definizione di W dà l'unione, poiché la condizione deve valere su ciascun A_i.

È immediato che la struttura uniforme della $\mathfrak{S}$-convergenza è la meno fine su $\mathcal{F}(E, F)$ che rende uniformemente continue tutte le applicazioni ρ_A ($A \in \mathfrak{S}$) di $\mathcal{F}(E, F)$ in $\mathcal{F}(A, F)$ munito della A-convergenza. Qui $\rho_A(u)$ è la restrizione di u ad A.

La struttura uniforme della $\mathfrak{S}$-convergenza resta la stessa se si sostituisce $\mathfrak{S}$ con la famiglia $\mathfrak{S}'$ delle unioni finite di suoi elementi, oppure con la famiglia $\mathfrak{S}''$ di tutti i sottoinsiemi degli elementi di $\mathfrak{S}'$. Se $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$, gli insiemi $W(A, U)$, con $A \in \mathfrak{S}$ e U nel filtro degli intorni della diagonale di F (o in un suo sistema fondamentale), formano un sistema fondamentale.

Esempi.

1. Prendiamo per $\mathfrak{S}$ la famiglia dei singoletti di E o, ciò che è equivalente, quella dei suoi sottoinsiemi finiti. La struttura uniforme che si ottiene su $\mathcal{F}(E, F)$ si chiama *struttura uniforme della convergenza semplice* (o *puntuale*). Indichiamo con $\mathcal{F}_s(E, F)$ l'insieme $\mathcal{F}(E, F)$ munito di questa struttura. Se per ogni $x \in E$ indichiamo con $\widetilde{x}$ l'applicazione di $\mathcal{F}(E, F)$ in F che a ogni u associa $u(x)$, ossia $\widetilde{x}(u) = u(x)$, la struttura uniforme della convergenza semplice è la meno fine che renda uniformemente continue le $\widetilde{x}$. Equivalentemente, $\mathcal{F}(E, F)$ è lo spazio prodotto F^E.

   Se un filtro Φ su $\mathcal{F}(E, F)$ converge a u_0 per la topologia associata, diciamo che Φ converge semplicemente a u_0. Se $E_0 \subset E$, chiameremo *struttura uniforme della convergenza semplice su* E_0 quella della $\mathfrak{S}$-convergenza su $\mathcal{F}(E, F)$ in cui $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei sottoinsiemi finiti di E_0.

2. Se $\mathfrak{S} = \{E\}$, la struttura ottenuta si chiama *struttura uniforme della convergenza uniforme*. Scriveremo $\mathcal{F}_u(E, F)$ per l'insieme $\mathcal{F}(E, F)$ così munito. Se un filtro Φ converge a u_0 per la topologia corrispondente, diciamo che Φ converge uniformemente a u_0 su E.

3. Sia E uno spazio topologico e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi compatti di E. La struttura uniforme corrispondente si chiama *struttura uniforme della convergenza compatta*. Indicheremo con $\mathcal{F}_c(E, F)$ l'insieme $\mathcal{F}(E, F)$ munito di questa struttura. Se un filtro Φ converge a u_0 per la topologia corrispondente, diciamo che converge uniformemente a u_0 su ogni compatto.

Quando E è uno spazio topologico, la struttura uniforme della convergenza semplice è meno fine di quella della convergenza compatta, che a sua volta è meno fine di quella della convergenza uniforme.

Proposizione 4. *Siano $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E e F uno spazio uniforme.*

1. *Un filtro Φ su $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ converge a u_0 se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, converge uniformemente a u_0 su A.*

2. *Φ è di Cauchy se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, è di Cauchy per la A-convergenza.*

3. *Un sottoinsieme M di $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è precompatto se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, è precompatto per la A-convergenza.*

4. *Un'applicazione f di uno spazio topologico (rispettivamente, uniforme) H in $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è continua (rispettivamente, uniformemente continua) se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, lo è per la A-convergenza.*

La dimostrazione segue immediatamente dalla definizione di $\mathfrak{S}$-convergenza e dalle proposizioni 1, 2 e 3.

Osservazione. Considerando la $\mathfrak{S}$-convergenza come la meno fine tra le strutture uniformi su $\mathcal{F}(E,F)$ che rendono uniformemente continue le restrizioni $\rho_A\colon \mathcal{F}(E,F) \to \mathcal{F}_u(A,F)$, per $A \in \mathfrak{S}$, si deducono dalle proposizioni 1, 2 e 3 altre formulazioni dei criteri della proposizione 4. Il punto 1), per esempio, si riscrive così. Un filtro Φ su $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ converge a u_0 se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, la base di filtro $\Phi_A = \rho_A(\Phi)$, ottenuta restringendo le applicazioni ad A, converge uniformemente a $\rho_A(u_0)$, la restrizione di u_0 ad A. I criteri 2), 3) e 4) ammettono varianti analoghe.

Proposizione 5. *Lo spazio uniforme $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è di Hausdorff se e soltanto se F è di Hausdorff ed $E = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$.*

Per vedere che, se $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è di Hausdorff, anche F lo è, basta osservare che F è isomorfo al sottospazio di $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ formato dalle applicazioni costanti di E in F.

Teorema 1. *$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è completo se e soltanto se F è completo.*

La necessità segue considerando F come il sottospazio delle applicazioni costanti di E in F. La sufficienza segue dalla proposizione che segue.

Proposizione 6. *Sia Φ un filtro su $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Allora Φ converge a u_0 se e soltanto se è un filtro di Cauchy per la $\mathfrak{S}$-convergenza e converge a u_0 per la struttura uniforme della convergenza semplice su $E_0 = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ (ossia, per ogni $x \in E_0$, $\Phi(x)$ converge a $u_0(x)$ in F).*

La verifica è immediata. Ne deduciamo il corollario seguente.

Corollario. *Siano $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ famiglie di sottoinsiemi di E tali che $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ e*

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}_1} A = \bigcup_{B\in\mathfrak{S}_2} B.$$

Sia H un sottoinsieme di $\mathcal{F}(E,F)$.

1. *Se H è completo per la $\mathfrak{S}_1$-convergenza, è completo per la $\mathfrak{S}_2$-convergenza.*

2. *Se H è precompatto per la $\mathfrak{S}_2$-convergenza, su H coincidono le strutture uniformi della $\mathfrak{S}_1$- e della $\mathfrak{S}_2$-convergenza.*

Il punto 1) segue dalla proposizione 6. Per dimostrare 2), supponiamo per semplicità che $\bigcup_{B\in\mathfrak{S}_2} B = E$ e che F sia di Hausdorff. Possiamo supporre F completo (altrimenti si passi al completamento) e H chiuso in $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$. Poiché tale spazio è di Hausdorff, H è addirittura compatto. La sua struttura uniforme coincide quindi con ogni struttura uniforme di Hausdorff meno fine, in particolare con quella della $\mathfrak{S}_1$-convergenza. In realtà si può fare a meno delle ipotesi che $E = \bigcup_{B\in\mathfrak{S}_2} B$ e che F sia di Hausdorff, come si vedrà nell'esercizio 1 qui sotto.

Proposizione 6′. *È chiuso l'insieme delle $u \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ che trasformano gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi precompatti di F.*

È una semplice conseguenza del consueto criterio di precompattezza (proposizione 3, punto 1).

Corollario. *Se F è di Hausdorff e completo, lo spazio delle applicazioni di E in F che trasformano gli $A \in \mathfrak{S}$ in insiemi relativamente compatti è completo per la $\mathfrak{S}$-convergenza.*

$\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-convergenza su un prodotto.

Proposizione 6″. *Siano E, F due insiemi, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E, $\mathfrak{T}$ una famiglia di sottoinsiemi di F, $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $E \times F$ della forma $A \times B$ ($A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$), e G uno spazio uniforme. Allora gli spazi uniformi*

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}}(E \times F, G) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E, \mathcal{F}_{\mathfrak{T}}(F,G))$$

sono isomorfi mediante l'applicazione canonica del primo sul secondo definita in teoria degli insiemi.

Ciò segue dalle definizioni dei rispettivi intorni della diagonale.

Esercizi.

1. Lo spazio di Hausdorff associato a $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ si può identificare con $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E_0,F_0)$, dove $E_0 = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ e F_0 è lo spazio di Hausdorff associato a F.
2. Se $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ sono due famiglie di sottoinsiemi di E tali che su $\mathcal{F}(E,F)$ coincidano le strutture uniformi della $\mathfrak{S}_1$- e della $\mathfrak{S}_2$-convergenza, allora $\mathfrak{S}_1'' = \mathfrak{S}_2''$.

5 $\mathfrak{S}$-convergenza negli spazi di applicazioni continue

In generale occorre considerare diversi sottoinsiemi importanti dello spazio di *tutte* le applicazioni di E in F. Siano E uno spazio topologico e F uno spazio uniforme. Indichiamo con $\mathcal{C}(E,F)$ il sottoinsieme di $\mathcal{F}(E,F)$ formato dalle applicazioni continue. Se su $\mathcal{F}(E,F)$ si considera la $\mathfrak{S}$-convergenza, scriviamo $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ per $\mathcal{C}(E,F)$ munito della struttura uniforme indotta. Scriveremo $\mathcal{C}_s(E,F)$, $\mathcal{C}_u(E,F)$ e $\mathcal{C}_c(E,F)$ per lo stesso insieme munito delle strutture uniformi della convergenza semplice, uniforme e compatta, rispettivamente.

Per la continuità delle $u \in \mathcal{C}(E,F)$, si vede facilmente che sostituire a $\mathfrak{S}$ la famiglia delle chiusure degli $A \in \mathfrak{S}$ lascia invariato $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Proposizione 7. *Affinché $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ sia di Hausdorff è necessario che F sia di Hausdorff. Questa condizione è sufficiente se $E_0 = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ è denso in E.*

Teorema 2. *L'insieme $\mathcal{C}(E,F)$ è chiuso in $\mathcal{F}_u(E,F)$. In altri termini, ogni limite uniforme di funzioni continue è continuo.*

Corollario 1. *$\mathcal{C}_u(E,F)$ è completo se e soltanto se F è completo.*

Per la sufficienza si usino i teoremi 1 e 2. Per la necessità si proceda come per il teorema 1.

Corollario 2. *Lo spazio $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è chiuso in $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ se ogni applicazione di E in F le cui restrizioni agli $A \in \mathfrak{S}$ sono continue è essa stessa continua. In tal caso $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è completo se e soltanto se F è completo.*

L'ipotesi del corollario è soddisfatta, per esempio, quando E è localmente compatto o metrizzabile e $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei sottoinsiemi compatti di E.

Proposizione 8. *L'applicazione $(u,x) \mapsto u(x)$ di $\mathcal{C}_u(E,F) \times E$ in F è continua.*

6 Insiemi equicontinui e uniformemente equicontinui

Siano E uno spazio topologico, F uno spazio uniforme e H un sottoinsieme di $\mathcal{F}(E,F)$. Diciamo che H è *equicontinuo nel punto* x_0 di E se per ogni intorno della diagonale U di F esiste un intorno V di x_0 in E tale che $(u(x),u(x_0)) \in U$ per ogni $x \in V$ e ogni $u \in H$. L'insieme H è equicontinuo in E se è equicontinuo in ciascun punto di E. È chiaro allora che ogni $u \in H$ è continua in x_0 (rispettivamente, in E). Se E è uno spazio uniforme, diciamo che H è *uniformemente equicontinuo* se per ogni intorno della diagonale U di F ne esiste uno V di E tale che $(u(x),u(y)) \in U$ per ogni $(x,y) \in V$ e ogni $u \in H$. Ogni $u \in H$ è allora uniformemente continua. Inoltre, l'equicontinuità uniforme implica l'equicontinuità.

Esempi.

1. Ogni insieme finito di funzioni continue (rispettivamente, uniformemente continue) è equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo). Lo stesso vale per ogni unione finita di insiemi equicontinui (rispettivamente, uniformemente equicontinui).

2. Se E e F sono spazi metrici, l'insieme delle isometrie di E in F è uniformemente equicontinuo.

3. Sia H un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{F}(E,F)$. Per ogni $x \in E$ consideriamo l'applicazione $u \mapsto u(x)$ di H in F, che indichiamo con $\widetilde{x}$. Essa appartiene a $\mathcal{F}(H,F)$. Se su H si pone la topologia della convergenza semplice, o una topologia più fine, l'applicazione $u \mapsto u(x)$ è continua (§ 4, esempio 1). Dunque $\widetilde{x} \in \mathcal{C}(H,F)$.

Proposizione 9.

1. Siano E uno spazio topologico e $H \subset \mathcal{F}(E,F)$. L'insieme H è equicontinuo in x_0 (rispettivamente, in E) se e soltanto se l'applicazione $x \mapsto \widetilde{x}$ di E in $\mathcal{C}_u(H,F)$ è continua in x_0 (rispettivamente, in E).

2. Se E è uno spazio uniforme, H è uniformemente equicontinuo se e soltanto se $x \mapsto \widetilde{x}$, da E in $\mathcal{C}_u(H,F)$, è uniformemente continua.

3. Più in generale, sia f un'applicazione del prodotto $H \times E$ di due spazi topologici in uno spazio uniforme F, continua in ciascuna variabile. Indichiamo con $f_{u,\cdot}$ l'applicazione $x \mapsto f(u,x)$ di E in F e con $f_{\cdot,x}$ l'applicazione $u \mapsto f(u,x)$ di H in F. Le due asserzioni seguenti sono equivalenti.

   a) Le $f_{u,\cdot}$, per $u \in H$, formano un sottoinsieme equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo) di $\mathcal{C}(E,F)$.

   b) L'applicazione $x \mapsto f_{\cdot,x}$ di E in $\mathcal{C}_u(H,F)$ è continua (rispettivamente, uniformemente continua).

La dimostrazione segue direttamente dalle definizioni.

Corollario 1. Per una famiglia H di applicazioni di un compatto E in uno spazio uniforme F, l'equicontinuità equivale all'equicontinuità uniforme.

Infatti un'applicazione continua dello spazio compatto E nello spazio uniforme $\mathcal{C}_u(H, F)$ è uniformemente continua.

Corollario 2. Siano M uno spazio topologico (rispettivamente, uniforme) e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E. Un'applicazione f di M in $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ è continua (rispettivamente, uniformemente continua) se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, le applicazioni $t \mapsto f(t)(x)$, al variare di x in A, formano una famiglia equicontinua (rispettivamente, uniformemente equicontinua) di applicazioni di M in F.

Teorema 3. Siano E, F spazi topologici, G uno spazio uniforme e f un'applicazione di $E \times F$ in G.

1. Se f è continua, allora a) per ogni $y \in F$, $f_{\cdot,y}$ è continua e b) l'applicazione $y \mapsto f_{\cdot,y}$ di F in $\mathcal{C}_c(E, G)$ è continua. La condizione b) equivale a b′) per ogni compatto K di E, le $f_{x,\cdot}$, al variare di x in K, formano un sottoinsieme equicontinuo di $\mathcal{C}(F, G)$.

2. Se E è localmente compatto, a) e b) sono anche sufficienti per la continuità di f.

L'equivalenza di b) e b′) è un caso particolare della proposizione 9, punto 3. Se f è continua, lo sono anche le $f_{\cdot,y}$. Dimostriamo b). Fissiamo $y \in F$, un compatto K di E e un intorno simmetrico della diagonale U di G. Per ogni $x \in K$ esistono un intorno aperto V_x di x e un intorno W_x di y tali che $(f(x', y'), f(x, y)) \in U$ per $x' \in V_x$ e $y' \in W_x$. Per compattezza esistono punti $x_1, \ldots, x_n$ di K tali che i V_{x_i} ricoprano K. Sia W l'intersezione dei W_{x_i}. Per ogni $x' \in K$ si trova un i con $x' \in V_{x_i}$. Per ogni $y' \in W$ si ha dunque $(f(x', y'), f(x_i, y)) \in U$ e in particolare $(f(x', y), f(x_i, y)) \in U$. Per simmetria $(f(x', y'), f(x', y)) \in U \circ U$ per ogni $x' \in K$. Scegliendo inizialmente U con $U \circ U$ contenuto nell'intorno prescritto, si conclude la dimostrazione di 1).[4]

Per dimostrare 2) ci si può ricondurre al caso di E compatto. Si scrive allora f come composizione di $(x, y) \mapsto (x, f_{\cdot,y})$ da $E \times F$ in $E \times \mathcal{C}_u(E, G)$, continua per ipotesi, e di $(x, u) \mapsto u(x)$ da quest'ultimo spazio in G, continua per la proposizione 8.

Teorema 4. Siano E uno spazio topologico (rispettivamente, uniforme) e H un sottoinsieme equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo) di $\mathcal{C}(E, F)$. Su H coincidono le strutture uniformi della convergenza semplice su E, della convergenza semplice su un sottoinsieme denso E_0 di E e della convergenza uniforme sui compatti (rispettivamente, sui precompatti).

Basta mostrare che su H coincidono la convergenza semplice su E_0 e la convergenza sui compatti (rispettivamente, sui precompatti). Supponiamo dapprima E topologico. Dati un intorno della diagonale U di F e un compatto K di E, dobbiamo trovare un sottoinsieme finito A di E_0 e un intorno U' della diagonale di F per cui, su H, $W(A, U') \subset W(K, U)$. Scegliamo U' simmetrico e abbastanza piccolo che $(U')^5 \subset U$. Per equicontinuità, ogni $x_0 \in K$ ha un intorno aperto V tale che $(u(x), u(x_0)) \in U'$ per ogni $x \in V$ e $u \in H$. Un numero finito di tali intorni V_i ricopre K. Scegliamo $x_i \in V_i \cap E_0$ e poniamo $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Se $(u, v) \in W(A, U')$, per ogni $x \in K$ prendiamo un V_i contenente x. Passando da $u(x)$ al valore di u nel centro di V_i, poi a $u(x_i)$, a $v(x_i)$, al valore di v nel centro e infine a $v(x)$, otteniamo $(u(x), v(x)) \in (U')^5 \subset U$. Ciò prova la prima parte.[5]

[4] A p. 10 l'edizione inglese scrive direttamente U nel passaggio finale. Qui si esplicita la composizione degli intorni.

[5] A p. 11 le inclusioni della dimostrazione richiedono di restringere preliminarmente l'intorno simmetrico.

Se E è uniforme e H uniformemente equicontinuo, siano K un sottoinsieme precompatto di E e U, U' come sopra. Esiste un intorno della diagonale V di E tale che per ogni coppia $(x, y) \in V$ di punti di K e ogni $u \in H$ si abbia $(u(x), u(y)) \in U'$. Si usa ora la proposizione 3, punto 1, e si costruisce A come sopra.

Teorema 5. Se H è un sottoinsieme equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo) di $\mathcal{F}(E, F)$, la sua chiusura in $\mathcal{F}_s(E, F)$ è equicontinua (rispettivamente, uniformemente equicontinua).

La verifica è immediata. Tenendo conto del teorema 4 otteniamo il seguente corollario.

Corollario. Tale chiusura coincide con la chiusura per la convergenza sui compatti (rispettivamente, sui precompatti).

Proposizione 10. Ogni sottoinsieme precompatto H di $\mathcal{C}_u(E, F)$ è equicontinuo. Se inoltre E è uniforme e gli elementi di H sono uniformemente continui, H è uniformemente equicontinuo. Su H coincidono la struttura uniforme della convergenza semplice su un sottoinsieme denso E_0 di E e quella della convergenza uniforme.

Dobbiamo mostrare che $x \mapsto \widetilde{x}$ da E in $\mathcal{C}_u(H, F)$ è continua (rispettivamente, uniformemente continua). Ora l'immagine $\widetilde{E}$ di E in $\mathcal{C}_u(H, F)$ è uniformemente equicontinua (cfr. il corollario 2 alla proposizione 9). Essendo H precompatto, su $\widetilde{E}$ la struttura uniforme della convergenza uniforme coincide con quella della convergenza semplice (teorema 4). Basta quindi verificare la continuità (rispettivamente, la continuità uniforme) di $x \mapsto \widetilde{x}$ per la convergenza semplice in $\mathcal{C}(H, F)$. Ciò significa precisamente che le applicazioni $x \mapsto \widetilde{x}(u) = u(x)$ sono continue (rispettivamente, uniformemente continue) su E. Infine, nell'ultima asserzione della proposizione 10 si può sostituire E_0 con E grazie al teorema 4. Basta allora applicare il punto 2 del corollario alla proposizione 6.

7 Insiemi relativamente compatti e precompatti di funzioni continue

Teorema 6 (Ascoli). Siano E uno spazio compatto (rispettivamente, precompatto), F uno spazio uniforme e H una famiglia di applicazioni continue (rispettivamente, uniformemente continue) di E in F.

1. H è precompatto in $\mathcal{C}_u(E, F)$ se e soltanto se H è equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo) e $H(x)$ è precompatto per ogni $x \in E$.

2. Supponiamo F di Hausdorff. Allora H è relativamente compatto in $\mathcal{C}_u(E, F)$ se e soltanto se H è equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo) e $H(x)$ è relativamente compatto per ogni $x \in E$.

Nel primo enunciato la necessità segue dalla proposizione precedente e dalla continuità uniforme delle $\widetilde{x}$. La sufficienza segue dal fatto che su H coincidono le strutture uniformi della convergenza uniforme e della convergenza semplice, e dalla proposizione 3, punto 3. Nel secondo enunciato possiamo supporre H chiuso. La necessità si vede come sopra. Per la sufficienza possiamo supporre F completo. In caso contrario si passi al completamento $\widehat{F}$, osservando che H rimane chiuso in $\mathcal{C}_u(E, \widehat{F})$. Allora $\mathcal{C}_u(E, F)$ è completo. Per 1), H è precompatto, e dunque è compatto perché completo.

Corollario 1. Siano E uno spazio localmente compatto o metrizzabile, F uno spazio uniforme di Hausdorff e H un sottoinsieme di $\mathcal{C}(E,F)$. Allora H è relativamente compatto (rispettivamente, precompatto) in $\mathcal{C}_c(E,F)$ se e soltanto se H è equicontinuo e $H(x)$ è relativamente compatto (rispettivamente, precompatto) per ogni $x \in E$.

Queste condizioni sono sufficienti senza restrizioni su E. Per ogni compatto K di E si consideri la famiglia H_K delle restrizioni a K degli elementi u di H e si usi l'osservazione successiva alla proposizione 4. Per provare la necessità si riprenda il teorema 6 e si osservi che, nelle ipotesi del corollario, una famiglia H di applicazioni di E in F è equicontinua se e soltanto se, per ogni compatto $K \subset E$, la famiglia H_K delle restrizioni è equicontinua.

Corollario 2. Siano E uno spazio topologico (rispettivamente, uniforme), $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E, F uno spazio uniforme e H una famiglia di applicazioni continue (rispettivamente, uniformemente continue) di E in F. Per $A \in \mathfrak{S}$ sia H_A la famiglia delle restrizioni ad A delle $u \in H$. Affinché H sia precompatto in $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è necessario che H_A sia equicontinuo (rispettivamente, uniformemente equicontinuo) per ogni $A \in \mathfrak{S}$ e che $H(x)$ sia precompatto per ogni $x \in E_0 = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$. Se gli $A \in \mathfrak{S}$ sono precompatti, queste condizioni sono anche sufficienti.[6]

La prima parte segue immediatamente dal criterio di equicontinuità e dalla proposizione 10. La seconda segue dal teorema 6, punto 1, poiché basta verificare che le H_A siano precompatte per la convergenza uniforme.

Osservazione. Spesso si desidera considerare un sottospazio M di $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Quanto precede fornisce criteri di compattezza relativa per i sottoinsiemi H di M. Infatti H è relativamente compatto in M se e soltanto se è relativamente compatto in $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ e la sua chiusura in quest'ultimo spazio è contenuta in M.

[6] A p. 13 la prima frase reca «if and only if». Si legge qui l'implicazione necessaria, coerente con la frase successiva e con la dimostrazione.

Capitolo 1 Proprietà generali

Salvo che nel § 10 e in parte del § 9, la struttura particolare del campo dei numeri reali o complessi non interviene in questo capitolo. Con alcuni ovvi adattamenti, a questi campi si può sostituire un campo valutato. Per semplicità supporremo tuttavia che il campo di base K sia il campo reale $\mathbf{R}$ o il campo complesso $\mathbf{C}$. Presupponiamo una buona conoscenza dell'algebra lineare su un campo K (si veda Bourbaki, *Algebra*, cap. 2) e della topologia generale (si veda Bourbaki, *Topologie générale*).

Omettiamo le dimostrazioni delle asserzioni che seguono facilmente da risultati precedenti.

1 Definizione generale di spazio vettoriale topologico

Definizione 1. Uno *spazio vettoriale topologico* (d'ora in poi abbreviato in SVT) è uno spazio vettoriale E munito di una topologia tale che le applicazioni

$$(x, y) \longmapsto x + y, \qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x,$$

rispettivamente da $E \times E$ in E e da $K \times E$ in E, siano continue, ove i prodotti sono muniti delle topologie prodotto. Una siffatta topologia su uno spazio vettoriale si dice *compatibile* con la struttura vettoriale.

Uno SVT è in particolare un gruppo topologico abeliano. Nel seguito si potranno usare i risultati generali relativi a tali gruppi, del resto elementari. Sia E uno SVT. Le traslazioni di E sono omeomorfismi, come pure le omotetie di rapporto non nullo (che sono anche automorfismi di E). Dalla prima osservazione segue che, se A e B sono sottoinsiemi di E e almeno uno dei due è aperto, $A + B$ è aperto, essendo unione di traslati di un aperto. Se M è uno spazio topologico e f, g, λ, μ sono applicazioni continue di M rispettivamente in E, E, K, K, allora $f(t) + g(t)$, $\lambda(t)f(t)$ e, più in generale, $\lambda(t)f(t) + \mu(t)g(t)$ sono applicazioni continue di M in E.

Proposizione 1. Affinché uno SVT E sia di Hausdorff è necessario e sufficiente che l'insieme $\{0\}$, ridotto alla sola origine, sia chiuso.

La necessità è evidente. Per la sufficienza osserviamo che la diagonale di $E \times E$ è l'immagine inversa di $\{0\}$ mediante l'applicazione continua $(x, y) \mapsto x - y$. Se $\{0\}$ è chiuso, dunque, la diagonale è chiusa.

La topologia di uno SVT è nota quando si conosce il filtro degli intorni dell'origine, poiché il filtro degli intorni di ogni punto x se ne deduce per traslazione di x. Più precisamente vale la proposizione seguente.

Proposizione 2. Affinché un filtro $\mathcal{V}$ su E sia il filtro degli intorni dell'origine per una topologia compatibile con la struttura vettoriale è necessario e sufficiente che soddisfi le condizioni seguenti.

1. $\mathcal{V}$ ammette una base di insiemi equilibrati (un insieme V è equilibrato se $\lambda V \subset V$ per ogni scalare λ di modulo ≤ 1).
2. $\mathcal{V}$ è stabile per le omotetie di rapporto non nullo.
3. Per ogni $U \in \mathcal{V}$ esiste $V \in \mathcal{V}$ tale che $V + V \subset U$.
4. Gli insiemi $V \in \mathcal{V}$ sono assorbenti (ossia, per ogni $x \in E$, $\lambda x \in V$ per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo).

2 Prodotti, sottospazi, quozienti

Siano E uno spazio vettoriale, (E_i) una famiglia di SVT e, per ogni i, f_i un'applicazione lineare di E in E_i. La meno fine topologia su E per cui le f_i sono continue è compatibile con la struttura vettoriale, ossia fa di E uno SVT. Così, l'immagine inversa della topologia di uno SVT F mediante un'applicazione lineare $f\colon E \to F$ è una topologia di SVT su E. In particolare, un sottospazio vettoriale E di uno SVT F è uno SVT per la topologia indotta (diremo che E è un *sottospazio vettoriale topologico* di F). Analogamente, il prodotto di una famiglia (E_i) di SVT, munito della struttura vettoriale prodotto e della topologia prodotto, è uno SVT, detto *prodotto vettoriale topologico* degli E_i.

I fatti essenziali relativi agli spazi quoziente si riassumono nel teorema seguente.

Teorema 1.

1. Siano E uno SVT, F un suo sottospazio vettoriale e ϕ l'applicazione canonica di E su E/F. La topologia quoziente della topologia di E fa di E/F uno SVT. L'applicazione ϕ è aperta. Un sistema fondamentale di intorni dell'origine in E/F è formato dalle immagini canoniche degli intorni dell'origine in E quando questi percorrono un sistema fondamentale. Lo spazio E/F è di Hausdorff se e soltanto se F è chiuso.

2. Sia G un sottospazio vettoriale di E contenente F e si consideri G/F come sottospazio vettoriale di E/F. La topologia indotta da E/F su G/F coincide con la topologia quoziente di G modulo F. L'isomorfismo canonico di $(E/F)/(G/F)$ con E/G, definito in algebra, è anche un isomorfismo di SVT.

Dimostrazione. 1) Anzitutto è chiaro che ϕ è aperta. Ciò significa infatti che, se $U \subset E$ è aperto, $U + F$ è aperto, come si è osservato nel § 1. Pertanto, come spazi topologici, $(E/F) \times (E/F)$ si identifica con $(E \times E)/(F \times F)$ e $K \times (E/F)$ con $(K \times E)/(\{0\} \times F)$. Ne seguono immediatamente gli assiomi di SVT per E/F. La descrizione degli intorni dell'origine in E/F segue dal fatto che ϕ è aperta. Il criterio perché E/F sia di Hausdorff è un caso particolare della proposizione 1.

2) Per quanto precede, al variare di U fra gli aperti di E, gli insiemi $\phi(U \cap G)$ sono gli aperti della topologia quoziente su G/F, mentre gli insiemi $\phi(U) \cap (G/F)$ sono gli aperti della topologia indotta da E/F su G/F. Ora si vede subito che $\phi(U \cap G) = \phi(U) \cap (G/F)$. La seconda asserzione di 2) si verifica in modo analogo, oppure si ottiene come caso particolare di un risultato di topologia generale sugli spazi quoziente.

Si noti inoltre che, essendo aperta l'applicazione canonica di uno SVT su uno spazio quoziente, il classico isomorfismo algebrico

$$(E_1/F_1) \times (E_2/F_2) \simeq (E_1 \times E_2)/(F_1 \times F_2)$$

è un isomorfismo di SVT (qui E_1, E_2 sono SVT e F_1, F_2 sottospazi vettoriali).

Occorre cautela se ϕ è l'applicazione canonica di uno SVT E sul quoziente E/F e G è un sottospazio vettoriale di E che non contiene F. In tal caso l'applicazione canonica di $G/(G \cap F)$ sul sottospazio $\phi(G)$ di E/F, pur essendo un isomorfismo algebrico e un'applicazione continua, in generale non è un isomorfismo di SVT. Ciò significa anche che, se ϕ è un omomorfismo di E su uno spazio H (si veda il § 3), la sua restrizione a un sottospazio G di E può non essere un omomorfismo. Basta osservare che ogni applicazione lineare continua u di G in H si può ottenere per restrizione di un omomorfismo di $G \times H$ su H, precisamente dell'applicazione

$$(g, h) \longmapsto u(g) + h.$$

3 Applicazioni lineari continue, omomorfismi

Siano E, F due SVT e u un'applicazione lineare di E in F. Affinché u sia continua è necessario e sufficiente che sia continua nell'origine. In tal caso, se N è il suo nucleo, u definisce un'applicazione lineare continua e iniettiva di E/N in F. In generale questa applicazione non è un isomorfismo di E/N su $u(E)$ per le strutture di SVT, perché l'applicazione inversa non è sempre continua.

Definizione 2. Un'applicazione lineare u di uno SVT E in uno SVT F è un *omomorfismo* se l'applicazione di E/N su $u(E)$ da essa definita, dove N è il nucleo di u, è un isomorfismo di SVT.

Proposizione 3. Sia u un'applicazione lineare continua di uno SVT E in uno SVT F. Sono equivalenti le condizioni seguenti.

a) u è un omomorfismo.

b) u trasforma gli aperti di E in aperti di $u(E)$.

c) u trasforma gli intorni dell'origine di E in intorni dell'origine di $u(E)$.

Si vede subito che a) implica b), b) implica c) e c) implica a).

Le applicazioni lineari continue di E in F formano uno spazio vettoriale, che si indica con $L(E, F)$.

4 Struttura uniforme di uno SVT

Sia E uno SVT. Per ogni intorno U dell'origine, sia $\widetilde{U}$ l'insieme delle coppie $(x, y) \in E \times E$ tali che $x - y \in U$. Al variare di U, gli $\widetilde{U}$ formano una base del filtro degli intorni della diagonale di una struttura uniforme su E compatibile con la sua topologia. Grazie a questa struttura, considereremo implicitamente E come uno spazio uniforme.

Le traslazioni e le omotetie di rapporto non nullo sono automorfismi di E considerato come spazio uniforme.

Se E e F sono SVT, ogni applicazione lineare continua di E in F è già uniformemente continua.[7] Più in generale, se una famiglia A di applicazioni lineari di E in F è equicontinua nell'origine, allora A è uniformemente equicontinua.

Sia E uno SVT la cui topologia sia la meno fine per cui le applicazioni lineari f_i di E negli SVT E_i sono continue. La struttura uniforme di E è allora la meno fine per cui le f_i sono uniformemente continue. In particolare, la struttura uniforme di un sottospazio vettoriale topologico di uno SVT è la struttura indotta, e la struttura uniforme del prodotto di una famiglia di SVT è il prodotto delle strutture uniformi dei fattori. Un sottoinsieme di E è dunque precompatto se e soltanto se le sue immagini mediante le f_i sono sottoinsiemi precompatti dei rispettivi E_i.

Lo spazio uniforme di Hausdorff associato a uno SVT E è lo spazio E/N, dove N è la chiusura dell'origine. Dalla definizione stessa della struttura uniforme di E segue la proposizione seguente.

Proposizione 4. La struttura uniforme di uno SVT E è metrizzabile se e soltanto se E è di Hausdorff e l'origine ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni.

(In tal caso, infatti, esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni della diagonale.) Poiché uno SVT è anche uno spazio uniforme, è chiaro che cosa si intenda per SVT completo. Per gli spazi che non sono completi vale la seguente proposizione.

[7] A p. 17 la stampa inglese omette «continua» nell'ipotesi.

Proposizione 5. Siano E uno SVT di Hausdorff e $\widehat{E}$ il suo completamento uniforme. L'applicazione $(x, y) \mapsto x + y$ di $E \times E$ in E si prolunga per continuità a un'applicazione continua di $\widehat{E} \times \widehat{E}$ in $\widehat{E}$, e l'applicazione $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ di $K \times E$ in E si prolunga per continuità a un'applicazione continua di $K \times \widehat{E}$ in $\widehat{E}$. Le operazioni così definite fanno di $\widehat{E}$ uno spazio vettoriale e la sua topologia è compatibile con tale struttura vettoriale. Infine, la struttura uniforme del completamento di E è proprio la struttura uniforme associata allo SVT $\widehat{E}$ appena definito.

La dimostrazione è classica. Osserviamo che $(x, y) \mapsto x+y$ è uniformemente continua su $E \times E$. Per il prodotto $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ si considera la continuità uniforme sul prodotto di parti limitate di K e di E.[8] Si ottiene così il prolungamento desiderato. Per verificare l'ultima asserzione chiamiamo F lo SVT $\widehat{E}$ così costruito. L'isomorfismo identico di E con la sua immagine in F si prolunga per continuità uniforme a un isomorfismo del completamento uniforme $\widehat{E}$ con lo spazio uniforme $\widehat{F}$. Quest'ultima applicazione deve essere l'identità.

Proposizione 6. Siano E uno SVT metrizzabile e completo e F un suo sottospazio vettoriale chiuso. Allora E/F è metrizzabile e completo.

È un caso particolare di Bourbaki, *Topologie générale*, cap. 9, § 3, prop. 4. Osserviamo che esistono spazi localmente convessi completi, non metrizzabili e tutt'altro che patologici, che ammettono quozienti incompleti. La validità della proposizione 6 è una delle ragioni dell'importanza degli SVT metrizzabili.

5 Topologia definita da una seminorma

Definizione 3. Una *seminorma* su uno spazio vettoriale E è una funzione non negativa p su E che soddisfa le condizioni

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in E), \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in E,\ \lambda \in K).$$

La seminorma p è una *norma* se, inoltre, $p(x) = 0$ implica $x = 0$. Uno spazio *seminormato* (rispettivamente, *normato*) è uno spazio vettoriale munito di una seminorma (rispettivamente, di una norma).

Molto spesso si scrive $x \mapsto \|x\|$ per la seminorma di uno spazio seminormato E. La *palla unitaria* di E è l'insieme degli $x \in E$ tali che $\|x\| \leq 1$. Indichiamo tale insieme con V. Per $\lambda > 0$, l'insieme degli $x \in E$ tali che $\|x\| \leq \lambda$ è λV. Per il secondo assioma delle seminorme, V è evidentemente equilibrato e assorbente. Per il primo assioma si ha $V + V \subset 2V$. Dal criterio del § 1 (proposizione 2) si deduce quanto segue.

Proposizione 6′. Siano E uno spazio seminormato e V la sua palla unitaria. Gli omotetici λV di V, per $\lambda \neq 0$, formano una base del filtro degli intorni dell'origine per una topologia di SVT su E. La funzione $\|x - y\|$ su $E \times E$ è una pseudometrica che definisce la struttura uniforme dello SVT E (il quale è dunque di Hausdorff se e soltanto se la seminorma è una norma).

Considereremo pertanto ogni spazio seminormato come uno SVT.

[8] A p. 18 la frase inglese sembra richiedere la limitatezza soltanto nel fattore scalare. Per giustificare il prolungamento anche in assenza di intorni limitati in E, si può prima prolungare ogni omotetia e usare $\lambda x - \mu y = \lambda(x - y) + (\lambda - \mu)y$. Il primo termine è piccolo uniformemente per λ limitato e $x - y$ piccolo. Nel secondo si approssima y nel completamento con un punto fisso di E, usando un intorno equilibrato per controllare l'errore.

Sottospazi, quozienti e prodotti di spazi seminormati. Siano E uno spazio seminormato e F un suo sottospazio vettoriale. La seminorma di E induce una seminorma su F, e la topologia corrispondente è quella indotta da E. Vale inoltre la seguente proposizione.

Proposizione 7. Consideriamo su E/F la funzione $X \mapsto \|X\|$ che a ogni $X \in E/F$ (ossia a un sottoinsieme di E traslato di F) associa la distanza dell'origine da X rispetto alla pseudometrica $\|x - y\|$,

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

Questa funzione è una seminorma su E/F e la topologia corrispondente è la topologia quoziente di E modulo F.

D'ora in poi un sottospazio vettoriale o un quoziente di uno spazio seminormato sarà sempre considerato come spazio seminormato. In particolare lo spazio di Hausdorff E/N associato a uno spazio seminormato E, dove N è la chiusura dell'origine, ossia l'insieme degli $x \in E$ tali che $\|x\| = 0$, può essere considerato come uno spazio normato, detto *spazio normato associato allo spazio seminormato* E. Ciò conduce alla nozione di *omomorfismo metrico* da uno spazio seminormato in un altro. È un'applicazione lineare continua u di E in F tale che l'applicazione indotta da E/N sul sottospazio $u(E)$ di F (qui N indica il nucleo di u) sia un isomorfismo per le strutture di spazi seminormati. A maggior ragione u è un omomorfismo nel senso del § 3.

Sia (p_i) una famiglia di seminorme su uno spazio vettoriale E. Se $p(x) = \sup_i p_i(x)$ è finito per ogni $x \in E$, p è una seminorma su E. Ecco un modo più generale di costruire seminorme a partire dalle p_i. Consideriamo l'applicazione

$$E \longrightarrow \mathbf{R}^I, \qquad x \longmapsto \phi(x) = (p_i(x))_{i \in I}.$$

Sia H un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^I$ contenente $\phi(E)$ e sia α una seminorma su H crescente per l'ordine naturale indotto da $\mathbf{R}^I$ sui vettori a coordinate non negative. Allora $\alpha((p_i(x))_{i \in I})$ è una seminorma su E. Per esempio, se la famiglia (p_i) è finita, le funzioni

$$\sum_i p_i(x), \qquad \Big(\sum_i p_i(x)^2\Big)^{1/2}$$

sono seminorme, poiché si verifica subito che su $\mathbf{R}^n$ le espressioni $\sum_i |\xi_i|$ e $(\sum_i \xi_i^2)^{1/2}$ sono norme. Si osservi infine che, se F è seminormato e u è un'applicazione lineare dello spazio vettoriale E in F, allora $\|u(x)\|$ è una seminorma su E e la sua topologia è l'immagine inversa mediante u della topologia di F. Queste considerazioni conducono alla seguente proposizione.

Proposizione 8. Siano E uno spazio vettoriale, (E_i) una famiglia finita di spazi seminormati e, per ogni i, f_i un'applicazione lineare di E in E_i. La meno fine delle topologie su E che rendono continue le f_i può essere definita da una seminorma. Ponendo $p_i(x) = \|f_i(x)\|$, si può usare, per esempio, una qualsiasi delle seminorme

$$\sup_i p_i(x), \qquad \sum_i p_i(x), \qquad \Big(\sum_i p_i(x)^2\Big)^{1/2}.$$

A priori non vi è motivo di preferirne una: la scelta dipenderà dalla convenienza nel caso particolare. Si vede in particolare che la topologia del prodotto di un numero finito di spazi seminormati (rispettivamente, normati) può essere definita da una seminorma (rispettivamente, una norma).

Completamento di uno spazio normato. Uno spazio normato completo si chiama *spazio di Banach*. Sia E uno spazio normato. È noto che $\|x\|$, distanza dall'origine, è uniformemente continua e si prolunga per continuità allo spazio vettoriale completato $\widehat{E}$ (§ 4, proposizione 5) in una funzione, ancora indicata con $\|x\|$, che è tuttora una seminorma. D'altra parte la funzione $\|x-y\|$ su $\widehat{E}\times\widehat{E}$, che prolunga per continuità $\|x-y\|$ su $E\times E$, è una distanza sul completamento dello spazio metrico E. La topologia di $\widehat{E}$ è dunque quella definita dalla sua norma. Così *il completamento di uno spazio normato si può considerare come spazio normato.*

Applicazioni lineari continue tra spazi seminormati.

Teorema 2. Siano E, F spazi seminormati.

1. Sia u un'applicazione lineare di E in F. Essa è continua se e soltanto se esiste $M > 0$ tale che
$$\|u(x)\| \leq M\|x\| \qquad (x \in E).$$
Ciò equivale a $\sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \leq M$, oppure a $u(V) \subset MW$, dove V, W sono le palle unitarie di E, F.

2. Per ogni $u \in L(E,F)$ poniamo
$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|.$$
La funzione così definita su $L(E,F)$ è una seminorma. È una norma se F è di Hausdorff. Munito di tale norma, $L(E,F)$ è completo se F è completo.

Se E, F sono seminormati, $L(E,F)$ si considera sempre come spazio seminormato nel senso appena indicato. In ogni caso, per abuso di linguaggio, chiameremo $\|u\|$ la *norma* di u.

Dimostrazione. 1) È evidente che la prima formula implica le altre due e che queste ultime sono equivalenti. D'altra parte $u(V) \subset MW$ implica $u(\varepsilon V) \subset \varepsilon MW$ per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque u è continua nell'origine e pertanto continua (§ 3). Viceversa, se u è continua, si ha $u(\varepsilon V) \subset W$ per ε sufficientemente piccolo, donde $u(V) \subset MW$ con $M = 1/\varepsilon$. Infine, per omogeneità, si vede facilmente che la seconda formula di 1) implica la prima.

2) Per ogni $x \in E$, $u \mapsto \|u(x)\|$ è una seminorma su $L(E,F)$, essendo l'immagine inversa della seminorma di F mediante l'applicazione lineare $u \mapsto u(x)$. D'altra parte abbiamo visto che l'estremo superiore di seminorme, quando è finito, è una seminorma. Dunque $\|u\|$ è una seminorma su $L(E,F)$. Il resto della dimostrazione è lasciato al lettore.

Corollario. Due seminorme p, q sullo stesso spazio vettoriale E definiscono la stessa topologia se e soltanto se esistono due numeri m, M tali che
$$0 < m \leq M < +\infty, \qquad mp(x) \leq q(x) \leq Mp(x) \quad (x \in E).$$
Basta esprimere la continuità dell'applicazione identica di E munito di p su E munito di q, e quella della sua inversa, applicando il criterio del teorema precedente.

6 Generalità sugli spazi definiti da famiglie di seminorme

Siano E uno spazio vettoriale e (p_i) una famiglia di seminorme su E. Consideriamo su E l'estremo superiore delle topologie associate alle p_i, che fa di E uno spazio vettoriale topologico (§ 2). La struttura uniforme di E è l'estremo superiore delle strutture uniformi associate alle p_i (§ 4) ed è dunque definita dalla famiglia delle pseudometriche $p_i(x-y)$. Si ottiene un sistema fondamentale di intorni dell'origine in E prendendo, per ogni sottoinsieme finito J dell'insieme degli indici I e per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme degli x tali che $p_J(x) \leq \varepsilon$, dove si è posto

$$p_J(x) = \sup_{i \in J} p_i(x).$$

Di conseguenza, la topologia definita dalla famiglia di seminorme $(p_i)_{i \in I}$ resta invariata se si aggiunge alla famiglia l'estremo superiore p_J di un numero finito di tali seminorme. Possiamo aggiungere anche tutte le seminorme su E maggiorate da un multiplo di una tale p_J. Si verifica che si ottengono così tutte le seminorme continue su E (l'aggiunta di altre seminorme renderebbe strettamente più fine la topologia di E).

Definizione 4. Uno *spazio localmente convesso* è uno spazio vettoriale topologico la cui topologia può essere definita da una famiglia di seminorme (p_i) su E nel modo appena descritto (è cioè l'estremo superiore delle topologie seminormate associate alle p_i). Si dice che (p_i) è una *famiglia di definizione* della topologia di E. Una tale famiglia si dice *fondamentale* se le palle unitarie associate alle p_i formano un sistema fondamentale di intorni dell'origine.

Ciò equivale anche a dire che, per ogni sottoinsieme finito J di I e ogni $M > 0$, esiste una p_i tale che $p_i \geq M p_J$.

Quasi tutti gli spazi vettoriali topologici utilizzati in analisi sono localmente convessi, poiché soltanto per questi spazi disponiamo di un numero sufficiente di risultati importanti. Essi bastano ampiamente alle nostre esigenze, poiché formano una classe di spazi stabile rispetto alle operazioni abituali, come ora vedremo.

Sia E uno spazio vettoriale topologico la cui topologia è definita come la meno fine che rende continue le applicazioni f_i di E in spazi localmente convessi E_i. Allora E è localmente convesso. Più precisamente, la sua topologia è definita dalla famiglia delle seminorme $p \circ f_i$, dove, per ciascun i, p percorre una famiglia di definizione della topologia di E_i. Ciò segue da un'evidente proprietà di transitività, valida in topologia generale, del procedimento con cui si definisce una topologia come la meno fine che renda continue certe applicazioni.

Dunque *un sottospazio vettoriale topologico di uno spazio localmente convesso e il prodotto vettoriale topologico di una famiglia di spazi localmente convessi sono localmente convessi.* Sia E uno spazio localmente convesso con una famiglia fondamentale di seminorme (p_i), sia F un sottospazio vettoriale e si considerino su E/F le seminorme quoziente $\dot{p}_i$ delle p_i (§ 5, proposizione 7). Dalla proposizione 7 segue che queste seminorme definiscono precisamente la topologia quoziente di E/F. Dunque *ogni spazio quoziente di uno spazio localmente convesso è localmente convesso.* In particolare, lo spazio di Hausdorff associato a uno spazio localmente convesso (§ 4) è localmente convesso. *Il completamento di uno spazio localmente convesso è localmente convesso.* Infatti, se (p_i) è una famiglia di seminorme su E che ne definisce la topologia, per continuità uniforme le p_i si prolungano in seminorme $\widehat{p}_i$ sul completamento. Le corrispondenti pseudometriche su $\widehat{E}$, prolungamenti per continuità delle pseudometriche $p_i(x-y)$ su E, definiscono la struttura uniforme di $\widehat{E}$ (*Topologie générale*). La topologia di $\widehat{E}$ è dunque definita dalle $\widehat{p}_i$.

Si ha la seguente utile caratterizzazione degli spazi localmente convessi.

Proposizione 9. La topologia di uno spazio localmente convesso E si può definire come la meno fine che rende continue certe applicazioni lineari f_i di E in spazi di Banach E_i. In particolare, se E è di Hausdorff, è isomorfo a un sottospazio vettoriale topologico di un prodotto vettoriale topologico di spazi di Banach.

Infatti, se (p_i) è una famiglia di definizione della topologia di E, basta prendere per E_i lo spazio di Banach completamento dello spazio normato associato alla seminorma p_i (§ 5), e per f_i l'applicazione canonica di E in E_i.

7 Insiemi limitati. Criteri generali

Definizione 5. Sia E uno spazio vettoriale topologico. Un sottoinsieme A di E si dice *limitato* se, per ogni intorno V dell'origine, esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che $\lambda A \subset V$.

Se A è limitato, si ha anche $\lambda A \subset V$ per ogni λ di modulo abbastanza piccolo (si scelga V equilibrato). Ogni sottoinsieme di un insieme limitato è limitato. Ogni sottoinsieme di E ridotto a un punto è limitato, poiché gli intorni dell'origine sono assorbenti. Pertanto ogni sottoinsieme finito di E è limitato, come pure *l'unione e la somma di un numero finito di insiemi limitati* (si usi la proposizione 2, punto 3). In particolare, i traslati di un insieme limitato sono limitati. È chiaro che anche le sue immagini per omotetia sono limitate. *La chiusura di un insieme limitato è limitata* (si osservi che E, essendo uniformizzabile, ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi dell'origine).

Proposizione 10. Ogni sottoinsieme precompatto A di uno spazio vettoriale topologico è limitato.

Infatti, se V è un intorno equilibrato dell'origine, esiste un sottoinsieme finito B di E tale che $A \subset B + V$ (è questa un'espressione della precompattezza di A). Esiste anche uno scalare λ di modulo ≤ 1, diverso da zero, tale che $\lambda B \subset V$, donde

$$\lambda A \subset \lambda B + \lambda V \subset V + V.$$

Poiché V è arbitrario, A è limitato.

Proposizione 11. Sia E uno spazio vettoriale topologico la cui topologia è la meno fine che rende continue certe applicazioni lineari f_i di E in spazi vettoriali topologici E_i. Allora un insieme A è limitato in E se e soltanto se, per ogni i, $f_i(A)$ è limitato in E_i.

La necessità è un caso particolare del fatto, immediato, che *l'immagine di un insieme limitato mediante un'applicazione lineare continua è limitata.* Per la sufficienza si usa la caratterizzazione degli intorni dell'origine in E. Lasciamo da esplicitare i casi particolari del sottospazio e dello spazio prodotto.

Sia E uno spazio seminormato e sia V la sua palla unitaria. Se $A \subset E$ è limitato, esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\lambda A \subset V$. La condizione è anche sufficiente, poiché $\varepsilon \lambda A \subset \varepsilon V$ per ogni $\varepsilon > 0$. Prendendo $\lambda > 0$, la relazione $\lambda A \subset V$ si scrive $A \subset MV$, dove $M = 1/\lambda$, ossia $\|x\| \leq M$ per ogni $x \in A$. Vediamo dunque che vale la seguente proposizione.

Proposizione 12. Se E è uno spazio seminormato, i sottoinsiemi limitati di E sono i sottoinsiemi limitati in senso metrico (più precisamente, rispetto alla pseudometrica $\|x - y\|$), ossia i sottoinsiemi A tali che

$$\sup_{x \in A} \|x\| < \infty.$$

In particolare, la palla unitaria di uno spazio seminormato è un intorno limitato dell'origine. Viceversa, vale il seguente corollario.

Corollario 1. La topologia di uno spazio vettoriale topologico E può essere definita da una seminorma, rispettivamente da una norma (si dice allora che E è *seminormabile*, rispettivamente *normabile*), se e soltanto se E è localmente convesso (rispettivamente, localmente convesso e di Hausdorff) e ammette un intorno limitato dell'origine.

Infatti, sia V un intorno limitato dell'origine e sia p una seminorma continua su E tale che la corrispondente palla unitaria U sia contenuta in V. Allora la topologia di E è quella definita da p. Infatti, dato un qualunque intorno W dell'origine, per qualche $\lambda \neq 0$ si ha $\lambda V \subset W$ e, a maggior ragione, $\lambda U \subset W$.

Corollario 2. Sia u un'applicazione lineare di uno spazio seminormato E in uno spazio vettoriale topologico F. Allora u è continua se e soltanto se trasforma la palla unitaria di E in un sottoinsieme limitato di F.

La necessità segue dal fatto che la palla unitaria V è limitata. Viceversa, se $u(V)$ è limitato e W è un intorno dell'origine in F, si ha

$$\lambda u(V) \subset W$$

per qualche $\lambda \neq 0$, donde $u(\lambda V) \subset W$. Poiché λV è un intorno dell'origine in E, ne segue che u è continua nell'origine e quindi continua.

Sia ora E uno spazio localmente convesso la cui topologia è definita da una famiglia (p_i) di seminorme. Combinando le proposizioni 11 e 12 vediamo che un sottoinsieme A è limitato se e soltanto se, per ogni i, si ha

$$\sup_{x \in A} p_i(x) < +\infty.$$

Ne deduciamo facilmente la seguente proposizione.

Proposizione 13. Sia E uno spazio localmente convesso. L'inviluppo assolutamente convesso di un sottoinsieme limitato di E è limitato. (L'inviluppo assolutamente convesso di A è l'insieme delle somme finite $\sum_i \lambda_i x_i$, con $x_i \in A$ e $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$.)

Di conseguenza, *l'inviluppo assolutamente convesso chiuso* di un insieme limitato (ossia la chiusura dell'inviluppo assolutamente convesso) è limitato.

Definizione. Uno spazio vettoriale topologico si dice *quasi-completo* se i suoi sottoinsiemi chiusi e limitati sono completi.

Esercizio. Sia E uno spazio vettoriale topologico. Si dimostri che una retta vettoriale di E è limitata se e soltanto se è contenuta nella chiusura dell'origine. Dunque E è di Hausdorff se e soltanto se non contiene rette vettoriali limitate.

8 Insiemi limitati e loro impiego nella $\mathfrak{S}$-convergenza

La necessità di considerare gli insiemi limitati appare nel teorema seguente.

Teorema 3. Siano M un insieme, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di M, E uno spazio vettoriale topologico e H un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le applicazioni di M in E, munito della topologia della $\mathfrak{S}$-convergenza. Questa topologia è compatibile con la struttura vettoriale se e soltanto se ogni $u \in H$ trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi limitati di E. In tal caso la struttura uniforme dello spazio vettoriale topologico H coincide con

quella della $\mathfrak{S}$-convergenza. Se la topologia di E è definita da una famiglia di seminorme $(p_i)_{i\in I}$, la topologia di H è definita dalle seminorme

$$p_{i,A}(u) = \sup_{t\in A} p_i(u(t)),$$

dove i percorre I e A percorre $\mathfrak{S}$ (dunque H è localmente convesso se E è tale). In particolare, se $\mathfrak{S}$ si riduce all'unico elemento M (caso della convergenza uniforme) e se E è seminormato (o normato), la topologia di H è definita dalla seminorma (o norma)

$$\|u\| = \sup_{t\in M} \|u(t)\|,$$

detta *norma uniforme*.

La dimostrazione segue immediatamente, per esempio dalla proposizione 1 (§ 1). È chiaro che le quattro condizioni sul filtro degli intorni dell'origine in H sono sempre soddisfatte, con la sola eccezione dell'ultima, la quale richiede appunto che gli $u(A)$ ($u \in H$, $A \in \mathfrak{S}$) siano sottoinsiemi limitati di E.

Il teorema 3 conduce a considerare lo spazio di tutte le applicazioni u di M in E che trasformano gli $A \in \mathfrak{S}$ in insiemi limitati. Munito della topologia della $\mathfrak{S}$-convergenza, è uno spazio vettoriale topologico che si indica con $B_{\mathfrak{S}}(M, E)$. Gli spazi H del teorema sono dunque i sottospazi vettoriali topologici di $B_{\mathfrak{S}}(M, E)$. Se, in particolare, M è uno spazio topologico, indichiamo con $C_{\mathfrak{S}}(M, E)$ il sottospazio vettoriale topologico di $B_{\mathfrak{S}}(M, E)$ costituito dalle applicazioni continue (limitate sugli $A \in \mathfrak{S}$). Se $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei sottoinsiemi compatti di M, otteniamo lo spazio di *tutte* le applicazioni continue di M in E (poiché i sottoinsiemi precompatti di E sono limitati, proposizione 10), con la topologia della convergenza compatta. Questo spazio si indica con $C(M, E)$. Quando $\mathfrak{S}$ si riduce all'unico elemento M (caso della convergenza uniforme), indichiamo lo spazio corrispondente con $C^\infty(M, E)$, ossia lo spazio delle applicazioni continue e limitate di M in E, con la topologia della convergenza uniforme. Se E è uno spazio normato, si considera sempre implicitamente $C^\infty(M, E)$ come spazio normato mediante la norma uniforme

$$\|u\| = \sup_{t\in M} \|u(t)\|.$$

Quando M è compatto, gli spazi $C^\infty(M, E)$ e $C(M, E)$ coincidono. Infine, quando E è il campo degli scalari, lo omettiamo dalla notazione e scriviamo $C_{\mathfrak{S}}(M)$, $C(M)$, $C^\infty(M)$ (quest'ultimo è sempre uno spazio di Banach, come mostra la proposizione seguente).

Proposizione 14. Con le notazioni precedenti, se E è completo, $B_{\mathfrak{S}}(M, E)$ e $C^\infty(M, E)$ sono completi. Lo stesso vale per $C(M, E)$ se, per esempio, M è localmente compatto o metrizzabile.

Sappiamo che, se E è completo, lo spazio di tutte le applicazioni di M in E, con la struttura uniforme della $\mathfrak{S}$-convergenza, è completo. Basta mostrare che gli spazi menzionati nella proposizione sono sottospazi chiusi dello spazio appena considerato. Ciò è ben noto per $C(M, E)$ quando M è metrizzabile o localmente compatto. Per $B_{\mathfrak{S}}(M, E)$ lo si può verificare direttamente. Inoltre $C^\infty(M, E)$ è l'intersezione dello spazio $B_{\mathfrak{S}}(M, E)$ (dove $\mathfrak{S}$ si riduce a M) e dello spazio, anch'esso chiuso, di tutte le funzioni continue a valori in E, ed è quindi chiuso.

Se M ed E sono spazi seminormati e su $L(M, E)$ consideriamo la topologia della convergenza uniforme sulla palla unitaria V di M, questa topologia è definita dalla norma

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|,$$

che è appunto la norma definita nel § 5, teorema 2. Poiché ogni limite di applicazioni lineari di M in E per la convergenza semplice (e a maggior ragione per la convergenza uniforme su V) è evidentemente lineare, almeno se E è di Hausdorff, dalla proposizione 14 segue che $L(M, E)$ è completo se E è uno spazio di Banach.

Proposizione 15. Nelle condizioni del teorema 3, un sottoinsieme P di H è limitato se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, l'insieme

$$P(A) = \bigcup_{u \in P} u(A)$$

è un sottoinsieme limitato di E.

Esercizio. Si mostri che, se M è localmente compatto ma non compatto, la topologia di $C(M)$ non può essere definita da una seminorma (si usi la proposizione 12, corollario 2).

9 Esempi di spazi vettoriali topologici. Spazi di funzioni continue

Un isomorfismo e un omomorfismo canonico. Sia M uno spazio normale e sia N un suo sottospazio chiuso. L'applicazione che a ogni $f \in C^\infty(M)$ associa la restrizione di f a N è evidentemente un'applicazione lineare, di norma ≤ 1, di $C^\infty(M)$ in $C^\infty(N)$. Dal teorema di Urysohn segue che si ha addirittura un *omomorfismo metrico* di $C^\infty(M)$ su $C^\infty(N)$. Quest'ultimo spazio si identifica dunque, come spazio normato, con il quoziente di $C^\infty(M)$ per il sottospazio J delle funzioni nulle su N.

Siano K e L spazi localmente compatti, E uno spazio vettoriale topologico. Gli spazi $C(K \times L, E)$ e $C(K, C(L, E))$ sono canonicamente isomorfi come spazi uniformi (ciò vale per ogni spazio uniforme E) e questo isomorfismo rispetta la struttura vettoriale. Pertanto $C(K \times L, E)$ *si identifica con* $C(K, C(L, E))$ *come spazio vettoriale topologico.* Questo isomorfismo rispetta le norme quando E è normato. In particolare, si ha un isomorfismo canonico di spazi normati

$$C(K \times L) \simeq C(K, C(L)).$$

Richiamiamo l'attenzione sul fatto che in generale, se L non è compatto, si ha $C^\infty(K \times L) \neq C^\infty(K, C^\infty(L))$. Il secondo spazio è contenuto nel primo, ma in generale l'inclusione è stretta (il lettore troverà degli esempi).

Una proprietà di approssimazione.

Teorema 4. Siano M uno spazio compatto ed E uno spazio localmente convesso. Allora le combinazioni lineari delle funzioni $\phi \cdot a$, con $\phi \in C(M)$ e $a \in E$, sono dense in $C(M, E)$.

Dimostrazione. Sia $f \in C(M, E)$. Dobbiamo mostrare che, per ogni seminorma continua p su E, esiste una funzione $g = \sum_i \phi_i a_i$ tale che $p(f(t) - g(t)) \leq 1$ per ogni $t \in M$. Poiché f è uniformemente continua, esistono un ricoprimento aperto finito (U_i) di M e, in ciascun U_i, un punto t_i tali che da $t \in U_i$ segua

$$p(f(t) - f(t_i)) \leq 1.$$

Poniamo $a_i = f(t_i)$, prendiamo una partizione dell'unità (ϕ_i) subordinata a (U_i) e scegliamo

$$g = \sum_i \phi_i a_i.$$

Avremo allora $f(t) - g(t) = \sum_i \phi_i(t)(f(t) - f(t_i))$. Nella somma ci si può limitare agli indici i per i quali $t \in U_i$, ottenendo

$$p(f(t) - g(t)) \leq 1.$$

Corollario. Siano K e L spazi compatti. Le combinazioni lineari delle funzioni del tipo $f(s)g(t)$, con $f \in C(K)$ e $g \in C(L)$, sono dense in $C(K \times L)$.

Basta osservare che

$$C(K \times L) = C(K, C(L)).$$

Dal teorema 4 si vede che il risultato vale anche quando M è soltanto localmente compatto.

Proprietà di separabilità.

Proposizione 16. Sia M uno spazio compatto. Lo spazio M è metrizzabile se e soltanto se $C(M)$ è separabile.

Sufficienza. Sia (f_i) una successione densa in $C(M)$. Se s, t sono due punti di M tali che $f_i(s) = f_i(t)$ per ogni i, per continuità si ha $f(s) = f(t)$ per ogni $f \in C(M)$, e dunque $s = t$. La meno fine delle topologie su M che rendono continue le f_i è quindi di Hausdorff e, poiché è meno fine della topologia di M, coincide con essa. Tale topologia è metrizzabile.

Necessità. Consideriamo una successione di ricoprimenti aperti finiti di M costituiti da insiemi il cui diametro tende a zero e, per ciascun ricoprimento, una partizione dell'unità a esso subordinata. La dimostrazione del teorema 4 mostra che le combinazioni lineari delle funzioni ϕ_i di queste partizioni dell'unità sono dense in $C(M)$. Lo stesso vale per le combinazioni lineari a coefficienti razionali di tali funzioni, da cui la conclusione.

Combinando la proposizione 16 con il teorema 4 otteniamo il seguente corollario.

Corollario. Siano K uno spazio compatto metrizzabile ed E uno spazio localmente convesso separabile. Allora $C(K, E)$ è separabile.

Lo spazio $C_0(M)$. Siano M uno spazio localmente compatto ed E uno spazio vettoriale topologico. Si dice che un'applicazione f di M in E *si annulla all'infinito* se tende a zero secondo il filtro dei complementari dei sottoinsiemi compatti di M. Indichiamo con $C_0(M, E)$ lo spazio delle applicazioni continue di M in E che si annullano all'infinito, munito della topologia della convergenza uniforme. È evidentemente un sottospazio vettoriale topologico di $C^\infty(M, E)$. Sia $\widehat{M}$ la compattificazione a un punto di M (supposto non compatto) e sia ω il punto all'infinito di $\widehat{M}$, cioè il suo unico punto che non appartiene a M. *Una funzione continua di M in E si annulla all'infinito se e soltanto se il suo prolungamento a $\widehat{M}$, ottenuto assegnandole il valore zero in ω, è continuo.* Ne segue che $C_0(M, E)$ si identifica con il sottospazio chiuso di $C(\widehat{M}, E)$ formato dalle funzioni nulle in ω. L'identificazione rispetta le topologie. Le applicazioni costanti di $\widehat{M}$ in E formano un supplementare naturale di $C_0(M, E)$.

Proposizione 17. Siano M uno spazio localmente compatto ed E uno spazio localmente convesso. Allora $C_0(M, E)$ è la chiusura in $C^\infty(M, E)$ dello spazio delle applicazioni continue di M in E a supporto compatto (il supporto di una funzione a valori vettoriali è il chiuso complementare dell'insieme dei punti in un intorno dei quali la funzione è nulla).

Esercizio 1. Si mostri che, nelle condizioni precedenti (M spazio normale, N sottospazio chiuso), se E è uno spazio di Banach, l'applicazione canonica di $C^\infty(M,E)$ in $C^\infty(N,E)$ è un omomorfismo metrico del primo spazio su un sottospazio chiuso del secondo (si usino il teorema di Urysohn e la proposizione 6 del § 4). Se ne deduca che, se N è compatto, si tratta di un omomorfismo metrico di $C^\infty(M,E)$ su $C^\infty(N,E)$ (si usi il teorema 4 qui sopra). Si dimostri la proposizione analoga quando E è uno spazio localmente convesso metrizzabile e completo. Che cosa si può dire quando E è uno spazio localmente convesso qualunque?

Esercizio 2. Siano M uno spazio completamente regolare ed E uno spazio localmente convesso. Si mostri che le funzioni $f \in C^\infty(M,E)$ appartenenti al sottospazio vettoriale chiuso generato dalle funzioni $\phi \cdot a$ ($\phi \in C^\infty(M)$, $a \in E$) sono precisamente quelle per cui $f(M)$ è precompatto. (Si proceda come nel teorema 4, oppure si applichi il teorema 4 introducendo la compattificazione di Stone di M. Si veda Bourbaki, *Topologie générale*, capitolo 9, § 1, esercizio 6.)

Esercizio 3. Siano M uno spazio compatto ed E uno spazio uniforme metrizzabile e separabile. Si mostri che $C(M,E)$ è uno spazio metrizzabile e separabile.[9] (Si scelga una metrica per E e si dimostri dapprima il lemma seguente. Uno spazio metrico separabile E è sempre isometrico a un sottospazio di uno spazio di Banach separabile. Per vederlo, si prendano una successione densa (x_i) in E e un punto arbitrario $a \in E$. Si dimostri che l'applicazione $x \mapsto \phi(x) = (d(x,x_i) - d(a,x_i))_{i\in I}$ nello spazio $C^\infty(\mathbf{N})$ delle successioni limitate è un'isometria. Si prenda poi il sottospazio vettoriale chiuso generato da $\phi(E)$.)

Esercizio 4. Se M è uno spazio completamente regolare non compatto, $C^\infty(M)$ non è separabile. (Altrimenti M sarebbe un sottospazio denso di uno spazio compatto metrizzabile $\widehat{M}$ (la sua compattificazione di Stone), diverso da M e tale che ogni funzione continua limitata su M si potrebbe prolungare per continuità a tutto $\widehat{M}$.)

Esercizio 5. Si applichi l'identificazione precedente per caratterizzare i sottoinsiemi relativamente compatti di $C_0(M,E)$. Si consideri il caso di $C_0(M)$. Si estenda il teorema 4 agli spazi $C_0(M,E)$.

Esercizio 6. Sia I un insieme di indici e sia $\ell^1(I)$ lo spazio delle famiglie sommabili di scalari indicizzate da I.
a) Si mostri che su $\ell^1(I)$ la funzione

$$\|(\lambda_i)\|_1 = \sum_i |\lambda_i|$$

è una norma che ne fa uno spazio di Banach.
b) Sia E uno spazio vettoriale topologico completo. Si mostri che, se (x_i) è una famiglia limitata in E, per ogni $\lambda = (\lambda_i) \in \ell^1(I)$ la famiglia $(\lambda_i x_i)$ è sommabile in E e la sua somma $u(\lambda)$ è funzione lineare continua di $\lambda = (\lambda_i) \in \ell^1(I)$. Si mostri che si ottengono così esattamente tutte le applicazioni lineari continue di $\ell^1(I)$ in E.
c) Se E è uno spazio di Banach, la norma dell'applicazione lineare di $\ell^1(I)$ in E definita mediante la famiglia (x_i) è uguale a $\sup_{i\in I} \|x_i\|$.

[9] Nota del traduttore. L'enunciato dell'edizione del 1973 richiede un'ipotesi su M. Già per $E = \mathbf{R}$, la proposizione 16 mostra che la separabilità di $C(M)$ implica la metrizzabilità di M.

Esercizio 7. Sia I un insieme di indici. Indichiamo con $\ell^\infty(I)$ e $c_0(I)$ gli spazi $C^\infty(I)$ e $C_0(I)$ costruiti su I considerato come spazio discreto localmente compatto. Sono quindi spazi di Banach e $c_0(I)$ è un sottospazio normato di $\ell^\infty(I)$. D'altra parte $\ell^1(I)$ indica lo spazio delle funzioni scalari $i \mapsto \lambda_i$ su I tali che $\sum_i |\lambda_i| < +\infty$, munito della norma $\sum_i |\lambda_i|$ (si veda l'esercizio precedente). Quando I è sottinteso, oppure è l'insieme degli interi positivi, indichiamo questi spazi semplicemente con ℓ^∞, c_0 e ℓ^1. Se $(\lambda_i) \in \ell^\infty$ e $(\mu_i) \in \ell^1$, poniamo

$$\langle (\lambda_i), (\mu_i) \rangle = \sum_i \lambda_i \mu_i.$$

Si mostri che il duale di c_0 (ossia lo spazio delle forme lineari continue con la norma naturale, cfr. § 5) si identifica con ℓ^1 e che il duale di ℓ^1 si identifica con ℓ^∞ (per il duale di ℓ^1 si veda l'esercizio precedente).

10 Altri esempi. Gli spazi $\mathcal{E}^{(m)}$ ed $\mathcal{E}$ di L. Schwartz

Per la notazione D^p degli operatori di derivazione su $\mathbf{R}^n$ si veda la *Théorie des distributions* di L. Schwartz. Qui $p = (p_1, \ldots, p_n)$ è un sistema qualunque di n interi ≥ 0 e D^p indica l'operatore

$$\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}},$$

dove $|p| = p_1 + \cdots + p_n$ è l'ordine dell'operatore differenziale. Si ha $D^0 = \mathrm{id}$ e $D^p D^q = D^{p+q}$.

Sia U un aperto non vuoto di $\mathbf{R}^n$. Indichiamo con $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, o semplicemente con $\mathcal{E}^{(m)}$, lo spazio delle funzioni scalari su U che sono m volte differenziabili con continuità, munito della meno fine delle topologie che rendono continue le applicazioni D^p, per $|p| \leq m$, da questo spazio in $C(U)$ (spazio delle funzioni continue su U con la topologia della convergenza sui compatti). Si ottiene così uno spazio *localmente convesso e metrizzabile* (§ 4, proposizione 4). Si ottiene una successione fondamentale di seminorme prendendo una «successione fondamentale» (K_n) di compatti di U e ponendo

$$p_n(f) = \sup_{|p| \leq m,\, t \in K_n} |D^p f(t)|.$$

Un filtro (f_i) in $\mathcal{E}^{(m)}$ converge a $f \in \mathcal{E}^{(m)}$ se e soltanto se, per ogni p con $|p| \leq m$, le $D^p f_i$ convergono a $D^p f$ uniformemente su ogni compatto. Sia (f_i) un filtro di Cauchy in $\mathcal{E}^{(m)}$. Per ogni p di ordine $\leq m$, le $D^p f_i$ formano un filtro di Cauchy in $C(U)$, dunque convergono in questo spazio a una $g_p \in C(U)$ (§ 8, proposizione 14). Si dimostra che g_0 è m volte differenziabile con continuità e che $D^p g_0 = g_p$. Infatti, se ciascuna derivata parziale $\partial f_i / \partial x_a$ tende a un limite h_a uniformemente su ogni compatto, g_0 è differenziabile con continuità e le sue derivate sono le h_a. Per vederlo ci si può ricondurre al caso di una variabile, nel quale il risultato è classico.

Abbiamo così dimostrato che $\mathcal{E}^{(m)}$ *è completo.*

Indichiamo con $\mathcal{E}(U)$, o semplicemente con $\mathcal{E}$, l'intersezione degli spazi $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, munita dell'estremo superiore delle topologie indotte. È anche la meno fine delle topologie che rendono continue le applicazioni D^p di $\mathcal{E}(U)$ in $C(U)$, dove ora p percorre tutti gli indici di derivazione. Anche questo spazio è localmente convesso e metrizzabile, e il ragionamento precedente ne mostra la completezza. Lo si può vedere anche mediante il seguente utile lemma.

Lemma. Sia F un insieme e sia (E_m) una famiglia di suoi sottoinsiemi, filtrante per inclusione decrescente, muniti di strutture uniformi tali che, per $E_m \subset E_n$, la struttura uniforme di E_m sia più fine di quella indotta da E_n. Sia E l'intersezione degli E_m, munita dell'estremo superiore delle strutture uniformi indotte dagli E_m. Se gli E_m sono di Hausdorff e completi, anche E è di Hausdorff e completo.

Supponiamo ora che K sia un cubo compatto di $\mathbf{R}^n$. Si possono definire come sopra gli spazi $\mathcal{E}^{(m)}(K)$, $\mathcal{E}(K)$, e lo stesso ragionamento mostra che sono localmente convessi, metrizzabili e completi. La differenza essenziale è che gli $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ sono normabili, poiché $C(K)$ è uno spazio di Banach (§ 5, proposizione 8), mentre si vede facilmente che gli $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ non sono normabili (si usi il corollario 1 della proposizione 12). Nemmeno $\mathcal{E}(U)$ ed $\mathcal{E}(K)$ sono normabili.

La proposizione 11 del § 7 fornisce un criterio per i sottoinsiemi limitati di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ o di $\mathcal{E}(U)$. Un sottoinsieme A di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ (rispettivamente di $\mathcal{E}(U)$) è limitato se e soltanto se, per ogni indice di derivazione p di ordine $\leq m$ (rispettivamente di ordine qualunque), $D^p(A)$ è un sottoinsieme limitato di $C(U)$, ossia, per la proposizione 15 del § 8, un insieme di funzioni continue su U *uniformemente limitate su ogni compatto di* U. Inoltre, un sottoinsieme A di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ è relativamente compatto se e soltanto se è precompatto, dunque se e soltanto se, per ogni p di ordine $\leq m$, l'insieme $D^p(A)$ è precompatto in $C(U)$. Applicando il teorema di Ascoli otteniamo la seguente proposizione.

Proposizione 18. Sia A un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$. Affinché A sia relativamente compatto è necessario e sufficiente che A sia limitato e che, per ogni indice di derivazione p di ordine m, la famiglia di funzioni $D^p(A)$ sia equicontinua.

Basta mostrare che, per ogni p di ordine $\leq m$, la famiglia di funzioni $D^p(A)$ è equicontinua. Ciò segue dal lemma seguente.

Lemma. Sia B una famiglia di funzioni differenziabili con continuità su U, uniformemente limitate su ogni compatto insieme alle loro derivate prime. Allora B è equicontinua (teorema del valor medio).

Combinando la proposizione 18 e il lemma si ottiene il seguente corollario.

Corollario. Ogni sottoinsieme limitato di $\mathcal{E}^{(m+1)}(U)$ è relativamente compatto in $\mathcal{E}^{(m)}(U)$.

A maggior ragione ogni sottoinsieme limitato di $\mathcal{E}(U)$ è relativamente compatto in tutti gli $\mathcal{E}^{(m)}(U)$. Se ne ricava l'importante teorema seguente.

Teorema 5. In $\mathcal{E}(U)$ i sottoinsiemi limitati e i sottoinsiemi relativamente compatti coincidono.

Quanto precede si può ripetere parola per parola per gli spazi $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ ed $\mathcal{E}(K)$. In particolare, ogni sottoinsieme limitato di $\mathcal{E}(K)$ è relativamente compatto. Poiché $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ è normabile, il corollario della proposizione 18 mostra che l'applicazione identica di $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ in $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ trasforma un opportuno intorno dell'origine in un sottoinsieme relativamente compatto di $\mathcal{E}^{(m)}(K)$. Si dice che è un'*applicazione compatta*.

Esercizio 1. Si definiscano gli spazi $\mathcal{E}^{(m)}(U, E)$, $\mathcal{E}(U, E)$, $\mathcal{E}^{(m)}(K, E)$ e $\mathcal{E}(K, E)$ quando E è uno spazio vettoriale topologico qualunque. Si mostri che sono completi quando E è localmente convesso e completo (si usi la proposizione 9 del § 6 per ricondursi al caso in cui E è uno spazio di Banach). Si mostri che, se V è aperto in $\mathbf{R}^n$ e L è un cubo compatto

di $\mathbf{R}^n$, si hanno gli isomorfismi di spazi vettoriali topologici

$$\mathcal{E}^{(m)}(U \times V) = \mathcal{E}^{(m)}(U, \mathcal{E}^{(m)}(V)),$$
$$\mathcal{E}^{(m)}(K \times L) = \mathcal{E}^{(m)}(K, \mathcal{E}^{(m)}(L))$$

(e analogamente per $\mathcal{E}(U \times V)$ ed $\mathcal{E}(K \times L)$).[10]

Esercizio 2. Si caratterizzino i sottoinsiemi relativamente compatti di $\mathcal{E}^{(m)}(U, E)$ e di $\mathcal{E}(U, E)$ quando E è localmente convesso, di Hausdorff e completo. Sotto quali condizioni ogni sottoinsieme limitato di $\mathcal{E}(U, E)$ è relativamente compatto?

Esercizio 3. Se $m > m'$, l'applicazione identica di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ in $\mathcal{E}^{(m')}(U)$ non è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici.

11 Somme dirette topologiche

Ricordiamo che due sottospazi F, G di uno spazio vettoriale E si dicono *supplementari* se l'applicazione $(x, y) \mapsto x + y$ di $F \times G$ in E è un isomorfismo, il che equivale a dire che $F \cap G = \{0\}$ e $F + G = E$ (somma diretta). La proiezione di $F \times G$ su F definisce un'applicazione lineare p di E su F che, considerata come endomorfismo di E, soddisfa le relazioni

$$p^2 = p, \qquad p(E) = F, \qquad p^{-1}(0) = G.$$

L'analoga applicazione di E su G è $1 - p$. Viceversa, se p è un endomorfismo di E tale che $p^2 = p$, si vede che p si ottiene nel modo descritto, e in modo unico, poiché necessariamente $F = p(E)$, $G = p^{-1}(0)$. Un endomorfismo p di uno spazio vettoriale E tale che $p^2 = p$ si chiama *proiettore*. I proiettori di E corrispondono dunque esattamente alle decomposizioni di E in somma diretta di due sottospazi supplementari F, G, presi in quest'ordine.

Supponiamo ora che E sia uno spazio vettoriale topologico. Se F e G sono sottospazi supplementari di E, l'isomorfismo algebrico di $F \times G$ su E è evidentemente continuo, ma la sua inversa non è sempre continua. Quando si ha un isomorfismo di spazi vettoriali topologici, diciamo che F e G sono *supplementari topologici*.

Proposizione 19. Siano E uno spazio vettoriale topologico e F un sottospazio vettoriale.

1. Un proiettore p di E su F definisce un supplementare topologico G se e soltanto se p è continuo. Allora $1 - p$ è un omomorfismo topologico di E su G, ossia definisce un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di E/F su G. (A ogni elemento del quoziente E/F corrisponde il suo unico rappresentante in G, e a ogni elemento di G la sua immagine canonica in E/F.)

2. L'applicazione di E/F su G considerata in 1) è un'applicazione lineare continua di E/F in E che associa a ogni elemento del quoziente un suo rappresentante in E. Viceversa, ogni applicazione Ψ di E/F in E avente queste proprietà si ottiene in questo modo, evidentemente in modo unico, poiché $G = \Psi(E/F)$.

La dimostrazione è evidente.

[10] Nota del traduttore. Le due formule sono riprodotte come nell'originale. Per $0 < m < \infty$ il secondo membro richiede derivate miste di ordine fino a m in ciascun gruppo di variabili, mentre il primo richiede soltanto quelle di ordine totale al più m.

Corollario 1. Due supplementari topologici dello stesso spazio F sono canonicamente isomorfi.

Infatti sono entrambi canonicamente isomorfi a E/F.

Corollario 2. Se E è uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff e F, G sono sottospazi supplementari topologici, allora F e G sono chiusi.

Infatti sono rispettivamente i nuclei delle applicazioni lineari continue $1 - p$ e p.

Occorre però cautela. Come vedremo più avanti, persino un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach può non ammettere alcun supplementare topologico, e questo dà luogo a numerose difficoltà. Segnaliamo che, se D è un operatore differenziale a coefficienti costanti, ellittico su $\mathbf{R}^n$, con $n \geq 2$, e di ordine strettamente positivo, allora D è un omomorfismo di $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ su $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ che non ammette inversa destra continua (si veda più avanti), ossia il suo nucleo non ha supplementare topologico.

Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio vettoriale topologico E in uno spazio vettoriale topologico F. Un'applicazione lineare continua v di F in E è un'*inversa destra* (rispettivamente *sinistra*) di u se $u \circ v = 1$ (rispettivamente $v \circ u = 1$).

Proposizione 20. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio vettoriale topologico E in uno spazio vettoriale topologico F.

1. u ammette un'inversa destra continua se e soltanto se è un omomorfismo di E su F il cui nucleo ammette un supplementare topologico in E.

2. u ammette un'inversa sinistra continua se e soltanto se è un isomorfismo di E sulla sua immagine in F e tale immagine ammette un supplementare topologico in F.

La dimostrazione è lasciata al lettore.

Sia E uno spazio vettoriale topologico e siano $E_1, \ldots, E_n$ suoi sottospazi vettoriali in numero finito. Si dice che E è *somma diretta topologica* degli E_i se l'applicazione lineare continua naturale

$$(x_i) \longmapsto \sum_i x_i$$

di $\prod_i E_i$ in E è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici del primo spazio sul secondo. Allora le proiezioni di $\prod_i E_i$ sui fattori definiscono endomorfismi continui p_i di E che soddisfano le condizioni

$$p_i^2 = p_i, \qquad p_i \circ p_j = 0 \quad (i \neq j), \qquad \sum_i p_i = 1, \qquad p_i(E) = E_i.$$

Viceversa, si verifica subito che, data una famiglia finita di proiettori continui p_i su E i cui prodotti a due a due siano nulli e la cui somma sia l'identità, essi corrispondono alla decomposizione di E in somma diretta topologica dei sottospazi $E_i = p_i(E)$.

Esercizio 1. Sia E uno spazio vettoriale topologico. Ogni sottospazio vettoriale di dimensione finita di E ammette un supplementare topologico se e soltanto se, per ogni $x \neq 0$ di E, esiste una forma lineare continua su E che non si annulla in x.

Esercizio 2. Sia F un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach E tale che E/F sia isomorfo, come spazio vettoriale topologico, allo spazio ℓ^1 delle successioni sommabili munito della norma $\|\lambda\|_1 = \sum_i |\lambda_i|$. Si mostri che F ammette un supplementare topologico (si usino la proposizione 19, punto 2, e l'esercizio 6 del § 9).

Esercizio 3. Siano M uno spazio localmente compatto non compatto, $\widehat{M}$ la sua compattificazione a un punto ed E uno spazio vettoriale topologico. Si mostri che $C(\widehat{M}, E)$ è somma diretta topologica di $C_0(M, E)$ e dello spazio delle applicazioni costanti di $\widehat{M}$ in E.

Esercizio 4. Sia M uno spazio topologico, somma topologica di una famiglia finita di sottospazi M_i. Si mostri che $C(M)$ (definito nel § 8) è somma diretta topologica di sottospazi isomorfi agli spazi $C(M_i)$. Si descrivano i proiettori corrispondenti.

Esercizio 5. Siano M uno spazio metrizzabile e N un suo sottospazio chiuso non vuoto con frontiera separabile. Si dimostri che esiste un'applicazione lineare canonica di $C^\infty(N)$ in $C^\infty(M)$, inversa destra dell'applicazione lineare canonica di $C^\infty(M)$ su $C^\infty(N)$ (Kakutani). (Sia (x_i) una successione densa nella frontiera di N. Indichiamo con $V_{i,n}$ l'insieme degli $x \in M$ tali che $d(x_i, x) < 1/n$ e $d(x, N) > \frac{1}{2}n$, e con (V_α) il ricoprimento aperto del complementare di N formato dai $V_{i,n}$ e dal complementare di N.[11] Si costruisca una famiglia (ϕ_α) di funzioni continue positive sul complementare di N, con $\operatorname{supp}\phi_\alpha \subset V_\alpha$, uniformemente sommabile in un intorno di ogni punto di tale complementare e di somma 1. Infine, per ogni $f \in C^\infty(N)$, si prenda su M la funzione che coincide con f su N e con

$$\sum_{i,n} f(x_i)\phi_{i,n}$$

sul complementare di N.) Si estenda il risultato al caso di $C^\infty(N, E)$ quando 1) E è uno spazio di Banach, 2) E è uno spazio localmente convesso completo.

Osservazione. Anche se M è compatto e N è un suo sottospazio compatto, in generale, se M non è metrizzabile, l'applicazione naturale di $C(M)$ su $C(N)$ non ammette un'inversa destra lineare continua. Per esempio, ciò accade quando M è la compattificazione di Stone degli interi e N è il complementare degli interi in M.

12 Sottospazi vettoriali di dimensione o codimensione finita

Proposizione 21. Sia F un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale topologico E. La chiusura di F è un sottospazio vettoriale.

Corollario. Un iperpiano V di E è denso oppure chiuso (ossia, se il complementare di V ha un punto interno, V è chiuso).

Teorema 6. Sia E uno spazio vettoriale topologico e sia x' una forma lineare non nulla su E. Affinché x' sia continua è necessario e sufficiente che l'iperpiano nucleo di x' sia chiuso.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che, se l'iperpiano V è chiuso, x' è continua. Posto $F = E/V$, che è uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff di dimensione uno, ciò significa che la forma lineare su F ottenuta per passaggio al quoziente è continua. Ma tale forma è del tipo

$$\lambda e \longmapsto \lambda$$

per un opportuno $e \in F$. Dobbiamo pertanto provare il lemma seguente.

[11] Nota del traduttore. Si conserva qui la costruzione come appare a p. 36: la scansione reca $\frac{1}{2}n$. Con tale disuguaglianza i $V_{i,n}$ sono vuoti per $n \geq 2$.

Lemma. Siano F uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff di dimensione uno ed e un suo elemento non nullo. L'applicazione $\lambda \mapsto \lambda e$ del campo K su F è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici.

Sia V un intorno equilibrato dell'origine in F tale che $e \notin V$. Dobbiamo mostrare che $\lambda e \mapsto \lambda$ è continua nell'origine, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno W dell'origine in F tale che $\lambda e \in W$ implichi $|\lambda| < \varepsilon$. Possiamo prendere $W = \varepsilon V$. Infatti, per $\lambda \neq 0$, dire che $\lambda e \in W$ equivale a dire che $e \in (\varepsilon/\lambda)V$. Se fosse $|\varepsilon/\lambda| \leq 1$, essendo V equilibrato avremmo $(\varepsilon/\lambda)V \subset V$, il che è assurdo.

Teorema 7. Sia E uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff di dimensione finita e sia $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ una sua base. Allora l'applicazione

$$(\lambda_i) \longmapsto \sum_i \lambda_i e_i$$

di K^n su E è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici, dove K^n è munito della topologia prodotto.

Per $n = 1$ ciò segue dal lemma precedente. Procediamo per induzione su n, supponendo dimostrato il teorema in dimensione $n-1$. L'iperpiano di E generato da $e_1, \ldots, e_{n-1}$ è isomorfo a K^{n-1}, dunque è completo e perciò chiuso, poiché E è di Hausdorff. Di conseguenza, per il teorema 6, la forma lineare $\sum_i \lambda_i e_i \mapsto \lambda_n$ su E è continua. Analogamente sono continue le altre coordinate λ_i, e il teorema è dimostrato.

Corollario 1. Sia E uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff di dimensione finita. Ogni applicazione lineare di E in uno spazio vettoriale topologico F è continua. Ogni sottospazio vettoriale di E è chiuso.

Per la prima parte basta prendere $E = K^n$. La seconda è contenuta nel corollario seguente.

Corollario 2. In uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff E ogni sottospazio vettoriale di dimensione finita è chiuso.

Infatti è completo per il teorema 7.

Corollario 3. Sia F un sottospazio vettoriale chiuso di codimensione finita nello spazio vettoriale topologico E. Ogni applicazione lineare di E in uno spazio vettoriale topologico G che si annulli su F è continua. Ogni supplementare di F è anche un supplementare topologico.

Poiché E/F è di dimensione finita e di Hausdorff, la prima affermazione segue dal corollario 1. Se H è un supplementare di F, il corrispondente proiettore di E su H è continuo poiché si annulla su F. Dunque H è un supplementare topologico.[12]

Corollario 4. Siano E uno spazio vettoriale topologico, F un sottospazio vettoriale chiuso e G un sottospazio di dimensione finita. Allora $F + G$ è chiuso.

Sia ϕ l'applicazione canonica di E sullo spazio di Hausdorff E/F. Per il corollario 2, $\phi(G)$ è un sottospazio chiuso di E/F. Anche la sua immagine inversa mediante ϕ, cioè $F + G$, è dunque chiusa.

[12]Nota del traduttore. Nell'ultima frase della dimostrazione l'originale scrive «su F». Il proiettore che si annulla su F è quello su H.

13 Spazi vettoriali topologici localmente precompatti

Teorema 8 (Banach). Uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff E che ammetta un intorno precompatto dell'origine è di dimensione finita.

Dimostriamo dapprima il lemma seguente.

Lemma. Siano E uno spazio vettoriale topologico, F un sottospazio vettoriale e V un intorno dell'origine tale che $F+V \neq E$ (per esempio, F chiuso e distinto da E, V limitato). Allora, per $0 < k < 1$, si ha $V \not\subset F + kV$.

Supponiamo $V \subset F + kV$. Posto $G = E/F$ e indicata con W l'immagine canonica di V in E/F, che è ancora un intorno dell'origine in G, si ha $W \subset kW$, donde

$$W \subset kW \subset k^2W \subset \cdots \subset k^nW.$$

Pertanto $W \supset (1/k^n)W$ per ogni n. Poiché l'unione degli $(1/k^n)W$ è G (essendo W assorbente), si ha $W = G$, ossia $F + V = E$, contro l'ipotesi. Se, per esempio, F è chiuso e diverso da E e V è limitato, W è un sottoinsieme limitato di uno spazio di Hausdorff non nullo G, e dunque $W \neq G$.

Dimostriamo il teorema 8 per assurdo. Fissiamo $0 < k < 1$. Se E fosse di dimensione infinita, potremmo costruire per induzione, mediante il lemma, una successione (x_i) di punti di V tale che, detto E_n lo spazio generato da $x_1, \ldots, x_n$, si abbia $x_{n+1} \notin E_n + kV$. Avremmo allora

$$x_i - x_j \notin kV \qquad (i \neq j)$$

(prendendo V simmetrico), il che contraddice la precompattezza di V, poiché kV è un intorno dell'origine.

14 Teorema degli omomorfismi e teorema del grafico chiuso

Teorema 9 (teorema degli omomorfismi, Banach). Un'applicazione lineare continua u di uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo E su un altro spazio dello stesso tipo F è un omomorfismo.

Considerando il quoziente di E per il nucleo di u, che è ancora uno spazio vettoriale topologico completo e metrizzabile (§ 4, proposizione 6), si vede che il teorema equivale al seguente caso particolare (*teorema degli isomorfismi*). Un'applicazione lineare continua e biiettiva u di uno spazio vettoriale topologico completo e metrizzabile E su un altro spazio dello stesso tipo F è un isomorfismo del primo sul secondo (ossia l'applicazione inversa è continua). Equivalentemente, se su uno spazio vettoriale si hanno due topologie di spazio vettoriale topologico rispetto alle quali esso è metrizzabile e completo, queste topologie o non sono confrontabili oppure coincidono. La dimostrazione consta di due parti.

1) Nelle condizioni del teorema 9, per ogni intorno U dell'origine in E, la chiusura di $u(U)$ è un intorno dell'origine in F (qui interviene soltanto l'ipotesi su F). Poiché $u(E) = F$, l'unione degli $nu(U) = u(nU)$, al variare dell'intero positivo n, è F. Poiché F è uno spazio di Baire, almeno uno degli $nu(U)$ non è un insieme raro.[13] Dunque $u(U)$ non è raro, cioè la sua chiusura contiene un aperto non vuoto W. Posto $U' = U - U$, l'insieme $W - W$ è un intorno dell'origine in F contenuto nella chiusura di $u(U')$. La chiusura di $u(U')$ è quindi un intorno dell'origine, da cui segue l'asserto.

2) Il teorema 9 è ora conseguenza del lemma seguente.

[13] Un insieme si dice raro se la sua chiusura ha interno vuoto.

Lemma. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio vettoriale topologico E in uno spazio vettoriale topologico F. Supponiamo che E sia metrizzabile e completo e che, per ogni intorno U dell'origine in E, la chiusura $\overline{u(U)}$ di $u(U)$ sia un intorno dell'origine in F. Allora u è un omomorfismo di E su F.

Ne segue dunque che F è metrizzabile e completo. Più precisamente, dato un intorno U dell'origine in E, mostreremo che ogni $y \in \overline{u(U)}$ è della forma ux con $x \in \overline{U+V}$, dove V è un intorno arbitrario dell'origine in E (il che implica il lemma). Sia (U_i) una successione fondamentale di intorni dell'origine in E tale che

$$U_1 = U, \qquad U_2 + U_2 \subset U \cap V, \qquad U_n + U_n \subset U_{n-1} \quad (n \geq 3).$$

Ne segue che $U_{n+1} + \cdots + U_{n+k} \subset U_n$ se $n \geq 1$ e che $U_1 + \cdots + U_k \subset U + V$. Costruiamo per induzione una successione (y_i) di punti di F tale che

$$y_i \in u(U_i), \qquad y - (y_1 + \cdots + y_n) \in \overline{u(U_{n+1})}.$$

La possibilità di procedere per induzione è evidente. Siano $x_i \in U_i$ tali che $ux_i = y_i$. La successione (x_i) è sommabile in E, poiché E è completo e la somma di un numero finito di x_i con $i > n$ appartiene sempre a U_n. Sia $x = \sum_i x_i$ la somma. Passando al limite si trova $x \in \overline{V+U}$ e

$$ux = \sum_i ux_i = y.$$

Il lemma è dimostrato.

Corollario 1. Siano E, F due spazi di Banach, U, V le rispettive palle unitarie e u un'applicazione lineare di E in F tale che $u(U)$ sia denso in V. Allora u è un omomorfismo metrico di E su F.

Abbiamo già mostrato che ogni elemento di $\overline{u(U)} = V$ è l'immagine mediante u di un elemento di $\overline{U + \varepsilon U} = (1+\varepsilon)U$, per ogni $\varepsilon > 0$ assegnato.

Corollario 2. Siano E uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo, F, G due suoi sottospazi vettoriali. Affinché F e G siano supplementari topologici è necessario e sufficiente che siano chiusi e algebricamente supplementari.

Si applichi il teorema degli isomorfismi a $F \times G$ ed E.

Corollario 3. Siano E, F due spazi vettoriali topologici, E metrizzabile e completo, e sia u un'applicazione lineare continua di E in F. Se $u(E) \neq F$, $u(E)$ è di prima categoria.

Infatti, dal lemma segue che, se $u(E) \neq F$, esiste un intorno U dell'origine in E tale che la chiusura di $u(U)$ abbia interno vuoto. Ora,

$$u(E) = \bigcup_{n \geq 1} n\, u(U).$$

Un'altra forma importante del teorema degli omomorfismi è la seguente.

Teorema 10 (teorema del grafico chiuso). Sia u un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale topologico completo e metrizzabile E in un altro spazio dello stesso tipo F. Affinché u sia continua è necessario e sufficiente che il suo grafico sia chiuso o, equivalentemente, che non esista in E alcuna successione tendente a zero la cui successione immagine abbia limite non nullo.

Sia H il grafico di u, ossia l'insieme delle coppie $(x, ux) \in E \times F$ al variare di x in E. Se H è chiuso, è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo. La sua proiezione su E è un'applicazione lineare continua e biiettiva di H su E e dunque, per il teorema degli isomorfismi, è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici. L'applicazione inversa è quindi continua e così pure u, che si ottiene componendo quest'ultima con la proiezione di H in F. Dire che il grafico H è chiuso significa che, se (x_i) è una successione in E convergente a x e se $(u(x_i))$ converge a y, allora $y = u(x)$. Sostituendo x_i con $x_i - x$ si vede subito che ci si può limitare al caso $x = 0$.

Corollario. Siano E, F spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi, e sia u un'applicazione lineare di E in F. Per la continuità di u basta che u sia continua rispetto a una topologia di Hausdorff su F meno fine della topologia data.

Osservazioni. In pratica il teorema 10 significa che un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale topologico completo e metrizzabile in un altro spazio dello stesso tipo, definita *in modo naturale*, è sempre continua. In effetti non conosciamo alcun esempio esplicito (cioè che non faccia uso dell'assioma della scelta) di un'applicazione lineare discontinua tra due spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi. È però facile vedere che, se E è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile di dimensione infinita, esistono forme lineari discontinue su E. Si prenda in E una successione (x_i) convergente a 0 i cui elementi siano linearmente indipendenti. Sul sottospazio vettoriale da essi generato si prenda la forma lineare che vale 1 su ciascun x_i e la si estenda arbitrariamente a tutto E. Si noti che, tanto nel teorema degli isomorfismi quanto in quello del grafico chiuso, la completezza degli spazi è essenziale. Ecco un controesempio per F non completo. L'applicazione identica di $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ in $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ (§ 10) è un'applicazione lineare continua e biiettiva dello spazio di Banach $E = \mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ sul sottospazio $F = u(E)$ di $\mathcal{E}^{(m)}(K)$, ma non è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di E su F. Per un controesempio con E non completo, siano F uno spazio vettoriale topologico completo e metrizzabile di dimensione infinita, v una forma lineare discontinua su F (come sopra) ed E lo spazio vettoriale F munito della meno fine delle topologie che rendono continue l'applicazione identica in F e v (allora E è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile). L'applicazione identica u di E su F è lineare, continua e biiettiva e la sua inversa non è continua.

Esercizio 1. Ogni spazio di Banach separabile E è isomorfo a uno spazio quoziente dello spazio ℓ^1 delle successioni sommabili (isomorfismo per la struttura normata). Si prenda una successione (x_i) densa nella palla unitaria di E e si mostri che l'applicazione

$$(\lambda_i) \longmapsto \sum_i \lambda_i x_i$$

è un omomorfismo metrico di ℓ^1 su E. Ogni spazio di Banach E, separabile o meno, è isomorfo a uno spazio quoziente di uno spazio $\ell^1(I)$. (Si scelga per I un sottoinsieme denso della palla unitaria di E.)

Esercizio 2. Siano M uno spazio compatto, E uno spazio localmente convesso metrizzabile e completo (oppure uno spazio di Banach), F un sottospazio vettoriale chiuso di E e ϕ l'applicazione canonica di E su E/F. Si mostri che l'applicazione $f \mapsto \phi \circ f$ di $C(M, E)$ in $C(M, E/F)$ è un omomorfismo (rispettivamente, un omomorfismo metrico) del primo spazio sul secondo. (Si usino il lemma del § 14, oppure il corollario 1 del teorema 9, e la dimostrazione del teorema 4 del § 9.) Se M è soltanto localmente compatto e numerabile all'infinito, si dimostri l'analogo per $C(M, E/F)$ e $C_0(M, E/F)$.

Esercizio 3. Sia K un cubo compatto di $\mathbf{R}^n$ e sia F uno spazio di Banach i cui elementi siano funzioni scalari su K, con una topologia più fine di quella della convergenza semplice. Se F contiene le funzioni infinitamente differenziabili su K, esiste un intero $m \geq 0$ tale che F contenga anche le funzioni m volte differenziabili con continuità su K. (Si dimostri che l'applicazione identica dello spazio $\mathcal{E}(K)$ del § 10 in F è continua.)

Esercizio 4. Siano E, F spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi e sia u un'applicazione lineare di E in F tale che $u(E)$ abbia codimensione finita. Si dimostri che u è un omomorfismo.[14] Più generalmente, due sottospazi vettoriali di E che siano immagini di spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi mediante applicazioni lineari continue e che siano algebricamente supplementari sono supplementari topologici.

15 Il teorema di Banach–Steinhaus

Teorema 11 (Banach–Steinhaus). Siano E uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo, F uno spazio vettoriale topologico qualunque e M una famiglia di applicazioni lineari continue di E in F. Affinché M sia equicontinua è necessario e sufficiente che, per ogni $x \in E$, l'insieme $M(x)$ delle immagini di x mediante le $u \in M$ sia un sottoinsieme limitato di F (ossia che M sia un sottoinsieme di $L(E, F)$ limitato per la topologia della convergenza puntuale; cfr. § 8, proposizione 15).

La necessità è immediata. Più generalmente vale la seguente proposizione.

Proposizione 22. Se M è una famiglia equicontinua di applicazioni lineari di uno spazio vettoriale topologico E in uno spazio vettoriale topologico F, allora, per ogni sottoinsieme limitato A di E, l'insieme

$$M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A)$$

è limitato in F (ossia M è un sottoinsieme di $L(E, F)$ limitato per la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati di E; cfr. § 8, teorema 3 e proposizione 15).

Viceversa, supponiamo, nelle condizioni generali del teorema 11, che $M(x)$ sia limitato in F per ogni $x \in E$. Mostriamo che M è equicontinua. Basta provare l'equicontinuità nell'origine, ossia mostrare che, per ogni intorno V dell'origine in F, l'insieme

$$U = M^{-1}(V) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(V)$$

è un intorno dell'origine in E.[15] Possiamo supporre V chiuso, cosicché anche U è chiuso. D'altra parte l'ipotesi su M significa precisamente che gli insiemi U sono assorbenti. Per il teorema di Baire, un sottoinsieme chiuso assorbente U di E ha interno non vuoto (si veda la prima parte della dimostrazione del teorema 9). Dunque $U - U$ è un intorno dell'origine in E. Ne segue che $M^{-1}(V - V)$ è un intorno dell'origine in E, e si ottiene la conclusione poiché, al variare di V, gli insiemi $V - V$ percorrono un sistema fondamentale di intorni dell'origine in F.

[14] Nota del traduttore. Nella prima frase manca, nell'originale, l'ipotesi che u sia continua, esplicita nella generalizzazione che segue.

[15] Nota del traduttore. La scansione reca un segno di unione. L'equicontinuità richiede che $u(x) \in V$ per ogni $u \in M$, da cui l'intersezione.

Corollario del teorema di Banach–Steinhaus. Siano E uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo, F uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff qualunque e (u_i) una successione di applicazioni lineari continue di E in F, che per ogni $x \in E$ converga a un limite $u(x)$. Allora la successione (u_i) è equicontinua. Pertanto u è un'applicazione continua, ed evidentemente lineare, di E in F, e (u_i) tende a u uniformemente su ogni compatto.

L'enunciato analogo per un filtro a base numerabile in $L(E, F)$ resta valido, poiché ci si può ricondurre al caso di una successione.

Un'applicazione particolarmente importante del teorema di Banach–Steinhaus è il teorema seguente, dal quale si può ricavare il precedente prendendo per F il campo degli scalari.

Teorema 12. Siano E, F spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi e G uno spazio vettoriale topologico qualunque. Affinché un'applicazione bilineare u di $E \times F$ in G sia continua è necessario e sufficiente che sia continua rispetto a ciascuna variabile separatamente. Più generalmente, una famiglia M di applicazioni bilineari di $E \times F$ in G è equicontinua se e soltanto se le $u \in M$ sono separatamente continue e, per ogni $(x, y) \in E \times F$, l'insieme $M(x, y)$ delle immagini $u(x, y)$, con $u \in M$, è limitato in G.

La necessità è immediata. La sufficienza segue dal lemma seguente.

Lemma. Siano E uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo, T uno spazio topologico metrizzabile, G uno spazio vettoriale topologico e M una famiglia di applicazioni $(x, t) \mapsto u(x, t)$ di $E \times T$ in G, lineari rispetto a x. Affinché M sia equicontinua è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le tre condizioni seguenti.

1. Le $u \in M$ sono continue rispetto a x.
2. La famiglia M è equicontinua rispetto a t, ossia, per ogni $x_0 \in E$, la famiglia delle applicazioni $t \mapsto u(x_0, t)$ di T in G è equicontinua.
3. M è limitata per la topologia della convergenza semplice, ossia, per ogni $(x, t) \in E \times T$, l'insieme $M(x, t)$ degli $u(x, t)$, con $u \in M$, è limitato in G.

(Questo lemma è stato trovato in un manoscritto di N. Bourbaki.)

Il lemma implica il teorema 12, poiché le ipotesi del teorema implicano quelle del lemma. La condizione 2) si verifica mediante il teorema di Banach–Steinhaus. Per dimostrare il lemma ci si riconduce al caso in cui T è compatto, utilizzando il seguente fatto, di verifica immediata. Siano P uno spazio metrizzabile e M una famiglia di applicazioni di P in uno spazio uniforme G. Affinché M sia equicontinua in $p \in P$ è necessario e sufficiente che, per ogni successione (p_n) tendente a p, le restrizioni delle $u \in M$ all'insieme costituito dai p_n e da p siano equicontinue in p. Quando T è compatto, dalle ipotesi 2) e 3) segue, per compattezza, che per ogni $x_0 \in E$ l'insieme degli $u(x_0, t)$, al variare di u in M e di t in T, è limitato in G. In virtù dell'ipotesi 1) e del teorema di Banach–Steinhaus, la famiglia di tutte le applicazioni $x \mapsto u(x, t)$, al variare di u in M e di t in T, è dunque una famiglia equicontinua di applicazioni di E in G. Se W è un intorno dell'origine in G e $(x_0, t_0) \in E \times T$, esiste un intorno U di x_0 tale che $u(x, t) - u(x_0, t) \in W$ per $x \in U$, quali che siano $t \in T$ e $u \in M$. D'altra parte, per l'ipotesi 2), esiste un intorno V di t_0 in T tale che

$$u(x_0, t) - u(x_0, t_0) \in W$$

per ogni $t \in V$ e ogni $u \in M$. Si ha allora

$$u(x,t) - u(x_0,t_0) \in W + W$$

per $x \in U$, $t \in V$ e qualunque $u \in M$.[16] Poiché W era un intorno arbitrario dell'origine in G, ne segue che M è equicontinua.

Esercizio. Siano E uno spazio topologico e F un suo sottoinsieme. Si dice che F è di prima categoria rispetto a E in un punto $x \in E$ se esiste un intorno V di x tale che $V \cap F$ sia un sottoinsieme di prima categoria in E.
a) Si mostri che, se E è uno spazio di Baire e F non è di prima categoria in alcun punto $x \in F$, allora F è uno spazio di Baire.
b) Si mostri che, se F è uno spazio di Baire denso in E, allora E è uno spazio di Baire e F non è di prima categoria rispetto a E in alcun punto $x \in F$. (Dunque, se F è un sottospazio topologico denso di E, esso è uno spazio di Baire se e soltanto se E è uno spazio di Baire e F non è di prima categoria rispetto a E in alcun punto $x \in F$.)
c) Siano E uno spazio vettoriale topologico e F un sottospazio vettoriale denso. Allora F è uno spazio di Baire se e soltanto se E è uno spazio di Baire e F non è di prima categoria in E. In particolare, se F è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile, è uno spazio di Baire se e soltanto se non è di prima categoria nel suo completamento.
d) Sia E uno spazio vettoriale topologico. Esso è uno spazio di Baire se e soltanto se non è unione di una successione di chiusi con interno vuoto.

[16] Nota del traduttore. Nell'originale compare $W+V$. Entrambi gli addendi della differenza appartengono a $W \subset G$, mentre V è un intorno in T.

Capitolo 2 I teoremi generali di dualità negli spazi localmente convessi

1 Introduzione

Come indica il titolo, raccogliamo in questo capitolo tutte le proprietà di dualità che discendono direttamente dal teorema di Hahn–Banach, nella misura in cui riguardano gli spazi localmente convessi nella loro massima generalità. Nei capitoli successivi studieremo categorie particolari di spazi.

A differenza di quanto accadeva nel capitolo precedente, avrà importanza la particolare struttura del campo dei numeri reali, e soprattutto la sua struttura d'ordine. Poiché il campo reale $\mathbf{R}$ è un sottocampo del campo complesso $\mathbf{C}$, ogni spazio vettoriale complesso E ha anche la struttura di uno spazio vettoriale reale E_0. Per una topologia su E non vi è differenza tra la compatibilità con la struttura vettoriale reale e quella con la struttura complessa.[17] Se E è uno spazio vettoriale topologico complesso, possiamo dunque considerare lo spazio vettoriale topologico reale associato E_0.

Chiameremo lo spazio E' delle forme lineari *continue* su E lo *spazio duale*, o semplicemente il *duale*, dello spazio vettoriale topologico E (reale o complesso). Si ha allora la seguente proposizione.

Proposizione 1. Siano E uno spazio vettoriale topologico complesso ed E_0 lo spazio vettoriale topologico reale associato. Se a ogni forma lineare continua x' su E associamo la funzione

$$x \longmapsto \mathrm{Re}\langle x, x'\rangle$$

su $E = E_0$, otteniamo una biiezione del duale E' sul duale $(E_0)'$ di E_0, che è un isomorfismo per le strutture vettoriali reali di E' e di $(E_0)'$. Se x' è la forma lineare complessa corrispondente alla forma lineare reale continua y', il nucleo di x' è $V \cap iV$, dove V è il nucleo di y'.

Per la prima parte osserviamo che $\mathrm{Re}\langle x, x'\rangle$ è una forma lineare reale continua su E, che indicheremo con y', e che x' si esprime mediante y' con la formula

$$\langle x, x'\rangle = \langle x, y'\rangle - i\langle ix, y'\rangle.$$

Viceversa, data una forma lineare reale continua y' su E, la formula precedente definisce una forma lineare complessa continua x'. La caratterizzazione del nucleo di x' è evidente.

2 Insiemi convessi e dischi

Definizione 1. Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale E si dice *convesso* se, insieme a due punti x, y qualsiasi di A, contiene il segmento che li congiunge.

Ricordiamo che il segmento che congiunge x e y è l'insieme dei punti $\lambda x + (1-\lambda)y$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Un insieme ridotto a un punto, una sottovarietà lineare affine e un segmento sono esempi di insiemi convessi. Se F è un sottospazio vettoriale di E contenente A, dire che A è convesso in F equivale a dire che è convesso in E.

Proposizione 2. Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione uno. I sottoinsiemi convessi di E sono gli intervalli di E (limitati o illimitati, chiusi, aperti o semiaperti).

La dimostrazione è immediata.

[17] Nota del traduttore. Per risalire da una topologia vettoriale reale a una complessa occorre anche la continuità di $x \mapsto ix$. Il passaggio al sottostante spazio reale, usato qui, è sempre valido.

Proposizione 3. Ogni intersezione e ogni unione filtrante crescente di insiemi convessi è convessa. L'immagine diretta o inversa di un convesso mediante un'applicazione lineare è convessa. Se gli E_i sono spazi vettoriali e gli $A_i \subset E_i$ sottoinsiemi convessi, il prodotto degli A_i è un sottoinsieme convesso del prodotto degli E_i. La somma di una famiglia di sottoinsiemi convessi A_i di uno spazio vettoriale E è convessa. Un traslato e un'immagine per omotetia di un convesso sono convessi.

La dimostrazione è elementare. Le prime cinque proprietà di stabilità si verificano facilmente. Il caso della somma si riduce a quello di una somma finita, e allora si considera $\sum_i A_i$ come l'immagine del convesso $\prod_i A_i$ per l'applicazione lineare $(x_i) \mapsto \sum_i x_i$ di E^n in E. In particolare, se A è convesso, $A+x$ è convesso per ogni $x \in E$, poiché $\{x\}$ è convesso.

Poiché E è convesso e un'intersezione di convessi è convessa, esiste un minimo convesso contenente un insieme assegnato A. Si chiama *inviluppo convesso* di A e si indica con $\Gamma(A)$.

Proposizione 4. Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale. Il suo inviluppo convesso $\Gamma(A)$ è l'insieme delle somme

$$\sum_{1 \le i \le n} \lambda_i x_i,$$

dove gli x_i appartengono ad A e i λ_i sono scalari positivi di somma 1.

Per dimostrare la proposizione 4 basta provare che l'insieme di queste somme è convesso (il che è immediato) e che ciascuna somma appartiene a ogni convesso B contenente A. Ciò è evidente per una somma di uno o due termini e si verifica per induzione nel caso generale.

Definizione 2. Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale E si dice *assolutamente convesso*, o semplicemente *disco*, se, insieme a due punti x, y, contiene tutti i punti $\lambda x + \mu y$ per ogni coppia di scalari tale che $|\lambda| + |\mu| \le 1$.[18]

Un tale insieme è a maggior ragione convesso e inoltre equilibrato (cfr. capitolo 1, proposizione 2), ossia stabile per le omotetie di modulo ≤ 1. Vale anche il viceversa, e più precisamente la proposizione seguente.

Proposizione 5. Per un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale E le seguenti condizioni sono equivalenti.
a) A è un disco.
b) A è convesso ed equilibrato.
c) A è convesso e $\lambda A \subset A$ per $|\lambda| = 1$.

Basta mostrare che c) implica b) e che b) implica a). Supponiamo verificata c) e dimostriamo che A è equilibrato, ossia che $\lambda A \subset A$ per ogni λ con $|\lambda| \le 1$. Per $\lambda \neq 0$ si ha $\lambda = |\lambda|\,\lambda/|\lambda|$, sicché basta considerare il caso $0 \le \lambda \le 1$. Ora c) implica che $-x \in A$ ogni volta che $x \in A$. Per convessità tutto il segmento da $-x$ a x è contenuto in A, e in particolare vi appartengono i punti λx con $0 \le \lambda \le 1$. Supponiamo ora verificata b) e dimostriamo a), ossia che $\lambda x + \mu y \in A$ per $x, y \in A$ e $|\lambda| + |\mu| \le 1$. Scrivendo, per i coefficienti non nulli,

$$\lambda = |\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|}, \qquad \mu = |\mu| \frac{\mu}{|\mu|},$$

[18] Nota del traduttore. In questa definizione e nella prima formulazione del passo b) $\Rightarrow$ a) a p. 48 l'originale reca ≥ 1. Il verso ≤ 1 è quello richiesto dalla proposizione 5 e dalla formula dell'inviluppo a p. 49.

vediamo ancora che possiamo supporre $\lambda, \mu \geq 0$ e, escluso il caso immediato, $\lambda + \mu > 0$. Basta allora scrivere

$$\lambda x + \mu y = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}x + \frac{\mu}{\lambda + \mu}y\right).$$

Le proprietà di stabilità enunciate nella proposizione 3 valgono tutte per i dischi, con la sola eccezione che il traslato di un disco non è in generale un disco. Lo si può dimostrare direttamente come nella proposizione 3, oppure dedurlo da questa mediante il criterio c) della proposizione 5. Un sottospazio vettoriale di E, e in particolare E stesso, è evidentemente un disco. Esiste dunque un minimo disco contenente un sottoinsieme dato A, detto *inviluppo assolutamente convesso* di A. Come per la proposizione 5, si dimostra che tale inviluppo è l'insieme delle somme $\sum_i \lambda_i x_i$ con $x_i \in A$ e $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$.

Nel caso del campo reale $\mathbf{R}$, soltanto $+1$ e -1 hanno modulo uno. Per la proposizione 5, c), i dischi sono dunque gli insiemi convessi simmetrici (A si dice *simmetrico* se $A = -A$).

3 Coni convessi e spazi vettoriali ordinati

Benché la teoria elementare che segue non sia necessaria allo sviluppo della teoria degli spazi vettoriali topologici, la esponiamo per il suo interesse nelle applicazioni.

Definizione 3. Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale E si chiama *cono* se $\lambda A \subset A$ per ogni $\lambda > 0$.

Il cono A può contenere o meno l'origine. La definizione significa anche che A è unione di semirette «aperte» uscenti dall'origine O, con l'eventuale aggiunta dell'origine. L'insieme vuoto e i sottospazi vettoriali sono casi particolari di coni.

Proposizione 6. Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale è un cono convesso se e soltanto se

$$A + A \subset A, \qquad \lambda A \subset A \quad (\lambda > 0).$$

Per la necessità si scriva $x+y = 2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)$, da cui si vede che, se $x, y \in A$, anche $x+y \in A$. La sufficienza è ancor più immediata.

Per i coni convessi si hanno inoltre le stesse proprietà di stabilità della proposizione 3, salvo che il traslato di un cono convesso non è in generale un cono convesso. Queste proprietà si verificano direttamente oppure si deducono dalla proposizione 3. Per ogni sottoinsieme A di E esiste un minimo cono convesso contenente A, detto *cono convesso generato da* A. È chiaro che esso è l'insieme delle somme $\sum_i \lambda_i x_i$ con $x_i \in A$ e scalari $\lambda_i > 0$.

Definizione 4. Sia E uno spazio vettoriale. Una relazione di preordine su E si dice *compatibile con la struttura vettoriale* se è invariante per traslazioni e per omotetie di rapporto strettamente positivo. Uno spazio vettoriale E munito di un (pre)ordine compatibile con la struttura vettoriale si chiama *spazio vettoriale (pre)ordinato*.

Gli assiomi significano dunque che da $x \leq y$ segue $x + z \leq y + z$ per ogni $z \in E$ e $\lambda x \leq \lambda y$ per ogni $\lambda > 0$. Ne deduciamo che da $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$ segue $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$. In particolare, $x \leq y$ equivale a $y - x \geq 0$, per cui il preordine è noto appena sia noto l'insieme P degli elementi ≥ 0 (detti *elementi positivi*). Dalla proposizione 6 si vede che P è un cono convesso e contiene evidentemente l'origine. Viceversa, sia P un cono convesso di E contenente zero. Si verifica subito che la relazione $y - x \in P$ è un preordine su E: è riflessiva poiché $0 \in P$, transitiva poiché $P + P \subset P$ e compatibile con la struttura

vettoriale poiché $\lambda P \subset P$ per $\lambda > 0$. Abbiamo così dimostrato la prima parte della proposizione seguente.

Proposizione 7. 1) Sia E uno spazio vettoriale. Vi è una corrispondenza biunivoca tra i preordini di E compatibili con la struttura vettoriale e i coni convessi di E contenenti l'origine. A un preordine compatibile corrisponde il cono P degli elementi positivi di E e a P corrisponde il preordine definito da $x \leq y$ se e soltanto se $y - x \in P$.

2) Uno spazio vettoriale preordinato E è ordinato se e soltanto se

$$P \cap (-P) = \{0\}.$$

È filtrante verso l'alto quando, per ogni $x, y \in E$, esiste z tale che $z \geq x$ e $z \geq y$. Qui P indica il cono degli elementi positivi.[19]

La dimostrazione della seconda parte è lasciata al lettore.

4 Seminorme e dischi assorbenti. Caratterizzazione degli spazi localmente convessi

Teorema 1. Siano E uno spazio vettoriale e p una seminorma su E. L'insieme U degli $x \in E$ tali che $p(x) \leq 1$ (la palla unitaria associata a p) è un disco assorbente. Conoscendo U si conosce p, in virtù della formula

$$p(x) = \inf_{\substack{\lambda > 0 \\ x \in \lambda U}} \lambda.$$

Viceversa, se U è un disco assorbente in E, la formula precedente, che definisce una funzione non negativa p poiché U è assorbente, definisce una seminorma su E, detta *funzionale di Minkowski* di U. La sua palla unitaria si ottiene da U aggiungendovi gli estremi degli intervalli definiti dall'intersezione di U con le semirette reali uscenti dall'origine.

La prima parte è immediata. Per il viceversa, essendo U equilibrato, è chiaro che $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ per ogni λ. Per mostrare che $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, osserviamo che da $p(x) < \lambda$ e $p(y) < \mu$ segue $p(x + y) \leq \lambda + \mu$, poiché, essendo U convesso,

$$\lambda U + \mu U = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} U + \frac{\mu}{\lambda + \mu} U \right) \subset (\lambda + \mu) U.$$

Anche la caratterizzazione della palla unitaria associata a p è immediata. Si ha dunque una corrispondenza biunivoca fra le seminorme su E e i dischi assorbenti la cui intersezione con ogni semiretta reale uscente dall'origine è chiusa. In particolare si ha il seguente corollario.

Corollario 1. Sia E uno spazio vettoriale topologico. Le seminorme continue su E corrispondono biunivocamente agli intorni chiusi e assolutamente convessi dell'origine O in E.

Teorema 2. Per uno spazio vettoriale topologico E sono equivalenti le seguenti condizioni.

a) E è localmente convesso (capitolo 1, § 6, definizione 4).

b) E ammette un sistema fondamentale di intorni assolutamente convessi di O.

c) E ammette un sistema fondamentale di intorni convessi di O.

[19] Nota del traduttore. L'originale dà tra parentesi la definizione di «filtrante verso l'alto», senza precisare la condizione corrispondente sul cono. Tale condizione è $P - P = E$.

L'equivalenza di a) e b) segue dal corollario 1, poiché dire che E è localmente convesso equivale a dire che le palle unitarie associate alle seminorme continue su E formano un sistema fondamentale di intorni dell'origine. Resta dunque da mostrare che c) implica b). A questo scopo osserviamo che, se V è un intorno convesso di O, allora $\bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$ è un intorno di O convesso (in quanto intersezione di convessi) e stabile per le omotetie di modulo uno, dunque è un disco (proposizione 5).

Sia E uno spazio vettoriale. L'estremo superiore di tutte le topologie localmente convesse su E è una topologia localmente convessa, la più fine tra quelle su E. Per questa topologia un sottoinsieme convesso V di E è un intorno di O se e soltanto se è assorbente. La necessità è evidente. Per la sufficienza si può supporre V assolutamente convesso (altrimenti lo si sostituisce con $\bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$). Allora V contiene l'interno della palla unitaria definita dalla seminorma p, funzionale di Minkowski di V, ed è quindi un intorno di O per la topologia seminormata definita da p. Ne segue l'asserto. Un punto $x \in E$ si dice *algebricamente interno* a un insieme V se $V - x$ è assorbente. Se V è convesso, ciò equivale a dire che x è interno a V per la più fine topologia localmente convessa. Una nozione di natura puramente algebrica è così ricondotta a una nozione topologica.

5 Insiemi convessi negli spazi vettoriali topologici

Proposizione 8. Sia E uno spazio vettoriale topologico. La chiusura di un insieme convesso (rispettivamente di un disco, di un cono convesso) è convessa (rispettivamente è un disco, un cono convesso).

La chiusura dell'inviluppo convesso $\Gamma(A)$ di un insieme A si chiama *inviluppo convesso chiuso* di A e si indica con $\overline{\Gamma}(A)$. Analogamente si definiscono l'inviluppo assolutamente convesso chiuso di A (o disco chiuso generato da A) e il cono convesso chiuso generato da A.

Proposizione 9. Siano E uno spazio vettoriale topologico e A un suo sottoinsieme convesso. Allora l'interno $\mathring{A}$ è convesso e, se non è vuoto, la sua chiusura coincide con la chiusura di A. Se x_0 è un punto interno di A, l'interno di A (rispettivamente la chiusura o la frontiera di A) è l'unione degli intervalli aperti (rispettivamente degli intervalli chiusi o degli estremi finiti) determinati dall'intersezione di A con le semirette reali uscenti da x_0, considerando gli intervalli nella rispettiva semiretta.

La dimostrazione segue immediatamente dal lemma seguente.

Lemma. Siano A un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico E, x un punto interno di A e y un punto della chiusura di A. Allora il segmento che congiunge x a y, privato di y, è interno ad A.

Sia $0 < \lambda \leq 1$. Mostriamo che $\lambda x + (1-\lambda)y$ è interno ad A. Poniamo $U = \mathring{A}$. Il caso $\lambda = 1$ è immediato. Per $\lambda < 1$ consideriamo l'insieme degli $z \in E$ tali che

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda U + (1-\lambda)z,$$

ossia l'insieme $y + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x-U)$. È un aperto contenente y (poiché $x \in U$), e pertanto, essendo y nella chiusura di A, contiene un punto $z \in A$. Poiché $U \subset A$, l'insieme $\lambda U + (1-\lambda)z$ è un aperto contenuto in A e contenente $\lambda x + (1-\lambda)y$, da cui la conclusione.

Corollario. L'interno di un disco è un disco e l'interno di un cono convesso è un cono convesso. Siano p una seminorma continua su E e U la palla unitaria associata. Allora U è chiusa, il suo interno è l'insieme degli x tali che $p(x) < 1$ e la sua frontiera è l'insieme degli x tali che $p(x) = 1$.

Esercizio 1. Sia A un insieme convesso in uno spazio vettoriale E di dimensione finita. Se il sottospazio affine generato da A è E, allora A ha interno non vuoto.

Esercizio 2. Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale reale E di dimensione n. Si dimostri che l'inviluppo convesso di A è l'insieme delle somme di $n+1$ termini $\sum_i \lambda_i x_i$, dove $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_i \lambda_i = 1$. Se ne deduca che, se A è compatto, $\Gamma(A)$ è compatto.

Esercizio 3. Sia A un sottoinsieme convesso compatto di uno spazio vettoriale reale E di dimensione n e si supponga che A abbia interno non vuoto. Si dimostri che A è omeomorfo alla palla unitaria di $\mathbf{R}^n$.

Esercizio 4. a) Siano A, B due sottoinsiemi convessi di uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff E. Si mostri che l'inviluppo convesso di $A \cup B$ è l'insieme delle somme $\lambda x + (1-\lambda)y$, con $x \in A$, $y \in B$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Corollario. Se A, B sono convessi compatti, $\Gamma(A \cup B)$ è compatto.

b) Sia A un sottoinsieme convesso di E contenente l'origine. Si mostri che il suo inviluppo assolutamente convesso è contenuto in $A-A$ nel caso degli scalari reali e in $(A-A)+i(A-A)$ nel caso degli scalari complessi.

Corollario. Se A è convesso e relativamente compatto, il suo inviluppo assolutamente convesso è relativamente compatto.

Esercizio 5. Sia E uno spazio localmente convesso. Si mostri che l'inviluppo assolutamente convesso chiuso di un sottoinsieme precompatto di E è precompatto. Si consideri il caso in cui ogni insieme chiuso e limitato di E sia completo.

Esercizio 6. Siano E uno spazio vettoriale topologico, A un suo sottoinsieme convesso e V un sottospazio vettoriale. Allora

$$\overline{\Gamma}(A \cup V) = \overline{A + V}.$$

Se ne deduca che, se E è di Hausdorff, A è convesso compatto e V è un sottospazio chiuso, allora

$$\overline{\Gamma}(A \cup V) = A + V.$$

(Si mostri che, se A e B sono due sottoinsiemi di E, il primo compatto e il secondo chiuso, allora $A + B$ è chiuso.)

6 Il teorema di Hahn–Banach

Nei prossimi due paragrafi un *iperpiano* è un sottospazio affine di codimensione uno, non necessariamente passante per l'origine. Se E è uno spazio vettoriale topologico, abbiamo visto nel capitolo 1, § 12 (proposizione 21 e teorema 6), che un iperpiano V di E è chiuso se e soltanto se il suo complementare ha almeno un punto interno, o anche, se V è dato dall'equazione $x \in V \Leftrightarrow \langle x, x' \rangle = \alpha$, se e soltanto se la forma lineare x' su E è continua. Vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra gli iperpiani chiusi di E che non passano per l'origine e le forme lineari continue non nulle su E: alla forma x' si associa l'iperpiano di equazione $\langle x, x' \rangle = 1$. Dire che V non incontra un insieme A significa che x' non assume il valore 1 su A. Se A è un disco, ciò equivale a dire che $|\langle x, x' \rangle| < 1$ per $x \in A$. Se inoltre A è aperto, e quindi è l'interno della palla unitaria associata a una seminorma continua p su E, ciò equivale anche a dire che $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$ per $x \in A$, ossia che $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$ per

$p(x) \leq 1$. In altri termini x', considerata come forma lineare su E seminormato da p, ha norma ≤ 1 (capitolo 1, § 5).

Teorema di Hahn–Banach I. Siano E uno spazio vettoriale topologico reale o complesso, U un sottoinsieme convesso, aperto e non vuoto di E e V un sottospazio affine di E disgiunto da U. Esiste allora un iperpiano chiuso contenente V e disgiunto da U.

Dimostrazione. Possiamo supporre che V contenga l'origine, operando se necessario una traslazione, e quindi che V sia un sottospazio vettoriale. Possiamo inoltre limitarci agli scalari reali: nel caso complesso, se W è un iperpiano reale contenente V e disgiunto da U, allora $W \cap iW$ è un iperpiano complesso che soddisfa le stesse condizioni. Sia M l'insieme dei sottospazi di E che contengono V e non incontrano U. Ordinato per inclusione, M è evidentemente induttivo. Sia W un suo elemento massimale. Basta mostrare che W è un iperpiano: sarà necessariamente chiuso, poiché il suo complementare contiene l'aperto U. Mostreremo che, se W avesse codimensione ≥ 2, non sarebbe massimale. Infatti $F = E/W$ avrebbe dimensione ≥ 2 e l'immagine U' di U mediante l'applicazione canonica ϕ di E su F sarebbe un convesso aperto di F non contenente O. Se costruiamo in F una retta vettoriale D disgiunta da U', il risultato seguirà poiché $\phi^{-1}(D)$ apparterrà a M, conterrà W e sarà distinto da W.

Cerchiamo dunque in F una retta vettoriale D disgiunta da un assegnato convesso aperto U' che non contiene l'origine. Poiché $\dim F \geq 2$, ci si riconduce al caso in cui F ha dimensione due e si può supporre F di Hausdorff. Inoltre si verifica che $C = \bigcup_{\lambda>0} \lambda U'$ è un cono convesso aperto che non contiene l'origine e contiene U', sicché si può sostituire U' con C. Poiché il complementare di $\{0\}$ è connesso e distinto da C, esiste almeno un punto $x \neq 0$ della frontiera di C nel suo complementare. Essendo C aperto e conico, anche i punti λx per $\lambda > 0$ appartengono alla frontiera e dunque non appartengono a C. Per $\lambda < 0$, neppure λx può appartenere a C: altrimenti tutti i punti del segmento da λx a x, eccetto x, apparterrebbero a C (lemma del § 5), il che è assurdo perché fra essi vi è l'origine. La retta vettoriale passante per x soddisfa quindi la condizione richiesta.[20]

Supponiamo ora che l'insieme U del teorema sia un disco. Esso contiene allora l'origine e, di conseguenza, il sottospazio affine V non passa per l'origine. Nello spazio vettoriale F generato da V, quest'ultimo è dunque un iperpiano affine non passante per l'origine. Tenendo presenti le osservazioni iniziali di questo paragrafo si ottiene quanto segue. Ogni forma lineare x' su un sottospazio F tale che $|\langle x, x'\rangle| < 1$ per $x \in U \cap F$ è la restrizione di una forma lineare y' su E tale che $|\langle x, y'\rangle| < 1$ per $x \in U$. In altri termini si ha il secondo enunciato.

Teorema di Hahn–Banach II. Siano E uno spazio vettoriale topologico, p una seminorma continua, F un sottospazio vettoriale di E e x' una forma lineare su F di norma ≤ 1 per la seminorma indotta da p. Allora x' è la restrizione a F di una forma lineare y' su E di norma ≤ 1 per la seminorma p.

Nell'enunciato abbiamo omesso di dire che x' e y' sono continue, poiché lo sono automaticamente. È chiaro che la topologia di E non interviene realmente nell'enunciato, dove conta soltanto quella della seminorma p.

Corollario 1. Siano E uno spazio vettoriale localmente convesso e F un suo sottospazio vettoriale. Ogni forma lineare continua su F è la restrizione di una forma lineare continua

[20]Nota del traduttore. Nell'ultimo passo a p. 54 si legge di nuovo $\lambda > 0$ e compare U. Per escludere l'altra semiretta si deve prendere $\lambda < 0$ e applicare il lemma al cono C.

su E. Ogni insieme equicontinuo di forme lineari su F è l'insieme delle restrizioni di un insieme equicontinuo di forme lineari su E.

Basta osservare che una famiglia A di forme lineari su uno spazio localmente convesso (per esempio F) è equicontinua se e soltanto se esiste un intorno U di O sul quale tutte le $x' \in A$ sono limitate in valore assoluto da 1. Ciò equivale all'esistenza di una seminorma continua p su F per la quale tutte le $x' \in A$ abbiano norma ≤ 1 nello spazio seminormato. In particolare si ha il seguente corollario.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Per ogni $x \in E$ non nullo esiste $x' \in E'$ tale che $\langle x, x' \rangle = 1$.

Basta considerare la forma lineare $\lambda x \mapsto \lambda$ sulla retta F generata da x, continua poiché E e quindi F sono di Hausdorff, e applicare il corollario 1. Più generalmente si dimostra il seguente risultato.

Corollario 3. Siano E uno spazio localmente convesso di Hausdorff, $x_1, \ldots, x_n$ elementi linearmente indipendenti di E e $C_1, \ldots, C_n$ scalari arbitrari. Esiste una forma lineare continua x' su E tale che $\langle x_i, x' \rangle = C_i$ per ogni i.

In particolare, per ogni i sia x'_i una forma lineare continua su E tale che $\langle x_j, x'_i \rangle = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker) per ogni j. Allora l'operatore $\sum_i x'_i \otimes x_i$ su E è una proiezione continua di E sul sottospazio vettoriale generato dagli x_i. Ne segue (capitolo 1, § 11) il corollario seguente.

Corollario 4. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Ogni suo sottospazio vettoriale di dimensione finita ammette un supplementare topologico.

Esercizio. Siano E uno spazio vettoriale topologico e P un cono convesso di E contenente l'origine e avente interno non vuoto (P è allora l'insieme degli elementi positivi di E per una struttura di spazio vettoriale preordinato e filtrante su E, cfr. § 3). Sia F un sottospazio vettoriale di E che incontra l'interno di P. Si dimostri che ogni forma lineare «positiva» su E, cioè a valori non negativi su P, è continua, e che ogni forma lineare positiva su F è la restrizione di una forma lineare positiva su E.

7 Separazione dei convessi. Caratterizzazione della chiusura di un convesso

In questo paragrafo consideriamo soltanto spazi vettoriali *reali*.

Siano E uno spazio vettoriale topologico di dimensione ≥ 1, x' una forma lineare continua non nulla su E e α uno scalare. L'insieme M degli $x \in E$ tali che $\langle x, x' \rangle \leq \alpha$ è un convesso chiuso il cui interno $\mathring{M}$ è l'insieme degli $x \in E$ tali che $\langle x, x' \rangle < \alpha$ e la cui frontiera è l'iperpiano V di equazione $\langle x, x' \rangle = \alpha$. Un insieme come M si chiama *semispazio chiuso* e il suo interno *semispazio aperto*. Le disuguaglianze $\langle x, x' \rangle \geq \alpha$ e $\langle x, x' \rangle > \alpha$ si scrivono rispettivamente $\langle x, -x' \rangle \leq -\alpha$ e $\langle x, -x' \rangle < -\alpha$ e definiscono quindi anch'esse un semispazio chiuso M_1 e un semispazio aperto $\mathring{M}_1$. Si verifica che vi sono esattamente due semispazi chiusi aventi per frontiera l'iperpiano chiuso V, precisamente M e M_1. Li chiamiamo *semispazi chiusi definiti dall'iperpiano (chiuso)* V. La loro intersezione è V, mentre i corrispondenti semispazi aperti sono disgiunti.

Un iperpiano chiuso V *separa* (rispettivamente *separa strettamente*) due sottoinsiemi A, B di E se A è contenuto in uno dei semispazi chiusi (rispettivamente aperti) e B nell'altro semispazio definito da V. Scrivendo l'equazione di V nella forma $\langle x, x' \rangle = \alpha$,

ciò significa che x' assume valori $\leq \alpha$ su A e $\geq \alpha$ su B (rispettivamente $< \alpha$ su A e $> \alpha$ su B), o viceversa. Si può anche dire che il punto α di $\mathbf{R}$ separa (rispettivamente separa strettamente) gli insiemi $x'(A)$ e $x'(B)$. Data x', esiste uno scalare α tale che l'iperpiano $\langle x, x' \rangle = \alpha$ separi A e B se e soltanto se esiste uno scalare α che separa $x'(A)$ e $x'(B)$. In particolare, se A e B sono convessi, anche $x'(A)$ e $x'(B)$ sono convessi e dunque sono intervalli (proposizione 2). È allora evidentemente *sufficiente* che tali intervalli siano disgiunti, ossia che x' non si annulli su $A - B$, vale a dire che l'iperpiano vettoriale W definito da x' non incontri $A - B$. Applicando il teorema di Hahn–Banach I si ottiene la prima parte della proposizione seguente.

Proposizione 10. Siano E uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e A, B due suoi sottoinsiemi convessi disgiunti.

1. Se uno dei due insiemi A, B è aperto, esiste un iperpiano chiuso che separa A e B.
2. Se A è chiuso e B compatto, esiste un iperpiano chiuso che separa strettamente A e B.

La seconda parte si deduce dalla prima. Dalle ipotesi segue che esiste un intorno U di O tale che $A + U$ e $B + U$ siano disgiunti, per una nota proprietà degli insiemi compatti. Si può scegliere U aperto e convesso, poiché E è localmente convesso. Allora $A + U$ e $B + U$ sono aperti disgiunti ai quali si applica 1).

Applicando 2) al caso di un convesso chiuso e di un insieme ridotto a un punto, otteniamo il seguente teorema.

Teorema 3. Sia A un sottoinsieme convesso di uno spazio localmente convesso E. Affinché A sia chiuso è necessario e sufficiente che sia l'intersezione di una famiglia di semispazi chiusi.

Ne deduciamo il risultato apparentemente più generale che segue.

Corollario 1. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme. L'inviluppo convesso chiuso $\overline{\Gamma}(A)$ è l'intersezione dei semispazi chiusi contenenti A.

Dire che $x_0 \in E$ appartiene a $\overline{\Gamma}(A)$ equivale dunque a dire che, per ogni $x' \in E'$ e ogni scalare α tale che $\langle x, x' \rangle \leq \alpha$ per $x \in A$, si ha $\langle x_0, x' \rangle \leq \alpha$.

Corollario 2. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme. Il sottospazio vettoriale chiuso generato da A è l'intersezione degli iperpiani vettoriali chiusi contenenti A.

Basta provare che, se V è un sottospazio vettoriale chiuso e $x \notin V$, esiste un iperpiano chiuso contenente V e non x. Ciò segue dal teorema 3, o più rapidamente dall'applicazione diretta del teorema di Hahn–Banach I, scegliendo un intorno convesso aperto U di x disgiunto da V. Esplicitamente, un punto $x \in E$ appartiene al sottospazio vettoriale chiuso generato da A se e soltanto se ogni forma lineare continua nulla su A si annulla in x.

Definizione 5. Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale topologico E si dice *totale* se il sottospazio vettoriale chiuso generato da A è E.

Dal corollario 2 segue il corollario seguente.

Corollario 3. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme. Affinché A sia totale è necessario e sufficiente che ogni forma lineare continua su E che si annulla su A sia identicamente nulla.

Talvolta è utile la seguente proposizione.

Proposizione 11. Uno spazio vettoriale topologico E è separabile se e soltanto se contiene un sottoinsieme totale numerabile.

La condizione è chiaramente necessaria. Viceversa, sia A un sottoinsieme totale numerabile di E. L'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti razionali degli elementi di A è numerabile e denso nel sottospazio generato da A, e ne segue l'asserto.

Si osservi che il teorema di Hahn–Banach II e il teorema 3 appena dimostrato sono le forme più comode del teorema di Hahn–Banach I (in effetti sono le più generali). I prossimi due paragrafi presenteranno il teorema 3 in una forma utile.

Esercizio. Si dimostri il teorema di Hahn–Banach I servendosi della proposizione 10 oppure del teorema 3. (Ci si riconduca, nell'enunciato del teorema di Hahn–Banach I, al caso in cui V è ridotto a un punto x. Se si parte dal teorema 3, si consideri dapprima il caso $x \notin \overline{U}$. Si tratti poi il caso in cui x è un punto di frontiera di U passando al limite, dopo essersi ricondotti a supporre $O \in U$. Si confronti con l'esercizio del § 8.)

8 Sistemi duali e topologia debole

Definizione 5. Un *sistema duale* è una coppia di spazi vettoriali E, E' munita di una forma bilineare sul prodotto $E \times E'$.

Il valore della forma su (x, x') si indica con $\langle x, x' \rangle$. Si dice anche che gli spazi E, E' sono *posti in dualità* dalla forma $\langle x, x' \rangle$. Dare una dualità fra E ed E' equivale a dare un'applicazione lineare di E' nel duale algebrico E^* di E che a $x' \in E'$ faccia corrispondere la forma $x \mapsto \langle x, x' \rangle$ su E. Ciò equivale a dare un'applicazione lineare di E nel duale algebrico E'^* di E'. La dualità si dice *separata in* E' (rispettivamente *in* E) se l'applicazione corrispondente di E' in E^* (rispettivamente di E in E'^*) è iniettiva. In tal caso si identifica abitualmente E' con un sottospazio vettoriale di E^* (oppure E con un sottospazio vettoriale di E'^*). Viceversa, uno spazio vettoriale E e un sottospazio vettoriale E' del suo duale algebrico E^* definiscono un sistema duale (E, E') separato in E'. Esso è separato in E se e soltanto se l'unico elemento $x \in E$ sul quale si annullano tutti gli $x' \in E'$ è lo zero. La dualità (E, E') si dice *separata* se è separata sia in E sia in E'.

Un esempio importante è dato da uno spazio vettoriale topologico localmente convesso E e dal suo duale E'. Essi formano un sistema duale separato in E', che è separato in E se e soltanto se E è di Hausdorff (si usi il corollario 2 del teorema di Hahn–Banach II).

Definizione 6. Sia (E, E') un sistema duale. La *topologia debole* su E è la meno fine delle topologie su E che rendono continue le forme lineari $x \mapsto \langle x, x' \rangle$, con $x' \in E'$. Si definisce simmetricamente la topologia debole su E'. Si indicano rispettivamente con $\sigma(E, E')$ e $\sigma(E', E)$.

In particolare, se E è uno spazio localmente convesso ed E' è il suo duale, al sistema duale (E, E') corrispondono una topologia debole su E e una su E'. Parlando della «topologia debole» su E o su E' intenderemo, salvo indicazione contraria, queste topologie.

Con le topologie deboli E ed E' sono spazi localmente convessi. Per la topologia debole E è di Hausdorff se e soltanto se la dualità è separata in E. (Per E' si ha lo stesso criterio e d'ora in poi ometteremo di ripetere gli enunciati corrispondenti per E'.) La topologia

debole di E dipende soltanto dall'immagine di E' in E^* e quindi coincide con la topologia debole definita da tale sottospazio di E^*.

Un sottoinsieme di E si dice *debolmente chiuso* (o debolmente aperto, debolmente compatto, ecc.) se è chiuso (o aperto, compatto, ecc.) per la topologia debole. Quando E è uno spazio localmente convesso, occorre ricordare che la condizione di essere debolmente chiuso o debolmente aperto è più restrittiva di quella di essere chiuso o aperto. Per la compattezza vale il contrario.

Un sistema fondamentale di intorni dell'origine in E è formato dagli insiemi V degli $x \in E$ tali che $|\langle x, x_i' \rangle| \leq 1$ per ogni i, dove gli x_i' formano una famiglia finita di elementi di E'. Ciascun V contiene il sottospazio vettoriale H degli x tali che $\langle x, x_i' \rangle = 0$ per ogni i. Ne segue che ogni forma lineare su E limitata su V è nulla su H e quindi è combinazione lineare delle forme definite dagli x_i'. Di qui la proposizione seguente.

Proposizione 12. Sia (E, E') un sistema duale. Le forme lineari debolmente continue su E sono esattamente quelle definite dagli $x' \in E'$.

Per simmetria vale evidentemente l'analogo su E'.

Corollario. Sia E uno spazio localmente convesso. Le forme lineari continue per la topologia originaria sono le stesse che per la topologia debole.

Teorema 4. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme convesso. Allora A è chiuso se e soltanto se è debolmente chiuso.

Possiamo anzitutto ricondurre la dimostrazione al caso reale. Infatti con l'aiuto della proposizione 1 si verifica facilmente che, se E è uno spazio localmente convesso complesso, la sua topologia debole coincide con quella dello spazio vettoriale topologico reale associato. Se A è chiuso, esso è intersezione di una famiglia di semispazi chiusi (teorema 3). Poiché un semispazio chiuso è definito da una disuguaglianza $\langle x, x' \rangle \leq \alpha$, con $x' \in E'$, è anche debolmente chiuso. Dunque A è debolmente chiuso.

Corollario. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme. L'inviluppo convesso chiuso di A coincide con il suo inviluppo convesso debolmente chiuso. In particolare, se A è convesso, la sua chiusura coincide con la sua chiusura debole.

Teorema 4′. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme. Allora A è limitato se e soltanto se è debolmente limitato.

Basta mostrare che, se A è debolmente limitato, è già limitato. Se E è normato, l'applicazione naturale di E nel duale di E', dove E' è considerato come spazio normato (capitolo 1, § 5), è un'isometria sulla propria immagine (per il teorema di Hahn–Banach II, prendendo per F la retta generata da un $x \in E$). La topologia debole di E è allora quella indotta dalla topologia della convergenza semplice nel duale di E'. Per il teorema di Banach–Steinhaus (capitolo 1, § 15, teorema 11), A è una famiglia equicontinua di forme lineari su E', essendo limitata per la convergenza semplice. Dunque A è limitato anche per la norma di E. Quando E è uno spazio localmente convesso qualunque, consideriamo la sua topologia come la meno fine che rende continue certe applicazioni lineari u_i di E in spazi normati E_i (capitolo 1, § 6, proposizione 9). Mostrare che A è limitato si riduce a mostrare che gli $u_i(A)$ sono limitati negli E_i (capitolo 1, § 7, proposizione 11). Ma le u_i sono evidentemente continue per le topologie deboli di E ed E_i e quindi gli $u_i(A)$ sono debolmente limitati negli E_i. Ci si è così ricondotti al caso particolare considerato per

primo. Grazie al teorema $4'$ non vi è ambiguità, dato un sistema duale (E, E'), nel dire semplicemente «sottoinsiemi limitati» anziché «sottoinsiemi debolmente limitati» in E o in E'.

La proposizione 12 e ancor più i teoremi 4 e $4'$ riconducono molte questioni relative a uno spazio localmente convesso E a considerazioni sulla sua topologia debole. Talvolta conviene quindi sostituirla alla topologia originaria per ragionare in termini di dualità. Occorre tuttavia osservare che raramente la topologia debole di E ne fa uno spazio completo. Più precisamente vale la seguente proposizione.

Proposizione 13. Sia (E, E') un sistema duale separato. Il duale algebrico E'^* di E', munito della topologia debole $\sigma(E'^*, E')$, è il completamento di E per la topologia debole.

Infatti E con la topologia debole si identifica con un sottospazio vettoriale topologico di E'^*. Basta dunque mostrare che E'^* è completo e che E è denso in E'^*. Ora E'^* è completo perché è un sottospazio chiuso dello spazio di *tutte* le funzioni scalari su E', munito della convergenza puntuale, che è completo. Inoltre, per mostrare che E è denso in E'^*, basta provare che ogni forma lineare continua su E'^* nulla su E è identicamente nulla (§ 7, teorema 3, corollario 3). Per la proposizione 12 ogni forma lineare continua su E'^* proviene però da un elemento di E', da cui la conclusione. Si osservi che, se (E, E') è separato soltanto in E, il completamento di E debole si identifica ancora con la chiusura di E nello spazio completo E'^* munito della topologia $\sigma(E'^*, E')$.

Esercizio 1. Sia E uno spazio localmente convesso. Una successione (x_i) di E converge debolmente a $a \in E$ se e soltanto se a appartiene all'inviluppo convesso chiuso di ogni sottosuccessione di (x_i).

Esercizio 2. Sia A un sottoinsieme convesso di uno spazio localmente convesso. Allora A è debolmente compatto se e soltanto se ogni base di filtro su A formata da insiemi convessi chiusi ha intersezione non vuota.

(Suggerimento. Per la sufficienza si mostri anzitutto che A è debolmente precompatto in quanto debolmente limitato, poi che A è debolmente completo. A questo scopo, dato un filtro di Cauchy debole ϕ su A, si osservi che gli inviluppi convessi chiusi in A degli insiemi $B \in \phi$ formano ancora una base di filtro di Cauchy debole. Essa ammette un punto di aderenza debole, che è limite del filtro e quindi, a maggior ragione, di ϕ.)

Esercizio 3. Sia E uno spazio normato di dimensione infinita. Si mostri che E non è debolmente completo. (Su E' esistono forme lineari discontinue per la topologia della norma di E' (capitolo 1, § 14, osservazioni), e a maggior ragione discontinue per $\sigma(E', E)$.)

9 Polarità

Definizione 7. Siano (E, E') un sistema duale e A un sottoinsieme di E. Il *polare* di A, indicato con A^0, è l'insieme degli $x' \in E'$ tali che $\mathrm{Re}\langle x, x'\rangle \geq -1$ per ogni $x \in A$. Si definisce analogamente il polare di un sottoinsieme di E'.

Le proprietà più immediate di questa nozione sono raccolte nella proposizione seguente.

Proposizione 14. Sia (E, E') un sistema duale.

1. Il polare di un sottoinsieme A di E è un sottoinsieme convesso e debolmente chiuso di E' contenente l'origine. Esso resta invariato se si sostituisce A con l'inviluppo convesso debolmente chiuso di $A \cup \{0\}$.

2. La trasformazione $A \mapsto A^0$ è decrescente. Per ogni scalare reale $\lambda \neq 0$ si ha

$$(\lambda A)^0 = \frac{1}{\lambda} A^0.$$

Se A, B sono due sottoinsiemi di E, si ha $(A \cup B)^0 = A^0 \cap B^0$.

3. Se A è un disco, anche A^0 è un disco e coincide con l'insieme degli $x' \in E'$ tali che $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$ per ogni $x \in A$. Se A è un cono, anche A^0 è un cono e coincide con l'insieme degli $x' \in E'$ tali che $\mathrm{Re}\langle x, x' \rangle \geq 0$ per ogni $x \in A$. Se A è un sottospazio vettoriale, A^0 è il sottospazio vettoriale di E' ortogonale ad A, ossia l'insieme degli $x' \in E'$ tali che $\langle x, x' \rangle = 0$ per ogni $x \in A$.

Per un sottoinsieme A di E chiamiamo *polare assoluto* di A l'insieme degli $x' \in E'$ tali che $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$ per ogni $x \in A$, e *cono supplementare* di A l'insieme degli $x' \in E'$ tali che $\mathrm{Re}\langle x, x' \rangle \geq 0$ per ogni $x \in A$. Dalla proposizione 14, punto 3, sappiamo che il polare di un disco coincide con il suo polare assoluto e il polare di un cono con il suo cono supplementare. Il polare assoluto di A non cambia sostituendo A con il suo inviluppo assolutamente convesso: coincide dunque con il polare di tale inviluppo. Analogamente il cono supplementare di A coincide con il polare del cono generato da A.

Teorema 5 (teorema del bipolare). Siano (E, E') un sistema duale e A un sottoinsieme convesso debolmente chiuso di E contenente l'origine. Allora $(A^0)^0 = A$.

Ciò significa che, se $x_0 \notin A$, esiste $x' \in E'$ tale che

$$\mathrm{Re}\langle x, x' \rangle \geq -1 \quad (x \in A), \qquad \mathrm{Re}\langle x_0, x' \rangle < -1.$$

Per questo enunciato basta considerare E come spazio vettoriale topologico *reale* munito della topologia debole (§ 1). L'esistenza di una forma lineare come la x' richiesta segue immediatamente dal teorema 3 del § 7. Se A è un sottoinsieme di E, il suo polare A^0, e quindi il suo bipolare $(A^0)^0$, non cambiano sostituendo A con l'inviluppo convesso debolmente chiuso di $A \cup \{0\}$. Ne segue il corollario.

Corollario 1. Per ogni sottoinsieme A di E, l'inviluppo convesso debolmente chiuso di $A \cup \{0\}$ coincide con il «bipolare» $(A^0)^0$ di A.

Analogamente l'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso di A coincide con il polare del polare assoluto di A. Il cono convesso debolmente chiuso generato da A coincide con il cono supplementare del cono supplementare di A.

Il meccanismo della polarità che emerge dalla proposizione 14 e dal teorema 5 è descritto nella seguente osservazione.

Osservazione. Sia (E, E') un sistema duale. Indichiamo con $K(E)$ l'insieme dei sottoinsiemi convessi di E debolmente chiusi e contenenti l'origine, e con $K(E')$ l'insieme analogo per E'. Entrambi sono ordinati per inclusione. Associando a ogni $A \in K(E)$ il suo polare A^0 e a ogni $A' \in K(E')$ il suo polare A'^0, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra $K(E)$ e $K(E')$. L'applicazione $A \mapsto A^0$ è un isomorfismo dell'insieme ordinato $K(E)$ su $K(E')$ munito dell'ordine opposto: per $A, B \in K(E)$, la relazione $A \subset B$ equivale ad $A^0 \supset B^0$. Il polare di $\overline{\Gamma}(A \cup B)$ è $A^0 \cap B^0$, quello di $A \cap B$ è $\overline{\Gamma}(A^0 \cup B^0)$. Per ogni scalare reale $\lambda \neq 0$ si ha $(\lambda A)^0 = (1/\lambda) A^0$.

Infine la corrispondenza tra $K(E)$ e $K(E')$ induce corrispondenze biunivoche fra i dischi debolmente chiusi di E e di E', fra i coni convessi debolmente chiusi di E e di E' e

fra i sottospazi vettoriali debolmente chiusi di E e di E'. Queste corrispondenze si possono anche ottenere come indicato nella proposizione 14, punto 3.

Si notino inoltre le formule

$$(\overline{\Gamma}(A \cup B))^0 = A^0 \cap B^0, \qquad (A \cap B)^0 = \overline{\Gamma}(A^0 \cup B^0).$$

La prima è immediata (proposizione 14), la seconda non lo è a priori. Essa segue dall'inizio dell'osservazione (dunque dal teorema 5) e dalla prima formula applicata ad A^0 e B^0 al posto di A e B. Si può anche osservare che, in $K(E)$, $A \cap B$ e $\overline{\Gamma}(A \cup B)$ sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A e B. Per l'inizio dell'osservazione, la polarità deve dunque trasformarli rispettivamente nell'estremo superiore e nell'estremo inferiore di A^0 e B^0. Se A, B sono sottospazi vettoriali V, W, le formule precedenti diventano

$$(\overline{V + W})^0 = V^0 \cap W^0, \qquad (V \cap W)^0 = \overline{V^0 + W^0}.$$

La prima è a priori immediata, la seconda no.

Il teorema 5 equivale evidentemente al teorema 3 enunciato per uno spazio vettoriale munito della topologia debole. (Nell'enunciato del teorema 3 si può sempre supporre che il convesso contenga 0.) I teoremi 4 e 5 presi insieme equivalgono quindi esattamente al teorema 3. A seconda delle applicazioni si adopera l'una o l'altra di queste due parti del teorema 3, i cui enunciati particolari sono più maneggevoli del teorema 3 stesso. Nel seguito il teorema del bipolare (teorema 5) avrà speciale importanza.

Per i prossimi argomenti la nozione di *polare assoluto* sarà più utile di quella di polare data nella definizione 7 (utile, per esempio, negli spazi vettoriali ordinati). Negli studi sulla polarità, ciò che si chiama polare di A è quello che qui chiamiamo polare assoluto. Se però ci si limita ai dischi, come è facile fare in pratica, le due nozioni, come abbiamo visto, coincidono. Il concetto di polare assoluto, introdotto indipendentemente da vari autori, è stato utilizzato sistematicamente da Dieudonné e Schwartz. La nozione più generale di polare (definizione 7) è dovuta a N. Bourbaki.

Esercizio. Sia M uno spazio localmente compatto. Per ogni $t \in M$ sia $\mathcal{E}_t$ la forma lineare $f \mapsto f(t)$ su $C(M)$. Si dimostri che la palla unitaria del duale $\mathcal{M}(M)$ di $C(M)$ è l'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso dell'insieme delle $\mathcal{E}_t$. Un elemento $\mu \in \mathcal{M}(M)$ si dice *positivo* se $\langle f, \mu \rangle \geq 0$ per $f \geq 0$. Si mostri che l'insieme degli elementi positivi di $\mathcal{M}(M)$ è il cono convesso debolmente chiuso generato dalle $\mathcal{E}_t$, e che l'insieme delle μ positive con $\|\mu\| \leq 1$ è l'inviluppo convesso debolmente chiuso delle $\mathcal{E}_t$ e di 0. Se ne deduca che l'insieme delle μ positive di norma 1 è l'inviluppo convesso chiuso delle $\mathcal{E}_t$. (Si mostri che, se $\mu \geq 0$, allora $\|\mu\| = \mu(1)$.)

10 Le $\mathfrak{S}$-topologie su un duale

Proposizione 15. Siano (E, E') un sistema duale e A un sottoinsieme di E. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) A è debolmente limitato.
b) Per ogni $x' \in E'$ l'insieme degli $\langle x, x' \rangle$, al variare di x in A, è limitato.
c) A è debolmente precompatto.

L'equivalenza di a) e b) è un caso particolare della proposizione 11 del capitolo 1, § 7. L'equivalenza di b) e c) segue dalla consueta caratterizzazione dei sottoinsiemi precompatti di uno spazio uniforme la cui struttura uniforme è la meno fine che renda uniformemente continue certe applicazioni $f_i \colon E \to E_i$ in spazi uniformi. Qui le f_i sono le applicazioni $x \mapsto \langle x, x' \rangle$ di E nel campo degli scalari k, e sappiamo che i sottoinsiemi precompatti di k coincidono con i suoi sottoinsiemi limitati.

Proposizione 16. Siano (E, E') un sistema duale e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E. Su E' la $\mathfrak{S}$-topologia è compatibile con la struttura vettoriale se e soltanto se gli $A \in \mathfrak{S}$ sono debolmente limitati in E. In tal caso E', munito della $\mathfrak{S}$-topologia, è uno spazio localmente convesso. Un sistema fondamentale di intorni dell'origine per questa topologia è dato dai polari assoluti degli $A \in \mathfrak{S}$ e dalle intersezioni finite di immagini di tali polari per omotetie di rapporto non nullo.

La prima affermazione segue dalla proposizione 15 e dal teorema 3 del capitolo 1, § 8. La seconda segue dallo stesso teorema e dalla definizione di polare assoluto. In particolare la $\mathfrak{S}$-topologia su E' non cambia sostituendo gli $A \in \mathfrak{S}$ con i loro inviluppi assolutamente convessi debolmente chiusi. Si possono anche aggiungere a $\mathfrak{S}$ gli inviluppi assolutamente convessi debolmente chiusi B delle unioni finite di immagini omotetiche di insiemi $A_i \in \mathfrak{S}$, e infine tutti i dischi debolmente chiusi contenuti in insiemi come B. Si è così condotti a una famiglia $\mathfrak{S}_0$ di dischi debolmente limitati e debolmente chiusi di E, stabile per omotetie di rapporto non nullo, filtrante per inclusione crescente e contenente tutti i dischi debolmente chiusi contenuti in qualche $A \in \mathfrak{S}$. Si ottiene allora un sistema fondamentale di intorni dell'origine in E' per la topologia della $\mathfrak{S}_0$-convergenza prendendo i polari degli $A \in \mathfrak{S}_0$. Ma dal teorema del bipolare segue che non si può aggiungere a $\mathfrak{S}_0$ alcun altro disco debolmente chiuso senza cambiare la topologia corrispondente su E'. Più generalmente vale la seguente proposizione.

Proposizione 17. Siano (E, E') un sistema duale e $\mathfrak{S}$ una famiglia di dischi debolmente limitati e debolmente chiusi di E, stabile per omotetie di rapporto non nullo, filtrante per inclusione crescente e contenente, con ogni A, tutti i dischi debolmente chiusi contenuti in A. Sia τ una famiglia di dischi debolmente chiusi e debolmente limitati di E. Su E' la $\mathfrak{S}$-topologia è più fine della τ-topologia se e soltanto se $\tau \subset \mathfrak{S}$.

Infatti, se $A \in \tau$, il polare A^0 è un intorno di 0 in E' per la τ-topologia. Se questa è meno fine della $\mathfrak{S}$-topologia, A^0 contiene dunque un insieme B^0 con $B \in \mathfrak{S}$, da cui $A \subset B$ e pertanto $A \in \mathfrak{S}$.

Corollario 1. Nelle condizioni della proposizione 17, se anche τ soddisfa le stesse condizioni di $\mathfrak{S}$, la $\mathfrak{S}$-topologia e la τ-topologia su E' coincidono se e soltanto se $\mathfrak{S} = \tau$.

Corollario 2. Siano (E, E') un sistema duale e $\mathfrak{S}, \tau$ due famiglie di sottoinsiemi limitati di E. Su E' la $\mathfrak{S}$-topologia è più fine della τ-topologia se e soltanto se ogni $A \in \tau$ è contenuto nell'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso dell'unione di un numero finito di immagini per omotetia di insiemi $A_i \in \mathfrak{S}$.

Questo corollario equivale in realtà alla proposizione 17, per le osservazioni fatte prima del suo enunciato.

Definizione 8. Sia (E, E') un sistema duale. La *topologia forte*, o topologia della convergenza sui limitati, su E' è la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati di E. Se E è localmente convesso, il suo spazio duale E' munito della topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati di E si chiama *duale forte* di E.

Poiché i sottoinsiemi debolmente chiusi e debolmente limitati di uno spazio localmente convesso E sono limitati anche per la topologia originaria (teorema $4'$), la topologia forte di E' dipende soltanto dal sistema duale (E, E'). Secondo la definizione 8, la topologia forte di E' è la più fine delle $\mathfrak{S}$-topologie localmente convesse considerate sopra.

Proposizione 17′. Sia (E, E') un sistema duale. Una topologia localmente convessa su E' è una $\mathfrak{S}$-topologia per qualche famiglia $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi limitati di E se e soltanto se ammette un sistema fondamentale di intorni V_i di 0 che siano dischi chiusi per $\sigma(E', E)$.

La necessità segue dalla caratterizzazione degli intorni di 0 per la $\mathfrak{S}$-topologia appena data. Per la sufficienza osserviamo che, detto A_i il polare di V_i, si ha $V_i = A_i^0$. La topologia considerata su E' è dunque la $\mathfrak{S}$-topologia, dove $\mathfrak{S}$ è la famiglia degli A_i. Partendo da uno spazio localmente convesso E, scambiando nella proposizione i ruoli di E ed E', vediamo che la topologia di E è una $\mathfrak{S}$-topologia per una opportuna famiglia $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi di E' (si usi il teorema 4). Esamineremo ora più da vicino questa topologia.

11 Gli spazi localmente convessi come duali muniti di $\mathfrak{S}$-topologie

Proposizione 18. Siano E uno spazio localmente convesso, E' il suo duale ed E^* il suo duale algebrico. Una forma lineare x' su E è continua se e soltanto se esiste un intorno assolutamente convesso V di 0 in E sul quale x' sia limitata in valore assoluto da 1, ossia tale che x' appartenga al polare di V in E^*. Un insieme A' di forme lineari su E è equicontinuo se e soltanto se esiste un intorno assolutamente convesso V di 0 in E sul quale tutte le $x' \in A'$ siano limitate in valore assoluto da 1, ossia tale che A' sia contenuto nel polare di V in E^*.

La dimostrazione è immediata.

Corollario 1. Siano E uno spazio localmente convesso e A un sottoinsieme equicontinuo del suo duale. L'inviluppo convesso debolmente chiuso di A è ancora equicontinuo.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso. Per polarità si ha una corrispondenza biunivoca tra gli intorni chiusi assolutamente convessi di 0 in E e i dischi equicontinui debolmente chiusi di E'.

Infatti il polare di un intorno di 0 in E è un sottoinsieme equicontinuo di E' (proposizione 18), e il polare di un sottoinsieme equicontinuo di E' è evidentemente un intorno di 0 in E. Il corollario segue dal teorema del bipolare. Tenendo conto della proposizione 16, otteniamo il corollario seguente.

Corollario 3. Siano E uno spazio localmente convesso ed E' il suo duale. La topologia di E è la $\mathfrak{S}$-topologia, dove $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei sottoinsiemi equicontinui di E' (o, se si preferisce, la famiglia dei dischi equicontinui debolmente chiusi di E').

In particolare, se E è di Hausdorff, esso appare come il duale di E' debole, munito di una $\mathfrak{S}$-topologia con $\mathfrak{S}$ come sopra. Il procedimento studiato nel § 10 per definire una topologia ci dà dunque *tutti* gli spazi localmente convessi. La topologia di uno spazio localmente convesso è determinata quando si conoscono le famiglie di forme lineari equicontinue per tale topologia.

Teorema 6. Sia E uno spazio localmente convesso. I sottoinsiemi equicontinui del duale sono debolmente relativamente compatti.

Secondo la proposizione 18 basta mostrare che, se V è un intorno assolutamente convesso di 0 in E, il suo polare V^0 in E^* è debolmente compatto. Ora, V^0 è un sottoinsieme chiuso di E^* debole, che è completo (cfr. proposizione 13). Dunque V^0 è debolmente completo. D'altra parte, per la proposizione 15, V^0 è debolmente precompatto, da cui la conclusione.

Esercizio 1. Si dimostri il teorema di Hahn–Banach II come conseguenza del teorema del bipolare e del più elementare teorema 6. (Si mostri dapprima che ogni forma lineare continua x' sul sottospazio F è la restrizione di una forma lineare continua su E. Si applichi il teorema del bipolare al disco A degli $x \in F$ tali che $|\langle x, x'\rangle| \leq 1$: per $x' \neq 0$ esiste $y' \in A^0 \subset E'$ che non si annulla identicamente su F e la cui restrizione a F è proporzionale a x'. Si applichino poi il teorema del bipolare e l'esercizio 6 del § 5 per calcolare il polare in E' di $V \cap F$, dove V è la palla unitaria associata alla seminorma data su E.)

Esercizio 2. a) Sia E uno spazio localmente convesso separabile. Si mostri che i sottoinsiemi debolmente compatti di E' sono metrizzabili per la topologia debole.
b) Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Esso è separabile se e soltanto se i sottoinsiemi equicontinui di E' sono debolmente metrizzabili (si usi a) per la necessità e la proposizione 16 del capitolo 1, § 9, per la sufficienza). Si mostri che da ciò segue che E' è debolmente separabile.
c) Sia E normato. Lo spazio E è separabile se e soltanto se la palla unitaria di E' è debolmente metrizzabile.

Esercizio 3. Siano E uno spazio vettoriale ed E^* il suo duale algebrico. Vi è una corrispondenza biunivoca fra le seminorme p su E e i dischi debolmente compatti A di E^*. A p corrisponde il polare della sua «palla unitaria» e, viceversa, ad A corrisponde la seminorma

$$p(x) = \sup_{x' \in A} |\langle x, x'\rangle|.$$

Se si parte da uno spazio vettoriale topologico E, in questa corrispondenza le seminorme *continue* sono quelle che corrispondono ai dischi debolmente compatti contenuti in E'.

12 Formulazione generale del teorema di Mackey. Biduale di uno spazio localmente convesso

Teorema 7 (Mackey). Sia (E, E') un sistema duale separato in E, e sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di dischi limitati di E, filtrante per inclusione crescente e stabile per omotetie. Si munisca E' della $\mathfrak{S}$-topologia. Il duale di E' coincide allora con il sottospazio del completamento debole $\widehat{E}$ di E costituito dall'unione delle chiusure deboli in $\widehat{E}$ degli insiemi $A \in \mathfrak{S}$. Un sottoinsieme di $\widehat{E}$ è un insieme equicontinuo di forme lineari su E' se e soltanto se è contenuto nella chiusura debole in $\widehat{E}$ di un insieme $A \in \mathfrak{S}$.

Basta provare la seconda affermazione. I sottoinsiemi equicontinui del duale di E' sono i sottoinsiemi del duale algebrico E'^* contenuti nel polare di un intorno assolutamente convesso di 0 (proposizione 18), che possiamo supporre della forma A^0, con $A \in \mathfrak{S}$ (§ 10). Per il teorema del bipolare, il polare di A^0 in E'^* coincide con la chiusura debole del disco A, da cui la conclusione.

Corollario 1. Siano (E, E') un sistema duale separato in E e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Si munisca E' della $\mathfrak{S}$-topologia. Il duale di E' è allora il sottospazio vettoriale del completamento debole $\widehat{E}$ di E generato dagli inviluppi assolutamente convessi debolmente chiusi in $\widehat{E}$ degli $A \in \mathfrak{S}$.

Possiamo supporre che gli $A \in \mathfrak{S}$ siano dischi. Basta mostrare che, dati un numero finito di elementi A_i di $\mathfrak{S}$ e di scalari λ_i, l'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso di $\bigcup_i \lambda_i A_i$ in $\widehat{E}$ è contenuto nel sottospazio generato di cui parla il corollario. Ma la

chiusura debole $\overline{A}_i$ di A_i in $\widehat{E}$ è un disco debolmente compatto in $\widehat{E}$. Di conseguenza anche $\sum_i \lambda_i \overline{A}_i$ è un disco debolmente compatto in $\widehat{E}$. Esso contiene $\bigcup_i \lambda_i A_i$ e quindi contiene l'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso di questo insieme in $\widehat{E}$, inviluppo che risulta così contenuto nello spazio vettoriale generato dagli $\overline{A}_i$.

Corollario 2. Siano (E, E') un sistema duale separato in E e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Si munisca E' della $\mathfrak{S}$-topologia. Allora:

1. il duale di E' è contenuto in E se e soltanto se gli inviluppi assolutamente convessi debolmente chiusi (in E) degli $A \in \mathfrak{S}$ sono debolmente compatti;

2. il duale di E' contiene E se e soltanto se lo spazio vettoriale generato dagli inviluppi assolutamente convessi debolmente chiusi (in E) degli $A \in \mathfrak{S}$ coincide con E;

3. di conseguenza, il duale di E' coincide con E se e soltanto se sono verificate entrambe le condizioni precedenti.

Il caso della topologia forte su E' ha particolare importanza.

Definizione 9. Sia E uno spazio localmente convesso. Il *biduale* di E, indicato con E'', è il duale del duale forte E' (§ 10, definizione 8), munito della topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'.

Si verifica subito che i sottoinsiemi equicontinui di E' sono fortemente limitati e quindi che la topologia su E'' è localmente convessa. Poiché il duale forte di E dipende soltanto dal sistema duale (E, E'), una volta noto il sistema duale è noto anche il biduale, a meno della sua topologia. Se dunque si parte da un sistema duale (E, E'), si può ancora chiamare biduale di E il duale di E' forte, senza specificarne a priori la topologia. Se E è uno spazio localmente convesso di Hausdorff, esso si identifica con un sottospazio vettoriale di E'' e la sua topologia è quella indotta da E''. A sua volta E'' si identifica con un sottospazio vettoriale del completamento debole $\widehat{E}$ di E (ma la topologia di E'' in generale non è quella indotta da $\widehat{E}$). In breve, per il teorema di Mackey, E'' è l'unione delle chiusure deboli in $\widehat{E}$ dei sottoinsiemi limitati di E. Più generalmente, i sottoinsiemi equicontinui di E'', considerato come duale topologico di E' forte, sono i sottoinsiemi di E'' contenuti nella chiusura debole di un sottoinsieme limitato di E.

Definizione 10. Sia E uno spazio localmente convesso. Si dice che E è *riflessivo* se è di Hausdorff e coincide con il suo biduale.

Analogamente, si può dire che un sistema duale (E, E') è riflessivo in E se E debole è riflessivo (la riflessività di uno spazio localmente convesso dipende dalla dualità). L'ultima parte del corollario 2 del teorema 7 dà il seguente risultato.

Teorema 8. Sia E uno spazio localmente convesso. Esso è riflessivo se e soltanto se i suoi sottoinsiemi limitati sono debolmente relativamente compatti.[21]

Corollario. Siano E uno spazio localmente convesso riflessivo e F un suo sottospazio vettoriale chiuso. Allora F è riflessivo.

Infatti, poiché ogni forma lineare continua su F è la restrizione di una forma lineare continua su E, la topologia debole di F è indotta dalla topologia debole di E. D'altra parte F è debolmente chiuso (§ 8, teorema 4). Il corollario segue quindi dal teorema 8.

[21] Nota del traduttore. Nella caratterizzazione si sottintende che E sia di Hausdorff, come nella definizione 10.

13 Topologie compatibili con una dualità. La topologia di Mackey

In questo paragrafo ci limitiamo a esprimere in un altro linguaggio l'ultima parte del corollario 2 del teorema 7 (teorema di Mackey).

Definizione 11. Sia (E, E') un sistema duale separato in E'. Una topologia su E si dice *compatibile con la dualità* (E, E') se è localmente convessa e se il duale di E per questa topologia coincide con E'.

Così la topologia debole $\sigma(E, E')$ è compatibile con la dualità (§ 8, proposizione 12) ed è evidentemente la meno fine delle topologie su E compatibili con la dualità.

Teorema 9. Sia (E, E') un sistema duale separato in E'. Una topologia su E è compatibile con la dualità (E, E') se e soltanto se è una $\mathfrak{S}$-topologia, dove $\mathfrak{S}$ è una famiglia di dischi debolmente compatti di E' che ricopre E'.

La condizione è necessaria per il corollario 3 della proposizione 18. È sufficiente per il teorema 7 (teorema di Mackey), corollario 2, punto 3, scambiando semplicemente i ruoli di E ed E'. Dunque, tra le topologie su E compatibili con la dualità ve n'è una più fine di tutte, e corrisponde alla famiglia $\mathfrak{S}$ di *tutti* i dischi debolmente compatti di E'.

Definizione 12. Sia (E, E') un sistema duale separato in E. Chiamiamo *topologia di Mackey* su E la topologia della convergenza uniforme sui dischi debolmente compatti di E' e la indichiamo con $\tau(E, E')$.[22] Quando E è uno spazio localmente convesso dato ed E' è il suo duale, chiamiamo $\tau(E, E')$ la topologia di Mackey associata alla topologia di E.

Il teorema 9 può allora enunciarsi nella forma seguente.

Corollario. Le topologie su E compatibili con la dualità (E, E') sono precisamente le topologie localmente convesse comprese fra la topologia debole $\sigma(E, E')$ e la topologia di Mackey $\tau(E, E')$.

Dimostrazione. Per una tale topologia il duale di E è compreso fra il duale per la topologia debole e quello per la topologia di Mackey, ossia coincide con E'.

Nel seguito ci riferiremo indifferentemente ai teoremi 7, 8 e 9 come ai «teoremi di Mackey». Vedremo nel capitolo 3 che la topologia di uno spazio localmente convesso metrizzabile coincide sempre con la sua topologia di Mackey.

Proposizione 19. Sia E uno spazio localmente convesso. Un disco assorbente V di E è un intorno dell'origine per la topologia di Mackey $\tau(E, E')$ se e soltanto se ogni forma lineare su E limitata in valore assoluto da 1 su V è continua.

La necessità segue dal teorema di Mackey, poiché la forma lineare considerata è continua per $\tau(E, E')$. Viceversa, se il polare di V in E^* è contenuto in E', mostriamo che V è un intorno di 0 per $\tau(E, E')$. Possiamo supporre che V sia la palla unitaria associata a una seminorma su E (§ 4, teorema 1). Dunque, per il teorema del bipolare applicato a V nello spazio E munito di tale seminorma, V è il polare in E di V^0. Poiché V^0 è un disco debolmente compatto in E' (si applichi il teorema 6 del § 11 a E considerato come spazio seminormato), ne segue che V è un intorno di 0 per $\tau(E, E')$.

[22] Nota del traduttore. Per i dischi su cui si considera la convergenza uniforme, a p. 70 si legge E; si tratta di E', come nel teorema 9.

Esercizio 1. Si mostri che, nell'enunciato del teorema 9 e nella definizione 12, si può sostituire la parola «disco» con «insieme convesso» (cfr. § 5, esercizio 4).

Esercizio 2. Siano E uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff, (x_i) una successione limitata in E e u l'applicazione lineare continua di ℓ^1 in E definita come nel capitolo 1, § 9, esercizio 6. Si mostri che u è continua per la topologia $\sigma(\ell^1, c_0)$ (cfr. capitolo 1, § 9, esercizio 7) e per la topologia debole di E se e soltanto se (x_i) tende debolmente a 0. Se ne deduca che, se (x_i) è una successione debolmente convergente a 0 in uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff, il suo inviluppo convesso chiuso (rispettivamente il suo inviluppo assolutamente convesso chiuso) è l'insieme delle somme $\sum_i \lambda_i x_i$, dove (λ_i) percorre l'insieme delle successioni non negative con $\sum_i \lambda_i = 1$ (rispettivamente la palla unitaria di ℓ^1).[23] (Si mostri che i due insiemi così ottenuti sono debolmente compatti, e quindi chiusi, applicando il teorema 6 a c_0 e al suo duale ℓ^1.)

Esercizio 3. a) Siano E uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff, F un suo sottospazio vettoriale e x un punto della chiusura di F. Si mostri che esistono una successione limitata (x_i) in F e una successione sommabile di scalari positivi (λ_i) tali che $x = \sum_i \lambda_i x_i$ (la serie converge, cfr. capitolo 1, § 9, esercizio 6). Si mostri che, assegnata una successione (μ_i) di scalari > 0, si può supporre $\lambda_i \leq \mu_i$ per ogni i.[24]
b) Se ne deduca che, se $x \in \overline{F}$, si ha $x \in \overline{\Gamma}(K)$ per qualche sottoinsieme compatto K di F (si prenda per K una successione di F convergente a 0, insieme all'origine).
c) Si deduca da b) che uno spazio localmente convesso metrizzabile E è completo se e soltanto se l'inviluppo convesso chiuso di ogni suo sottoinsieme compatto è compatto (per la necessità cfr. § 5, esercizio 5).
d) Si deduca da a) che uno spazio normato E è completo se e soltanto se ogni serie assolutamente convergente in E è convergente.

Esercizio 4. a) Sia E uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff o, più generalmente, uno spazio localmente convesso di Hausdorff in cui i sottoinsiemi chiusi e limitati siano completi. Muniamo E' della topologia della convergenza sui compatti. Si dimostri che il duale di E' coincide con E (si usino il teorema di Mackey e l'esercizio 5 del § 5).
b) Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile e si munisca il duale E' della topologia della convergenza sui compatti. Si mostri che il duale di E' si identifica con il completamento di E (cfr. esercizio 3) e che coincide con E se e soltanto se E è completo. Se ne deduca che il teorema 9 cessa di valere se dall'enunciato si sopprime la condizione di assoluta convessità, senza richiedere alcuna convessità.

Esercizio 5. Sia E uno spazio localmente convesso la cui topologia coincida con la topologia di Mackey associata. Si mostri che lo stesso vale per il completamento di E.

Esercizio 6. Siano μ una misura limitata su uno spazio localmente compatto M e A un sottoinsieme convesso di $L^\infty = L^\infty(\mu)$. Si mostri che, se f appartiene alla chiusura di A

[23] Nota del traduttore. Per l'inviluppo convesso chiuso occorre ammettere $\sum_i \lambda_i \leq 1$, poiché 0 appartiene alla chiusura della successione. Equivalentemente si aggiunge 0 fra i punti a cui assegnare un coefficiente. L'edizione inglese reca l'uguaglianza.

[24] Nota del traduttore. Per la conclusione di a) occorre un'ipotesi ulteriore, per esempio la metrizzabilità di E. Nel prodotto $\mathbf{R}^I$ con I non numerabile, il sottospazio delle famiglie a supporto finito è denso, ma una serie di suoi elementi ha al più supporto numerabile.

per la topologia debole di L^∞ considerato come duale di L^1, esiste una successione (f_i) in A tale che, per ogni p con $1 \leq p < +\infty$, f_i tenda a f per la topologia indotta da L^p. (Si osservi che la topologia indotta da L^p è quella della convergenza uniforme sulla palla unitaria di $L^{p'}$, sottoinsieme debolmente compatto di L^1 poiché $L^{p'}$ è riflessivo. Possiamo supporre $p > 1$. La topologia indotta da L^p è dunque meno fine della topologia di Mackey su L^∞ per la dualità con L^1, cosicché basta applicare il teorema di Mackey e il teorema 4 del § 8.) Si mostri viceversa che, se A è limitato nello spazio normato L^∞, la sua chiusura nello spazio normato L^1 coincide con la sua chiusura debole in L^∞ per la dualità indicata (si applichi il teorema 6 ad A).

Esercizio 7. Sia M uno spazio localmente compatto e sia $E = C_0(M)$. Allora E' è lo spazio delle misure limitate su M.[25] Identifichiamo $\ell^1(M)$ con lo spazio delle misure discrete limitate su M e M con un sottoinsieme di $\ell^1(M)$ associando a ogni $x \in M$ la misura di massa $+1$ nel punto x. Per ogni $X \in E''$ sia f_X la restrizione di X a M. È una funzione limitata su M, ossia un elemento $f_X \in \ell^\infty(M)$. La restrizione di X a $\ell^1(M)$ è precisamente f_X, se si identifica $\ell^\infty(M)$ con il duale di $\ell^1(M)$ (capitolo 1, § 9, esercizio 7).

1) Si mostri che ogni funzione limitata $f \in \ell^\infty(M)$ è della forma f_X, dove X è un elemento di E'' di norma $\|f\|$. (Si identifichi f con una forma lineare sul sottospazio $\ell^1(M)$ di E' e si applichi il teorema di Hahn–Banach. Oppure si proceda direttamente, dimostrando che la palla unitaria di $E = C_0(M)$ è densa per la convergenza puntuale nella palla unitaria di $\ell^\infty(M)$.) Se ne deduca che, se M è infinito, ossia E ha dimensione infinita, E non è riflessivo.

2) Uno spazio $L^1(\mu)$, costruito a partire da una misura positiva μ su uno spazio localmente compatto, non è riflessivo a meno che abbia dimensione finita, ossia che μ sia somma di un numero finito di masse puntuali. (Si osservi che il duale di L^1, ossia L^∞, è isomorfo a uno spazio $C(M)$, con M compatto, in virtù di un teorema classico di Stone–Gelfand. Inoltre, se $L^1(\mu)$ è riflessivo, lo è anche il suo duale. La conclusione segue allora da 1).)

14 Il completamento di uno spazio localmente convesso

Teorema 10. Siano (E, E') un sistema duale separato e $\mathfrak{S}$ una famiglia, filtrante per inclusione crescente, di dischi limitati di E la cui unione generi lo spazio vettoriale E. Si munisca E' della $\mathfrak{S}$-topologia e si indichi con $\widehat{E}'$ l'insieme delle forme lineari su E le cui restrizioni a tutti gli $A \in \mathfrak{S}$ siano debolmente continue. Allora $\widehat{E}'$, munito della $\mathfrak{S}$-topologia, è uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff ed E' ne è un sottospazio vettoriale topologico denso. In altri termini, $\widehat{E}'$ è il completamento di E' per la $\mathfrak{S}$-topologia.

Segnaliamo anzitutto i seguenti corollari.

Corollario 1. Nelle condizioni del teorema 10, E' munito della $\mathfrak{S}$-topologia è completo se e soltanto se ogni forma lineare su E le cui restrizioni agli $A \in \mathfrak{S}$ siano debolmente continue è debolmente continua.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Il completamento di E si identifica con lo spazio delle forme lineari su E' le cui restrizioni ai sottoinsiemi equicontinui siano debolmente continue, quando si munisca tale spazio della topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'.

[25] Nota del traduttore. Per M la scansione a p. 72 reca la sigla degli spazi vettoriali topologici localmente convessi; il contesto di $C_0(M)$ richiede uno spazio localmente compatto.

Corollario 3. Uno spazio localmente convesso di Hausdorff E è completo se e soltanto se ogni forma lineare su E' le cui restrizioni ai sottoinsiemi equicontinui siano debolmente continue è già debolmente continua, ossia è un elemento di E.

(Quest'ultimo enunciato è il più utile.)

Dimostrazione. 1) Consideriamo dapprima il caso particolare in cui gli $A \in \mathfrak{S}$ siano debolmente compatti (in pratica è il caso più importante, poiché comprende il corollario 3). Per ogni $x' \in \widehat{E}'$ e ogni $A \in \mathfrak{S}$, $x'(A)$ è compatto e quindi limitato nel campo degli scalari. Dunque $\widehat{E}'$ è localmente convesso per la $\mathfrak{S}$-topologia. Inoltre $\widehat{E}'$ è completo poiché è un sottospazio uniforme chiuso dello spazio di tutte le applicazioni di E nel campo K, munito della $\mathfrak{S}$-topologia, che è completo. La topologia di E' è evidentemente quella indotta da $\widehat{E}'$. Per provare che E' è denso in $\widehat{E}'$ dobbiamo verificare che ogni forma lineare continua su $\widehat{E}'$ nulla su E' sia identicamente nulla (§ 7, teorema 3, corollario 3). Ora gli $A \in \mathfrak{S}$ sono ancora compatti per $\sigma(E, \widehat{E}')$, poiché le restrizioni degli $x' \in \widehat{E}'$ agli $A \in \mathfrak{S}$ sono già continue per $\sigma(E, E')$. Il duale di $\widehat{E}'$ coincide quindi con E (teorema di Mackey), da cui la conclusione.

2) Nel caso generale ci serviamo del seguente lemma, interessante di per sé.

Lemma. Siano E uno spazio localmente convesso, A un suo sottoinsieme convesso simmetrico e u un'applicazione lineare di E in uno spazio localmente convesso F. Affinché la restrizione di u ad A sia uniformemente continua basta che sia continua nell'origine.

Infatti, per ogni intorno V di 0 in F, dobbiamo trovare un intorno U di 0 in E tale che, se $x, y \in A$ e $x - y \in U$, si abbia $u(x) - u(y) \in V$, ossia $u(x - y) \in V$. Ora $x - y \in A - A = 2A$, sicché un tale U esiste se $u(2A \cap U) \subset V$, ossia se

$$u(A \cap \tfrac{1}{2}U) \subset \tfrac{1}{2}V,$$

il che segue dalla continuità nell'origine.

Applicando il lemma al teorema 10, vediamo che per ogni $x' \in \widehat{E}'$ la restrizione di x' a ciascun $A \in \mathfrak{S}$ è uniformemente continua per la struttura debole, e quindi si prolunga per continuità uniforme in una funzione x'_A sulla chiusura debole $\overline{A}$ di A in E'^*. Sia E_1 lo spazio vettoriale generato dagli $\overline{A}$ e sia $\mathfrak{S}_1$ la famiglia dei dischi debolmente compatti $\overline{A}$ in E_1. Per $x \in E_1$ si ha $\lambda x \in \overline{A}$ per qualche $\lambda > 0$ e qualche $A \in \mathfrak{S}$. Si verifica subito che l'espressione

$$\frac{1}{\lambda} x'_A(\lambda x)$$

non dipende dalla scelta della coppia (λ, A), poiché $\mathfrak{S}$ è filtrante. Indichiamone il valore con $\langle x, x' \rangle$. La funzione così definita su $E_1 \times \widehat{E}'$ è bilineare. Infine, per l'accoppiamento così descritto fra E_1 e $\widehat{E}'$, $\widehat{E}'$ si identifica con lo spazio delle forme lineari su E_1 le cui restrizioni agli $A_1 \in \mathfrak{S}_1$ siano continue, e la precedente $\mathfrak{S}$-topologia coincide con la $\mathfrak{S}_1$-topologia. Poiché il sistema (E_1, E'), $\mathfrak{S}_1$, $\widehat{E}'$ soddisfa le condizioni della prima parte della dimostrazione, ne segue che $\widehat{E}'$ è localmente convesso ed è il completamento di E'.

Esercizio 1. Siano E uno spazio localmente convesso, A un suo disco e $x' \in E^*$.
a) La restrizione di x' ad A è continua se e soltanto se, per ogni $\varepsilon > 0$, l'intersezione di A con l'iperpiano V_ε di equazione $\langle x, x' \rangle = \varepsilon$ è relativamente chiusa in A. (Si usi il lemma e si mostri che, se U è un intorno assolutamente convesso di 0 in E tale che $U \cap A$ non incontri V_ε, allora $|\langle x, x' \rangle| < \varepsilon$ per $x \in U \cap A$. Si osservi che si utilizza soltanto il fatto che $0 \notin \overline{A \cap V_\varepsilon}$.)
b) Si deduca da a) che la restrizione di x' ad A è continua se e soltanto se lo è per la topologia indotta dalla topologia debole di E.

Esercizio 2. Siano E uno spazio localmente convesso di Hausdorff e A un suo sottoinsieme convesso. Si mostri che il completamento di A si identifica con l'insieme degli $x \in E'^*$ che appartengono alla chiusura debole di A e che definiscono forme lineari su E' le cui restrizioni ai sottoinsiemi equicontinui di E' siano debolmente continue. (Si usino il corollario 2 del teorema 10 e il corollario del teorema 4 applicato al completamento di E.)

Esercizio 3. Si deduca la proposizione 13 dal teorema 10.

Esercizio 4. Sia E uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff. Se E' munito della topologia forte è riflessivo, anche E è riflessivo (si mostri, mediante il corollario 3 del teorema 10, che ogni forma lineare fortemente continua su E' è debolmente continua). Si mostri che basta supporre completi i sottoinsiemi chiusi e limitati di E (si proceda come prima, utilizzando però il teorema 7 e l'esercizio 2).

Osservazione. Questi risultati sono anche casi particolari di risultati più generali che saranno studiati nel § 18.

Esercizio 5. Siano E uno spazio vettoriale e A un suo sottoinsieme convesso simmetrico. Si mostri che, se due topologie localmente convesse su E inducono su A lo stesso sistema di intorni di 0, esse vi inducono anche la stessa struttura uniforme. (È un corollario del lemma di questo paragrafo.)

15 Dualità per i sottospazi, i quozienti, i prodotti e i limiti proiettivi

Siano E uno spazio localmente convesso e F un suo sottospazio vettoriale. Associando a ogni $x' \in E'$ la sua restrizione a F, si ottiene un'applicazione lineare di E' in F' il cui nucleo è l'ortogonale F° di F in E'. Questa applicazione è inoltre suriettiva (teorema di Hahn–Banach II, corollario 1), sicché F' si identifica con E'/F°. I sottoinsiemi equicontinui di F' sono allora le immagini canoniche dei sottoinsiemi equicontinui di E' (Hahn–Banach II, corollario 1). Dall'identità $F' = E'/F^\circ$ segue immediatamente che la topologia debole $\sigma(F, F')$ coincide con quella indotta dalla topologia debole $\sigma(E, E')$ di E. D'altra parte, il duale di E/F si identifica evidentemente con lo spazio delle forme lineari continue su E che si annullano su F, ossia con F°. I sottoinsiemi equicontinui del duale di E/F si identificano allora con i sottoinsiemi equicontinui di E' contenuti in F°. Se E_s indica E munito di $\sigma(E, E')$, applicando quest'ultima osservazione a E_s/F si trova che i sottoinsiemi equicontinui del suo duale sono i sottoinsiemi di F° contenuti e limitati in un sottospazio di dimensione finita. Sono dunque precisamente i sottoinsiemi equicontinui del duale di $(E/F)_s$. La topologia debole associata allo spazio localmente convesso E/F coincide perciò con il quoziente della topologia debole di E. Riassumiamo.

Proposizione 20. Siano E uno spazio localmente convesso e F un sottospazio vettoriale. Si muniscano F della topologia indotta da E ed E/F della topologia quoziente. Il duale di F si identifica con E'/F°, i suoi sottoinsiemi equicontinui sono le immagini canoniche dei sottoinsiemi equicontinui di E' e la topologia debole di F coincide con quella indotta dalla topologia debole di E. Il duale di E/F si identifica con F° e i suoi sottoinsiemi equicontinui sono i sottoinsiemi equicontinui di E' contenuti in F°. Infine, la topologia debole di E/F coincide con il quoziente della topologia debole di E.

I risultati sulle topologie dei duali si riassumono nella proposizione seguente.

Proposizione 21. Siano E uno spazio localmente convesso, F un sottospazio vettoriale, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E, $\mathfrak{S}_1$ la famiglia delle intersezioni $A \cap F$ al variare di A in $\mathfrak{S}$. Sia $\phi(\mathfrak{S})$ la famiglia delle immagini canoniche in E/F degli $A \in \mathfrak{S}$.
1) Sul duale F° di E/F la $\phi(\mathfrak{S})$-topologia coincide con la topologia indotta dalla $\mathfrak{S}$-topologia di E'.
2) Si suppongano E di Hausdorff, F chiuso, $\mathfrak{S}$ filtrante per inclusione crescente e gli $A \in \mathfrak{S}$ dischi debolmente compatti. Allora sul duale E'/F° di F la $\mathfrak{S}_1$-topologia coincide con il quoziente della $\mathfrak{S}$-topologia di E'.

Il punto 1) è immediato. Per dimostrare 2) si può evidentemente supporre $\mathfrak{S}$ stabile per omotetie. Consideriamo su E'/F° il quoziente della $\mathfrak{S}$-topologia. Il suo duale è l'ortogonale di F° nel duale di E' per la proposizione 21. Ora, il duale di E' è lo spazio vettoriale $\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ (teorema di Mackey) e, poiché F è chiuso, l'ortogonale di F° in tale spazio è l'intersezione di F con esso. Inoltre, i sottoinsiemi equicontinui del duale di E'/F° sono i sottoinsiemi di questo duale equicontinui nel duale di E' (proposizione 20), ossia quelli contenuti in un $A \in \mathfrak{S}$. Sono anche quelli contenuti in un $A_1 \in \mathfrak{S}_1$, dunque precisamente quelli equicontinui quando si munisce E'/F° della $\mathfrak{S}_1$-convergenza. Ne segue l'uguaglianza delle due topologie considerate su E'/F°.

Corollario 1. Siano E uno spazio localmente convesso e F un sottospazio vettoriale. La topologia debole del duale di E/F coincide con la topologia indotta su F° dalla topologia debole di E'. Se F è chiuso, la topologia debole di $F' = E'/F^\circ$ coincide con il quoziente della topologia debole di E'.

Corollario 2. Siano E uno spazio localmente convesso riflessivo e F un sottospazio vettoriale chiuso. Allora F è riflessivo e il suo duale forte si identifica con il quoziente del duale forte E' di E per il sottospazio F°.

Basta applicare congiuntamente la proposizione 21 e il corollario del teorema 8.

Osserviamo che, nel caso generale in cui non si suppongano gli $A \in \mathfrak{S}$ debolmente compatti, la $\mathfrak{S}_1$-topologia sul duale di F è meno fine del quoziente della $\mathfrak{S}$-topologia di E' e può esserlo strettamente. Esistono infatti uno spazio metrizzabile e completo E e un sottospazio vettoriale chiuso F tali che il duale forte di F non si identifichi con un quoziente del duale forte E'. Segnaliamo inoltre che, per la proposizione 21 e per il corollario 2 della proposizione 17 del § 10, la topologia del duale forte di E/F, a priori più fine della topologia indotta da E' forte, coincide con quest'ultima se e soltanto se ogni sottoinsieme limitato di E/F è contenuto nella chiusura dell'immagine canonica di un sottoinsieme limitato di E. Questa condizione può venire meno anche se E è riflessivo, metrizzabile e completo. Vedremo tuttavia al § 17, proposizione 32, che le topologie forti si comportano bene quando E è uno spazio normato.

Consideriamo una famiglia finita (E_i) di spazi localmente convessi. Una forma lineare x' sul prodotto è univocamente determinata dalla famiglia (x'_i) delle sue restrizioni ai sottospazi E_i, poiché

$$\langle (x_i), x' \rangle = \sum_i \langle x_i, x'_i \rangle.$$

È chiaro che x' è continua se e soltanto se le x'_i sono forme lineari continue sugli E_i e che x' percorre un insieme equicontinuo se e soltanto se ciò vale per ciascuna x'_i. Pertanto si ha il risultato seguente.

Proposizione 22. Sia (E_i) una famiglia finita di spazi localmente convessi. Mediante l'accoppiamento appena descritto il duale di $\prod_i E_i$ si identifica con il prodotto $\prod_i E'_i$ dei

duali. I sottoinsiemi equicontinui del duale di $\prod_i E_i$ sono quelli contenuti in un prodotto $\prod_i A_i$, dove, per ogni i, A_i è un sottoinsieme equicontinuo di E_i'.

Corollario 1. Sia (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi. Il duale del prodotto $\prod_i E_i$ si identifica con la somma diretta $\bigoplus_i E_i'$ dei duali. I suoi sottoinsiemi equicontinui sono quelli contenuti nella somma di un numero finito di sottoinsiemi equicontinui degli E_i'.

Si ha infatti un'applicazione lineare naturale di $\bigoplus_i E_i'$ nel duale di $E = \prod_i E_i$, che è evidentemente biiettiva. Una forma lineare continua x' su $\prod_i E_i$ è limitata in valore assoluto da 1 su un insieme V definito dalle condizioni $x_i \in V_i$ per ogni $i \in J$, dove J è un sottoinsieme finito di I e i V_i sono intorni di 0 negli E_i. Ne segue che x' si annulla sul sottospazio vettoriale $\prod_{i \notin J} E_i$ di E e proviene quindi da una forma lineare continua sul quoziente, che si identifica con $\prod_{i \in J} E_i$. La proposizione 22 dà il risultato voluto. Si procede allo stesso modo per gli insiemi equicontinui di forme lineari.

Corollario 2. Sia (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi. La topologia debole di $\prod_i E_i$ è il prodotto delle topologie deboli degli E_i.

Tenendo conto del teorema 8 (teorema di Mackey), si ottiene così il seguente corollario.

Corollario 3. Nelle ipotesi del corollario 2, $\prod_i E_i$ è riflessivo se e soltanto se tutti gli E_i sono riflessivi.

Corollario 4. Sia (E_i) una famiglia finita di spazi localmente convessi e sia E il loro prodotto. Per ogni i, sia $\mathfrak{S}_i$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E_i e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi $\prod_i A_i$ di E con $A_i \in \mathfrak{S}_i$ per ogni i. Il duale di E munito della $\mathfrak{S}$-topologia si identifica con il prodotto dei duali degli E_i muniti delle rispettive $\mathfrak{S}_i$-topologie.

Da questo corollario segue in particolare che il duale debole di $\prod_i E_i$ è il prodotto dei duali deboli degli E_i e che il duale forte di $\prod_i E_i$ è il prodotto dei duali forti degli E_i (per una famiglia finita).

Il caso del prodotto infinito interviene nella dimostrazione del teorema seguente.

Teorema 11. Siano E uno spazio vettoriale, (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi e, per ogni i, u_i un'applicazione lineare di E in E_i. Muniamo E della topologia meno fine per cui le u_i sono continue. Il duale di E è allora l'insieme delle forme lineari del tipo $\sum_{i \in J} x_i' \circ u_i$, dove J è un sottoinsieme finito dell'insieme degli indici e $x_i' \in E_i'$ per ogni $i \in J$. Si ottengono i sottoinsiemi equicontinui del duale di E tenendo fisso J e facendo variare ciascun x_i' in un sottoinsieme equicontinuo del duale di E_i.

La dimostrazione si riduce al caso in cui E sia di Hausdorff e possa quindi identificarsi con un sottospazio vettoriale topologico di $\prod_i E_i$. Gli insiemi equicontinui di forme lineari su E sono allora le restrizioni a E degli insiemi equicontinui di forme lineari su $\prod_i E_i$ (proposizione 20), caratterizzati dal corollario 1 della proposizione 22. Ne segue il teorema 11.

Consideriamo un utile caso particolare del teorema 11. Siano E e F spazi localmente convessi e L uno spazio vettoriale di applicazioni lineari di E in F. Indichiamo con L_s lo spazio L munito della topologia della convergenza puntuale, ossia della topologia meno fine per cui sono continue le applicazioni $u \mapsto u(x)$ da L in F ($x \in E$). Il teorema 11 ci dice che le forme lineari continue su L_s sono quelle del tipo

$$u \longmapsto \sum_i \langle u(x_i), y_i' \rangle,$$

dove (x_i) è una successione finita in E e (y'_i) una successione finita in F'. Interpretando gli $u \in L$ come forme bilineari su $E \times F'$, ossia come elementi del duale algebrico di $E \otimes F'$, e ponendo

$$v = \sum_i x_i \otimes y'_i \in E \otimes F',$$

vediamo che le forme lineari continue su L_s sono le forme $u \mapsto \langle u, v \rangle$, con $v \in E \otimes F'$. Esiste dunque un'applicazione canonica di $E \otimes F'$ sul duale di L_s. Come si verifica facilmente, essa è biiettiva se L contiene $E' \otimes F$ ed E è di Hausdorff. Si ha dunque il risultato seguente.

Proposizione 23. Siano E, F spazi localmente convessi, con E di Hausdorff, e sia L uno spazio vettoriale di applicazioni lineari di E in F contenente $E' \otimes F$. Il duale di L per la topologia della convergenza puntuale si identifica con $E \otimes F'$.

Corollario. Il duale di L_s rimane lo stesso se si sostituisce alla topologia di F un'altra topologia con lo stesso duale, per esempio la topologia debole associata alla topologia inizialmente data su F.

Ne segue, per esempio, che per un sottoinsieme convesso di L la chiusura per la topologia della convergenza puntuale coincide con la chiusura per la topologia della convergenza debole puntuale (ossia della convergenza puntuale quando si munisce F della topologia debole).

Esercizio 1. a) Siano E uno spazio localmente convesso, metrizzabile e completo e F un sottospazio vettoriale chiuso. Si mostri che sul duale di E/F la topologia della convergenza compatta coincide con quella indotta su F° dalla topologia della convergenza compatta di E' (si usi il capitolo 1, § 14, esercizio 2).
b) Siano E uno spazio localmente convesso i cui sottoinsiemi chiusi e limitati siano completi e F un sottospazio vettoriale chiuso. Si mostri che sul duale di F la topologia della convergenza compatta coincide con il quoziente modulo F° della topologia della convergenza compatta di E' (si usi il § 5, esercizio 5).

Esercizio 2. Sia E uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff, la cui topologia sia la meno fine che renda continue certe applicazioni lineari u_i di E in spazi riflessivi E_i. Si mostri che E è riflessivo (si usino la proposizione 21, corollario 2, e la proposizione 22, corollario 3). Si mostri che il risultato rimane valido se si suppongono completi soltanto i sottoinsiemi chiusi e limitati di E.

16 Trasposta di un'applicazione lineare e caratterizzazione degli omomorfismi

Proposizione 24. Siano E e F due spazi localmente convessi e u un'applicazione lineare di E in F. L'applicazione u è continua per le topologie deboli se e soltanto se, per ogni $y' \in F'$, la forma $y' \circ u$ su E è continua.

La dimostrazione è immediata.

Corollario 1. Sia u un'applicazione lineare di uno spazio localmente convesso E in uno spazio localmente convesso F. Se u è continua, lo è anche per le topologie deboli.

Nella proposizione 24 ciò che conta sono i sistemi duali (E, E') e (F, F'). La condizione ivi enunciata per la continuità debole di u significa anche che la trasposta algebrica di u

(ossia l'applicazione lineare u^* del duale algebrico F^* di F nel duale algebrico E^* di E definita dalla formula classica

$$u^*y' = y' \circ u, \qquad \text{ossia, esplicitamente,} \qquad \langle x, u^*y' \rangle = \langle ux, y' \rangle)$$

manda il duale F' di F nel duale E' di E. D'ora in poi chiameremo *trasposta* di un'applicazione lineare debolmente continua u di E in F l'applicazione lineare u' di F' in E' indotta dalla trasposta algebrica di u.

Corollario 2. Siano (E, E') e (F, F') sistemi duali separati in E' e in F', e sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. La trasposta u' è un'applicazione lineare debolmente continua di F' in E' la cui trasposta è u quando E e F sono di Hausdorff (e E', F' sono muniti delle rispettive topologie deboli).

Ne segue che, per sistemi duali separati (E, E') e (F, F'), l'applicazione $u \mapsto u'$ definisce un isomorfismo dello spazio vettoriale $L(E, F)$ delle applicazioni lineari debolmente continue di E in F sullo spazio vettoriale $L(F', E')$ delle applicazioni lineari debolmente continue di F' in E'. Vedremo che, in sostanza, le proprietà degli elementi, dei sottoinsiemi ecc. di $L(E, F)$ possono interpretarsi per trasposizione in termini di elementi, sottoinsiemi ecc. di $L(F', E')$.

Ricordiamo che prendere la trasposta della composizione di una successione di operatori debolmente continui

$$E \longrightarrow F \longrightarrow \cdots \longrightarrow G$$

equivale a comporre le applicazioni trasposte nell'ordine

$$G' \longrightarrow \cdots \longrightarrow F' \longrightarrow E'.$$

In particolare la trasposizione definisce un isomorfismo dell'algebra $L(E, E)$ degli endomorfismi debolmente continui di E sull'algebra opposta a $L(E', E')$ degli endomorfismi debolmente continui di E'. Vale infatti

$$(uv)' = v' \circ u'.$$

Siano M un insieme di applicazioni lineari di uno spazio vettoriale E in uno spazio vettoriale F, A un sottoinsieme di E e B un sottoinsieme di F. Poniamo

$$M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A), \qquad M^{-1}(B) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(B).$$

Nota alla traduzione. Nella seconda definizione l'edizione inglese stampa un segno di unione. L'intersezione è richiesta dalle identità della proposizione 25 e dal criterio di equicontinuità della proposizione 28.

Si ha allora la seguente proposizione immediata.

Proposizione 25. Siano (E, E'), (F, F') sistemi duali separati in E' e in F', u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F, $A \subset E$ e $B \subset F'$. Si ha

$$(u(A))^\circ = (u')^{-1}(A^\circ), \qquad u^{-1}(B^\circ) = (u'(B))^\circ.$$

Più in generale, se M è un insieme di applicazioni lineari debolmente continue di E in F e M' è l'insieme delle applicazioni trasposte, si ottiene

$$(M(A))^\circ = (M')^{-1}(A^\circ), \qquad M^{-1}(B^\circ) = (M'(B))^\circ$$

(l'esponente $\circ$ indica il polare assoluto).

Corollario. Nelle ipotesi della proposizione 25, l'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso di $u(A)$ (rispettivamente di $M(A)$) coincide con il polare di $(u')^{-1}(A^\circ)$ (rispettivamente di $(M')^{-1}(A^\circ)$).

Ciò segue infatti dalla proposizione 25 e dal teorema del bipolare. In particolare, scegliendo $A = E$, si trova il risultato seguente.

Proposizione 26. Siano (E, E') e (F, F') sistemi duali separati in E' e in F' e sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. La chiusura debole di $u(E)$ è l'ortogonale del nucleo di u'. Se E e F sono separati, il nucleo di u è l'ortogonale di $u'(F')$.

La seconda affermazione si ottiene scambiando i ruoli di E ed E' e quelli di F e F'. In particolare si ha il seguente corollario.

Corollario. Siano (E, E') e (F, F') sistemi duali separati e sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. Affinché $u(E)$ sia debolmente denso in F è necessario e sufficiente che u' sia iniettiva. L'applicazione u è iniettiva se e soltanto se $u'(F')$ è debolmente denso in E'.

Per interpretare per trasposizione la condizione $u(E) = F$ il corollario precedente non basta. L'interpretazione è contenuta nella proposizione seguente.

Proposizione 27. Siano (E, E') e (F, F') sistemi duali separati in E' e in F' e sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. Affinché u sia un omomorfismo debole è necessario e sufficiente che $u'(F')$ sia un sottospazio debolmente chiuso di E'.

Dimostrazione. Siano N il nucleo di u e v l'applicazione di E/N in F dedotta da u. Il duale debole di E/N si identifica con il sottospazio vettoriale topologico chiuso N° di E' debole e u' si ottiene componendo v' con l'inclusione di N° in E'. L'ipotesi che $u'(F')$ sia debolmente chiuso equivale quindi alla stessa ipotesi su v. D'altra parte, poiché la topologia quoziente di E debole per N coincide con la corrispondente topologia debole su E/N (proposizione 20), dire che u è un omomorfismo debole equivale a dire che v è un isomorfismo debole sulla sua immagine. Basta dunque dimostrare la proposizione per la biiezione v sulla sua immagine. In questo caso è evidente: se u è un isomorfismo debole, u' manda F' su tutto E', per la proposizione 20, ossia per il teorema di Hahn–Banach. Il viceversa è immediato per la definizione delle topologie deboli.

Corollario. Siano (E, E'), (F, F') sistemi duali separati e sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. Affinché u sia un isomorfismo debole sulla sua immagine è necessario e sufficiente che

$$u'(F') = E'.$$

Affinché $u(E) = F$ è necessario e sufficiente che u' sia un isomorfismo debole sulla sua immagine.

Finora abbiamo utilizzato sistemi duali e topologie deboli. Introduciamo ora altre topologie localmente convesse sugli spazi vettoriali.

Proposizione 28. Siano (E, E') e (F, F') sistemi duali separati in E' e in F'. Muniamo E (rispettivamente F) della topologia della convergenza uniforme su una famiglia $\mathfrak{S}$ (rispettivamente $\mathfrak{T}$) di sottoinsiemi debolmente limitati di E' (rispettivamente di F'). Supponiamo che appartenga a $\mathfrak{S}$ ogni insieme contenuto in un omotetico dell'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso dell'unione di un numero finito di elementi di

$\mathfrak{S}$. Sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. Affinché u sia continua è necessario e sufficiente che $u'(\mathfrak{T}) \subset \mathfrak{S}$, ossia che $u'(B) \in \mathfrak{S}$ per ogni $B \in \mathfrak{T}$. Più in generale, un insieme M di applicazioni lineari debolmente continue di E in F è equicontinuo se e soltanto se $M'(B) \in \mathfrak{S}$ per ogni $B \in \mathfrak{T}$ (M' è l'insieme delle trasposte delle $u \in M$).

Dimostrazione. Dire che M è equicontinuo significa che, per ogni intorno V di 0 in F, $M^{-1}(V)$ è un intorno di 0 in E. Basta evidentemente considerare i V della forma B°, con $B \in \mathfrak{T}$. Per l'ultima formula della proposizione 25, ciò significa che ogni $(M'(B))^\circ$ è un intorno di 0 in E, ossia (§ 8) che $M'(B) \in \mathfrak{S}$. Di qui la conclusione.

Corollario 1. Siano E e F spazi localmente convessi e sia u un'applicazione lineare di E in F. Affinché u sia continua è necessario e sufficiente che, per ogni sottoinsieme equicontinuo B di F', le forme $y' \circ u$ con $y' \in B$ costituiscano un insieme equicontinuo di forme lineari su E. In altri termini, u deve essere debolmente continua e u' deve trasformare i sottoinsiemi equicontinui di F' in sottoinsiemi equicontinui di E'.

Corollario 2. Siano E e F spazi localmente convessi e sia E munito della topologia di Mackey $\tau(E, E')$. Le applicazioni lineari continue di E in F coincidono con quelle debolmente continue.

Infatti, se u è continua, è anche debolmente continua (proposizione 24, corollario 1). Viceversa, se u è debolmente continua, la sua trasposta è debolmente continua e manda quindi i dischi debolmente compatti (e a maggior ragione i dischi equicontinui debolmente chiusi di F') in dischi debolmente compatti di E', dunque in sottoinsiemi equicontinui di E'.

Corollario 3. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio localmente convesso di Hausdorff E in un altro tale spazio F. La trasposta u' è continua quando si muniscono E' e F' delle seguenti topologie:
a) le topologie forti;
b) le topologie di Mackey $\tau(E', E)$ e $\tau(F', F)$;
c) le topologie della convergenza compatta;
d) le topologie deboli.

Basta applicare la proposizione 28 scambiando i ruoli di E ed E' e quelli di F e F'.

Proposizione 29. Siano E e F due spazi localmente convessi e sia u un'applicazione lineare continua di E in F. Affinché u sia un omomorfismo è necessario e sufficiente che sia un omomorfismo debole (ossia, per la proposizione 27, che $u'(F')$ sia un sottospazio debolmente chiuso di E') e che ogni sottoinsieme equicontinuo di E' contenuto in $u'(F')$ sia immagine mediante u' di un sottoinsieme equicontinuo di F'.

Siano N il nucleo di u, M la sua immagine e v l'applicazione lineare continua di E/N su M definita da u. Tenuto conto della proposizione 20, si verifica facilmente che ciascuna delle due condizioni di cui vogliamo dimostrare l'equivalenza equivale alla medesima condizione su v in luogo di u. Possiamo dunque considerare il caso in cui u sia una biiezione di E su F. Si conclude osservando che due topologie localmente convesse su uno spazio vettoriale coincidono se e soltanto se danno lo stesso duale e gli stessi sottoinsiemi equicontinui del duale (§ 11), oppure applicando il corollario 1 della proposizione 28 all'applicazione inversa.

Corollario 1. Siano E e F due spazi localmente convessi e sia u un'applicazione lineare continua di E in F. Affinché u sia un isomorfismo sulla sua immagine è necessario e sufficiente che ogni sottoinsieme equicontinuo di E' sia immagine mediante u' di un sottoinsieme equicontinuo di F'.

Corollario 2. Siano E e F due spazi localmente convessi e sia u un'applicazione lineare continua di E in F. Affinché u sia un omomorfismo di E su un sottospazio denso di F è necessario e sufficiente che $u'(F')$ sia un sottospazio debolmente chiuso di E' e che la controimmagine mediante u' di ogni sottoinsieme equicontinuo di E' sia equicontinua.

Se ne deduce quanto segue.

Corollario 3. Siano E e F due spazi localmente convessi, con F munito della topologia di Mackey $\tau(F, F')$. Sia u un'applicazione lineare continua di E su F. Affinché u sia un omomorfismo è necessario e sufficiente che sia un omomorfismo debole.

Utilizzando le proposizioni 29 e 27 si ottengono le condizioni su u' affinché u sia un omomorfismo di E su F, e così via.

Corollario 4. Siano E e F due spazi localmente convessi, u un'applicazione lineare continua di E su F ed E_0 un sottospazio vettoriale denso di E. Se u induce un omomorfismo di E_0 in F, allora u è un omomorfismo.

Infatti i duali di E_0 e di E si identificano e i sottoinsiemi equicontinui dell'uno corrispondono esattamente ai sottoinsiemi equicontinui dell'altro. Il corollario segue dal fatto che un sottospazio di E' chiuso per $\sigma(E', E_0)$ è a maggior ragione chiuso per $\sigma(E', E)$. Si osservi che l'implicazione inversa del corollario appena enunciato è falsa: u può essere un omomorfismo senza indurre un omomorfismo su E_0 (si veda l'esercizio 2).

Nel prossimo paragrafo caratterizzeremo, mediante la trasposta, gli omomorfismi metrici da uno spazio di Banach in un altro.

Bitrasposta. Siano (E, E') e (F, F') due sistemi duali separati e sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F. Allora u' è continua da F' forte in E' forte (proposizione 28, corollario 3). La sua trasposta $(u')'$ è dunque un'applicazione lineare di E'' in F'' continua per $\sigma(E'', E')$ e $\sigma(F'', F')$ (stesso riferimento). Si chiama *bitrasposta* di u e si indica con u''. È anche l'applicazione che si ottiene prolungando u per continuità debole a E'' (si ricordi che E è debolmente denso in E''). Spesso conviene ragionare direttamente su u'' servendosi di questa interpretazione.

Esercizio 1. Siano E uno spazio vettoriale, (u_i) una famiglia di applicazioni lineari di E in spazi localmente convessi E_i e, per ogni i, u_i^* la trasposta algebrica di u_i. Sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi del duale algebrico E^* di E della forma $u_i^*(A_i)$, dove A_i percorre l'insieme dei dischi equicontinui debolmente compatti di E_i'. Si mostri che su E la $\mathfrak{S}$-topologia coincide con la topologia meno fine per cui le u_i sono continue. Utilizzando il teorema 7, corollario 1 (§ 12), si dia una nuova dimostrazione del teorema 11 (§ 15).

Esercizio 2. Siano E uno spazio localmente convesso metrizzabile, completo e di Hausdorff e F un sottospazio vettoriale chiuso di codimensione infinita. Si mostri che esiste un supplementare algebrico E_0 di F ovunque denso in E e che, per un tale E_0, l'omomorfismo canonico di E su E/F induce su E_0 un'applicazione lineare che non è un omomorfismo.

Esercizio 3. Siano K uno spazio compatto, E uno spazio localmente convesso e F un sottospazio vettoriale chiuso di E. Si mostri che l'applicazione lineare naturale di $C(K, E)$ in $C(K, E/F)$ è un omomorfismo del primo spazio su un sottospazio denso del secondo. (Si usi la proposizione 29, corollario 3, sostituendo $C(K, E)$ con $C(K) \otimes E$, poi si applichi il capitolo 1, § 14, esercizio 2.)

17 Riepilogo e complementi per gli spazi normati

Sia E uno spazio normato. Su E' vi è una norma naturale,

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x' \rangle|,$$

che ne fa uno spazio di Banach (capitolo 1, § 5, teorema 2). Si vede subito che la topologia corrispondente su E' coincide con la topologia forte del duale, ossia con la topologia della convergenza uniforme sulla palla unitaria di E (l'uguaglianza con la topologia forte segue dalla caratterizzazione metrica dei sottoinsiemi limitati di E). Per definizione della norma di E', la palla unitaria di E' è il polare della palla unitaria di E. La palla unitaria di E' è quindi un sottoinsieme debolmente compatto di E' (qui «debole» si riferisce alla topologia $\sigma(E', E)$).

I sottoinsiemi equicontinui di E' sono i sottoinsiemi limitati dello spazio normato E'. La topologia del biduale E'' di E (§ 12, definizione 9) coincide dunque con la topologia forte del duale di E', ossia con la topologia definita dalla norma del duale dello spazio normato E'. Si ha inoltre la seguente proposizione.

Proposizione 30. Sia E uno spazio normato. L'applicazione continua canonica di E nel suo biduale è un isomorfismo metrico di E in E''.

Infatti, se $x \in E$, dalle definizioni segue che la norma di x in E'' è al più uguale alla sua norma in E. La disuguaglianza inversa segue da un fatto più preciso: esiste $x' \in E'$ di norma ≤ 1 tale che $\langle x, x' \rangle = \|x\|$. Ciò è immediato se si sostituisce E con la retta F generata da x. Basta poi prolungare la forma lineare così ottenuta su F a una forma lineare di norma ≤ 1 definita su tutto E, per il teorema di Hahn–Banach II.

Corollario. Ogni spazio normato è isomorfo, con la sua norma, a un sottospazio vettoriale di uno spazio $C(K)$ costruito su un opportuno spazio compatto K.

Si può prendere per K la palla unitaria di E' munita della topologia debole e considerare, per ogni $x \in E$, la restrizione a K della forma lineare definita da x su E'. La proposizione 30 significa precisamente che l'applicazione lineare di E in $C(K)$ così ottenuta è un isomorfismo metrico.

Dal teorema 8 del § 12 segue la proposizione seguente.

Proposizione 31. Sia E uno spazio normato. E è riflessivo se e soltanto se la sua palla unitaria è debolmente compatta.

Nel caso generale, il teorema del bipolare mostra che la palla unitaria di E'' è la chiusura debole della palla unitaria di E (qui «debole» si riferisce alla topologia $\sigma(E'', E')$). Segnaliamo il seguente corollario.

Corollario. Siano E uno spazio normato riflessivo e F un sottospazio vettoriale chiuso. Allora F ed E/F sono riflessivi.

Basta dimostrarlo per il quoziente. Essendo debolmente compatta la palla unitaria di E, la sua immagine canonica in E/F è debolmente compatta, dunque chiusa. Poiché tale immagine è densa nella palla unitaria di E/F, essa coincide con questa palla. Dunque E/F soddisfa il criterio della proposizione 31.

Per la dualità dei sottospazi e dei quozienti si ha il seguente risultato.

Proposizione 32. Siano E uno spazio normato e F un sottospazio vettoriale chiuso. L'applicazione lineare naturale del duale di E/F nel duale di E è un isomorfismo metrico del primo spazio in quest'ultimo. L'applicazione lineare naturale del duale di E nel duale di F è un omomorfismo metrico del primo spazio su tutto il secondo.

La prima affermazione segue immediatamente dalle definizioni. La seconda è già contenuta nel teorema di Hahn–Banach II (anzi, tenendo conto del teorema 6 del § 11, ne costituisce un enunciato equivalente). Gli isomorfismi canonici $(E/F)' \simeq F^\circ$, $F' \simeq E'/F^\circ$ sono dunque isomorfismi anche per le strutture normate e, a maggior ragione, per le rispettive topologie forti naturali.

Corollario 1. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio normato E in un altro spazio normato F. Se u è un omomorfismo (rispettivamente un omomorfismo metrico), la sua trasposta u' è un omomorfismo (rispettivamente un omomorfismo metrico).

Infatti le due parti della proposizione 32 riconducono al caso in cui u è una biiezione di E su F. Il resto è immediato.

Corollario 2. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio normato completo E in uno spazio normato F. Affinché u sia un omomorfismo metrico di E su F (rispettivamente un isomorfismo metrico) è necessario e sufficiente che la trasposta u' sia un isomorfismo metrico di F' in E' (rispettivamente un omomorfismo metrico di F' su E').

Questa è soltanto un'altra formulazione del corollario 1. Segnaliamo che nel capitolo 4, parte 2, § 4, vedremo che valgono le reciproche dei corollari 1 e 2.

Per quanto riguarda le trasposte, resta da dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 33. Siano E e F due spazi normati e sia u un'applicazione lineare continua di E in F. La norma di u è uguale alla norma della sua trasposta.

Infatti si ha

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ux\|.$$

Per la proposizione 30 si ottiene poi

$$\|ux\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle ux, x' \rangle|,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|x'\| \leq 1}} |\langle ux, x' \rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|x'\| \leq 1}} |\langle x, u'x' \rangle| \\ &= \sup_{\|x'\| \leq 1} \|u'x'\| = \|u'\|. \end{aligned}$$

Esercizio 1. Siano E uno spazio normato e F un sottospazio vettoriale chiuso di E. Si mostri che, se F ed E/F sono riflessivi, anche E è riflessivo. (Si mostri direttamente che ogni forma lineare continua su E' proviene da un elemento di E, dimostrando anzitutto che su F° essa coincide con una forma lineare definita da un elemento di E.)

Esercizio 2. Si mostri che uno spazio normato separabile è isomorfo a un sottospazio vettoriale normato di uno spazio $C(K)$, dove K è uno spazio compatto metrizzabile (si usi il § 11, esercizio 2). Se ne deduca che si può prendere per K l'insieme di Cantor (si veda Bourbaki, *Topologie générale*, capitolo IX, § 2, esercizio 18), oppure l'intervallo $I = [0, 1]$ (si mostri che, prolungando linearmente nelle componenti di $I \setminus K$ ogni funzione continua data sull'insieme di Cantor K, si ottiene un isomorfismo metrico di $C(K)$ in $C(I)$). Si confrontino questi risultati con il capitolo 1, § 14, esercizio 1.

Esercizio 3. Sia E uno spazio localmente convesso e sia u un'applicazione lineare continua di E in uno spazio di Banach F. Si mostri che l'immagine della palla unitaria di F' mediante la trasposta u' di u è un disco equicontinuo debolmente compatto di E'. Viceversa, per ogni disco equicontinuo debolmente compatto A' di E' si può trovare un'applicazione lineare continua u di E in uno spazio di Banach F tale che A' sia l'immagine della palla unitaria di F' mediante la trasposta u' di u. Si può supporre u' biiettiva sulla sua immagine. (Si consideri su E la seminorma associata al disco polare di A' e si prenda per F lo spazio di Banach associato.)

Esercizio 4. a) Si consideri lo spazio di Banach c_0 delle successioni di scalari che tendono a 0 (si veda il capitolo 1, § 9, esercizio 7). Sia e_i l'elemento di c_0 le cui «coordinate» sono tutte nulle tranne l'i-esima, che vale 1. Si mostri che la successione (e_i) tende a zero debolmente, ma non fortemente. Si mostri che la successione

$$u_n = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i$$

è una successione di Cauchy debole in c_0 che non converge debolmente ad alcun elemento di c_0 (si mostri che (u_n) converge debolmente nel biduale ℓ^∞ di c_0 all'elemento u le cui coordinate sono tutte uguali a 1).
b) Si consideri lo spazio di Banach ℓ^1 delle famiglie sommabili di scalari su un insieme di indici I. Si mostri che in questo spazio ogni successione di Cauchy debole è una successione di Cauchy forte e quindi converge fortemente.

Esercizio 5. Sia E uno spazio di Banach separabile in cui esistano successioni di Cauchy deboli che non convergono debolmente oppure successioni debolmente convergenti che non convergono fortemente (si veda l'esercizio 4, a)). Sia u un omomorfismo di ℓ^1 su E (si veda il capitolo 1, § 14, esercizio 1). Si mostri che il nucleo di u non ammette un supplementare topologico in ℓ^1 (si usi l'esercizio 4, b)).

18 Proprietà elementari della compattezza e della compattezza debole

In questo paragrafo considereremo soltanto le proprietà più elementari della compattezza connesse alla teoria della dualità. Altri risultati si trovano nel capitolo 5.

Proposizione 34. Sia A un sottoinsieme di uno spazio localmente convesso E. Affinché A sia precompatto è necessario e sufficiente che sia limitato e che su A la struttura uniforme indotta da E coincida con la struttura uniforme debole indotta.

La condizione è sufficiente, poiché un insieme limitato è debolmente precompatto (§ 10, proposizione 15). È necessaria, poiché un insieme precompatto è limitato (capitolo 1, § 7, proposizione 10). D'altra parte, per mostrare che le due strutture uniformi indotte coincidono, possiamo evidentemente supporre E di Hausdorff. Allora E si identifica con

uno spazio di funzioni su E' munito di una topologia di $\mathfrak{S}$-convergenza, mentre la topologia debole è quella della convergenza puntuale. Ritroviamo così una situazione già nota dalla topologia generale (capitolo 0, proposizione 6, corollario 2).

Proposizione 35. Sia A un sottoinsieme precompatto di uno spazio localmente convesso E. Anche l'inviluppo assolutamente convesso di A è precompatto.

La dimostrazione è immediata.

Corollario. Sia A un sottoinsieme precompatto di uno spazio localmente convesso di Hausdorff E. L'inviluppo assolutamente convesso chiuso di A è compatto se e soltanto se è completo (ciò accade se in E ogni sottoinsieme chiuso e limitato è completo, e a maggior ragione se E è completo).

Per verificare che un sottoinsieme B di uno spazio localmente convesso è completo è spesso utile il criterio seguente.

Proposizione 36. Siano E uno spazio localmente convesso e A un sottoinsieme completo di E. Allora A è completo anche per ogni topologia localmente convessa T su E più fine della topologia iniziale T_0 e che ammetta un sistema fondamentale di intorni di 0 chiusi per T_0.

La dimostrazione si riduce al caso in cui T_0 sia di Hausdorff, cosicché E si identifica con uno spazio di forme lineari su E' munito di una $\mathfrak{S}_0$-topologia. Anche T è allora una $\mathfrak{S}$-topologia e si ricade in un caso noto di topologia generale (capitolo 0, proposizione 6, corollario 1). Si può anche dimostrare il seguente risultato più generale. Sia F un insieme munito di due strutture uniformi T_0 e T, con T più fine di T_0 e dotata di un sistema fondamentale di intorni della diagonale chiusi in $F \times F$ per la topologia corrispondente a T_0. Ogni sottoinsieme A di F completo per T_0 è allora completo per T.

Dobbiamo mostrare che un filtro di Cauchy Φ su A per T ammette un limite per T. Per l'ipotesi su T, le chiusure $\overline{B}$ in A per T_0, al variare di $B \in \Phi$, formano ancora una base di filtro di Cauchy Ψ per T. Dobbiamo mostrare che essa converge, ossia che

$$\bigcap_{B \in \Phi} \overline{B}$$

non è vuota. Ma Ψ è anche una base di filtro di Cauchy per T_0, costituita da chiusi per T_0. Poiché A è completo per T_0, il filtro ha un punto aderente in A, ossia $\bigcap_{B \in \Phi} \overline{B}$ non è vuota.

Corollario 1. In uno spazio localmente convesso di Hausdorff E, ogni sottoinsieme debolmente compatto è completo.

Infatti esso è debolmente completo e basta applicare la proposizione 36 prendendo per T_0 la topologia debole e per T la topologia data. Tenendo conto della proposizione 35, otteniamo il corollario seguente.

Corollario 2. Sia A un sottoinsieme precompatto di uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Il suo inviluppo assolutamente convesso chiuso B è compatto se e soltanto se è debolmente compatto.

La necessità è evidente. La sufficienza segue dal corollario 1 e dal corollario della proposizione 35. Segnaliamo infine il risultato seguente.

Corollario 3. Sia E uno spazio localmente convesso. Ogni sottoinsieme debolmente compatto di E' è fortemente completo.

Esso è infatti debolmente completo e basta applicare la proposizione 36 a E' prendendo per T_0 la topologia debole e per T quella forte.

Proposizione 37. 1) Siano E uno spazio localmente convesso di Hausdorff, A un sottoinsieme compatto di E e B un suo sottoinsieme chiuso. Allora $A + B$ è chiuso.
2) Se A e B sono due sottoinsiemi convessi compatti di E, anche $\Gamma(A \cup B)$ è compatto.

1) Sia $x \notin A + B$. Ciò significa che il compatto $x - A$ e il chiuso B sono disgiunti. Come è noto, esiste allora un intorno $(x - A) + U$ del compatto disgiunto da B. Dunque $x + U$ è un intorno di x disgiunto da $A + B$.

2) Si veda il § 5, esercizio 4.

Teorema 12. Siano (E, E') e (F, F') due sistemi duali, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E, $\mathfrak{T}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di F', u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F e u' la sua trasposta. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
1) u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi precompatti di F munito della $\mathfrak{T}$-topologia.
1′) u' trasforma i $B \in \mathfrak{T}$ in sottoinsiemi di E' precompatti per la $\mathfrak{S}$-topologia.
2) Le restrizioni di u agli $A \in \mathfrak{S}$ sono uniformemente continue quando si munisce E della topologia debole e F della $\mathfrak{T}$-topologia.
2′) Le restrizioni di u' ai $B \in \mathfrak{T}$ sono uniformemente continue quando si munisce F' della topologia debole ed E' della $\mathfrak{S}$-topologia.
3) Le restrizioni della funzione $\langle ux, y' \rangle = \langle x, u'y' \rangle$ agli insiemi $A \times B$, con $A \in \mathfrak{S}$ e $B \in \mathfrak{T}$, sono uniformemente continue per il prodotto delle strutture uniformi deboli. Basta anche supporre queste funzioni uniformemente continue per il prodotto della struttura uniforme debole di A e della struttura uniforme forte di B, o viceversa.

Inoltre, quando gli $A \in \mathfrak{S}$ (rispettivamente i $B \in \mathfrak{T}$) sono dischi, nella condizione 2) (rispettivamente 2′)) si può sostituire la continuità uniforme con la continuità, e persino con la continuità nell'origine. Le condizioni precedenti implicano che, per ogni $A \in \mathfrak{S}$ e $B \in \mathfrak{T}$, l'insieme dei valori $\langle ux, y' \rangle$, con $x \in A$ e $y' \in B$, è limitato.

Dimostrazione. La 1) implica la 2′). Infatti i $B \in \mathfrak{T}$ sono insiemi equicontinui di funzioni su F (con la $\mathfrak{T}$-topologia), sicché su un tale B la struttura uniforme debole coincide con quella della convergenza sui precompatti. D'altra parte, la 1) significa precisamente che u' è continua, dunque uniformemente continua, per la convergenza sui precompatti in F' e la $\mathfrak{S}$-convergenza in E' (§ 16, proposizione 28). La 2′) implica la 1′) per continuità uniforme, dato che i $B \in \mathfrak{T}$ sono sottoinsiemi debolmente precompatti di F'. Per simmetria si hanno anche le implicazioni 1′) $\Rightarrow$ 2) e 2) $\Rightarrow$ 1). Le quattro condizioni sono dunque equivalenti.

Inoltre 2) e 2′) implicano 3), come si vede scrivendo

$$\langle ux_1, y'_1 \rangle - \langle ux_2, y'_2 \rangle = \langle u(x_1 - x_2), y'_1 \rangle + \langle ux_2, y'_1 - y'_2 \rangle.$$

Viceversa, la prima forma indebolita della 3) implica evidentemente la 2). Dato infatti $\varepsilon > 0$, esiste un intorno debole della diagonale U in A tale che

$$|\langle ux_1, y' \rangle - \langle ux_2, y' \rangle| < \varepsilon$$

per $x_1, x_2 \in A$, $y' \in B$, $(x_1, x_2) \in U$. In altri termini, $ux_1 - ux_2 \in \varepsilon B^\circ$, che è precisamente la 2). La 3) e le sue varianti equivalgono dunque alle condizioni precedenti. Poiché $A \times B$

è precompatto per il prodotto delle strutture uniformi deboli, dalla 3) segue che l'insieme degli $\langle ux, y' \rangle$, con $x \in A$ e $y' \in B$, è un sottoinsieme precompatto, dunque limitato, del campo degli scalari. Infine, la sostituzione nella 2) (o nella 2′)) della continuità uniforme con la continuità nell'origine è un caso particolare del lemma del § 14.

Corollario 1. Siano u un'applicazione lineare continua di uno spazio localmente convesso E in un altro, F, e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E la cui unione genera E. L'applicazione u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi precompatti di F se e soltanto se la sua trasposta u' trasforma i sottoinsiemi equicontinui di F' in sottoinsiemi relativamente compatti di E' munito della $\mathfrak{S}$-topologia.

Infatti nella seconda condizione si può supporre debolmente compatto il sottoinsieme equicontinuo B di F'. La sua immagine in E' è allora debolmente compatta, quindi debolmente completa e a maggior ragione completa per la $\mathfrak{S}$-convergenza (proposizione 36). Per tale immagine la precompattezza equivale pertanto alla compattezza relativa. Il corollario 1 è dunque un caso particolare dell'equivalenza delle condizioni 1) e 1′) del teorema 12. Si vede anche che, se gli $A \in \mathfrak{S}$ sono debolmente compatti e F è di Hausdorff, la condizione del corollario 1 significa che u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi relativamente compatti di F. Un semplice cambiamento di notazione dà il corollario seguente.

Corollario 2. Siano E, F due spazi localmente convessi di Hausdorff, u un'applicazione lineare debolmente continua di E' in F e u' la sua trasposta, applicazione lineare debolmente continua di F' in E. L'applicazione u trasforma i sottoinsiemi equicontinui di E' in sottoinsiemi relativamente compatti di F se e soltanto se u' ha la proprietà analoga.

La prima condizione significa anche che u' è continua quando F' è munito della topologia della convergenza uniforme sui dischi compatti di F (§ 16, proposizione 28). Ciò equivale all'enunciato analogo per u.

Corollario 3. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio di Banach E in un altro spazio di Banach F. L'applicazione u trasforma la palla unitaria di E in un sottoinsieme relativamente compatto di F se e soltanto se la trasposta u' trasforma la palla unitaria di F' in un sottoinsieme relativamente compatto dello spazio di Banach E'.

(Basta prendere $\mathfrak{S}$ costituita dalla sola palla unitaria di E e $\mathfrak{T}$ dalla sola palla unitaria di F'.)

Corollario 4. Siano (E, E') un sistema duale, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E e $\mathfrak{T}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E'. Sono equivalenti le seguenti condizioni.
a) Gli $A \in \mathfrak{S}$ sono precompatti per la $\mathfrak{T}$-topologia.
a′) Gli $A' \in \mathfrak{T}$ sono precompatti per la $\mathfrak{S}$-topologia.
b) Per ogni $A \in \mathfrak{S}$ e $A' \in \mathfrak{T}$ la restrizione della funzione $\langle x, x' \rangle$ ad $A \times A'$ è uniformemente continua per il prodotto delle strutture uniformi deboli.

Basta applicare il teorema 12 all'identità di E. In particolare, prendendo per $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi limitati di uno spazio localmente convesso E e per $\mathfrak{T}$ quella dei sottoinsiemi equicontinui di E', si ottiene il seguente risultato.

Corollario 5. Sia E uno spazio localmente convesso. I sottoinsiemi limitati di E sono precompatti se e soltanto se i sottoinsiemi equicontinui di E' sono fortemente relativamente compatti.

Anche questo è un caso particolare del corollario 1, relativo all'identità di E e alla famiglia di tutti i sottoinsiemi limitati di E.

Definizione 13. Si dice che uno spazio localmente convesso E è uno *spazio di Montel*, o, in breve, uno spazio di tipo $(\mathcal{M})$, se è di Hausdorff e ogni suo sottoinsieme limitato è relativamente compatto.

A maggior ragione un tale spazio è riflessivo. Abbiamo visto che gli spazi $\mathcal{E}(U)$ e $\mathcal{E}(K)$ di Schwartz (capitolo 1, § 10) sono spazi di Montel. Uno spazio di Banach di tipo $(\mathcal{M})$ ha dimensione finita, per il capitolo 1, § 13. Il corollario 4 del teorema 12 dà allora quanto segue.

Proposizione 38. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. E è di tipo $(\mathcal{M})$ se e soltanto se i suoi sottoinsiemi chiusi e limitati sono completi e i sottoinsiemi equicontinui di E' sono fortemente relativamente compatti.

Corollario. Sia E uno spazio localmente convesso i cui sottoinsiemi chiusi e limitati siano completi e tale che i sottoinsiemi fortemente limitati del duale siano equicontinui (per esempio uno spazio metrizzabile e completo, si veda il capitolo 1, § 15, teorema 11). E è di tipo $(\mathcal{M})$ se e soltanto se il suo duale forte è di tipo $(\mathcal{M})$.

(Nel capitolo 3, § 3, studieremo, sotto il nome di spazi quasi tonnelé, gli spazi localmente convessi nei quali i sottoinsiemi fortemente limitati del duale sono equicontinui.)

Definizione 14. Sia u un'applicazione lineare di uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Si dice che u è *compatta* (rispettivamente *precompatta*, *debolmente compatta*, *limitata*) se trasforma un opportuno intorno V di 0 in E in un sottoinsieme relativamente compatto (rispettivamente precompatto, debolmente relativamente compatto, limitato) di F.

Quando E è uno spazio di Banach possiamo prendere per V la palla unitaria di E. Dire che u è limitata equivale a dire che u è continua (capitolo 1, § 7, proposizione 12, corollario 2). Il corollario 3 del teorema 12 afferma che un'applicazione lineare continua da uno spazio di Banach in un altro è compatta se e soltanto se la sua trasposta è compatta.

Passiamo alla compattezza debole. Poiché i sottoinsiemi limitati di uno spazio localmente convesso E sono precisamente quelli debolmente precompatti, un sottoinsieme A di E è debolmente compatto se e soltanto se è limitato, debolmente separato e debolmente completo.

Teorema 13. Siano u un'applicazione lineare continua di uno spazio localmente convesso di Hausdorff E in un altro tale spazio F, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E e H il sottospazio vettoriale generato dalle chiusure deboli in E'' degli $A \in \mathfrak{S}$. Si supponga $H \supset E$. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
1) u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi debolmente relativamente compatti di F.
2) La bitrasposta u'' di u manda H in F.

Queste condizioni implicano la seguente.
3) La trasposta u' trasforma i sottoinsiemi equicontinui debolmente chiusi di F' in sottoinsiemi di E' relativamente compatti per $\sigma(E', H)$.

Quando F è quasi completo, anche la 3) implica la 1) e la 2).

Dimostrazione. Poiché u'' è debolmente continua da E'' in F'' e le chiusure deboli in E'' degli $A \in \mathfrak{S}$ sono debolmente compatte, la 1) equivale alla 2). D'altra parte, la 2) significa che u' è continua per $\sigma(F', F)$ e $\sigma(E', H)$. Poiché un sottoinsieme equicontinuo debolmente chiuso B di F' è debolmente compatto, dalla 2) segue che $u'(B)$ è compatto, dunque relativamente compatto, in E' munito di $\sigma(E', H)$. Viceversa, se vale quest'ultima

condizione, su $u'(B)$ la topologia $\sigma(E', H)$ coincide con $\sigma(E', E)$. La restrizione di u' a ogni sottoinsieme equicontinuo B di F' è quindi continua per le topologie $\sigma(F', F)$ e $\sigma(E', H)$. Per ogni $x \in H$ la forma lineare $u''x = x \circ u'$ è dunque debolmente continua sui sottoinsiemi equicontinui di F' e perciò appartiene al completamento di F (§ 14, teorema 10, corollario 2), quindi a F se F è completo. In ogni caso $u''x$ appartiene anche alla chiusura debole, nel completamento $\widehat{F}$, di un sottoinsieme limitato di F. Si può evidentemente supporre che tale sottoinsieme sia un disco. La sua chiusura debole in $\widehat{F}$ coincide allora con la chiusura per la topologia naturale del completamento. Se F è quasi completo, si ha dunque $u''x \in F$ per ogni $x \in H$.

Il caso più importante è quello in cui $\mathfrak{S}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi limitati di E.

Corollario 1. Siano E, F due spazi localmente convessi di Hausdorff e u un'applicazione lineare continua di E in F. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
1) u trasforma i sottoinsiemi limitati di E in sottoinsiemi debolmente relativamente compatti di F.
2) La bitrasposta u'' manda E'' in F.

Queste condizioni implicano la seguente.
3) La trasposta u' trasforma i sottoinsiemi equicontinui di F' in sottoinsiemi di E' relativamente compatti per $\sigma(E', E'')$. Il viceversa vale se F è quasi completo.

Corollario 2. Siano E, F spazi localmente convessi di Hausdorff, u un'applicazione lineare debolmente continua di E in F' e u' la sua trasposta, applicazione debolmente continua di F in E'. L'applicazione u trasforma i sottoinsiemi limitati di E in sottoinsiemi di F' relativamente compatti per $\sigma(F', F'')$ se e soltanto se u' ha la proprietà analoga.

Dimostrazione. Basta mostrare che la prima condizione implica la seconda. Ciò segue dal corollario 1 applicato a E e a F' forte, poiché i sottoinsiemi limitati di F sono sottoinsiemi equicontinui del duale di F' forte.

Corollario 3. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio di Banach E in un altro spazio di Banach F. L'applicazione u è debolmente compatta (definizione 14) se e soltanto se la trasposta u' è un'applicazione debolmente compatta dallo spazio di Banach F' nello spazio di Banach E'.

Corollario 4. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff.
a) Se E è riflessivo e i sottoinsiemi fortemente limitati del duale sono equicontinui, allora E' munito della topologia forte è riflessivo.
b) Se E è quasi completo e E' munito della topologia forte è riflessivo, allora E è riflessivo.
c) Dunque, se i sottoinsiemi fortemente limitati di E' sono equicontinui, E è riflessivo se e soltanto se è quasi completo e il suo duale forte è riflessivo. (In particolare, uno spazio localmente convesso metrizzabile e completo è riflessivo se e soltanto se lo è il suo duale forte.)

La a) è una conseguenza immediata del teorema 8 e la b) segue dal corollario 1 applicato all'identità.

Esercizio 1. Siano A, B due insiemi e u una funzione scalare limitata su $A \times B$. Per ogni $x \in A$ sia $\widehat{x}$ la funzione $y \mapsto u(x, y)$ su B e, per ogni $y \in B$, sia $\widehat{y}$ la funzione $x \mapsto u(x, y)$ su A. Sia $\widehat{A}$ il sottoinsieme dello spazio di Banach $C^\infty(B)$ delle funzioni limitate su B

costituito dalle $\widehat{x}$ ($x \in A$), e sia $\widehat{B}$ l'analogo sottoinsieme di $C^\infty(A)$. Si mostri che $\widehat{A}$ è relativamente compatto (rispettivamente debolmente relativamente compatto) in $C^\infty(B)$ se e soltanto se $\widehat{B}$ è relativamente compatto (rispettivamente debolmente relativamente compatto) in $C^\infty(A)$.

Applicazione. Siano G un monoide e f una funzione limitata su G. Per ogni $s \in G$ sia $U_s f$ (rispettivamente $V_s f$) la funzione $t \mapsto f(st)$ (rispettivamente $t \mapsto f(ts)$) su G. Si mostri che l'insieme delle traslate sinistre $U_s f$ è relativamente compatto (rispettivamente debolmente relativamente compatto) in $C^\infty(G)$ se e soltanto se lo è l'insieme delle traslate destre $V_s f$. Si dice allora che f è una funzione *quasi periodica* (rispettivamente *debolmente quasi periodica*) su G. Si mostri che, se f è quasi periodica, l'insieme delle $U_s V_t f$ con $s, t \in G$ è relativamente compatto in $C^\infty(G)$.

Esercizio 2. Si considerino gli spazi di Banach c_0, ℓ^1, ℓ^∞ (capitolo 1, § 9, esercizi 6 e 7).
a) Si mostri che c_0 e ℓ^1 sono separabili. Se ne deduca che la palla unitaria di c_0 è debolmente metrizzabile e che la palla unitaria di ℓ^1 è metrizzabile per $\sigma(\ell^1, c_0)$. Si mostri che ℓ^∞ non è separabile (per ogni sottoinsieme A degli interi sia $x_A \in \ell^\infty$ la sua funzione caratteristica. Si mostri che $A \neq B$ implica $\|x_A - x_B\| \geq 1$ e che l'insieme degli x_A non è numerabile).
b) Si mostri che ogni sottoinsieme debolmente compatto dello spazio di Banach ℓ^1 è compatto (si usi il § 17, esercizio 4b. Basta mostrare che da ogni successione debolmente relativamente compatta di ℓ^1 si può estrarre una sottosuccessione fortemente convergente, servendosi di a) per estrarre una sottosuccessione convergente per $\sigma(\ell^1, c_0)$, e quindi per $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$).
c) Sia u un'applicazione lineare continua di c_0 in uno spazio localmente convesso E. Si mostri che u è compatta se e soltanto se è debolmente compatta (si usi b)).
d) Si generalizzino b) e c) agli spazi $\ell^1(I)$, ecc., costruiti su un insieme di indici I.

Esercizio 3. Siano E uno spazio localmente convesso di Hausdorff e u un'applicazione lineare debolmente continua del duale ℓ^∞ di ℓ^1 in E (u trasforma dunque la palla unitaria di ℓ^∞ in un sottoinsieme debolmente compatto di E). Si mostri che u trasforma anzi la palla unitaria di ℓ^∞ in un sottoinsieme compatto di E (si veda l'esercizio 2). Sia e_i l'elemento di ℓ^∞ le cui coordinate sono tutte nulle, tranne l'i-esima che vale 1. Si mostri che la serie di termini ue_i converge commutativamente in E, che lo stesso vale per il suo prodotto termine a termine con qualsiasi successione limitata e che

$$u((x_i)) = \sum_i x_i u e_i$$

per ogni $(x_i) \in \ell^\infty$. Viceversa, si mostri che, se E è quasi completo, ogni famiglia sommabile in E si ottiene in questo modo. Si ha dunque una corrispondenza biunivoca fra le applicazioni lineari debolmente continue di ℓ^∞ in E, le applicazioni lineari compatte (o debolmente compatte) di c_0 in E e le serie commutativamente convergenti in E. (Gli spazi c_0, ℓ^1, ℓ^∞ possono ancora essere costruiti su un qualunque insieme di indici I.)

Esercizio 4. a) Sia u una forma bilineare sul prodotto $E \times F$ di due spazi localmente convessi e siano A e B dischi rispettivamente in E e in F. Si mostri che, se la restrizione di u ad $A \times B$ è continua nell'origine, tale restrizione è continua. Se inoltre A è precompatto e B è compatto, allora u è continua su $A \times B$.
b) Sia u un'applicazione lineare debolmente continua di uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di dischi limitati di E che ricopra E. L'applicazione u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi precompatti di F se e soltanto se, per ogni $A \in \mathfrak{S}$

e ogni sottoinsieme equicontinuo B di F', la restrizione ad $A \times B$ della funzione $\langle ux, y' \rangle$ è continua nell'origine per il prodotto delle topologie deboli (si veda il teorema 12, condizioni 1) e 3)).
c) Sia E uno spazio di Banach separabile. Si mostri che per ogni successione (x_i) in E debolmente convergente a 0 e ogni successione (x'_i) in E' debolmente convergente a 0 si ha

$$\langle x_i, x'_i \rangle \longrightarrow 0$$

se e soltanto se i sottoinsiemi debolmente compatti di E sono compatti (si usi b), osservando che la palla unitaria di E' è debolmente metrizzabile, che di conseguenza E' è debolmente separabile e che i sottoinsiemi debolmente compatti di E sono debolmente metrizzabili).

Esercizio 5. Sia E uno spazio localmente convesso il cui duale forte sia separabile (per esempio c_0, si veda l'esercizio 2a, o un sottospazio vettoriale di c_0).
a) Sia u un'applicazione lineare debolmente continua di E in uno spazio localmente convesso F. L'applicazione u trasforma i sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi precompatti se e soltanto se trasforma le successioni debolmente convergenti a 0 in successioni convergenti per la topologia data (basta verificare che la restrizione di u a un sottoinsieme limitato A di E è continua per la topologia debole di E e la topologia data di F, e osservare che A è debolmente metrizzabile).
b) Sia F uno spazio localmente convesso i cui sottoinsiemi debolmente compatti siano compatti. Si mostri che ogni applicazione lineare debolmente continua di E in F trasforma i sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi precompatti (ed è quindi precompatta se E è normato). In particolare si può prendere per E un sottospazio vettoriale di c_0 e per F lo spazio ℓ^1 (si veda l'esercizio 2).
c) Se ne deduca che, se E è uno spazio normato il cui duale forte è separabile e i cui sottoinsiemi debolmente compatti sono compatti, allora E ha dimensione finita.
d) Si deduca da c) e dall'esercizio 4c che, se E è uno spazio di Banach di dimensione infinita il cui duale forte è separabile, si può trovare in E una successione (x_i) debolmente convergente a 0 tale che $\langle x_i, x'_i \rangle = 1$ per ogni i.[26]
e) Se E è uno spazio localmente convesso con duale separabile, si mostri che ogni elemento di E'' è limite di una successione di Cauchy debole in E (si osservi che i sottoinsiemi limitati di E sono debolmente metrizzabili). Se ne deduca che un'applicazione lineare debolmente continua u di E in uno spazio localmente convesso F trasforma i sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi debolmente relativamente compatti se e soltanto se trasforma le successioni di Cauchy deboli in successioni debolmente convergenti.

[26] Nel testo inglese manca la specificazione della successione (x'_i). Il richiamo all'esercizio 4c indica una successione in E' convergente a 0 per $\sigma(E', E)$.

Capitolo 3 Spazi di applicazioni lineari

In questo capitolo proseguiamo lo sviluppo del formalismo avviato nel capitolo precedente, concentrando l'attenzione sugli spazi di applicazioni lineari. L'esposizione è semplice e non incontreremo teoremi veramente nuovi. Raramente si farà uso dell'ipotesi di convessità locale e del teorema di Hahn–Banach. Ci serviremo soprattutto della topologia generale e del teorema di Banach–Steinhaus, e quindi del teorema di Baire.

1 Generalità sugli spazi di applicazioni lineari

Siano E, F spazi localmente convessi e sia $L(E, F)$ lo spazio delle applicazioni lineari continue di E in F. Sia y un elemento di F che non appartenga alla chiusura dell'origine, ossia tale che la retta generata da y sia di Hausdorff e quindi isomorfa al campo degli scalari. Associando a ogni $x' \in E'$ l'applicazione di E in F

$$x \longmapsto \langle x, x' \rangle y,$$

si ottiene evidentemente un isomorfismo algebrico di E' su un sottospazio di $L(E, F)$. Data una famiglia qualunque $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi di E, questo isomorfismo è anche un omomorfismo di E' in $L(E, F)$ quando entrambi gli spazi sono muniti della $\mathfrak{S}$-topologia. Ne segue (capitolo 2, § 10, proposizione 16) che la $\mathfrak{S}$-topologia su $L(E, F)$ è compatibile con la struttura vettoriale soltanto se gli $A \in \mathfrak{S}$ sono sottoinsiemi limitati di E. La condizione è anche sufficiente per il criterio generale del capitolo 1, § 8, teorema 3. Nel seguito, quando considereremo su $L(E, F)$ una $\mathfrak{S}$-topologia, $\mathfrak{S}$ sarà sempre una famiglia di sottoinsiemi *limitati* di E.

Indichiamo con $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ lo spazio $L(E, F)$ delle applicazioni lineari continue di E in F munito della $\mathfrak{S}$-topologia. In particolare, $L_s(E, F)$ e $L_b(E, F)$ indicano lo spazio $L(E, F)$ munito rispettivamente della topologia della convergenza puntuale e di quella della convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati di E. Per ogni $A \in \mathfrak{S}$ e ogni intorno V di 0 in F, sia $W(A, V)$ l'insieme delle $u \in L(E, F)$ tali che $u(A) \subset V$. Gli insiemi $W(A, V)$, insieme agli omotetici delle intersezioni di un numero finito di tali insiemi, formano un sistema fondamentale di intorni di 0 in $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$. Ne segue che la $\mathfrak{S}$-topologia rimane la stessa se a $\mathfrak{S}$ si aggiungono gli inviluppi assolutamente convessi chiusi delle unioni finite di suoi elementi, gli omotetici di tali inviluppi e, infine, tutti i sottoinsiemi degli insiemi così ottenuti. Tuttavia, se F non coincide con la chiusura dell'origine, l'immersione di E' in $L(E, F)$ descritta all'inizio mostra che non si può ampliare ulteriormente la famiglia senza rendere più fine la topologia corrispondente (capitolo 2, § 10, proposizione 17). Osserviamo infine che, nello studio di una $\mathfrak{S}$-topologia, possiamo sempre supporre che $\mathfrak{S}$ sia una famiglia di dischi chiusi di E, stabile per omotetie, che contenga con ogni famiglia finita di dischi A_i l'inviluppo assolutamente convesso chiuso della loro unione e, con ogni disco A, tutti i dischi chiusi contenuti in A.

Possiamo anche considerare lo spazio di tutte le applicazioni lineari *debolmente* continue di E in F, munito di una $\mathfrak{S}$-topologia (relativa alla topologia data su F). Questo spazio coincide con $L_{\mathfrak{S}}(E_\tau, F)$, dove E_τ è E munito della topologia di Mackey $\tau(E, E')$. Infatti le applicazioni lineari debolmente continue di E in F sono precisamente quelle continue per la topologia $\tau(E, E')$ su E e la topologia data su F (capitolo 2, § 16, proposizione 28, corollario 2). Più in generale, consideriamo due sistemi duali (E, E') e (F, F'). Siano $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E e $\mathfrak{T}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di F' («limitati» significa qui debolmente limitati). Possiamo munire F della $\mathfrak{T}$-topologia, che induce sullo spazio delle applicazioni lineari debolmente continue di E in F una $\mathfrak{S}$-topologia. Come si verifica facilmente, questa è localmente convessa se, per esempio, gli

$A \in \mathfrak{S}$ sono fortemente limitati oppure se i $B \in \mathfrak{T}$ sono fortemente limitati. In entrambi i casi vale il risultato seguente.

Proposizione 1. Siano (E, E') e (F, F') due sistemi duali separati e siano $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$ famiglie di sottoinsiemi limitati rispettivamente di E e di F'. Si muniscano E' della $\mathfrak{S}$-topologia e F della $\mathfrak{T}$-topologia. Si muniscano quindi lo spazio delle applicazioni lineari debolmente continue di E in F della $\mathfrak{S}$-topologia e quello delle applicazioni lineari debolmente continue di F' in E' della $\mathfrak{T}$-topologia. La trasposizione è allora un omomorfismo del primo spazio di applicazioni lineari sul secondo.

Dimostrazione. Per la caratterizzazione degli intorni di 0 negli spazi considerati, basta mostrare che per $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$ e un'applicazione lineare debolmente continua u di E in F di trasposta u', le relazioni $u(A) \subset B^\circ$ e $u'(B) \subset A^\circ$ sono equivalenti. La prima si scrive $A \subset u^{-1}(B^\circ)$ e si ha $u^{-1}(B^\circ) = (u'(B))^\circ$ (capitolo 2, § 16, proposizione 25). Per il teorema del bipolare, $A \subset (u'(B))^\circ$ equivale ad $A^\circ \supset u'(B)$.

Corollario. Siano (E, E') e (F, F') due sistemi duali separati. Si considerino su E, E', F, F' le topologie deboli. La trasposizione $u \mapsto u'$ è allora un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di $L_s(E, F)$ su $L_s(F', E')$.

Proposizione 2. Siano E, F due spazi localmente convessi non nulli. Muniamo E della topologia $\tau(E, E')$, in modo che le applicazioni lineari continue di E in F coincidano con quelle debolmente continue, e supponiamo F di Hausdorff. Sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E la cui unione generi E come spazio vettoriale. Allora $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ è completo se e soltanto se F è completo ed E' è completo per la $\mathfrak{S}$-topologia.

La necessità segue dal fatto che E' munito della $\mathfrak{S}$-convergenza è isomorfo a un sottospazio vettoriale topologico chiuso di $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ (si veda l'inizio del paragrafo), e che anche F è isomorfo a un sottospazio vettoriale topologico chiuso di $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ (si scelga $x' \in E'$ non nullo e si associ a ogni $y \in F$ l'applicazione $x \mapsto \langle x, x' \rangle y$ di E in F). Viceversa, supponendo completi E' per la $\mathfrak{S}$-convergenza e F, mostriamo che $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ è completo. Poiché lo spazio di *tutte* le applicazioni di E in F è completo per la $\mathfrak{S}$-convergenza, basta mostrare che $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ è un sottospazio chiuso, ossia che ogni applicazione u di E in F limite per la $\mathfrak{S}$-convergenza di applicazioni lineari continue è lineare e continua. La linearità è in ogni caso immediata. Per la continuità basta verificare la continuità debole, ossia che, per ogni $y' \in F'$, $y' \circ u$ è una forma lineare continua su E. Ora $y' \circ u$ è evidentemente limite, per la $\mathfrak{S}$-convergenza, di forme lineari del tipo $y' \circ u_i$ con $u_i \in L(E, F)$, dunque di forme lineari continue. Poiché E' è completo per la $\mathfrak{S}$-convergenza, ne segue che $y' \circ u$ è continua.

Ricordiamo che nel capitolo 2, § 14, abbiamo ottenuto un criterio di completezza per E' e F (con la $\mathfrak{S}$-convergenza) che può essere utilizzato nella proposizione 2.

Esercizio. Siano E, F due spazi localmente convessi di Hausdorff e sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di dischi debolmente compatti di E la cui unione generi E. Sia F_s lo spazio F munito della topologia debole. Si mostri che il duale di $L_{\mathfrak{S}}(E, F_s)$ coincide con $E \otimes F'$ (si usino la proposizione 1 e il capitolo 2, § 15, proposizione 23). Si mostri che si ottiene lo stesso duale munendo $L(E, F_s) = L(E_\tau, F)$ della topologia estremo superiore della topologia precedente e di quella dello spazio $L_s(E_\tau, F)$ (si usi il capitolo 2, § 15, teorema 11).

2 Insiemi limitati negli spazi di applicazioni lineari

Definizione 1. Siano E uno spazio localmente convesso e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Un sottoinsieme U di E si dice $\mathfrak{S}$-*assorbente* se per ogni $A \in \mathfrak{S}$ si ha $\lambda U \supset A$ per ogni λ positivo sufficientemente grande. Quando $\mathfrak{S}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi limitati di E, si dice semplicemente che U è *bornivoro*.

Se U è equilibrato o se lo sono gli $A \in \mathfrak{S}$, nella definizione precedente basta supporre che per ogni $A \in \mathfrak{S}$ esista un $\lambda > 0$ tale che $\lambda U \supset A$. Si osservi che, se $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei sottoinsiemi di E ridotti a un punto, dire che U è $\mathfrak{S}$-assorbente equivale a dire che U è assorbente.

Proposizione 3. Siano E, F spazi localmente convessi, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E e M un insieme di applicazioni lineari di E in F, non necessariamente continue. $M(A)$ è un sottoinsieme limitato di F per ogni $A \in \mathfrak{S}$ se e soltanto se, per ogni intorno V di 0 in F, l'insieme $M^{-1}(V)$ è un sottoinsieme $\mathfrak{S}$-assorbente di E.

Ricordiamo che

$$M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A), \qquad M^{-1}(V) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(V).$$

La dimostrazione è immediata.

Corollario 1. Siano E, F due spazi localmente convessi e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Per un sottoinsieme M di $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) M è limitato.
b) Per ogni $A \in \mathfrak{S}$, $M(A)$ è un sottoinsieme limitato di F.
c) Per ogni intorno V di 0 in F, $M^{-1}(V)$ è un sottoinsieme $\mathfrak{S}$-assorbente di E.

L'equivalenza di a) e b) è un caso particolare della proposizione 15 del capitolo 1, § 8. L'equivalenza di b) e c) è un caso particolare della proposizione 3.

Corollario 2. Siano E uno spazio localmente convesso e $\mathfrak{S}$ una famiglia di suoi sottoinsiemi limitati. Un sottoinsieme A' di E' è limitato per la $\mathfrak{S}$-topologia se e soltanto se il suo polare $(A')^\circ$ è un sottoinsieme $\mathfrak{S}$-assorbente di E.

Ciò equivale anche a dire che l'inviluppo assolutamente convesso debolmente chiuso di A' è limitato per la $\mathfrak{S}$-topologia. Inoltre il corollario 2 mostra che la polarità stabilisce una biiezione tra i dischi chiusi $\mathfrak{S}$-assorbenti di E e i dischi debolmente chiusi di E' limitati per la $\mathfrak{S}$-convergenza. Ne deduciamo quanto segue.

Corollario 3. Siano E uno spazio localmente convesso e $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ due famiglie di sottoinsiemi limitati di E. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) Ogni disco chiuso $\mathfrak{S}_1$-assorbente in E è $\mathfrak{S}_2$-assorbente.
b) In E' ogni sottoinsieme limitato per la $\mathfrak{S}_1$-convergenza è limitato per la $\mathfrak{S}_2$-convergenza.
c) Ogni $A \in \mathfrak{S}_2$ è limitato per la $\mathfrak{S}_1'$-topologia, dove $\mathfrak{S}_1'$ è la famiglia dei sottoinsiemi di E' limitati per la $\mathfrak{S}_1$-convergenza.
d) Per ogni spazio localmente convesso F, ogni sottoinsieme di $L(E, F)$ limitato per la $\mathfrak{S}_1$-convergenza è limitato per la $\mathfrak{S}_2$-convergenza.

Le condizioni a) e b) sono equivalenti per polarità. La a) implica la d) per il corollario 1 e la b) è un caso particolare della d). Dunque a), b) e d) sono equivalenti. Infine la b) significa anche (proposizione 3) che, per ogni $A' \in \mathfrak{S}_1'$ in E' e ogni $A \in \mathfrak{S}_2$ in E, l'insieme $\langle A, A' \rangle$ dei prodotti scalari $\langle x, x' \rangle$ con $x \in A$, $x' \in A'$ è limitato. Ciò equivale alla c). Si

osservi che la condizione b) è già soddisfatta se si suppone valida d) per un solo spazio localmente convesso F distinto dalla chiusura dell'origine, come si vede dall'immersione di E' in $L(E,F)$ descritta all'inizio del § 1.

Dal corollario 3 segue che, data una famiglia $\mathfrak{S}_1$ di sottoinsiemi limitati di E, esiste una famiglia massima $\mathfrak{S}_2$ di sottoinsiemi limitati di E tale che, per ogni spazio localmente convesso F, ogni sottoinsieme di $L(E,F)$ limitato per la $\mathfrak{S}_1$-convergenza sia limitato per la $\mathfrak{S}_2$-convergenza. È la famiglia dei sottoinsiemi di E limitati per la $\mathfrak{S}_1'$-topologia. In particolare, quando $\mathfrak{S}_1$ è la famiglia dei sottoinsiemi di E ridotti a un punto (il caso più interessante), la topologia corrispondente su E' è la topologia debole e si ottiene come $\mathfrak{S}_2$ la famiglia dei sottoinsiemi *fortemente limitati* di E. Ricordiamo che si chiama topologia forte su E quella della convergenza uniforme sui sottoinsiemi debolmente limitati di E', che dipende soltanto dal sistema duale (E,E'). In particolare si ha il seguente risultato.

Proposizione 3′. Siano E,F spazi localmente convessi. Ogni sottoinsieme di $L(E,F)$ limitato per la convergenza puntuale è limitato per la convergenza uniforme sui sottoinsiemi fortemente limitati di E.

Il teorema seguente mette in evidenza un'importante classe di sottoinsiemi fortemente limitati di E.

Teorema 1 (Banach–Steinhaus–Mackey). Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Ogni disco limitato e completo di E è fortemente limitato.

In altri termini si ha il corollario seguente.

Corollario 1. Siano E,F spazi localmente convessi, con E di Hausdorff. Ogni sottoinsieme di $L(E,F)$ limitato per la convergenza puntuale è limitato per la convergenza uniforme sui dischi limitati e completi di E.

Ciò significa che in E ogni disco chiuso e assorbente è $\mathfrak{S}$-assorbente, dove $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei dischi limitati e completi di E. Segnaliamo che il teorema 4′ del capitolo 2, § 8, è un caso particolare del teorema 1. Si considera infatti uno spazio localmente convesso di Hausdorff E come il duale di E' debole, munito della topologia della convergenza uniforme su una famiglia $\mathfrak{S}$ di dischi debolmente compatti (quindi debolmente completi) di E'. Dire che un sottoinsieme di E è debolmente limitato equivale a dire che è limitato per la topologia della convergenza puntuale. Per il teorema 1 è dunque limitato per la $\mathfrak{S}$-convergenza. Più in generale si ha il corollario seguente.

Corollario 2. Siano E,F spazi localmente convessi, con E di Hausdorff. Sia M un insieme di applicazioni lineari continue di E in F limitato per la convergenza puntuale. Allora M è limitato per la topologia della convergenza uniforme sui dischi debolmente compatti di E.

Dimostrazione. Possiamo sostituire alla topologia di E la topologia debole e applicare il teorema 1, poiché un sottoinsieme debolmente compatto di E è a maggior ragione limitato e debolmente completo.

Corollario 3. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff completo o, più in generale, i cui sottoinsiemi chiusi e limitati siano completi. Per ogni spazio localmente convesso F, ogni insieme di applicazioni lineari continue di E in F limitato per la topologia della convergenza puntuale è limitato per la topologia della convergenza uniforme sui limitati.

Definizione 2. E si dice *quasi completo* se i suoi sottoinsiemi chiusi e limitati sono completi.

Pertanto, se E è quasi completo, i sottoinsiemi di $L(E, F)$ limitati per le varie $\mathfrak{S}$-topologie coincidono, dove $\mathfrak{S}$ è una famiglia di sottoinsiemi limitati di E la cui unione genera E.

Dimostrazione del teorema 1. Dobbiamo mostrare che, se M è un insieme di applicazioni lineari continue di E in F limitato per la convergenza puntuale e A è un disco limitato e completo di E, allora $M(A)$ è un sottoinsieme limitato di F. Sia E_A lo spazio vettoriale generato da A, munito della seminorma funzionale di Minkowski di A,

$$\|x\|_A = \inf_{x \in \lambda A} |\lambda|.$$

Poiché A è limitato, questa è una norma. Restringendo a E_A le $u \in M$, dobbiamo mostrare che l'insieme di applicazioni di E_A in F così ottenuto è limitato per la A-convergenza. Ma esso è limitato per la convergenza puntuale: basta dunque mostrare che E_A è completo e applicare il teorema di Banach–Steinhaus (capitolo 1, § 15, teorema 11). Si ha a questo scopo il seguente lemma, interessante anche di per sé.

Lemma 1. Siano E uno spazio localmente convesso di Hausdorff e A un disco limitato e completo in E. Il corrispondente spazio normato E_A è uno spazio di Banach, ossia è completo.

Dimostrazione. Poiché A è chiuso in E, esso contiene gli estremi degli intervalli che determina sulle rette reali passanti per l'origine. Ne segue che la palla unitaria di E_A è A. Inoltre uno spazio normato è completo se e soltanto se lo è la sua palla unitaria. Basta dunque mostrare che A è completo per la topologia della norma di E_A. Ciò segue dal criterio di completezza del capitolo 2, § 18, applicato a E_A e alla topologia indotta da E su E_A.[27]

Esercizio 1. Siano E uno spazio localmente convesso di Hausdorff e A un suo sottoinsieme convesso completo, non necessariamente un disco. Si mostri che ogni insieme di applicazioni lineari continue di E in uno spazio localmente convesso F, limitato per la convergenza puntuale, è limitato per la A-convergenza.[28] (Si consideri il caso $0 \in A$ e si proceda per assurdo. Se M non fosse limitato su A, esisterebbe una successione (x_n) in A tale che M non sarebbe limitato sulla successione degli x_n/n. Si consideri allora l'inviluppo convesso chiuso K della successione degli x_n/n e si osservi che $K - K$ è un sottoinsieme simmetrico, compatto e convesso di E su cui M non sarebbe limitato.)

Esercizio 2. Una successione di scalari (λ_i) si dice *rapidamente decrescente* se il suo prodotto con ogni successione monomiale $i \mapsto i^n$ è limitato. In uno spazio localmente convesso E, una successione (x_i) si dice rapidamente decrescente se, per ogni seminorma continua p su E, la successione degli $p(x_i)$ è rapidamente decrescente. Si mostri che ciò accade se e soltanto se per ogni intero $n > 0$ la successione $(i^n x_i)$ è limitata. Se ne deduca che (x_i) in E è rapidamente decrescente se e soltanto se per ogni $x' \in E'$ la successione $(\langle x_i, x' \rangle)$ è rapidamente decrescente. Si generalizzi questo risultato a una classe più ampia di successioni.

[27] Il rinvio dell'edizione inglese è alla proposizione 35. Il criterio applicato è la proposizione 36.

[28] Nell'enunciato inglese manca l'ipotesi che A sia limitato. Senza tale ipotesi, basta considerare l'identità di $\mathbf{R}$ e $A = \mathbf{R}$.

Esercizio 3. a) Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Si mostri che u è continua per le topologie forti (si applichi il capitolo 2, § 16, proposizione 28) e pertanto trasforma sottoinsiemi fortemente limitati in sottoinsiemi fortemente limitati. In particolare, se u è un'applicazione lineare continua di uno spazio di Banach E in uno spazio localmente convesso F, allora u trasforma la palla unitaria di E in un sottoinsieme fortemente limitato di F, ossia è continua per la topologia forte di F.
b) Sia F uno spazio localmente convesso munito della topologia T e sia T' un'altra topologia localmente convessa su F, con un sistema fondamentale di intorni di 0 chiusi per T. Si mostri che ogni applicazione lineare u di uno spazio di Banach E in F continua per T è continua per T' (si osservi che la topologia T' è una topologia della convergenza uniforme su una famiglia di sottoinsiemi debolmente limitati del duale F' di F munito di T).
c) Caso particolare. Siano E, F spazi localmente convessi e u un'applicazione lineare continua di uno spazio di Banach H in $L_s(E, F)$. Allora u è continua anche da H in $L_b(E, F)$.

Esercizio 4. Sia (E, E') un sistema duale. Ogni sottoinsieme limitato di E è fortemente limitato se e soltanto se la stessa proprietà vale per E'.

3 Relazioni fra insiemi limitati e insiemi equicontinui. Spazi tonnelé

Siano E, F spazi localmente convessi e M un insieme di applicazioni lineari di E in F. L'insieme M è equicontinuo se e soltanto se, per ogni intorno V di 0 in F, l'insieme $M^{-1}(V)$ è un intorno di 0 in E. Si osservi che, se M è equicontinuo, gli insiemi $M^{-1}(V)$ sono a maggior ragione $\mathfrak{S}$-assorbenti per ogni famiglia $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi limitati di E. Dalla proposizione 3 segue quindi la proposizione seguente.

Proposizione 4. Siano E, F spazi localmente convessi e M un insieme equicontinuo di applicazioni lineari di E in F. Allora M è limitato per ogni $\mathfrak{S}$-topologia, dove $\mathfrak{S}$ è una famiglia di sottoinsiemi limitati di E.

Abbiamo già incontrato questa proposizione nel capitolo 1, § 15, proposizione 22. Esaminiamo ora in quali casi valga la reciproca. Consideriamo anzitutto il seguente lemma.

Lemma. Siano E uno spazio localmente convesso e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) In E ogni disco chiuso $\mathfrak{S}$-assorbente è un intorno di 0.
b) In E' ogni sottoinsieme limitato per la $\mathfrak{S}$-convergenza è equicontinuo.
c) Per ogni spazio localmente convesso F, ogni sottoinsieme di $L(E, F)$ limitato per la $\mathfrak{S}$-convergenza è equicontinuo.

Si confronti con il corollario 3 della proposizione 3. L'equivalenza di a) e b) è immediata per polarità: in b) ci si può limitare ai dischi debolmente chiusi di E' e applicare il corollario 2 della proposizione 3. L'implicazione da b) a c) si ottiene caratterizzando i sottoinsiemi limitati o equicontinui di $L(E, F)$ mediante le proprietà degli insiemi $M^{-1}(V)$, dove V è un intorno chiuso assolutamente convesso di 0 in F. Infine c) implica b): basta supporre c) vera per uno spazio F distinto dalla chiusura dell'origine e utilizzare l'immersione di E' in $L(E, F)$ indicata all'inizio del § 1.

Definizione 3. Uno spazio localmente convesso E si dice *tonnelé* (rispettivamente *quasi tonnelé*) se ogni sottoinsieme debolmente limitato (rispettivamente fortemente limitato) di E' è equicontinuo.

Per il lemma precedente ciò significa che in E ogni disco chiuso e assorbente (rispettivamente ogni disco chiuso e bornivoro) è un intorno di 0. Inoltre si ha la proposizione seguente.

Proposizione 5. Lo spazio localmente convesso E è tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé) se e soltanto se vale la seguente proprietà: per ogni spazio localmente convesso F, ogni sottoinsieme di $L(E, F)$ limitato per la topologia della convergenza puntuale (rispettivamente per la topologia della convergenza uniforme sui limitati) è equicontinuo.

Corollario. Siano E uno spazio localmente convesso tonnelé, F uno spazio localmente convesso di Hausdorff e (u_i) una successione di applicazioni lineari continue di E in F tale che $u_i(x)$ tenda a un limite $u(x)$ per ogni $x \in E$. La successione (u_i) è equicontinua. Quindi u è un'applicazione lineare continua di E in F e u_i tende a u uniformemente su ogni compatto.

Uno spazio tonnelé è quasi tonnelé. Più precisamente, dire che E è tonnelé equivale a dire che E è quasi tonnelé e soddisfa la condizione supplementare che ogni sottoinsieme debolmente limitato di E' sia fortemente limitato. Abbiamo visto (§ 2, teorema 1) che quest'ultima proprietà vale in numerosi casi, per esempio ogni volta che E è quasi completo. Dunque, *se E è quasi completo*, «tonnelé» e «quasi tonnelé» hanno lo stesso significato. Segnaliamo che uno spazio quasi tonnelé ha necessariamente la topologia di Mackey $\tau(E, E')$, poiché ciò significa che i dischi debolmente compatti di E' sono equicontinui, ed essi sono in ogni caso fortemente limitati.

Per gli spazi localmente convessi metrizzabili e completi, il teorema di Banach–Steinhaus (capitolo 1, § 15) si esprime precisamente nel modo seguente.

Teorema 2. Ogni spazio localmente convesso metrizzabile e completo è tonnelé.

Si vede facilmente che la completezza dello spazio è essenziale. Nel prossimo paragrafo vedremo che uno spazio localmente convesso metrizzabile, anche se incompleto, è sempre quasi tonnelé.

Esercizio 1. a) Il quoziente di uno spazio tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé) è tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé).
b) Sia (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi. Il prodotto $\prod_i E_i$ è tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé) se e soltanto se ogni E_i è tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé). Si veda il capitolo 4, parte 1, § 4, esercizio 7.
c) Un sottospazio vettoriale che sia un fattore diretto topologico di uno spazio tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé) è tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé).

Esercizio 2. Sia E uno spazio localmente convesso. Si consideri su E' una topologia compatibile con la dualità (E, E'). Si mostri che E è tonnelé se e soltanto se la topologia di E è $\tau(E, E')$ ed E' è riflessivo.

Esercizio 3. Si deduca dall'esercizio 2 un esempio di spazio localmente convesso completo munito della topologia di Mackey che non sia tonnelé (e dunque neppure quasi tonnelé). Si prenda il duale E' di uno spazio metrizzabile e completo E non riflessivo e si munisca E' della topologia di Mackey $\tau(E', E)$. Utilizzando l'esercizio 1b, si deduca

un esempio di sottospazio vettoriale chiuso non tonnelé di uno spazio tonnelé completo (si ricordi che ogni spazio localmente convesso di Hausdorff è isomorfo a un sottospazio vettoriale topologico di un prodotto di spazi di Banach).

Esercizio 4. Il completamento di uno spazio quasi tonnelé è tonnelé.

Esercizio 5. Sia E uno spazio localmente convesso che sia uno spazio di Baire. Si mostri che E è tonnelé (si osservi che la dimostrazione del teorema di Banach–Steinhaus vale in questo caso). Segnaliamo che esistono spazi normati tonnelé che non sono spazi di Baire (si veda il § 5, esercizio 11).

Esercizio 5′. Sia E uno spazio localmente convesso.
1) E è quasi tonnelé se e soltanto se l'applicazione canonica di E nel duale forte di E'_b è un isomorfismo sulla sua immagine. Essa è un isomorfismo suriettivo se e soltanto se E è quasi tonnelé e riflessivo. Si mostri che allora E è tonnelé.
2) Sia E uno spazio localmente convesso tonnelé e quasi completo. E è riflessivo se e soltanto se E'_b è riflessivo (si veda il capitolo 2, § 18, teorema 13, corollario 4).

Esercizio 6. Si mostri che il lemma del capitolo 1, § 15, vale quando E è uno spazio localmente convesso metrizzabile e tonnelé e G è uno spazio localmente convesso. Se ne deduca che, se E e F sono spazi localmente convessi metrizzabili e uno dei due è tonnelé, ogni applicazione bilineare di $E \times F$ in uno spazio localmente convesso G, continua rispetto a ciascuna variabile, è continua. Se E e F sono entrambi tonnelé, ogni insieme M di applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G tale che $M(x, y)$ sia un sottoinsieme limitato di G per ogni $x \in E$, $y \in F$, è equicontinuo.

Esercizio 7. Sia K uno spazio compatto.
a) Sia H un insieme non limitato di misure su K. Si mostri che esiste $x \in K$ tale che, per ogni intorno V di x e ogni $n > 0$, esistono $\mu \in H$ e un sottoinsieme A di V tali che $|\mu(A)| > n$. (Si osservi che basta trovare x tale che per ogni V e ogni n si possa trovare $\mu \in H$ con $|\mu|(V) > n$. Si dimostri l'esistenza di x per assurdo, servendosi del teorema di Borel–Lebesgue.)
b) In queste condizioni, o esiste un intorno V di x tale che $|\mu|(V \setminus \{x\})$ si mantenga limitata per $\mu \in H$ (e allora $\mu(\{x\})$, per $\mu \in H$, non si mantiene limitata), oppure si possono costruire per induzione una successione di intorni aperti V_n di x, una successione di aperti U_n e una successione (μ_n) in H tali che

$$\begin{aligned} \overline{V}_{n+1} &\subset V_n \setminus \bigcup_{1 \le i \le n} U_i, \\ U_{n+1} &\subset V_{n+1} \setminus \{x\}, \\ \mu_i(U_{n+1}) &\le 2^{-n-1} \qquad (i \le n), \\ \mu_{n+1}(U_{n+1}) &> n + 1. \end{aligned}$$

c) Se ne deduca che esiste un aperto U tale che $\mu(U)$, al variare di μ in H, non si mantenga limitata. (Nel primo caso di b) si prenda $U = K \setminus \{x\}$ oppure un intorno sufficientemente piccolo di x. Nel secondo caso si prenda $U = \bigcup_i U_i$.)
d) Si supponga che tutte le $\mu \in H$ siano misure di base μ_0, dove μ_0 è una misura positiva per la quale ogni punto di K ha misura nulla. Se H non è limitato, esiste un aperto U la

cui frontiera ha misura nulla per μ_0 e tale che $\mu(U)$, per $\mu \in H$, non si mantenga limitata. (Si mostri che nella costruzione di b) si può supporre

$$\mu_0(U_n) < 1/n$$

e inoltre che ogni U_n abbia frontiera di misura nulla, utilizzando il seguente risultato generale noto: ogni punto a di K ammette un sistema fondamentale di intorni aperti con frontiera di misura nulla. Questo risultato è indipendente dall'ipotesi sui punti per μ_0. Si deduca che l'enunciato rimane vero sostituendo ad a un qualunque sottoinsieme compatto di K.) Si consideri ora la successione di misure $\varepsilon_0 + n(\varepsilon_{1/n} - \varepsilon_{-1/n})$ sull'intervallo compatto $[-1, 1]$ e si mostri che l'ipotesi restrittiva su μ_0 è essenziale: può persino accadere che $\mu(U)$, al variare di μ in H, si mantenga limitata ogni volta che U si riduce a un punto, senza che H sia necessariamente limitato.

Esercizio 8. Sia I un insieme di indici e sia E il sottospazio vettoriale di $\ell^\infty(I)$ generato dalle funzioni caratteristiche ϕ_A dei sottoinsiemi $A \subset I$.
a) Si mostri che E, denso in $\ell^\infty(I)$, è tonnelé, ossia che ogni sottoinsieme H del duale di $\ell^\infty(I)$ limitato su ciascuna ϕ_A è limitato. (Si usino a) e b) dell'esercizio precedente, osservando che ci si trova nel secondo caso di b) e che si possono supporre gli U_n aperti e chiusi. Naturalmente K è la compattificazione di Stone di I, per cui $C(K)$ si identifica nel modo consueto con $\ell^\infty(I)$. Ai sottoinsiemi aperti e chiusi U_i di K corrispondono sottoinsiemi A_i di I. Con una variante del ragionamento impiegato nel capitolo 3, § 7, esercizio 2c, ci si riduca al caso $I = \mathbf{N}$ e $A_i = \{i\}$. Se ne deduca che si avrebbe $\mu_n(\mathbf{N}) \to \infty$, il che è assurdo.)
b) Si mostri che, se I è infinito, lo spazio tonnelé E appena considerato non è uno spazio di Baire. (Per ogni intero $n > 0$ sia E_n il sottoinsieme di E costituito dalle somme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{A_i}, \qquad |\lambda_i| \leq n.$$

Si mostri, con un argomento di compattezza debole, che E_n è chiuso in $\ell^\infty(I)$ e a maggior ragione in E. Si osservi poi che E è l'unione della successione (E_n), ma che ogni E_n ha interno vuoto in E.)
c) Sia K uno spazio compatto di Stone, ossia uno spazio in cui la chiusura di ogni aperto è aperta. Sia E il sottospazio vettoriale di $C(K)$ generato dalle funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi aperti e chiusi di K. Si mostri che E, denso in $C(K)$, è tonnelé e che pertanto ogni insieme H di misure su K per cui $\{\mu(A) : \mu \in H\}$ è limitato per ogni sottoinsieme aperto e chiuso A di K è limitato. (Ci si riduca ad a) servendosi del seguente ulteriore fatto noto: esiste una proiezione di norma 1 di $\ell^\infty(I)$ su $C(K)$ che è un omomorfismo di algebre e che pertanto trasforma gli idempotenti, ossia le funzioni caratteristiche di insiemi, in idempotenti.)

4 Spazi bornologici

Definizione 4. Uno spazio localmente convesso E si dice *bornologico* se ogni disco bornivoro di E è un intorno di 0.

A maggior ragione ogni disco chiuso che assorba i limitati è un intorno di 0. Uno spazio bornologico è dunque quasi tonnelé e, a maggior ragione, la sua topologia è quella di Mackey. La seguente proposizione chiarisce l'interesse della nozione di spazio bornologico.

Proposizione 6. Per uno spazio localmente convesso E le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) E è bornologico.
b) Ogni insieme M di applicazioni lineari di E in uno spazio localmente convesso F tale che $M(A)$ sia un sottoinsieme limitato di F per ogni sottoinsieme limitato A di E è equicontinuo.
c) Ogni applicazione lineare u di E in uno spazio localmente convesso F che trasformi insiemi limitati in insiemi limitati è continua.
d) Ogni insieme di forme lineari su E uniformemente limitato sui sottoinsiemi limitati di E è equicontinuo.
e) Ogni forma lineare su E limitata sui sottoinsiemi limitati è continua e la topologia di E è la topologia di Mackey $\tau(E, E')$.

La a) implica la b), poiché l'ipotesi su M significa che, per ogni intorno assolutamente convesso V di 0 in F, $M^{-1}(V)$ è un disco bornivoro in E (§ 2, proposizione 3). Poiché E è bornologico, esso è un intorno di 0, onde M è equicontinuo. La b) implica immediatamente la c). Mostriamo che la c) implica la a). Sia V un disco bornivoro in E e sia F lo spazio E munito della seminorma di Minkowski di V. Vogliamo mostrare che V è un intorno di 0, ossia che l'identità di E su F è continua. Dire che V è bornivoro equivale a dire che l'identità di E su F trasforma insiemi limitati in insiemi limitati (proposizione 3). Per ipotesi essa è dunque continua. Le condizioni a), b) e c) sono pertanto equivalenti e implicano d), che implica a sua volta e) (poiché ogni disco debolmente compatto di E' sarà equicontinuo). Infine e) implica c): poiché la topologia di E è $\tau(E, E')$, per verificare la continuità di u basta verificarne la continuità debole (capitolo 2, § 16, proposizione 28, corollario 2), ossia mostrare che, per ogni $y' \in F'$, $y' \circ u$ è una forma lineare continua su E. Ora, tale forma lineare è effettivamente limitata sui sottoinsiemi limitati di E.

L'interesse degli spazi bornologici sta nella possibilità di applicare il criterio della proposizione 6c per stabilire se un'applicazione lineare u dallo spazio bornologico E nello spazio localmente convesso F sia continua. Infatti non è difficile verificare se u trasformi sottoinsiemi limitati di E in sottoinsiemi limitati di F (servendosi del teorema del grafico chiuso quando sono completi gli spazi E_A, dove A è un disco chiuso e limitato in E). Daremo ora una caratterizzazione di facile applicazione delle applicazioni lineari da uno spazio localmente convesso in un altro che trasformano sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi limitati. Ci occorre la seguente definizione.

Definizione 5. Siano E uno spazio localmente convesso e (x_i) una successione in E. Si dice che (x_i) tende al limite $x \in E$ *nel senso di Mackey* se esiste in E un disco limitato A tale che (x_i) tenda a x nello spazio normato E_A.

Ciò significa che $x_i - x$ tende a zero nel senso di Mackey. Dire che x_i tende a zero nel senso di Mackey equivale a dire che esiste una successione di scalari $\lambda_i > 0$ tendente a zero tale che la successione degli x_i/λ_i sia limitata. Sostituendo (λ_i) con $(\sqrt{\lambda_i})$, si vede che si può persino supporre che x_i/λ_i tenda a zero. È chiaro che la convergenza nel senso di Mackey implica la convergenza per la topologia di E.

Proposizione 7. Sia u un'applicazione lineare di uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) u trasforma sottoinsiemi limitati di E in sottoinsiemi limitati di F.
b) u trasforma successioni convergenti a 0 nel senso di Mackey in successioni convergenti a 0 nel senso di Mackey.

c) u trasforma successioni convergenti a 0 nel senso di Mackey in successioni convergenti a 0 per la topologia di F.
d) u trasforma successioni convergenti a 0 nel senso di Mackey in successioni limitate.

Le implicazioni a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) sono immediate. Per mostrare che d) implica a), supponiamo che a) non valga. Esistono allora un sottoinsieme limitato A di E e un intorno V di 0 in F tali che $u(A)$ non sia contenuto in alcun omotetico di V. Per ogni intero $n > 0$ esiste dunque $x_n \in A$ tale che $u(x_n) \notin n^2 V$. Ne segue che $u(x_n/n) \notin nV$. Si avrebbe così in E una successione (x_n/n) convergente a zero nel senso di Mackey la cui immagine in F non è limitata. La contraddizione dimostra l'asserto. Dalla proposizione 7 si ricavano nuovi enunciati equivalenti alla condizione b) della proposizione 6. Si ottiene, per esempio, il seguente corollario.

Corollario. Siano E uno spazio localmente convesso bornologico e u un'applicazione lineare di E in uno spazio localmente convesso F. L'applicazione u è continua se e soltanto se è continua per successioni o, equivalentemente, se trasforma le successioni convergenti a zero in successioni limitate. È sufficiente che ciò valga per le successioni convergenti a zero nel senso di Mackey.

Stabiliamo ora il lemma seguente.

Lemma. Siano E uno spazio localmente convesso metrizzabile e (x_i) una successione in E convergente a zero. Essa converge a zero anche nel senso di Mackey.

Infatti, sia (p_n) una successione fondamentale di seminorme continue di E. L'ipotesi significa che, per ogni n, la successione $(p_n(x_i))_i$ tende a zero. Dobbiamo dedurne l'esistenza di una successione di scalari $\lambda_i > 0$ tendente a zero tale che gli x_i/λ_i rimangano limitati, ossia tale che per ogni n la successione $(p_n(x_i)/\lambda_i)_i$ rimanga limitata. A tal fine basta porre

$$M_n = \sup_i p_n(x_i)$$

e scegliere

$$\lambda_i = \sum_n \frac{1}{2^n M_n}\, p_n(x_i).$$

[29]

Usando il lemma e il criterio c) della proposizione 7, vediamo che le applicazioni lineari limitate di E in uno spazio localmente convesso F sono precisamente quelle continue per successioni, ossia, essendo E metrizzabile, quelle continue. Dalla proposizione 6c si ottiene dunque il seguente teorema.

Teorema 3. Ogni spazio localmente convesso metrizzabile, anche non completo, è bornologico.

Corollario. Ogni spazio localmente convesso metrizzabile è quasi tonnelé e, a maggior ragione, la sua topologia è la topologia di Mackey.

Da quest'ultima proprietà si deducono (si veda il capitolo 2, § 16, proposizione 28, corollario 2) i seguenti corollari.

[29] Si omettono i termini con $M_n = 0$. Per ottenere scalari strettamente positivi anche negli indici in cui la somma si annulla, basta aggiungere $1/i$.

Corollario 1. Sia u un'applicazione lineare di uno spazio localmente convesso metrizzabile E in uno spazio localmente convesso F. L'applicazione u è continua se e soltanto se è debolmente continua.

Corollario 2. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio localmente convesso F in uno spazio localmente convesso E. L'applicazione u è un omomorfismo se e soltanto se è un omomorfismo debole.[30]

Esercizio 1. a) Ogni quoziente di uno spazio bornologico è bornologico.
b) Sia (E_i) una famiglia finita di spazi localmente convessi. Il loro prodotto è bornologico se e soltanto se gli E_i sono bornologici.
c) Ogni fattore diretto topologico di uno spazio bornologico è bornologico.

Esercizio 2. Sia $(E_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi localmente convessi. Affinché il prodotto $\prod_{i\in I} E_i$ sia bornologico è sufficiente, ed è necessario se gli E_i sono di Hausdorff e non nulli, che gli E_i siano bornologici e che il prodotto $\mathbf{R}^I$ sia bornologico. Se ne deduca che il prodotto di una successione di spazi bornologici è bornologico.

Esercizio 3. Sia E uno spazio localmente convesso. Si mostri che su E esiste una topologia T che è la meno fine fra le topologie bornologiche più fini della topologia data. I dischi bornivori di E formano un sistema fondamentale di intorni di 0 per T.

Esercizio 4. Si mostri che i risultati del § 2, esercizio 3, rimangono validi sostituendo allo spazio di Banach E, o H, uno spazio bornologico quasi completo.

Esercizio 5. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) Per ogni disco chiuso e limitato A di E, lo spazio E_A è completo.
b) Per ogni disco limitato A di E esiste in E un disco limitato B contenente A tale che E_B sia completo.
c) Per ogni applicazione lineare continua u di uno spazio normato H in E esiste un'applicazione lineare continua del completamento di H in E che prolunga u.
d) L'inviluppo convesso chiuso di ogni successione in E convergente a zero nel senso di Mackey è compatto. (Si usi il capitolo 2, § 3, esercizio 3.)

Allora ogni sottoinsieme limitato di E è fortemente limitato. Di conseguenza, ogni insieme di applicazioni lineari continue di E in uno spazio localmente convesso F, limitato per la convergenza puntuale, è limitato per la convergenza uniforme sui limitati.

Esercizio 6. Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) E è tonnelé.
b) Ogni sottoinsieme debolmente limitato di E' è fortemente limitato.
c) Ogni successione in E' debolmente convergente a 0 converge uniformemente su ogni compatto.
e) E non è l'unione di una successione di dischi chiusi nessuno dei quali sia un intorno di 0.

[30] Come nel corollario 1, si intende qui E metrizzabile. L'edizione inglese non ripete tale ipotesi. Si applica il criterio al sottospazio immagine di u, anch'esso metrizzabile.

Esercizio 7. Siano E uno spazio bornologico (rispettivamente quasi tonnelé) e F uno spazio localmente convesso completo (rispettivamente quasi completo). Si mostri che $L_b(E,F)$ è completo (rispettivamente quasi completo).

5 Funzioni bilineari. Tipi di continuità. Continuità e continuità separata

Definizione 6. Siano E, F, G spazi topologici e u un'applicazione di $E \times F$ in G. Si dice che u è *separatamente continua* se è continua rispetto a ciascuna variabile. Se inoltre G è uno spazio uniforme, diciamo che un insieme M di applicazioni $u(x,y)$ di $E \times F$ in G è *equicontinuo in* x (rispettivamente in y) se per ogni $y \in F$ l'insieme delle applicazioni $x \mapsto u(x,y)$, al variare di u in M, è un insieme equicontinuo di applicazioni di E in G (rispettivamente, se vale la condizione analoga a variabili scambiate). M è *separatamente equicontinuo* se è equicontinuo sia in x sia in y.

Interpretiamo le applicazioni di $E \times F$ in G come applicazioni di E nell'insieme delle applicazioni di F in G. Dire che u è separatamente continua equivale a dire che le corrisponde un'applicazione di E nello spazio $C(F,G)$ delle applicazioni continue di F in G, continua quando $C(F,G)$ è munito della topologia della convergenza puntuale. Analogamente, dire che un insieme M di applicazioni separatamente continue di $E \times F$ in G è equicontinuo rispetto a x equivale a dire che il corrispondente insieme di applicazioni di E in $C_s(F,G)$ è equicontinuo. Dire che M è equicontinuo rispetto a y equivale a dire che, per ogni $x \in E$, l'insieme $M(x)$ delle immagini di x mediante le applicazioni $E \to C_s(F,G)$ corrispondenti alle $u \in M$ è un sottoinsieme equicontinuo di $C(F,G)$. Inoltre, se E, F, G sono spazi localmente convessi, dire che un'applicazione di $E \times F$ in G è bilineare equivale a dire che l'applicazione corrispondente su E prende valori nello spazio delle applicazioni lineari di F in G ed è essa stessa lineare. Si ha dunque il seguente fatto elementare ma fondamentale.

Teorema 4. Siano E, F, G spazi localmente convessi. Le applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G sono in corrispondenza biunivoca con le applicazioni lineari continue di E nello spazio $L_s(F,G)$ delle applicazioni lineari continue di F in G, munito della topologia della convergenza puntuale.

Corollario. Siano E, F spazi localmente convessi. Le forme bilineari separatamente continue su $E \times F$ corrispondono biunivocamente alle applicazioni lineari continue di E nel duale debole F'_s di F.

Si osservi che la nozione di forma bilineare separatamente continua su $E \times F$ dipende soltanto dai duali di E e di F. Scambiando i ruoli di E e di F si ottengono evidentemente enunciati analoghi. Si ha poi la seguente proposizione.

Proposizione 8. Siano E, F, G spazi localmente convessi e u un'applicazione bilineare di $E \times F$ in G. u è continua se e soltanto se è continua nell'origine. Se G è normabile, è anche necessario e sufficiente che l'applicazione corrispondente di E in $L(F,G)$ trasformi un opportuno intorno di 0 in E in un sottoinsieme equicontinuo di $L(F,G)$. Vale un enunciato analogo per gli insiemi equicontinui di applicazioni bilineari di $E \times F$ in G.

La dimostrazione è immediata. In particolare si hanno i corollari seguenti.

Corollario 1. Siano E, F spazi localmente convessi. Le forme bilineari continue su $E \times F$ corrispondono biunivocamente alle applicazioni lineari di E in F' che trasformano

un opportuno intorno di 0 in un sottoinsieme equicontinuo di F'. Agli insiemi equicontinui di forme bilineari corrispondono gli insiemi di applicazioni lineari di E in F' che mandano uno stesso intorno di 0 in un sottoinsieme equicontinuo fissato di F'.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso e si munisca E' della topologia forte. La forma bilineare canonica su $E \times E'$ è continua se e soltanto se E è seminormabile.

Infatti, per il corollario 1, questa forma bilineare è continua se e soltanto se esiste in E un intorno di 0 equicontinuo come sottoinsieme del duale di E', ossia limitato. Ciò significa precisamente che E è seminormabile (capitolo 1, § 7, proposizione 12, corollario 1). Il corollario 2 mostra che vi sono forme bilineari di grande importanza che sono soltanto separatamente continue. Ricordiamo tuttavia che, se E e F sono metrizzabili e completi, ogni applicazione bilineare separatamente continua su $E \times F$ è continua (capitolo 1, § 15, teorema 12). Vedremo un altro caso importante nel capitolo 5, parte 3, § 2.

Ipocontinuità. Cerchiamo dunque, per le forme bilineari, tipi di continuità più deboli della continuità e più forti della continuità separata.

Lemma. Siano E, F spazi topologici, G uno spazio uniforme, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E e u un'applicazione separatamente continua di $E \times F$ in G. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) L'applicazione $E \to C_s(F, G)$ corrispondente a u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi equicontinui di $C(F, G)$.
b) L'applicazione $F \to C_s(E, G)$ corrispondente a u è continua anche come applicazione di F nello spazio $C_{\mathfrak{S}}(E, G)$ delle applicazioni continue di E in G munito della $\mathfrak{S}$-topologia.

Quando sono soddisfatte queste condizioni, per ogni $A \in \mathfrak{S}$ la restrizione di u ad $A \times F$ è continua. Quando inoltre sono soddisfatte le condizioni analoghe relative a una famiglia $\mathfrak{T}$ di sottoinsiemi di F, per ogni $A \in \mathfrak{S}$ e $B \in \mathfrak{T}$ la restrizione di u ad $A \times B$ è uniformemente continua.

La dimostrazione è immediata (si veda il capitolo 0, proposizione 9, punto 3). Il lemma si generalizza a un insieme di applicazioni separatamente continue di $E \times F$ in G. Un'ulteriore variante riguarda il caso in cui si supponga che anche F sia uno spazio uniforme e si sostituiscano nelle condizioni a) e b) «continua» con «uniformemente continua» ed «equicontinuo» con «uniformemente equicontinuo».

Definizione 6′. Siano E, F spazi topologici, G uno spazio uniforme e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E. Un'applicazione di $E \times F$ in G si dice *ipocontinua rispetto a* $\mathfrak{S}$ se è separatamente continua e soddisfa le condizioni del lemma precedente. Analogamente, per un insieme M di applicazioni di $E \times F$ in G si definisce l'*equiipocontinuità di* M *rispetto a* $\mathfrak{S}$. Se F è uno spazio uniforme si hanno anche le varianti: applicazione u uniformemente ipocontinua rispetto a $\mathfrak{S}$, insieme M di applicazioni uniformemente equiipocontinuo rispetto a $\mathfrak{S}$.

Quando E, F, G sono spazi localmente convessi e si considerano soltanto applicazioni bilineari di $E \times F$ in G, i sottoinsiemi equicontinui di $L(F, G)$ sono già uniformemente equicontinui. Non occorre dunque distinguere tra ipocontinuità e ipocontinuità uniforme di un'applicazione bilineare, né fra equiipocontinuità ed equiipocontinuità uniforme di una famiglia di tali applicazioni (rispetto a una data $\mathfrak{S}$). In questo caso la nozione presenta interesse soltanto se $\mathfrak{S}$ è una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Si può evidentemente ripetere quanto precede scambiando E e F. Data una famiglia $\mathfrak{T}$ di sottoinsiemi di F, si ha così il concetto di applicazione su $E \times F$ ipocontinua rispetto a $\mathfrak{T}$, e così via. Date

insieme una famiglia $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi di E e una famiglia $\mathfrak{T}$ di sottoinsiemi di F, si ha la nozione di ipocontinuità rispetto a $\mathfrak{S}$ e a $\mathfrak{T}$. Ricordiamo il significato di queste nozioni per le applicazioni bilineari.

Proposizione 9. Siano E, F, G spazi localmente convessi e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. Un'applicazione bilineare separatamente continua u di $E \times F$ in G è ipocontinua rispetto a $\mathfrak{S}$ se e soltanto se soddisfa una delle condizioni equivalenti seguenti.
a) L'applicazione $E \to L(F, G)$ corrispondente a u trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi equicontinui di $L(F, G)$.
b) L'applicazione $F \to L(E, G)$ corrispondente a u è continua quando $L(E, G)$ è munito della topologia della $\mathfrak{S}$-convergenza.

Allora, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, la restrizione di u ad $A \times F$ è continua. Vale un enunciato analogo per una famiglia di applicazioni bilineari separatamente continue equiipocontinua rispetto a $\mathfrak{S}$.

Corollario 1. Siano E, F, G spazi localmente convessi e sia u un'applicazione bilineare separatamente continua di $E \times F$ in G (rispettivamente M un insieme puntualmente limitato di applicazioni bilineari continue di $E \times F$ in G). Se F è tonnelé, u è ipocontinua rispetto ai sottoinsiemi limitati di E (rispettivamente M è equiipocontinuo rispetto ai sottoinsiemi limitati di E).

Dimostrazione. Ciò segue dal criterio a) della proposizione 9 e dal fatto che in $L_s(F, G)$ ogni sottoinsieme limitato è equicontinuo.

Un'applicazione bilineare di $E \times F$ in G si dice *ipocontinua* se è ipocontinua rispetto ai sottoinsiemi limitati sia di E sia di F. Analogamente si definisce un insieme *equiipocontinuo* di applicazioni bilineari di $E \times F$ in G. Si noti che, per una forma o una famiglia di forme bilineari separatamente continue su $E \times F$, l'ipocontinuità rispetto a una famiglia $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi di E dipende soltanto dal duale di E. Possiamo dunque scegliere su E la topologia debole.

Corollario 2. Sia u una forma bilineare ipocontinua su $E \times F$. Per ogni sottoinsieme limitato A di E e ogni sottoinsieme limitato B di F le restrizioni di u ad $A_{\text{debole}} \times F$ e a $E \times B_{\text{debole}}$ sono continue. Lo stesso vale per la restrizione di u ad $A_{\text{debole}} \times B_{\text{debole}}$ se almeno uno fra A e B è precompatto.

L'ultima affermazione segue dal fatto che su un sottoinsieme precompatto di uno spazio localmente convesso la topologia indotta coincide con la topologia debole indotta (capitolo 2, § 18, proposizione 34).

Di solito, in analisi, tecniche consuete permettono di mostrare che le applicazioni bilineari separatamente continue che si incontrano hanno le proprietà di ipocontinuità di cui si ha bisogno. Si vedano, per esempio, il corollario 1 della proposizione 9 e gli esercizi 7, 8 e 9 che seguono. L'utilità dell'ipocontinuità risulta dalla semplice osservazione che, se un'applicazione bilineare separatamente continua u di $E \times F$ in G è ipocontinua rispetto ai compatti di E (o di F), essa è continua per successioni convergenti. In molti casi la continuità per successioni convergenti in $E \times F$ può tenere il posto della continuità (si veda l'esercizio 6). D'altra parte l'ipocontinuità è utile anche per il prolungamento delle applicazioni bilineari.

Prolungamenti delle applicazioni bilineari ipocontinue.

Proposizione 10. Siano E, F, G spazi localmente convessi, E_0 e F_0 sottospazi vettoriali densi rispettivamente di E e F, $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$ famiglie filtranti di sottoinsiemi limitati rispettivamente di E_0 e F_0, le cui unioni generino i rispettivi spazi vettoriali. Siano $\overline{\mathfrak{S}}$ e $\overline{\mathfrak{T}}$ le famiglie delle chiusure in E e in F degli elementi di $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$. Supponiamo che $\overline{\mathfrak{S}}$ generi E, che $\overline{\mathfrak{T}}$ generi F e che G sia di Hausdorff e quasi completo. Ogni applicazione bilineare u di $E_0 \times F_0$ in G ipocontinua rispetto a $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$ si prolunga in modo unico in un'applicazione bilineare $\widetilde{u}$ di $E \times F$ in G ipocontinua rispetto a $\overline{\mathfrak{S}}$ e $\overline{\mathfrak{T}}$. Se u è continua, $\widetilde{u}$ è continua. Se u percorre una famiglia di applicazioni bilineari equiipocontinua rispetto a $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$, le $\widetilde{u}$ formano una famiglia equiipocontinua rispetto a $\overline{\mathfrak{S}}$ e $\overline{\mathfrak{T}}$.

La dimostrazione è immediata e lasciata al lettore, così come quella della seguente variante della proposizione 10.

Proposizione 11. Siano E, F spazi localmente convessi di Hausdorff. Ogni forma bilineare ipocontinua su $E \times F$ si prolunga in modo unico in una forma bilineare separatamente debolmente continua su $E \times F''$. Se u percorre un insieme equicontinuo di forme bilineari su $E \times F$, le $\widetilde{u}$ formano un insieme equicontinuo di forme bilineari su $E \times F''$, equiipocontinuo rispetto ai sottoinsiemi limitati di E e ai sottoinsiemi equicontinui di F'' (considerati nei duali di E'_b e F'_b). Se u percorre un insieme equicontinuo di forme bilineari su $E \times F$, le $\widetilde{u}$ formano un insieme equicontinuo di forme bilineari su $E \times F''$.

(Ricordiamo che, salvo indicazione contraria, per topologia debole del biduale E'' s'intende la topologia $\sigma(E'', E')$, mentre la «topologia naturale» di E'', che si considera quando non se ne specifica un'altra, è la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'.)

Esercizio 1. Siano E, F, G spazi localmente convessi e M un insieme di applicazioni bilineari di $E \times F$ in G. L'insieme M è equicontinuo (oppure equiipocontinuo rispetto a una famiglia $\mathfrak{S}$ di sottoinsiemi limitati di E o di F, oppure separatamente equicontinuo) se e soltanto se per ogni sottoinsieme equicontinuo C' di G' la famiglia $M_{C'}$ delle forme bilineari $\langle u(x,y), z' \rangle$ su $E \times F$, con $u \in M$ e $z' \in C'$, ha la stessa proprietà. (Si identifichi G con uno spazio di funzioni su G' munito della topologia della convergenza uniforme sulla famiglia $\mathfrak{T}$ dei sottoinsiemi equicontinui. Il problema si riduce allora a una situazione topologica generale indipendente dalle strutture vettoriali.)

Esercizio 2. Siano E, F, G spazi localmente convessi, $\mathfrak{S}$ una famiglia di dischi limitati di E e M un insieme di applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G. Affinché M sia equiipocontinuo rispetto a $\mathfrak{S}$ è sufficiente, e anche necessario, che per ogni $A \in \mathfrak{S}$ la famiglia delle restrizioni delle $u \in M$ ad $A \times F$ sia equicontinua in $(0, 0)$.

Esercizio 3. Siano E, F, G spazi localmente convessi e u un'applicazione bilineare di $E \times F$ in G, ipocontinua rispetto ai sottoinsiemi compatti di E (o di F). Siano T uno spazio topologico metrizzabile, f un'applicazione continua di T in E e g un'applicazione continua di T in F. Si mostri che l'applicazione $t \mapsto u(f(t), g(t))$ di T in G è continua.

Esercizio 4. Siano E, F, G spazi localmente convessi e M un insieme di applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G. Si mostri che, se M è equicontinuo rispetto a una delle variabili, $M(x, y)$ è un sottoinsieme limitato di G per ogni $(x, y) \in E \times F$. Siano A e B sottoinsiemi limitati rispettivamente di E e di F. Si mostri che $M(A \times B)$ è un sottoinsieme limitato di G in ciascuno dei casi seguenti.
a) $M(x, y)$ è limitato in G per ogni $(x, y) \in E \times F$, e sia A sia B sono fortemente limitati.

b) M è equicontinuo rispetto a x e A è fortemente limitato.
c) M è equiipocontinuo rispetto ai compatti di E (o anche soltanto rispetto alle successioni in E che tendono a zero nel senso di Mackey).

Esercizio 5. Si mostri che nell'esercizio precedente, ferme restando le ipotesi su M, in a) non basta supporre che uno solo fra A e B sia fortemente limitato, né in b) basta supporre B fortemente limitato e A soltanto limitato. Infine, in c) non basta supporre M separatamente equicontinuo. (Si mostri che esistono spazi con sottoinsiemi limitati che non sono fortemente limitati. Si potrà allora porre, in a) e b), $F = G = k$, campo degli scalari, e in c) $G = k$, $F = E'_s$, prendendo come unico elemento di M la forma bilineare canonica su $E \times E'$.) Se ne deducano controesempi per il caso in cui si supponga M ridotto a un punto (si stabilisca una reciproca dell'esercizio 1).

Esercizio 6. Siano E, F, G spazi localmente convessi e u un'applicazione bilineare di $E \times F$ in G tale che $u(A \times B)$ sia limitato in G per ogni sottoinsieme limitato A di E e ogni sottoinsieme limitato B di F. Siano U un aperto di $\mathbf{R}^n$, f e g applicazioni continuamente differenziabili di U rispettivamente in E e in F. Si mostri che la funzione $t \mapsto u(f(t), g(t))$ su U a valori in G è continuamente differenziabile e che la derivata rispetto a t_i è data da

$$\frac{\partial}{\partial t_i} u(f(t), g(t)) = u\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t), g(t)\right) + u\left(f(t), \frac{\partial g}{\partial t_i}(t)\right).$$

(Si mostri anzitutto che la derivata esiste ed è data dalla formula precedente. Si mostri poi che, se u è come sopra, f' è un'applicazione continuamente differenziabile di U in E e g è un'applicazione continua di U in F, allora l'applicazione $t \mapsto u(f'(t), g(t))$ di U in G è continua.) Si dia una dimostrazione più rapida nel caso in cui u sia ipocontinua rispetto ai sottoinsiemi compatti di E (o di F).

Esercizio 7. Siano E, F, G spazi localmente convessi e M una famiglia separatamente equicontinua di applicazioni bilineari di $E \times F$ in G. Si mostri che M è equiipocontinua rispetto ai compatti di F quando si munisce E della topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi debolmente compatti di E'. (Con l'aiuto dell'esercizio 1 ci si riduca al caso in cui G è il campo degli scalari. Si interpreti allora M come un insieme equicontinuo di applicazioni lineari di F in E' debole. Si osservi che, per il teorema di Ascoli, M è relativamente compatto in $L(F, E'_s)$ per la convergenza compatta. Se ne deduca, per continuità, che per ogni compatto $K \subset F$, $M(K)$ è un sottoinsieme debolmente relativamente compatto di E'.)

Esercizio 8. Siano E, F, G spazi localmente convessi, M un insieme di applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G e $\mathfrak{T}$ una famiglia di sottoinsiemi fortemente limitati di F. Si supponga F tonnelé (rispettivamente quasi tonnelé) e si supponga che per ogni $(x, y) \in E \times F$ l'insieme $M(x, y)$ sia limitato in G (rispettivamente che M sia equicontinuo rispetto a E). Si mostri che M è equiipocontinuo rispetto a $\mathfrak{T}$.

Esercizio 9. Siano E, F, G spazi localmente convessi e siano $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ famiglie di sottoinsiemi limitati rispettivamente di E, F che ricoprano i rispettivi spazi. Si supponga che per ogni applicazione lineare continua u di E in F si abbia $u(\mathfrak{S}_1) \subset \mathfrak{S}_2$. Allora l'applicazione bilineare

$$(v, u) \longmapsto v \circ u, \qquad L_{\mathfrak{S}_2}(F, G) \times L_{\mathfrak{S}_1}(E, F) \longrightarrow L_{\mathfrak{S}_1}(E, G)$$

è separatamente continua. Sia Σ la famiglia dei sottoinsiemi M di $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ tali che per ogni $A \in \mathfrak{S}_1$ il sottoinsieme $M(A)$ di F appartenga a $\mathfrak{S}_2$. Allora $(v,u) \mapsto v \circ u$ è ipocontinua rispetto a Σ e rispetto alla famiglia dei sottoinsiemi equicontinui di $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$. Si hanno i casi particolari seguenti.
a) Se $\mathfrak{S}_2$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi limitati di F, la composizione è ipocontinua rispetto ai sottoinsiemi limitati di $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ e ai sottoinsiemi equicontinui di $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$.
b) Se $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ sono le famiglie dei sottoinsiemi finiti rispettivamente di E e di F, l'applicazione $(v,u) \mapsto v \circ u$ è ipocontinua rispetto ai sottoinsiemi equicontinui di $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$.
c) Se $\mathfrak{S}_1$ è una famiglia di sottoinsiemi compatti di E e $\mathfrak{S}_2$ è la famiglia di tutti i compatti di F, la composizione è ipocontinua rispetto ai compatti di $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ e ai sottoinsiemi equicontinui di $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$.

Esercizio 10. Sia F uno spazio di Banach, sia $E = F'$ il suo duale di Banach e sia u la forma bilineare canonica su $E \times F$. Sia v_1 il prolungamento canonico per continuità debole di u a $E \times F''$ e sia w_1 il prolungamento analogo di v_1 a $E'' \times F''$. Si definiscano allo stesso modo il prolungamento v_2 di u a $E'' \times F$ e il prolungamento w_2 di v_2 a $E'' \times F''$. Si esplicitino le due forme bilineari w_1, w_2 su $E'' \times F''$ e si mostri che, se F non è riflessivo, esse sono distinte e nessuna delle due è separatamente debolmente continua. Si mostri allora che non esiste alcuna forma bilineare separatamente debolmente continua su $E'' \times F''$ che prolunghi u.

6 Spazi di applicazioni bilineari. Definizioni e notazioni

Siano E, F, G spazi localmente convessi, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E, $\mathfrak{T}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di F e H uno spazio di applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G. Consideriamo su H la $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-topologia, dove $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ indica la famiglia dei sottoinsiemi di $E \times F$ del tipo $A \times B$ con $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$. Questa topologia è localmente convessa se e soltanto se per ogni $A \times B \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ e ogni $u \in H$ l'insieme $u(A \times B)$ è un sottoinsieme limitato di G (capitolo 1, § 8, teorema 3).

Proposizione 12. Sullo spazio H di applicazioni bilineari la $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-topologia coincide con la topologia indotta dallo spazio delle applicazioni lineari di E in $L_{\mathfrak{T}}(F,G)$ munito della $\mathfrak{S}$-convergenza.

La verifica è immediata (si veda il capitolo 0, proposizione $6''$). In particolare, se le $u \in H$ sono ipocontinue rispetto a $\mathfrak{S}$ o a $\mathfrak{T}$, le corrispondenti applicazioni di E in $L_{\mathfrak{T}}(F,G)$ trasformano gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi limitati di $L_{\mathfrak{T}}(F,G)$ e pertanto H è localmente convesso. Analogamente, applicando la proposizione $3'$ del § 2, vediamo che H è sempre localmente convesso se gli $A \in \mathfrak{S}$ o i $B \in \mathfrak{T}$ sono fortemente limitati. In particolare, per il teorema di Banach–Steinhaus–Mackey (§ 2), otteniamo il seguente corollario.

Corollario. Se gli elementi di $\mathfrak{S}$ o quelli di $\mathfrak{T}$ sono dischi completi, lo spazio di tutte le applicazioni bilineari separatamente continue di $E \times F$ in G, munito della $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-topologia, è localmente convesso.

La $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-topologia è la topologia della convergenza sui limitati (rispettivamente della convergenza compatta, della convergenza puntuale) quando $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$ sono le famiglie dei sottoinsiemi limitati (rispettivamente compatti, finiti) di E e di F. Lo spazio delle applicazioni bilineari separatamente continue (rispettivamente continue) di $E \times F$ in G si indica con $\mathfrak{B}(E,F;G)$ (rispettivamente $B(E,F;G)$). Si omette G quando è il campo degli

scalari. Dunque $\mathfrak{B}(E,F)$ e $B(E,F)$ sono rispettivamente lo spazio delle forme bilineari separatamente continue e quello delle forme bilineari continue su $E \times F$. Se si considera su uno degli spazi precedenti la topologia della convergenza sui limitati (rispettivamente compatta, puntuale), lo si indica con l'indice b (rispettivamente c, s), come in $\mathfrak{B}_b(E,F;G)$, $\mathfrak{B}_c(E,F;G)$, $\mathfrak{B}_s(E,F;G)$. Gli spazi $\mathfrak{B}_s(E,F;G)$ e $B_b(E,F;G)$ sono sempre localmente convessi. Quando si considerano i duali forti E' e F' degli spazi localmente convessi E e F, può essere utile munire $\mathfrak{B}(E',F';G)$ e i suoi sottospazi della topologia della convergenza uniforme sui prodotti $A \times B$, dove A e B sono sottoinsiemi equicontinui rispettivamente di E' e di F'. Questa topologia è sempre localmente convessa (i sottoinsiemi equicontinui debolmente chiusi del duale, essendo debolmente compatti, sono fortemente completi). Si chiama *topologia della convergenza biequicontinua* e si indica con l'indice e. Quando F e G coincidono con il campo degli scalari, si ritrova E'' con la topologia consueta.

Caso degli spazi normati. Il seguente risultato generalizza il teorema 2 del capitolo 1, § 5.

Proposizione. Siano E_i $(i = 1, \dots, n)$ e F spazi seminormati e sia u un'applicazione n-lineare di $\prod_i E_i$ in F. L'applicazione u è continua se e soltanto se è finita la quantità

$$\|u\| = \sup_{\substack{(x_i)\in\prod_i E_i \\ \|x_i\|\le 1 \text{ per ogni } i}} \|u(x_1,\dots,x_n)\|.$$

Si ha allora, per ogni $(x_i) \in \prod_i E_i$,

$$\|u(x_1,\dots,x_n)\| \le \|u\|\,\|x_1\|\cdots\|x_n\|.$$

L'espressione $\|u\|$ è una seminorma su $B(E_1,\dots,E_n;F)$ (una norma se F è di Hausdorff). La topologia corrispondente è quella della convergenza uniforme sul prodotto delle palle unitarie degli E_i, o sui prodotti di insiemi limitati. Questo spazio è completo quando F è di Hausdorff e completo. Infine si ha un isomorfismo metrico canonico

$$B(E_1,\dots,E_p;B(E_{p+1},\dots,E_n;F)) \;\simeq\; B(E_1,\dots,E_n;F).$$

In particolare, se u è una forma bilineare continua sul prodotto $E \times F$ di due spazi seminormati, la sua norma come forma bilineare coincide con la norma della corrispondente applicazione lineare di E in F' (o di F in E'). Il prolungamento canonico della forma u su $E \times F$ a una forma su $E \times F''$ (si veda la proposizione 11) ha la stessa norma di u. Si osservi che, se E, F, G sono seminormati, su $\mathfrak{B}(E',F';G)$ la topologia della convergenza biequicontinua è precisamente quella definita dalla seminorma naturale dello spazio.

Gli spazi $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$. Siano E, F spazi localmente convessi di Hausdorff. Consideriamo $E \otimes F$ come spazio di forme bilineari su $E' \times F'$. A $x \otimes y$ corrisponde la forma bilineare $\langle x, x'\rangle\langle y, y'\rangle$. Poiché quest'ultima è evidentemente separatamente debolmente continua (e anzi debolmente continua), possiamo considerare $E \otimes F$ come un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{B}(E'_s, F'_s)$ e munirlo della topologia della convergenza biequicontinua, per la quale è un sottospazio vettoriale topologico di $\mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s)$.

Definizione 7. Siano E, F spazi localmente convessi di Hausdorff. Indichiamo con $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ il completamento di $E \otimes F$ munito della topologia della convergenza biequicontinua, ossia della topologia indotta da $\mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s)$.

Se $\mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s) \simeq L_e(E', F)$ è completo, ossia se E e F sono completi (si veda il § 1), allora $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ è il sottospazio vettoriale topologico chiuso di $\mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s)$ ottenuto prendendo la chiusura di $E \otimes F$. Sia d'altra parte $u \in \mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s)$. Dire che l'applicazione lineare di E' in F che le corrisponde trasforma i sottoinsiemi equicontinui in sottoinsiemi precompatti di F, o in sottoinsiemi relativamente compatti di F, equivale a dire che la corrispondente applicazione lineare di F' in E ha la proprietà analoga (capitolo 2, § 18, teorema 12, corollario 2). Inoltre il sottospazio K di

$$\mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s) \simeq L_e(E', F)$$

costituito da tali u è chiuso (capitolo 0, § 4, proposizione 6′). Se dunque E e F sono completi, $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ si identifica anche con un sottospazio vettoriale di K. In altri termini, l'applicazione lineare di E' in F che corrisponde a un elemento $u \in E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ trasforma i sottoinsiemi equicontinui di E' in sottoinsiemi relativamente compatti di F. La reciproca è vera in tutti i casi noti: in tutti i casi noti, cioè, ogni applicazione lineare debolmente continua di E' in F che trasformi i sottoinsiemi equicontinui in sottoinsiemi relativamente compatti è limite uniforme, sui sottoinsiemi equicontinui di E', di applicazioni lineari debolmente continue di rango finito (si veda l'esercizio 4).[31]

Se E e F sono spazi normati, la topologia della convergenza biequicontinua su $E \otimes F$ è definita dalla norma naturale dello spazio $B(E', F')$ delle forme bilineari continue su $E' \times F'$. Possiamo quindi considerare $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ come uno spazio di Banach, sottospazio normato di $B(E', F')$.

Esercizio 1. Siano E, F spazi di Banach. Si consideri $B(E, F)$ come sottospazio del duale di $E \otimes F$.
a) Si mostri che la palla unitaria di $B(E, F)$ è debolmente compatta ed è quindi la palla unitaria del duale di $E \otimes F$ per una norma univocamente determinata su $E \otimes F$.
b) Munito $E \otimes F$ di tale norma, si mostri che un'applicazione bilineare u di $E \times F$ in uno spazio di Banach G è continua se e soltanto se la corrispondente applicazione lineare $\widetilde{u}$ di $E \otimes F$ in G è continua. In tal caso le norme di u e $\widetilde{u}$ coincidono.
c) Si mostri che $E \otimes F$ è tonnelé (si osservi che questa affermazione equivale al teorema 12 del capitolo 1, § 15).
d) Sia P_n l'insieme degli elementi di $E \otimes F$ di rango $\leq n$. Si mostri che P_n è chiuso in $E \otimes F$ (utilizzando l'esercizio seguente, si mostri anzi che P_n è chiuso per $\sigma(E \otimes F, E' \otimes F')$). Se ne deduca che, se E e F sono entrambi di dimensione infinita, $E \otimes F$ è uno spazio normato tonnelé magro (quindi non è uno spazio di Baire).[32]

Esercizio 2. Siano E, F spazi vettoriali e u una forma bilineare su $E \times F$. Si chiama *rango* di u il rango dell'applicazione lineare di E nel duale algebrico F^* di F definita da u. (Esso coincide evidentemente con il rango dell'applicazione lineare di F in E^* definita da u.) Si mostri che il rango di u è $\leq n$, per un dato intero $n > 0$, se e soltanto se per ogni scelta di $n+1$ elementi (x_i) di E e di $n+1$ elementi (y_j) di F si ha

$$\det\big(u(x_i, y_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n+1} = 0.$$

Se ne deduca che l'insieme delle forme bilineari su $E \times F$ di rango $\leq n$ è chiuso per la topologia della convergenza puntuale.[33]

[31] «In tutti i casi noti» si riferisce allo stato delle conoscenze al tempo del corso.

[32] L'edizione inglese stampa «finite dimensional». L'argomento richiede che esistano tensori di rango arbitrariamente grande.

[33] Il testo inglese indica successioni di n elementi. Per il rango $\leq n$ occorrono i minori di ordine $n+1$.

Esercizio 3. a) Siano (E_i) e (F_j) due famiglie di spazi localmente convessi di Hausdorff e siano $E = \prod_i E_i$, $F = \prod_j F_j$. Si mostri che $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ è canonicamente isomorfo a

$$\prod_{i,j} (E_i \mathbin{\widehat{\otimes}} F_j).$$

b) Siano E_i, F_i spazi localmente convessi di Hausdorff ($i = 1, 2$) e u_i un'applicazione lineare continua di E_i in F_i. Si mostri che $u_1 \otimes u_2$, da $E_1 \otimes E_2$ in $F_1 \otimes F_2$, è continua per le topologie della convergenza biequicontinua e si prolunga quindi in un'applicazione lineare continua $u_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} u_2$ di $E_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} E_2$ in $F_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} F_2$. Se le u_i sono isomorfismi topologici, anche $u_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} u_2$ lo è. Se gli E_i, F_i sono spazi di Banach e le u_i sono isomorfismi metrici, anche $u_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} u_2$ è un isomorfismo metrico.

Esercizio 4. Sia E uno spazio localmente convesso completo e di Hausdorff. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) $E' \otimes F$ è denso in $L_c(E, F)$ per ogni spazio localmente convesso F.
b) Per ogni spazio localmente convesso F, $F' \otimes E$ è denso in $L_c(F, E)$.
c) Per ogni spazio localmente convesso F e ogni famiglia $\mathfrak{S}$ di suoi sottoinsiemi limitati, $F' \otimes E$ è denso per la $\mathfrak{S}$-convergenza nello spazio $K_{\mathfrak{S}}(F, E)$ delle applicazioni lineari continue di F in E che trasformano gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi relativamente compatti di E.
d) Per ogni spazio localmente convesso completo e di Hausdorff F, $F \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ si identifica con lo spazio delle applicazioni lineari debolmente continue di F' in E che trasformano i sottoinsiemi equicontinui di F' in sottoinsiemi relativamente compatti di E. Si mostri che, se E ha queste proprietà, le ha anche ogni suo fattore diretto.

7 Applicazioni lineari di uno spazio localmente convesso in certi spazi di funzioni. Applicazioni in uno spazio di funzioni continue

Sia M localmente compatto. Consideriamo lo spazio $C(M)$ delle funzioni scalari continue su M, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, e lo spazio $C_0(M)$ delle funzioni scalari continue che si annullano all'infinito, con la topologia della convergenza uniforme (capitolo 1, § 9). Per ogni $t \in M$ sia $\varepsilon(t)$ la forma lineare $f \mapsto f(t)$ su $C(M)$. Essa è evidentemente continua, e l'applicazione $t \mapsto \varepsilon(t)$ di M nel duale di $C(M)$ (o di $C_0(M)$) è continua per la topologia debole del duale. Si verifica facilmente che è persino un omeomorfismo sulla sua immagine, e lo è già per la topologia $\sigma(C(M)', \mathcal{K}(M))$, dove $\mathcal{K}(M)$ è lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto. La topologia di $C(M)$ è dunque la topologia della convergenza uniforme sulla famiglia degli insiemi $\varepsilon(K) \subset C(M)'$, dove K percorre i compatti di M. La topologia di $C_0(M)$ è quella della convergenza uniforme sul sottoinsieme $\varepsilon(M)$ di $C_0(M)'$.

Siano E uno spazio localmente convesso e u un'applicazione lineare continua di E in $C(M)$. La trasposta u' è un'applicazione debolmente continua di $C(M)'$ in E' che trasforma insiemi equicontinui in insiemi equicontinui (capitolo 2, § 16). Pertanto $f = u' \circ \varepsilon$ è un'applicazione continua di M in E'_s che trasforma i compatti di M in insiemi equicontinui di E'. Esplicitamente,

$$\langle x, f(t) \rangle = u(x)(t). \tag{1}$$

Si vede così che f determina u. Viceversa, se f è un'applicazione continua di M in E'_s che trasforma i compatti in insiemi equicontinui, la formula precedente definisce per ogni $x \in E$ una funzione scalare continua su M, grazie alla continuità di f. Ne risulta un'applicazione

lineare u di E in $C(M)$. Per la sua continuità basta, secondo lo stesso riferimento, che al variare di x' in un insieme $\varepsilon(K)$, con K compatto in M, la forma $x' \circ u$ percorra un sottoinsieme equicontinuo di E'. Ora, per definizione,

$$\varepsilon(t) \circ u = f(t).$$

Un ragionamento analogo vale sostituendo $C_0(M)$ a $C(M)$. Riassumendo, si ha il seguente teorema.

Teorema 5. Siano M uno spazio localmente compatto ed E uno spazio localmente convesso. Le applicazioni lineari continue di E in $C(M)$ corrispondono biunivocamente alle applicazioni continue di M in E'_s che trasformano i compatti in sottoinsiemi equicontinui di E'. Nel caso di $C_0(M)$ si ottengono le applicazioni continue di M in E'_s che si annullano all'infinito e la cui immagine è un sottoinsieme equicontinuo di E'. La corrispondenza è data dalla formula (1).

Corollario 1. Se E è tonnelé, si hanno gli isomorfismi canonici

$$L(E, C(M)) = C(M, E'_s), \qquad L(E, C_0(M)) = C_0(M, E'_s).$$

Infatti ogni sottoinsieme debolmente compatto di E' è equicontinuo, cosicché la condizione supplementare imposta dal teorema 5 alle applicazioni continue di M in E'_s diventa superflua. Se E è soltanto uno spazio vettoriale topologico, possiamo affermare soltanto che

$$L(E, C(M)) \subset C(M, E'_s), \qquad L(E, C_0(M)) \subset C_0(M, E'_s).$$

Si verifica inoltre immediatamente il seguente corollario.

Corollario 2. Sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E. La $\mathfrak{S}$-topologia su $L(E, C(M))$ coincide con quella indotta dalla topologia della convergenza uniforme sui compatti nello spazio delle applicazioni di M in $E'_{\mathfrak{S}}$, dove $E'_{\mathfrak{S}}$ denota E' munito della $\mathfrak{S}$-topologia. Nel caso di $L(E, C_0(M))$ si prende la convergenza uniforme su tutto M. (Per la dimostrazione si considerino gli intorni di zero.)

Corollario 3. Siano M localmente compatto ed E uno spazio localmente convesso di Hausdorff in cui l'inviluppo convesso chiuso di ogni compatto è compatto (per esempio, uno spazio quasi-completo, cfr. capitolo 2, § 5, esercizio 4). Si hanno gli isomorfismi

$$C(M, E) = L(E'_c, C(M)), \qquad C_0(M, E) = L(E'_c, C_0(M)),$$

dove E'_c indica E' munito della topologia della convergenza sui compatti.

Infatti, per il teorema di Mackey, il duale di E'_c è E. Il risultato segue dal teorema 5 se si osserva che un'applicazione continua di M in E debole che trasformi i compatti in compatti è già continua per la topologia data di E, poiché su ogni compatto di E la topologia indotta coincide con quella indotta dalla topologia debole. D'altra parte ogni $f \in C(M, E)$ (rispettivamente $f \in C_0(M, E)$) soddisfa evidentemente le condizioni del teorema 5, poiché trasforma i compatti in compatti (rispettivamente ha immagine relativamente compatta in E). Mediante il teorema di approssimazione (capitolo 1, § 9, teorema 4), il corollario 3 assume la forma seguente.

Corollario 4. Se M è localmente compatto ed E è localmente convesso, separato e completo, si hanno gli isomorfismi

$$C(M,E) \simeq C(M) \mathbin{\widehat{\otimes}} E, \qquad C_0(M,E) \simeq C_0(M) \mathbin{\widehat{\otimes}} E.$$

Se E è uno spazio di Banach, il secondo isomorfismo è persino isometrico.

Siano ora M un insieme ed E uno spazio localmente convesso di funzioni scalari su M con topologia più fine di quella della convergenza puntuale. In altri termini, E è un sottospazio vettoriale di k^M munito di una topologia localmente convessa più fine di quella indotta. Per ogni $t \in M$ è dunque continua la forma lineare $\varepsilon(t)$ su E definita da

$$\langle \phi, \varepsilon(t) \rangle = \phi(t).$$

Siano F uno spazio localmente convesso separato e completo e u un'applicazione lineare debolmente continua di F' in E. Allora $f = u' \circ \varepsilon$ è un'applicazione di M in F data esplicitamente da

$$\langle f(t), y' \rangle = \langle uy', \varepsilon(t) \rangle = u(y')(t).$$

Per $y' \in F'$ la funzione $t \mapsto f_{y'}(t) = \langle f(t), y' \rangle$ coincide con uy'. Dunque, quando y' percorre un sottoinsieme equicontinuo di F', $f_{y'}$ percorre un sottoinsieme relativamente debolmente compatto di E. Viceversa, sia f un'applicazione di M in F tale che le funzioni $f_{y'}$ appartengano a E e percorrano un insieme relativamente debolmente compatto di E quando y' percorre un insieme equicontinuo di F'. Mostriamo che l'applicazione $u\colon y' \mapsto f_{y'}$ di F' in E è debolmente continua. Su ogni sottoinsieme equicontinuo A di F' la restrizione di u è continua per la topologia debole di A e per la convergenza puntuale su E. Essa è anche debolmente continua, poiché sulla chiusura debole di $u(A)$, che è debolmente compatta, la topologia debole coincide con la topologia separata più grossolana della convergenza puntuale su M. Per ogni $x' \in E'$ la restrizione di $x' \circ u$ a ogni sottoinsieme equicontinuo A di F' è dunque debolmente continua. Per la completezza di F è debolmente continua anche $x' \circ u$ su tutto F' (capitolo 2, § 14, teorema 10), e quindi lo è u. Riassumendo,

Proposizione 14. Siano M un insieme ed E uno spazio localmente convesso di funzioni scalari su M, munito di una topologia più fine di quella della convergenza puntuale. Sia F uno spazio localmente convesso completo di Hausdorff. Le applicazioni lineari debolmente continue di F' in E si identificano con le applicazioni f di M in F tali che per ogni $y' \in F'$ la funzione $f_{y'}\colon t \mapsto \langle f(t), y' \rangle$ appartenga a E e che tali funzioni percorrano un insieme relativamente debolmente compatto di E quando y' percorre un insieme equicontinuo di F'.

Corollario. Se, nell'enunciato precedente, E è riflessivo, metrizzabile e completo, l'ultima condizione su f è sempre soddisfatta.

Si tratta infatti di vedere che l'applicazione $y' \mapsto f_{y'}$ di F' in E trasforma ogni disco equicontinuo debolmente chiuso A di F' in un insieme limitato di E, ossia induce un'applicazione lineare continua dello spazio di Banach F'_A in E. Ora, questa applicazione lineare è a priori continua per la topologia della convergenza puntuale su M, topologia separata più grossolana di quella data su E. La continuità richiesta segue dal teorema del grafico chiuso.

La proposizione 14 e il suo corollario si applicano in numerosi casi. Se, per esempio, scegliamo come E lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili su un aperto M di $\mathbb{R}^n$, troviamo che le applicazioni lineari debolmente continue di F' in E si identificano con le applicazioni di M in F che sono «scalarmente infinitamente differenziabili» (per lo studio di queste funzioni si veda il paragrafo seguente), e così via.

Esercizio 1. Siano M uno spazio localmente compatto, M_0 un suo sottospazio chiuso ed E uno spazio localmente convesso.
a) Si mostri che l'applicazione lineare naturale di $C(M, E)$ in $C(M_0, E)$, che associa a ogni funzione continua su M la sua restrizione a M_0, è un omomorfismo del primo spazio su un sottospazio denso del secondo.
b) Se ne deduca che, se M è numerabile all'infinito ed E è metrizzabile e completo, si ottiene persino un omomorfismo del primo spazio su tutto il secondo.
c) Quest'ultima conclusione vale per ogni spazio localmente convesso completo E se e soltanto se il sottospazio $J(M_0)$ di $C(M)$ formato dalle funzioni nulle su M_0 ammette un supplementare topologico o, equivalentemente, se l'applicazione naturale $t \mapsto \varepsilon(t)$ di M_0 nel duale debole di $C(M_0)$ si prolunga in un'applicazione continua di M nello stesso spazio. Per la sufficienza della prima condizione si usi il corollario 3 del teorema 5. Per il viceversa si scelga per E il duale di $C_0(M_0)$ con la topologia della convergenza sui compatti (per la quale è localmente convesso e completo), e si consideri l'applicazione continua $t \mapsto \varepsilon(t)$ di M_0 in E. La condizione è soddisfatta, in particolare, se M è metrizzabile e separabile (capitolo 1, § 11, esercizio 5).
d) Si mostri che, se l'applicazione naturale di $C(M, E)$ in $C(M_0, E)$ non è suriettiva, il quoziente di $C(M, E)$ per il sottospazio chiuso delle funzioni nulle su M_0 non è completo (mentre $C(M, E)$ è completo quando E è completo).

Esercizio 2. Sia I un insieme e si consideri lo spazio di Banach $\ell^\infty(I)$ delle famiglie limitate di scalari indicizzate da I. Se $J \subset I$, identifichiamo $\ell^\infty(J)$ con il sottospazio di $\ell^\infty(I)$ i cui elementi hanno coordinate nulle per $i \notin J$. Se μ è una forma lineare continua su $\ell^\infty(I)$, denotiamo con μ_J la sua restrizione a $\ell^\infty(J)$.
a) Si mostri che, se $J_1, \dots, J_n$ sono sottoinsiemi disgiunti di I, allora

$$\|\mu_{J_1}\| + \cdots + \|\mu_{J_n}\| \leq \|\mu\|.$$

b) Per ogni forma lineare continua μ su $\ell^\infty(I)$ sia $\widetilde{\mu}$ la sua restrizione a $c_0(I)$, identificata con un elemento di $\ell^1(I)$ (capitolo 1, § 9, esercizio 7). Mediante la dualità naturale fra $\ell^1(I)$ e $\ell^\infty(I)$ possiamo considerarla come una forma lineare continua su $\ell^\infty(I)$, in generale distinta da μ. Si deduca da a) che, se I è infinito, per ogni successione (μ_n) di forme lineari continue su $\ell^\infty(I)$ esiste un sottoinsieme infinito J di I tale che $(\widetilde{\mu}_n)_J = (\mu_n)_J$ per ogni n. (Si costruisca per induzione una successione decrescente (J_n) di sottoinsiemi infiniti di I tali che

$$\|(\mu_k)_{J_n}\| \leq 1/n \qquad (k \leq n),$$

e si consideri un insieme infinito $J \subset I$ tale che $J \setminus J_n$ sia finito per ogni n.)[34]
c) Se ne deduca che, se (μ_n) converge a zero nel duale debole di $\ell^\infty(I)$, allora $(\widetilde{\mu}_n)$ converge fortemente a zero in $\ell^1(I)$. (Si proceda per assurdo, mostrando che altrimenti esisterebbero $\varepsilon > 0$ e una successione (A_n) di sottoinsiemi finiti di I, disgiunti a due a due, tali che

$$\sum_{i \in A_n} |\mu_n(i)| \geq \varepsilon.$$

Se necessario, si passi a una sottosuccessione di (μ_n). Si consideri quindi l'isomorfismo di $\ell^\infty(\mathbb{N})$, dove $\mathbb{N}$ è l'insieme degli interi non negativi, in $\ell^\infty(I)$ dato da

$$(\xi_n) \longmapsto \sum_n \xi_n \phi_{A_n},$$

[34] Nella disuguaglianza l'edizione inglese stampa μ_n e subito dopo precisa «per $k \leq n$». Si è esplicitato l'indice k a cui si riferisce la condizione.

dove ϕ_{A_n} è la funzione caratteristica di A_n e la serie converge puntualmente in $\ell^\infty(I)$. Ci si riconduca al caso $I = \mathbb{N}$, $A_n = \{n\}$. Per b) si può persino supporre $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ per ogni n, e quindi $\mu_n \in \ell^1$ per ogni n. Allora (μ_n) sarebbe una successione dello spazio di Banach ℓ^1 debolmente convergente ma non fortemente convergente, il che è impossibile per il capitolo 2, § 17, esercizio 4.)
d) Si deduca da c) che, se e_i è la forma che dà la i-esima coordinata su c_0, la successione degli e_i converge a zero nel duale debole di c_0, ma non è la restrizione di alcuna successione di forme lineari continue su ℓ^∞ che converga a zero nel duale debole di ℓ^∞. A maggior ragione, c_0 non ammette un supplementare topologico in ℓ^∞.
e) Sia M la compattificazione di Stone dello spazio $\mathbb{N}$ degli interi non negativi e sia M_0 il sottospazio compatto complementare di $\mathbb{N}$. Si mostri che M, M_0 non soddisfano le condizioni dell'esercizio 1 c).

Esercizio 3. a) Siano M uno spazio compatto ed E uno spazio di Banach. Si mostri che lo spazio delle applicazioni lineari compatte di E in $C(M)$, con la norma indotta da $L(E, C(M))$, è canonicamente isomorfo allo spazio normato $C(M, E')$.
b) Se ne deduca che, se E è uno spazio di Banach e F un suo sottospazio vettoriale normato, ogni applicazione lineare compatta u di F in $C(M)$ si prolunga in un'applicazione lineare compatta di E in $C(M)$ di norma $\leq \|u\| + \varepsilon$, dove $\varepsilon > 0$ è arbitrario (si usi il capitolo 1, § 14, esercizio 2).
c) Si generalizzi al caso in cui E è uno spazio localmente convesso qualsiasi.

Esercizio 4. Si mostri che esistono un sottospazio chiuso F di $E = \ell^1$ e una successione in E/F debolmente convergente a zero che non proviene da una successione debolmente convergente a zero in E. Si ricordi che ogni successione debolmente convergente di ℓ^1 converge fortemente (capitolo 2, § 17, esercizio 4). Si mostri inoltre che esistono spazi di Banach separabili, come c_0, che ammettono successioni debolmente convergenti ma non fortemente convergenti. Si mostri infine che ogni spazio di Banach separabile è isomorfo a un quoziente di ℓ^1 (capitolo 1, § 14, esercizio 1).

8 Funzioni vettoriali differenziabili

Siano U un aperto di $\mathbb{R}^n$, E uno spazio localmente convesso di Hausdorff (in questo paragrafo tutti gli spazi localmente convessi saranno di Hausdorff) e f un'applicazione di U in E. La derivabilità di f in un punto $t \in U$ rispetto a una variabile, o più generalmente nella direzione di un vettore dato, si definisce come nel caso scalare. Se ne ricava la nozione di applicazione m volte continuamente differenziabile di U in E. Stabiliamo alcuni lemmi.

Lemma 1. Un'applicazione f di $U \subset \mathbb{R}^n$ nel completamento debole E'^* di E è derivabile in $t \in U$, nella direzione considerata, se e soltanto se per ogni $x' \in E'$ è derivabile in t la funzione $f_{x'} \colon s \mapsto \langle f(s), x' \rangle$. Per ogni $x' \in E'$ si ha allora

$$\langle f'(t), x' \rangle = f'_{x'}(t). \tag{1}$$

Infatti occorre esprimere che il rapporto

$$\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)),$$

considerato come forma lineare su E', converge puntualmente a un limite per $h \to 0$. Il limite sarà automaticamente lineare e sarà dunque un elemento di E'^*, la derivata di f in

t. Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, il prodotto scalare

$$\left\langle \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)), x' \right\rangle = \frac{1}{h}(f_{x'}(t+h) - f_{x'}(t))$$

tende a un limite, che sarà $\langle f'(t), x' \rangle$. Questa è precisamente la derivabilità di $f_{x'}$ in t, da cui (1).

Corollario. Un'applicazione f dell'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ nel completamento debole E'^* di E è m volte continuamente differenziabile se e soltanto se lo è scalarmente. Con ciò si intende che, per ogni $x' \in E'$, la funzione $f_{x'}$ ha la proprietà considerata.

Lemma 2. Un'applicazione f di U in E è m volte continuamente differenziabile nel completamento debole E'^* di E se e soltanto se lo è nel biduale E'' munito della topologia debole del duale.

La sufficienza è immediata. Per il viceversa si cominci con $m = 1$ e $U \subset \mathbb{R}$. Se il rapporto $(f(t+h) - f(t))/h$ ha limite in E'^* debole, tale limite è anche il limite di una successione di elementi di E (si prenda $h = 1/n$, con n intero positivo). Questa è una successione di Cauchy debole ed è quindi limitata. Ne segue, per il teorema di Mackey, che il limite appartiene a E''.

Lemma 3. Sia f un'applicazione continuamente differenziabile di U in E. Si supponga che le sue derivate parziali prime siano continue per una topologia localmente convessa T su E che ammette un sistema fondamentale di intorni di zero chiusi per la topologia iniziale. Allora f è continuamente differenziabile anche per T.

L'ipotesi su T significa che si tratta di una $\mathfrak{S}$-topologia, dove $\mathfrak{S}$ è una famiglia di sottoinsiemi debolmente chiusi di E'. Basta considerare una sola variabile e mostrare che il rapporto $(f(t+h) - f(t))/h$, che tende a $f'(t)$ per la topologia iniziale T_0 di E, tende allo stesso limite per T. Occorre dunque che, per ogni $A \in \mathfrak{S}$, il suo prodotto scalare con $x' \in A$ tenda a $\langle f'(t), x' \rangle$ uniformemente al variare di x' in A. Ora tale prodotto scalare si scrive anche

$$\frac{f_{x'}(t+h) - f_{x'}(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f'_{x'}(s)\, ds.$$

La sua differenza da $\langle f'(t), x' \rangle = f'_{x'}(t)$ si scrive

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f'_{x'}(s) - f'_{x'}(t))\, ds.$$

Essa tende effettivamente a zero uniformemente per $x' \in A$, perché $f'_{x'}(s)$ tende a $f'_{x'}(t)$ per $s \to t$ uniformemente al variare di x' in $A \in \mathfrak{S}$. Questo è appunto il significato della continuità di f' per la topologia T.

Corollario. Sia T come sopra. Se f è m volte continuamente differenziabile e le sue derivate di ordine m sono continue per T, allora f è m volte continuamente differenziabile anche per T.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal lemma 3 per induzione su m.

Lemma 4. Siano F uno spazio localmente convesso, E un suo sottospazio vettoriale quasi-completo e f un'applicazione dell'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ in E, che risulti m volte continuamente differenziabile come applicazione in F. Allora f è m volte continuamente differenziabile in E.

La dimostrazione è analoga a quella del lemma 2, poiché i valori in F delle derivate di f appartengono alle chiusure di sottoinsiemi limitati di E.

Lemma 5. Sia f un'applicazione di U in E scalarmente differenziabile con continuità. Allora f è continua persino per la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi fortemente limitati di E'.

La dimostrazione si semplifica ricorrendo alla nozione di integrale debole, di cui occorrono qui soltanto le proprietà elementari. Si ha

$$f(t+h) - f(t) = \int_t^{t+h} f'(s)\, ds$$

(si integra la funzione continua f' a valori in E'' debole). Se ne ricava che, per h sufficientemente piccolo,

$$f(t+h) - f(t) \in hK,$$

dove K è l'inviluppo convesso debolmente chiuso dell'insieme K_0 immagine, mediante f', di un intervallo compatto fissato, di centro t e contenuto in U. L'insieme K_0 è debolmente compatto, quindi K è debolmente limitato. Pertanto $A = K \cap E$ è un sottoinsieme limitato di E e si ha

$$f(t+h) - f(t) \in hA.$$

Ne segue che $f(t+h) - f(t)$ tende a zero per la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi fortemente limitati di E'. Abbiamo supposto $U \subset \mathbb{R}$ per semplicità di notazione, ma questa ipotesi non è essenziale. Si osservi che anche il lemma 3 si potrebbe dimostrare con questo metodo di integrazione.

Proposizione 15. Siano U un aperto di $\mathbb{R}^n$, E uno spazio localmente convesso quasi-completo e f un'applicazione di U in E. Affinché f sia m volte continuamente differenziabile è necessario e sufficiente che lo sia scalarmente e che le sue derivate parziali di ordine m (che esistono in E'' per i lemmi 1 e 2) siano continue per la topologia naturale di E'', ossia la convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'.

Esplicitamente, queste condizioni significano che le $f_{x'}$ sono m volte continuamente differenziabili e che, quando x' percorre un sottoinsieme equicontinuo di E', le loro derivate di ordine m percorrono un insieme equicontinuo di funzioni su U. In questa formulazione basta considerare le componenti scalari $f_{x'}$.

Dimostrazione. Nelle ipotesi indicate f è m volte continuamente differenziabile in E'' debole (lemmi 1 e 2), dunque anche per la topologia naturale di E'' (lemma 3), e quindi nello stesso E (lemma 4).

Corollario 1. Se E è quasi-completo e $f\colon U \to E$ è scalarmente m volte continuamente differenziabile, allora f è $m-1$ volte continuamente differenziabile.

Infatti, per il lemma 5, le derivate di ordine $m-1$ di f a valori in E'' debole sono continue per la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi di E' limitati per la topologia forte di E' associata alla dualità (E', E''). A maggior ragione sono continue per la topologia della convergenza uniforme sui dischi equicontinui debolmente compatti di E', che sono completi e limitati per la topologia forte su E' associata a (E', E''). Questa

topologia di convergenza uniforme è la topologia naturale di E''. Il corollario segue dunque dalla proposizione 15. Se ne deduce il corollario seguente.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso quasi-completo. Per ogni applicazione f di un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ in E si ha che f è di classe C^∞ se e soltanto se lo è scalarmente.

Proposizione 16. Siano E uno spazio localmente convesso completo e U un aperto di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $\mathcal{E}^{(m)}(U, E)$ delle funzioni m volte continuamente differenziabili di U in E, munito della topologia naturale (convergenza uniforme sui compatti di f e delle sue derivate di ordine $\leq m$), si identifica con lo spazio delle applicazioni lineari debolmente continue di E' in $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ che trasformano i sottoinsiemi equicontinui in sottoinsiemi relativamente compatti di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$. Su questo spazio di applicazioni si prende la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'.

Sia $f \in \mathcal{E}^{(m)}(U, E)$. Allora f definisce un'applicazione lineare $x' \mapsto f_{x'}$ di E' in $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, debolmente continua per la proposizione 14 del § 7. Mostriamo che trasforma un insieme equicontinuo A di E' in un insieme relativamente compatto di $\mathcal{E}^{(m)}(U)$. Per la proposizione 18 del capitolo 1, § 10, basta mostrare che le derivate di ordine m delle $f_{x'}$, con $x' \in A$, costituiscono un insieme equicontinuo di funzioni su U. Ciò esprime appunto la continuità delle derivate di ordine m di f a valori in E. Viceversa, data un'applicazione lineare debolmente continua u di E' in $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ che trasformi gli insiemi equicontinui in insiemi relativamente compatti, ne ricaviamo un'applicazione f di U in E tale che $\langle f(t), x' \rangle = (ux')(t)$ per $t \in U$, $x' \in E'$. Essa soddisfa le condizioni della proposizione 15 e appartiene quindi a $\mathcal{E}^{(m)}(U, E)$. Infine si verifica immediatamente che la topologia di $\mathcal{E}^{(m)}(U, E)$ corrisponde alla topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'. Nello stesso ragionamento si può prendere $m = +\infty$ e, per il corollario 2 della proposizione 15, omettere la condizione di compattezza. Si ottiene così il seguente corollario.

Corollario. Se E è uno spazio localmente convesso completo, $\mathcal{E}(U, E)$ si identifica con lo spazio delle applicazioni lineari debolmente continue di E' in $\mathcal{E}(U)$, munito della topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'.

È anche il corollario della proposizione 14, tenuto conto del corollario 2 della proposizione 15.

Capitolo 4 Studio di alcune classi particolari di spazi

Parte I Limiti induttivi e spazi $(\mathcal{LF})$

1 Generalità

Definizione 1. Siano E uno spazio vettoriale, (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi e, per ogni i, u_i un'applicazione lineare di E_i in E. Si chiama *topologia limite induttivo* degli E_i (mediante le u_i) la più fine delle topologie localmente convesse su E per le quali le u_i sono continue. Munito di questa topologia, E si chiama *limite induttivo* degli E_i (mediante le u_i).

L'esistenza di una tale topologia è immediata. Una topologia localmente convessa T su E rende continue le u_i se e soltanto se, per ogni intorno discoidale V di zero per T, gli $u_i^{-1}(V)$ sono intorni di zero negli E_i. La famiglia di tutti i dischi assorbenti di E con questa proprietà costituisce evidentemente un sistema di intorni discoidali di zero per una topologia localmente convessa su E, la più fine tra quelle considerate. Abbiamo così dimostrato la prima parte della proposizione seguente.

Proposizione 1. Sia E il limite induttivo degli E_i mediante le u_i.
1) Un disco assorbente V in E è un intorno di zero se e soltanto se, per ogni i, $u_i^{-1}(V)$ è un intorno di zero in E_i.
2) Se gli $u_i(E_i)$ generano E, si ottiene un sistema fondamentale di intorni di zero prendendo gli inviluppi convessi

$$\Gamma\Big(\bigcup_i u_i(V_i)\Big),$$

dove, per ogni i, V_i percorre un sistema fondamentale assegnato di intorni di zero in E_i.

La seconda parte è conseguenza immediata della prima. Si osservi che in 1), se gli $u_i(E_i)$ generano E, è superfluo supporre a priori che V sia assorbente, poiché lo è automaticamente.

Corollario 1. Un limite induttivo di spazi bornologici (rispettivamente tonnelé, quasi-tonnelé) è bornologico (rispettivamente tonnelé, quasi-tonnelé).

Infatti, se V è un disco bornivoro di E (rispettivamente chiuso e assorbente, chiuso e bornivoro), esso è anche equilibrato e gli $u_i^{-1}(V)$ sono evidentemente anch'essi bornivori (rispettivamente chiusi e assorbenti, chiusi e bornivori). Per l'ipotesi sugli E_i sono quindi intorni di zero. Ne segue che anche V è un intorno di zero, come si voleva.

Molto spesso l'insieme degli indici I, finora sottinteso, è ordinato e filtrante crescente e, per $i \leq j$, si dà un'applicazione lineare continua u_{ij} di E_i in E_j tale che $u_{ik} = u_{jk}u_{ij}$ per $i \leq j \leq k$ e $u_i = u_j u_{ij}$ per $i \leq j$.

Si verifica immediatamente che la topologia limite induttivo su E resta la stessa se si sostituisce I con un suo sottoinsieme cofinale I'. Il caso generale si può ricondurre a quello appena considerato. Infatti, per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$, poniamo

$$E_J = \prod_{i \in J} E_i$$

e indichiamo con u_J l'applicazione lineare di E_J in E che coincide con u_i su ciascun E_i. Questa applicazione è evidentemente continua quando E è munito della topologia limite induttivo degli E_i. Ne segue che quest'ultima coincide con la topologia limite induttivo degli E_J mediante le u_J. La famiglia (E_J) forma evidentemente un sistema transitivo del tipo considerato sopra. Si osservi inoltre che la topologia limite induttivo su E resta la

stessa se si sostituisce ciascuno spazio E_i con il suo quoziente per il nucleo di u_i. Ci si riduce così al caso in cui le u_i sono iniettive e gli E_i si identificano quindi con sottospazi vettoriali di E dotati di topologie localmente convesse proprie T_i. Quando gli E_i formano un sistema transitivo, si vede che, dopo il passaggio ai quozienti, si ottengono sottospazi E_i di E tali che per $i \leq j$ si ha $E_i \subset E_j$ e l'inclusione di E_i in E_j è continua per le topologie assegnate. Molto spesso l'unione degli $u_i(E_i)$ genera E (quindi, se gli E_i formano una famiglia transitiva, tale unione coincide con E).

Si osservi la proprietà di transitività che segue dalla definizione. Se ciascun E_i è a sua volta limite induttivo di $(E_{i,\alpha})_{\alpha \in A}$ mediante le $u_{i,\alpha}$, allora E è anche limite induttivo degli $E_{i,\alpha}$, per $\alpha \in A$, $i \in I$, mediante le $u_i \circ u_{i,\alpha}$.

Proposizione 2. Sia E il limite induttivo di una famiglia (E_i) di spazi localmente convessi mediante le u_i e si supponga che gli $u_i(E_i)$ generino E. Sia F uno spazio localmente convesso qualsiasi.
1) Un'applicazione lineare v di E in F è continua se e soltanto se, per ogni i, $v \circ u_i$ è continua. Più in generale, un insieme M di applicazioni lineari di E in F è equicontinuo se e soltanto se, per ogni i, l'insieme $M \circ u_i$, formato dalle $v \circ u_i$ al variare di v in M, è un insieme equicontinuo di applicazioni di E_i in F.
2) Per ogni i sia $\mathfrak{S}_i$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E_i, e sia $\mathfrak{S}$ l'unione delle famiglie $u_i(\mathfrak{S}_i)$ di sottoinsiemi limitati di E. La $\mathfrak{S}$-topologia sullo spazio delle applicazioni lineari di E in F è la meno fine delle topologie per cui sono continue le applicazioni $v \mapsto v \circ u_i$, quando lo spazio delle applicazioni lineari di E_i in F è munito della $\mathfrak{S}_i$-topologia. In particolare, un insieme M di applicazioni lineari di E in F è limitato per la $\mathfrak{S}$-topologia se e soltanto se, per ogni i, l'insieme $M \circ u_i$ è limitato per la $\mathfrak{S}_i$-topologia.

Dimostrazione. La 2) è immediata (per l'asserzione relativa alla topologia si possono considerare uno spazio di arrivo e applicazioni qualsiasi, poiché non intervengono le strutture vettoriali né la topologia di E). Per la 1) si osservi che l'equicontinuità di M significa che per ogni intorno discoidale V di zero in F l'insieme $M^{-1}(V) = \bigcap_{v \in M} v^{-1}(V)$ è un intorno di zero in E. Trattandosi di un disco, ciò significa, per la proposizione 1, che per ogni i l'insieme $u_i^{-1}(M^{-1}(V))$ è un intorno di zero in E_i. Ora, posto $M_i = M \circ u_i$, quest'insieme è precisamente $M_i^{-1}(V)$. Per ciascun i la condizione richiesta è quindi che $M_i^{-1}(V)$ sia un intorno di zero in E_i per ogni intorno discoidale V di zero in F, ossia che M_i sia equicontinuo.

A proposito degli spazi limiti induttivi si pongono alcune questioni che presentano spesso serie difficoltà e ricevono frequentemente risposta negativa anche per il limite induttivo di una successione di spazi di Banach.
1) Se gli E_i sono completi, E è completo?
2) Ogni sottoinsieme limitato (rispettivamente compatto, debolmente compatto) di E proviene da un sottoinsieme limitato (rispettivamente compatto, debolmente compatto) di uno degli E_i? In questa domanda possiamo supporre che gli E_i formino già un sistema transitivo. In particolare, se gli E_i sono riflessivi (o spazi di Montel), E è riflessivo (o uno spazio di Montel)? Per una risposta affermativa basterebbe sapere che E è di Hausdorff e che ogni sottoinsieme limitato di E proviene da un sottoinsieme limitato di un E_i.

Si osservi che, anche se tutti gli E_i sono di Hausdorff, E può non esserlo (si veda il § 4, esercizio 2). In pratica ci si accerta che E sia di Hausdorff trovando su E una topologia localmente convessa di Hausdorff per cui le u_i siano continue. Osserviamo che in pratica le difficoltà incontrate per i limiti induttivi sono «inverse» a quelle che si incontrano per i limiti proiettivi (la topologia meno fine per la quale ...). In questi ultimi è quasi sempre facile mostrare che lo spazio è completo, stabilire se i suoi insiemi limitati siano

debolmente compatti o compatti (il lettore ricorderà gli enunciati corrispondenti) e, in particolare, riconoscere se si tratti di uno spazio riflessivo o di Montel. È invece difficile riconoscere se lo spazio sia bornologico o tonnelé, e per gli insiemi equicontinui di forme lineari non si dispone di un criterio altrettanto buono quanto quello della proposizione 2, e così via.

2 Esempi

In tutti questi esempi gli E_i formano in modo naturale un sistema transitivo e l'unione degli $u_i(E_i)$ è E. Negli esempi c), d), e), f) si verifica immediatamente, mediante l'osservazione generale del § 1, che lo spazio ottenuto è di Hausdorff.

a) Siano E uno spazio localmente convesso e F un suo sottospazio vettoriale. Allora E/F è il limite induttivo di E mediante l'applicazione canonica di E su E/F.

b) Uno spazio localmente convesso E è bornologico se e soltanto se è limite induttivo di spazi normati. La sufficienza segue dal corollario della proposizione 1, poiché uno spazio normato è bornologico per il teorema 3 del capitolo 3, § 4. La necessità segue verificando immediatamente che E è bornologico se e soltanto se la sua topologia è il limite induttivo di quelle degli spazi E_A, dove A percorre i dischi chiusi e limitati di E, mediante le inclusioni di questi spazi in E. (Se inoltre E è di Hausdorff e quasi-completo, gli E_A sono completi, quindi E è bornologico se e soltanto se è limite induttivo di una famiglia di spazi di Banach.)

c) Siano E e F spazi $(\mathcal{F})$ e sia $\Gamma(E,F)$ lo spazio delle applicazioni lineari compatte di E in F. Per ogni intorno discoidale V di zero sia E_V lo spazio normato associato alla seminorma funzionale di Minkowski di V. Vi è un'iniezione lineare naturale di $\Gamma(E_V,F)$ in $\Gamma(E,F)$, e quest'ultimo è l'unione delle immagini di tali spazi. Si munisca $\Gamma(E_V,F)$ della topologia della convergenza uniforme sui limitati, per la quale esso è un sottospazio chiuso di $L_b(E_V,F)$ (capitolo 3, § 1, proposizione 2: le applicazioni lineari compatte di uno spazio seminormato in F sono quelle che trasformano la palla unitaria in un sottoinsieme relativamente compatto di F). Poiché $L_b(E_V,F)$ è evidentemente uno spazio $(\mathcal{F})$, anche $\Gamma(E_V,F)$ lo è, e abbiamo così la topologia appropriata su tale spazio. Si può allora munire $\Gamma(E,F)$ della topologia limite induttivo degli spazi $\Gamma(E_V,F)$ di tipo $(\mathcal{F})$. Questa topologia resta la stessa se V percorre soltanto un sistema fondamentale di intorni discoidali di zero, per esempio una successione fondamentale (V_n) di intorni. Lo spazio delle applicazioni lineari compatte di uno spazio $(\mathcal{F})$ in un altro si presenta dunque come limite induttivo di una successione di spazi di tipo $(\mathcal{F})$. Una costruzione analoga vale per lo spazio delle applicazioni lineari limitate di E in F.

d) Sia M uno spazio localmente compatto e sia $\mathcal{K}(M)$ lo spazio delle funzioni numeriche continue a supporto compatto su M. Per ogni compatto $K \subset M$ indichiamo con $\mathcal{K}_K(M)$ lo spazio delle funzioni con supporto contenuto in K, munito della topologia della norma uniforme (cioè della convergenza uniforme). Esso è così uno spazio di Banach. Lo spazio $\mathcal{K}(M)$ è l'unione di questi sottospazi e lo si può munire della topologia limite induttivo. Se M è numerabile all'infinito, si può scegliere una successione crescente cofinale (K_n) di compatti e $\mathcal{K}(M)$ è allora limite induttivo di una successione di spazi di Banach.

e) Si procede allo stesso modo per lo spazio $\mathcal{D}(U)$ delle funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$. Questo spazio è limite induttivo di una successione di sottospazi di tipo $(\mathcal{F})$.

f) Sia dapprima U un aperto di $\mathbb{C}^n$.[35] Consideriamo lo spazio $H(U)$ delle funzioni olomorfe

[35] In apertura dell'esempio l'edizione inglese stampa $\mathbb{R}^n$. Il seguito considera intorni aperti in $\mathbb{C}^n$ e funzioni olomorfe.

su U. Esso è un sottospazio vettoriale chiuso dello spazio $C(U)$ delle funzioni complesse continue su U (teorema di Weierstrass), munito della topologia indotta, per la quale è uno spazio $(\mathcal{F})$. Per un sottoinsieme A di $\mathbb{C}^n$, sia $H(A)$ l'insieme delle classi di equivalenza di funzioni olomorfe definite in un intorno aperto di A, dove due funzioni sono equivalenti se coincidono in un intorno di A. L'insieme $H(A)$ ha un'ovvia struttura vettoriale e, se $B \supset A$, si ha un'applicazione lineare naturale $\phi_{B,A}$ di $H(B)$ in $H(A)$ (la restrizione). Per A aperto si ritrova lo spazio già definito. Si può allora munire $H(A)$ della topologia limite induttivo degli $H(U)$ corrispondenti agli intorni aperti U di A, mediante le applicazioni lineari $\phi_{U,A}$. Basta che U percorra un sistema fondamentale di intorni di A. In particolare, se A è compatto si può scegliere una successione fondamentale (U_n) di intorni aperti di A, quindi $H(A)$ si presenta come limite induttivo di una successione di spazi $(\mathcal{F})$.

3 Limiti induttivi stretti

Definizione 2. Si dice che E è il *limite induttivo stretto* di una famiglia (E_i) di spazi localmente convessi se gli E_i formano una famiglia filtrante crescente di sottospazi vettoriali di E la cui unione è E, ciascun E_i è munito di una topologia localmente convessa di Hausdorff e, per $E_i \subset E_j$, lo spazio E_i è un sottospazio vettoriale topologico chiuso di E_j (in particolare, la sua topologia è indotta da quella di E_j). È questo il caso degli esempi d) ed e) del § 2.

Non sappiamo ancora se in questo caso le domande poste alla fine del § 1 abbiano risposta affermativa (si veda più avanti l'esercizio 7). Vedremo che la risposta è affermativa nel caso più importante, quello in cui l'insieme degli indici I è numerabile. Le osservazioni del § 1 mostrano che in tal caso si può supporre che gli E_i costituiscano una successione crescente di sottospazi vettoriali di E, di unione E, muniti di topologie di Hausdorff tali che E_i sia chiuso in E_{i+1} e la sua topologia sia indotta da quella di E_{i+1}.

Proposizione 3. Sia E il limite induttivo stretto di una successione crescente di sottospazi E_i. Allora gli E_i sono chiusi in E e la topologia che E induce su ciascun E_i è quella assegnata (in particolare E è di Hausdorff). I sottoinsiemi limitati di E sono quelli contenuti e limitati in uno degli spazi E_i. Lo spazio E è completo se e soltanto se tutti gli E_i sono completi.

La dimostrazione si fonda sul lemma seguente.

Lemma. Siano F uno spazio localmente convesso, G un suo sottospazio vettoriale chiuso, V un disco aperto in G e $x \in F \setminus G$. Esiste un disco aperto W in F tale che $x \notin W$ e $W \cap G = V$.

Sia W_0 un disco aperto in F, abbastanza piccolo perché $x + W_0$ non incontri G e perché $W_0 \cap G \subset V$. Il lettore verifichi che $W = \Gamma(W_0 \cup V)$ soddisfa le condizioni richieste.[36]

Per mostrare che E induce su E_i la topologia assegnata, occorre provare che per ogni disco aperto V_i di E_i esiste un intorno discoidale V di zero in E tale che $V \cap E_i = V_i$. Per il lemma si costruisce per induzione una successione di dischi $V_{i+1}, \ldots, V_j, \ldots$, dove V_j è un disco aperto in E_j la cui intersezione con E_{j-1} è V_{j-1}. Allora $V = \bigcup_{j \geq i} V_j$ è l'intorno cercato.

Mostriamo ora che E_i è chiuso in E. Per ogni $x \in E \setminus E_i$ cerchiamo una forma lineare continua su E che si annulli su E_i e sia diversa da zero in x. Si ha $x \in E_j$ per qualche j e, poiché E_i è chiuso in E_j, esiste una forma lineare continua su E_j nulla su E_i e diversa da

[36] L'edizione inglese stampa $W_0 \cap F \subset V$ e $\Gamma(W_0 \cap V)$. La restrizione è a G e l'inviluppo convesso deve contenere sia W_0 sia V, come richiede l'enunciato.

zero in x. Poiché E_j è un sottospazio vettoriale topologico di E, questa forma si prolunga in una forma lineare continua su tutto E, che ha le proprietà richieste.

Quanto all'asserzione sui limitati, dobbiamo mostrare che, se A è limitato in E, si ha $A \subset E_i$ per qualche i. Altrimenti potremmo costruire per induzione una successione strettamente crescente di indici (i_n) e una successione (x_n) in E con

$$x_n \in (A \cap E_{i_n}) \setminus E_{i_{n-1}}.$$

Per il lemma esiste allora una successione di dischi aperti V_n in E_{i_n} tali che

$$V_{n-1} = V_n \cap E_{i_{n-1}}, \qquad x_n \notin nV_n.$$

L'unione V dei V_n è un intorno di zero in E che induce V_n su E_{i_n}, e si ha $x_n \notin nV$ per ogni n. Dunque la successione (x_n) non può essere limitata, e neppure A.

Se E è completo, lo sono anche i suoi sottospazi chiusi E_i. Viceversa, supponiamo completi gli E_i e mostriamo che E è completo. Per il teorema 10 del capitolo 2, § 14, occorre mostrare che ogni forma lineare x su E' le cui restrizioni ai sottoinsiemi equicontinui siano debolmente continue è già debolmente continua su E'. Anzitutto x si annulla sull'ortogonale E_i^0 per qualche i. Altrimenti per ogni i esisterebbe $x_i' \in E_i^0$ con $\langle x, x_i' \rangle = 1$. La successione degli x_i' sarebbe equicontinua (proposizione 1) e convergerebbe debolmente a zero senza che $\langle x, x_i' \rangle$ tenda a zero, il che è assurdo. Pertanto x si annulla su uno spazio E_i^0 e proviene quindi da una forma lineare y sul quoziente E'/E_i^0, che si identifica con il duale E_i' di E_i. Le restrizioni di y ai sottoinsiemi equicontinui di E_i' sono debolmente continue. Infatti, denotata con ϕ l'applicazione canonica di E' su E_i', ogni sottoinsieme equicontinuo di E_i' è contenuto nell'immagine $\phi(A)$ di un sottoinsieme equicontinuo A di E' (capitolo 2, § 15, proposizione 20) che si può supporre debolmente compatto. Ora, la restrizione di y a $\phi(A)$ debole è continua se e soltanto se $y \circ \phi = x$ è continua su A debole, come appunto avviene. Poiché E_i è completo, concludiamo che y è debolmente continua e che lo è anche $x = y \circ \phi$.

4 Somme dirette

Definizione 3. Sia (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi. Si chiama *somma diretta topologica* degli E_i la somma diretta algebrica $E = \sum_i E_i$, munita della topologia limite induttivo dei sottospazi E_i, ciascuno con la propria topologia.

Quando l'insieme degli indici è finito, si ottiene la topologia prodotto. La costruzione dei limiti induttivi generali si riconduce a quella delle somme dirette topologiche e dei quozienti mediante la proposizione seguente.

Proposizione 4. Sia E uno spazio localmente convesso, limite induttivo di una famiglia (E_i) di spazi localmente convessi mediante applicazioni lineari u_i, e si supponga che l'unione degli $u_i(E_i)$ generi E. Allora E è isomorfo a un quoziente della somma diretta topologica degli E_i.

Sia F quest'ultimo spazio e sia u l'applicazione lineare di F in E che coincide con u_i su E_i. Essa applica F su tutto E e definisce dunque una biiezione lineare di un quoziente di F su E. La topologia quoziente su E è la topologia limite induttivo di F mediante u (§ 2, esempio a)). Per la transitività dei limiti induttivi (§ 1), essa coincide quindi con la topologia limite induttivo degli E_i mediante le restrizioni u_i di u agli E_i. Di qui la conclusione.

Proposizione 5. Sia E la somma diretta topologica di una famiglia $(E_i)_{i\in I}$ di spazi localmente convessi di Hausdorff. Gli E_i sono chiusi in E e la topologia indotta su di essi è quella assegnata. Più generalmente, per ogni $J \subset I$, la somma diretta topologica E_J degli E_i con $i \in J$ è un sottospazio vettoriale topologico chiuso di E. I sottoinsiemi limitati di E sono quelli contenuti e limitati nella somma diretta di un numero finito di fattori E_i. Lo spazio E è completo se e soltanto se gli E_i sono completi.

A priori la topologia di somma diretta su E_J è più fine della topologia indotta da E. D'altra parte la proiezione naturale di E su E_J è un'applicazione lineare continua di E in E_J, poiché sono continue le sue restrizioni agli E_i, $i \in I$. Pertanto E_J è un sottospazio vettoriale topologico chiuso di E. Sia A un sottoinsieme limitato di E. Se A non fosse contenuto in alcun E_J con J finito, si potrebbero costruire per induzione una successione crescente $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ di sottoinsiemi finiti di I e una successione $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ di punti di A tali che

$$x_n \in E_{J_{n+1}} \setminus E_{J_n}.$$

Sia J l'unione dei J_n. Si verifica che E_J è il limite induttivo stretto degli E_{J_n}. Ma allora $A \cap E_J$ sarebbe un sottoinsieme limitato di E_J che non è contenuto in alcuno degli E_{J_n}, in contraddizione con la proposizione 3. Se E è completo, gli E_i sono completi in quanto sottospazi chiusi di E. Per il viceversa ci occorre dapprima la proposizione seguente.

Proposizione 6. Il duale della somma diretta topologica $\sum_i E_i$ si identifica con il prodotto $\prod_i E'_i$ dei duali degli E_i. I suoi sottoinsiemi equicontinui sono quelli contenuti in un prodotto $\prod_i A_i$, dove per ogni i l'insieme A_i è equicontinuo in E'_i.

È una conseguenza immediata della proposizione 2, punto 1).

Corollario. Per ogni i sia $\mathfrak{S}_i$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E_i, e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia di sottoinsiemi limitati di E ottenuta riunendo le $\mathfrak{S}_i$. Su $E' = \prod_i E'_i$ la $\mathfrak{S}$-topologia coincide con la topologia prodotto quando ciascun E'_i è munito della $\mathfrak{S}_i$-topologia. In particolare, la topologia debole (rispettivamente forte) su E' è il prodotto delle topologie deboli (rispettivamente forti) degli E'_i.

L'asserzione generale è un caso particolare della proposizione 2, punto 2). I casi particolari seguono osservando che si può sostituire $\mathfrak{S}$ con la famiglia degli inviluppi convessi delle unioni finite di elementi di $\mathfrak{S}$ e applicando poi la caratterizzazione dei limitati di E data nella proposizione 5.

Possiamo ora mostrare che, se gli E_i sono completi, anche E è completo. Occorre cioè provare che ogni forma lineare x su $E' = \prod_i E'_i$ le cui restrizioni ai sottoinsiemi equicontinui siano debolmente continue è debolmente continua (capitolo 2, § 14, teorema 10). Sia x_i la restrizione di x a E'_i. Le sue restrizioni ai sottoinsiemi equicontinui di E'_i, considerato come duale di E_i, sono evidentemente debolmente continue. Poiché E_i è completo, si ha dunque $x_i \in E_i$. Mostriamo che tutti gli x_i, salvo un numero finito, sono nulli. In caso contrario esisterebbero una successione infinita di indici distinti $i_1, \ldots, i_n, \ldots$ ed elementi $x'_{i_n} \in E'_{i_n}$ tali che

$$\langle x, x'_{i_n}\rangle = \langle x_{i_n}, x'_{i_n}\rangle = 1.$$

È immediato che (x'_{i_n}) è una successione equicontinua che tende debolmente a zero in E'. Ciò è assurdo, poiché allora $\langle x, x'_{i_n}\rangle$ dovrebbe tendere a zero. Sia X l'elemento di E che ha per componenti gli x_i. Resta da mostrare che $x = X$. Le due forme coincidono sui sottospazi E'_i di $\prod_i E'_i$ e le loro restrizioni agli insiemi equicontinui sono debolmente continue. Basta dunque mostrare che ogni

$$x' = (x'_i) \in \prod_i E'_i$$

appartiene alla chiusura debole di un sottoinsieme equicontinuo di $\prod_i E'_i$ contenuto in $\sum_i E'_i$. Ora, l'insieme delle proiezioni x'_J di x' sulle somme dirette finite E'_J corrispondenti ai sottoinsiemi finiti J di I è evidentemente equicontinuo, e x' è il limite debole degli x'_J secondo il filtro delle sezioni finali dell'insieme dei sottoinsiemi finiti di I ordinato per inclusione. Di qui la conclusione.

L'enunciato seguente è il duale della proposizione 6.

Proposizione 7. Sia (E_i) una famiglia di spazi localmente convessi. Per ogni i sia $\mathfrak{S}_i$ una famiglia di dischi limitati di E_i, e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\prod_i E_i$ della forma $\prod_i A_i$, con $A_i \in \mathfrak{S}_i$ per ogni i. Sul duale $\sum_i E'_i$ del prodotto vettoriale topologico $\prod_i E_i$ (capitolo 2, § 15, proposizione 22), la $\mathfrak{S}$-topologia coincide con la topologia di somma diretta delle $\mathfrak{S}_i$-topologie sugli E'_i.

Ciò segue immediatamente dalla formula seguente, valida per ogni famiglia di dischi $A_i \subset E_i$, la cui verifica è lasciata al lettore:

$$\Big(\prod_i A_i\Big)^0 = \Gamma\Big(\bigcup_i A_i^0\Big).$$

Dalla caratterizzazione dei sottoinsiemi limitati di $\prod_i E_i$ si ricava il seguente corollario.

Corollario. Il duale forte di $\prod_i E_i$ si identifica con la somma diretta topologica dei duali forti degli E_i.

Esercizio 1. Si generalizzino la proposizione 6 e il suo corollario allo spazio delle applicazioni lineari continue di una somma diretta topologica in uno spazio localmente convesso. Si generalizzino anche la proposizione 7 e la proposizione 22 del capitolo 2 allo spazio delle applicazioni lineari continue di un prodotto vettoriale topologico di spazi localmente convessi in uno spazio localmente convesso seminormato F (in particolare, in uno spazio di Banach). Si mostri che il risultato ottenuto è falso per uno spazio localmente convesso F qualsiasi (si prenda $F = E$).

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Banach separabile di dimensione infinita. Sia (H_n) una successione crescente di sottospazi vettoriali di dimensione finita la cui unione N sia densa in H. Si ponga $E_n = H/H_n$, $E = H/N$, e sia u_n l'applicazione naturale di E_n su E. Si mostri che la topologia limite induttivo della successione di spazi di Banach E_n mediante le u_n è la topologia meno fine su E (ossia ogni aperto non vuoto coincide con E). Sia F un supplementare algebrico di N e sia F_n lo spazio F munito della norma immagine inversa della norma di E_n mediante l'applicazione naturale di F in E_n. Si mostri che anche su F la topologia limite induttivo degli F_n mediante le applicazioni identiche è la topologia meno fine. (Si mostri che ogni forma lineare continua su E o su F è nulla.)

Esercizio 3. Sia E uno spazio vettoriale e sia (E_i) una successione crescente di sottospazi vettoriali di E, muniti di topologie localmente convesse di Hausdorff tali che per ogni i l'inclusione di E_i in E_{i+1} sia debolmente compatta (capitolo 2, § 18, definizione 14). Si mostri che E, munito della topologia limite induttivo degli E_i, è di Hausdorff e si può anche considerare come limite induttivo di un'analoga successione di spazi di Banach.

Esercizio 4 (G. Köthe). Per ogni n sia (a_{ij}^n) la successione doppia definita da $a_{ij}^n = j^n$ per $i \leq n$ e $a_{ij}^n = i^n$ per $i > n$.[37] Si ponga

$$c_0 = c_0(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \qquad \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

dove $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali. Sia $a^n c_0$ (rispettivamente $a^n \ell^\infty$) lo spazio dei prodotti $a^n x$ con $x \in c_0$ (rispettivamente $x \in \ell^\infty$), munito della topologia normata che si deduce per trasporto di struttura da quella di c_0 (rispettivamente di ℓ^∞).
a) Per ogni successione doppia x e ogni sottoinsieme J di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si denoti con x_J la successione doppia che coincide con x su J ed è nulla sul complementare. Sia E (rispettivamente F) l'unione degli $a^n c_0$ (rispettivamente degli $a^n \ell^\infty$) munita della topologia limite induttivo. Si mostri che per ogni $x \in F$ la famiglia degli x_J, dove J percorre i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ordinati per inclusione, è di Cauchy in E e converge a x in F.
b) Se ne deduca che E non è completo, nemmeno per le successioni (si osservi che la successione doppia con tutte le coordinate uguali a 1 appartiene a F, ma non a E).

Esercizio 5. Sia E uno spazio localmente convesso limite induttivo stretto di una successione crescente di sottospazi E_n.
a) Se $\mathfrak{S}$ (rispettivamente $\mathfrak{S}_n$) è la famiglia dei sottoinsiemi equicontinui di E' (rispettivamente E'_n), si mostri che per ogni disco $\mathfrak{S}$-assorbente U in E' (capitolo 2, § 3, definizione 1) esiste un n tale che $U \supset E_n^0$. Allora l'insieme U_n degli $x' \in E'_n$ la cui immagine inversa in E' è contenuta in U è un disco $\mathfrak{S}_n$-assorbente.
b) Se ne deduca che, se gli E_n sono quasi-tonnelé e i loro duali forti sono bornologici, allora E è quasi-tonnelé e il suo duale forte è bornologico.
c) Sia E uno spazio localmente convesso quasi-tonnelé. Si mostri che, se E' forte è quasi-tonnelé, esso è anche tonnelé (quindi nelle condizioni di b) E' forte è anche tonnelé).

Esercizio 6. Dall'esercizio 4 e dalla proposizione 4 si deduca che nella somma diretta L di una successione di spazi isomorfi a c_0 esiste un sottospazio vettoriale chiuso H tale che L/H non sia completo (sebbene L sia completo per la proposizione 5). Si mostri che l'asserzione resta vera sostituendo ℓ^1 a c_0 (si usi il fatto che c_0 è isomorfo a un quoziente di ℓ^1, capitolo 1, § 14, esercizio 1).

Esercizio 7. Sia $E = \prod_i E_i$ il prodotto vettoriale topologico di una famiglia di spazi localmente convessi E_i.
a) Si mostri che i sottoinsiemi debolmente (rispettivamente fortemente) limitati di $E' = \sum_i E'_i$ sono quelli contenuti nella somma di un numero finito di sottoinsiemi debolmente (rispettivamente fortemente) limitati dei fattori E'_i.
b) Se ne deduca che E è tonnelé (rispettivamente quasi-tonnelé) se e soltanto se lo sono gli E_i.

Esercizio 8. Sia $E = \sum_i E_i$ la somma diretta topologica di una famiglia di spazi localmente convessi E_i. Lo spazio E è bornologico (rispettivamente tonnelé, quasi-tonnelé, riflessivo, di tipo $(\mathcal{M})$) se e soltanto se gli E_i sono bornologici (rispettivamente tonnelé, quasi-tonnelé, riflessivi, di tipo $(\mathcal{M})$).

[37] Nella prima formula dell'edizione inglese gli indici a sinistra sono stampati nell'ordine ji. Si segue l'ordine ij della definizione della successione.

5 Spazi $(\mathcal{LF})$

Definizione 4. Uno spazio $(\mathcal{LF})$ è uno spazio localmente convesso di Hausdorff E che sia limite induttivo di una successione (E_i) di spazi $(\mathcal{F})$ mediante applicazioni lineari u_i tali che gli $u_i(E_i)$ generino E.

Le considerazioni del § 1 mostrano che possiamo supporre che gli E_i formino una successione crescente di sottospazi vettoriali di E, muniti di topologie T_i che ne fanno spazi $(\mathcal{F})$, che l'inclusione di E_i in E_{i+1} sia continua e che E sia l'unione degli E_i. Una tale successione si chiama *successione di definizione* dello spazio $(\mathcal{LF})$. Gli esempi più importanti del § 2 sono spazi $(\mathcal{LF})$: gli esempi c) ed e), l'esempio d) quando M è numerabile all'infinito e l'esempio f) quando A è aperto o compatto. Uno spazio $(\mathcal{F})$ è evidentemente di tipo $(\mathcal{LF})$. Per la transitività dei limiti induttivi, uno spazio di Hausdorff E che sia limite induttivo di una successione di spazi $(\mathcal{LF})$ mediante applicazioni lineari tali che l'unione delle immagini generi E è ancora uno spazio $(\mathcal{LF})$. In particolare, il quoziente di uno spazio $(\mathcal{LF})$ per un sottospazio vettoriale chiuso è uno spazio $(\mathcal{LF})$. Si osservi con attenzione che un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio $(\mathcal{LF})$, o persino della somma diretta topologica di una successione di spazi di Hilbert, può non essere di tipo $(\mathcal{LF})$. Gli spazi $(\mathcal{LF})$ sono bornologici e tonnelé (proposizione 1, corollario), ma possono essere incompleti persino nel caso di limiti induttivi di spazi di Banach (esempio di Köthe, § 4, esercizio 4). Le proprietà più specifiche degli spazi $(\mathcal{LF})$ seguono dal prossimo teorema, nel quale non interviene la convessità locale.

Teorema 1. Sia E uno spazio vettoriale munito di una topologia di Hausdorff. Siano (E_i) una successione di spazi vettoriali topologici completi e metrizzabili e, per ciascun i, u_i un'applicazione lineare continua di E_i in E. Sia u un'applicazione lineare continua di uno spazio vettoriale topologico completo e metrizzabile F in E, tale che $u(F) \subset \bigcup_i u_i(E_i)$. Esiste allora un indice i tale che $u(F) \subset u_i(E_i)$ e, se u_i è biiettiva sulla propria immagine, si può scrivere $u = u_i \circ v$, dove v è un'applicazione lineare continua di F in E_i.

Dimostrazione. Sia H_i il sottospazio chiuso di $F \times E_i$ costituito dalle coppie (x, y) tali che $ux = u_i y$. Sia $F_i = p_i(H_i) \subset F$, dove p_i è la proiezione di $F \times E_i$ su F. Evidentemente F_i è l'insieme degli $x \in F$ tali che $ux \in u_i(E_i)$. Per ipotesi $F = \bigcup_i F_i$ e, poiché F è uno spazio di Baire, almeno uno degli F_i non è magro.[38] Per il teorema di Banach sugli omomorfismi (capitolo 1, § 14, teorema 9, corollario 3) ne segue che p_i applica H_i su tutto F, ossia $F_i = F$ e $u(F) \subset u_i(E_i)$.

Se u_i è biiettiva sulla sua immagine, evidentemente $u = u_i \circ v$, dove v è un'applicazione lineare di F in E_i. Essa è continua per il teorema del grafico chiuso (capitolo 1, § 14, teorema 10, corollario), poiché è continua per la topologia immagine inversa su E_i della topologia di E mediante u_i, la quale è meno fine della topologia assegnata e ancora di Hausdorff.

Corollario 1. Siano E uno spazio $(\mathcal{LF})$, (E_i) una sua successione di definizione e u un'applicazione lineare continua di uno spazio F di tipo $(\mathcal{F})$ in E. Esiste allora un indice i tale che u sia un'applicazione lineare continua di F in E_i, munito della sua topologia assegnata di spazio $(\mathcal{F})$.

È un caso particolare immediato del teorema 1. Applicandolo al caso $F = E_A$, spazio normato definito da un disco limitato di E, otteniamo il corollario seguente.

[38] L'edizione inglese stampa «is meagre». L'argomento di Baire dà «non è magro», che è l'ipotesi necessaria nel passo seguente.

Corollario 2. Siano E uno spazio $(\mathcal{LF})$, (E_i) una sua successione di definizione e A un disco limitato di E tale che E_A sia completo (per esempio, un disco limitato e completo). Allora A è contenuto e limitato in uno degli E_i.

In particolare, se E è quasi-completo, i sottoinsiemi limitati di E provengono da sottoinsiemi limitati degli E_i (il viceversa è falso, come mostra lo spazio E dell'esercizio 4 precedente).

Corollario 3. Sia E uno spazio vettoriale. Siano (E_i) e (F_i) due successioni di spazi $(\mathcal{F})$ e, per ogni i, siano $u_i\colon E_i \to E$ e $v_i\colon F_i \to E$ applicazioni lineari. Supponiamo che le immagini degli E_i generino E, che lo stesso valga per le immagini degli F_i e che esista su E una topologia di Hausdorff per la quale tutte le u_i e le v_i siano continue. Su E la topologia limite induttivo degli E_i mediante le u_i coincide allora con la topologia limite induttivo degli F_i mediante le v_i.

Infatti, ci si può ridurre al caso in cui entrambe le famiglie siano successioni di definizione. Per il teorema 1 ogni E_i è contenuto in qualche F_j, con inclusione continua $E_i \to F_j$, e viceversa. Di qui il risultato. Vediamo dunque che, in pratica, su uno spazio vettoriale non può esservi più di una topologia $(\mathcal{LF})$ ragionevole.

Mediante il teorema 1 si possono generalizzare il teorema degli omomorfismi e il teorema del grafico chiuso. A tale scopo introduciamo la nozione di *spazio strettamente bornologico*. Si tratta di uno spazio localmente convesso di Hausdorff che è limite induttivo di una famiglia, di cardinalità arbitraria, di spazi di Banach. Ciò equivale a dire che ogni disco $\mathfrak{S}$-assorbente di E è un intorno di zero, dove $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei dischi limitati A di E per i quali E_A è completo (cfr. § 2, esempio b)). Per uno spazio di Hausdorff quasi-completo le proprietà di essere bornologico e di essere strettamente bornologico coincidono (§ 2, esempio b)).

In particolare, uno spazio $(\mathcal{F})$ è strettamente bornologico poiché è bornologico (capitolo 3, § 4, teorema 3). È immediato, per la transitività dei limiti induttivi, che ogni limite induttivo di spazi strettamente bornologici è strettamente bornologico. In particolare lo è ogni spazio $(\mathcal{LF})$. Abbiamo dunque il teorema seguente.

Teorema 2. Siano E uno spazio localmente convesso strettamente bornologico e F uno spazio localmente convesso di Hausdorff che sia unione delle immagini di una successione di spazi E_i di tipo $(\mathcal{F})$ mediante applicazioni lineari continue u_i (per esempio, E e F di tipo $(\mathcal{LF})$).
1) Ogni applicazione lineare continua di F su E è un omomorfismo.
2) Sia u un'applicazione lineare di E in F. Per la continuità di u basta che il suo grafico sia chiuso. Basta anzi che non esista in E una successione (x_i) tendente a zero per la quale (ux_i) tenda a un limite diverso da zero.

Dimostrazione. 1) Possiamo supporre u biiettiva, sostituendo F con $F/\ker u$. Mostriamo che è continua l'applicazione identica di E, munito della topologia assegnata, in E_T, ossia E munito della topologia limite induttivo T degli E_i mediante le $v_i = u \circ u_i$. Poiché E è strettamente bornologico, ciò significa che, per ogni spazio di Banach H e ogni applicazione lineare continua w di H in E, l'applicazione w è continua anche da H in E_T (§ 1, proposizione 2). Ma si può evidentemente supporre che l'unione delle immagini degli E_i in E sia E e che le v_i siano biiettive sulle rispettive immagini. La conclusione segue allora dal teorema 1.
2) Per verificare la continuità di u ci si riduce al caso in cui E sia uno spazio di Banach. Sia $H \subset E \times F$ il grafico di u e si ponga

$$H_i = H \cap (E \times E_i),$$

supponendo che gli E_i siano sottospazi di F la cui unione è F. L'ipotesi più debole del punto 2) implica che H_i è un sottospazio chiuso di $E \times E_i$, quindi uno spazio $(\mathcal{F})$ per la topologia indotta. Ora H è l'unione degli H_i e soddisfa la condizione imposta allo spazio F nel punto 1). Pertanto la proiezione di H su E è un isomorfismo, ossia la sua inversa è continua. Anche u è dunque continua, poiché si ottiene componendo quest'inversa con la proiezione di H in F.

Sembra possibile indebolire considerevolmente le condizioni su F. La questione meriterebbe di essere studiata.

Esercizio 1. Siano E uno spazio $(\mathcal{F})$ e F uno spazio $(\mathcal{LF})$.
a) Si mostri che, se E è normabile oppure F è quasi-completo, lo spazio delle applicazioni lineari limitate di E in F (capitolo 2, § 18, definizione 14) può essere munito di una topologia $(\mathcal{LF})$ univocamente determinata, più fine della topologia della convergenza uniforme sui limitati (si veda il § 2, esempio c)).
b) Siano E e F come in a), sia G uno spazio $(\mathcal{F})$ e sia u un'applicazione bilineare continua di $E \times G$ in F tale che per ogni $z \in G$ l'applicazione $x \mapsto u(x, z)$ di E in F sia limitata. Si mostri che esiste un intorno fisso V di zero in E tale che, per ogni $z \in G$, l'applicazione $x \mapsto u(x, z)$ trasformi V in un sottoinsieme limitato di F.
c) Si enuncino risultati analoghi ad a) e b) quando F è uno spazio $(\mathcal{F})$ o, più generalmente, un limite induttivo stretto di una successione di spazi $(\mathcal{F})$ e si sostituiscono le applicazioni limitate con le applicazioni compatte.

6 Prodotti e somme dirette di rette

Proposizione 8. Sia E uno spazio localmente convesso. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
1) La topologia di E è la più fine topologia localmente convessa su E (o, equivalentemente, ogni applicazione lineare di E in uno spazio localmente convesso è continua).
2) Ogni forma lineare su E è continua e la topologia di E è una topologia di Mackey (capitolo 2, § 13, definizione 12).
3) E è isomorfo a una somma diretta topologica di rette.

L'equivalenza delle due formulazioni di 1) è immediata. Inoltre la più fine topologia localmente convessa su E coincide con $\tau(E, E^*)$ (teorema di Mackey). D'altra parte, se $(e_i)_{i \in I}$ è una base mediante la quale E si identifica con $k^{(I)}$, dove k è il corpo degli scalari, segue subito dalla definizione che tale topologia è anche quella della somma diretta topologica. Quest'ultima è infatti la più fine topologia localmente convessa su E che renda continue le applicazioni $\lambda \mapsto \lambda e_i$, e ogni topologia localmente convessa su E le rende continue. È così provata l'equivalenza di 1), 2) e 3).

Proposizione 9. Sia E uno spazio vettoriale munito della più fine topologia localmente convessa. Allora E è bornologico e completo (quindi tonnelé) e i suoi sottoinsiemi limitati sono contenuti in sottospazi di dimensione finita. A maggior ragione E è riflessivo, anzi è uno spazio $(\mathcal{M})$ (capitolo 2, § 18, definizione 13). Sul duale $E' = E^*$ di E le topologie debole e forte coincidono ed E^* è isomorfo a un prodotto topologico di rette.

Che E sia bornologico e tonnelé segue dalle definizioni, come pure dalla stabilità di queste proprietà per passaggio al limite induttivo. La completezza di E e la caratterizzazione dei suoi sottoinsiemi limitati seguono dalla proposizione 5 sulle somme dirette. Il fatto che i limitati siano di dimensione finita equivale alla coincidenza delle topologie debole e forte su E'. D'altra parte il duale debole di una somma diretta topologica è il prodotto dei duali deboli dei fattori (proposizione 6), da cui la conclusione.

Proposizione 10. Sia E uno spazio vettoriale munito della più fine topologia localmente convessa. Ogni sottospazio vettoriale V di E è chiuso, la topologia indotta su V è la più fine topologia localmente convessa su V e ogni supplementare algebrico di V è anche un supplementare topologico (dunque V è un fattore diretto topologico di E).

Sia W un supplementare algebrico di V e sia p la corrispondente proiezione di E su V. Essa è continua quando si munisce V della più fine topologia localmente convessa T su V (proposizione 8, punto 1)). A maggior ragione è continua da E in E. Ne segue che V e W sono supplementari topologici e quindi che V è chiuso. Al tempo stesso ciò prova che la topologia indotta da E su V coincide con T, poiché l'identità di V è continua dall'una all'altra topologia in entrambi i sensi.

Corollario. Ogni quoziente di E è di Hausdorff e ha per topologia la più fine topologia localmente convessa.

Infatti, per la proposizione 10 il quoziente è isomorfo a un sottospazio W di E supplementare del sottospazio dato V, onde la conclusione.

Proposizione 11. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
1) La topologia di E è minimale fra le topologie localmente convesse di Hausdorff.
2) $E = E'^*$.
3) E è isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette.

La 1) implica la 2). Infatti, se esistesse $x \in E'^* \setminus E$ e H fosse il nucleo della forma lineare x su E', la topologia $\sigma(E, H)$ sarebbe evidentemente di Hausdorff, strettamente meno fine di $\sigma(E, E')$ (poiché il suo duale H è strettamente contenuto in E') e quindi strettamente meno fine della topologia data.

Viceversa, la 2) implica che ogni sottoinsieme equicontinuo di E' è di dimensione finita, essendo debolmente limitato per $\sigma(E', E'^*)$. Infatti, dai risultati precedenti segue che, per ogni spazio vettoriale F, i sottoinsiemi limitati per $\sigma(F, F^*)$ sono di dimensione finita: per il teorema di Banach–Steinhaus–Mackey essi coincidono con i limitati per la più fine topologia localmente convessa. Pertanto la topologia di E è la topologia debole. Se T è una topologia localmente convessa di Hausdorff meno fine di $\sigma(E, E')$, il suo duale deve essere E' (altrimenti essa non sarebbe di Hausdorff, poiché ogni sottospazio vettoriale di E' è debolmente chiuso). Essa è dunque anche più fine della topologia di partenza e perciò coincide con essa. Ciò prova la minimalità di quest'ultima fra le topologie localmente convesse di Hausdorff su E. Infine sappiamo che E'^*, munito di $\sigma(E'^*, E')$, è isomorfo a un prodotto topologico di rette (proposizione 9) e, viceversa, un tale spazio soddisfa evidentemente la 2).

Proposizione 12. Sia E uno spazio localmente convesso isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette. Allora E è completo, tonnelé e di tipo $(\mathcal{M})$ (quindi riflessivo). Il suo duale forte è isomorfo a una somma diretta topologica di rette, come quelle considerate nella proposizione 9.

È immediato: le proprietà di essere completo, tonnelé o di tipo $(\mathcal{M})$ si conservano per prodotto, e il duale forte di un prodotto vettoriale topologico è la somma diretta topologica dei duali forti. Non sappiamo se lo spazio $\mathbb{R}^I$ sia bornologico (si veda l'esercizio 3).

Proposizione 13. Sia E uno spazio localmente convesso isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette e sia V un suo sottospazio vettoriale chiuso. Allora V ammette un

supplementare topologico e, con la topologia indotta, è isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette.

Consideriamo l'ortogonale V^0 di V in E' forte. Sappiamo (proposizione 10) che esso ammette un supplementare topologico N e che V^0 e N sono isomorfi a somme dirette di rette. Il duale forte E di E' si identifica allora con il prodotto dei duali forti di V^0 e di N, che sono isomorfi a prodotti vettoriali topologici di rette. In questa identificazione V è il duale di N, da cui la conclusione.

Corollario. Anche ogni quoziente di Hausdorff di E è isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette.

Esercizio 1. a) Ogni applicazione lineare continua di uno spazio localmente convesso F in uno spazio E isomorfo a una somma diretta topologica di rette è un omomorfismo su un sottospazio chiuso. Se tale applicazione è iniettiva (rispettivamente suriettiva), ammette un'inversa sinistra (rispettivamente destra) lineare e continua.[39] In particolare, se H è un sottospazio vettoriale di F tale che F/H sia isomorfo a una somma diretta di rette, H ammette un supplementare topologico.
b) Ogni applicazione lineare continua di uno spazio E isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette in uno spazio localmente convesso di Hausdorff F è un omomorfismo su un sottospazio chiuso. Se è iniettiva (rispettivamente suriettiva), ammette un'inversa sinistra (rispettivamente destra) lineare e continua. In particolare, un sottospazio vettoriale H di F isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette ammette un supplementare topologico.

Esercizio 2. Siano E uno spazio localmente convesso isomorfo a una somma diretta topologica di rette e F uno spazio localmente convesso isomorfo a un prodotto vettoriale topologico di rette. Si consideri $H = E \oplus F$. Gli spazi di questo tipo si dicono *linearmente localmente compatti*. Si mostri che ogni sottospazio vettoriale chiuso di H è anch'esso linearmente localmente compatto e ammette un supplementare topologico.

Esercizio 3. Sia I un insieme infinito di indici.
a) Si considerino $\mathbb{R}^I$ e il suo duale $\mathbb{R}^{(I)}$. Si mostri che ogni forma lineare x' su $\mathbb{R}^I$ limitata sui sottoinsiemi limitati si decompone in modo unico come $x' = y' + z'$, dove $y' \in \mathbb{R}^{(I)}$ e z' si annulla su $\mathbb{R}^{(I)} \subset \mathbb{R}^I$.
b) Sia z' una forma lineare su $\mathbb{R}^I$ limitata sui sottoinsiemi limitati e nulla su $\mathbb{R}^{(I)}$. Si mostri che esiste una partizione finita di I in sottoinsiemi J con la seguente proprietà: per ogni decomposizione di J in due insiemi complementari J_1 e J_2, la restrizione di z' ad almeno uno dei due spazi $\mathbb{R}^{J_1}$ e $\mathbb{R}^{J_2}$ è nulla. (Si proceda per assurdo mostrando che altrimenti si potrebbe trovare una successione infinita di elementi $x^{(i)}$ dello spazio considerato, con supporti a due a due disgiunti, sui quali z' non si annulla. Si potrebbe supporre $\langle x^{(i)}, z' \rangle = 1$, il che è assurdo poiché $x^{(i)}$ tende a zero nel senso di Mackey.)
c) Sia z' una forma lineare su $\mathbb{R}^I$, limitata sui sottoinsiemi limitati, nulla su $\mathbb{R}^{(I)}$ e tale che per ogni $J \subset I$ sia nulla la sua restrizione a $\mathbb{R}^J$ oppure a $\mathbb{R}^{I \setminus J}$. Si mostri che, se $z' \neq 0$, gli insiemi $J \subset I$ per cui la restrizione di z' a $\mathbb{R}^J$ è diversa da zero formano un ultrafiltro ϕ tale che l'intersezione di ogni successione di elementi J_i di ϕ appartiene ancora

[39] In a) e b) il testo inglese reca «bijective (or onto)». La distinzione fra inversa sinistra e destra corrisponde qui a iniettività e suriettività.

a ϕ («ultrafiltro di Ulam–Mackey»), e che si ha

$$\langle x, z' \rangle = \lambda \lim_{\phi} x_i \qquad \text{per ogni } x = (x_i) \in \mathbb{R}^I,$$

dove λ è una costante. Si mostri, viceversa, che per ogni ultrafiltro di Ulam–Mackey ϕ su I la formula precedente, con $\lambda = 1$, definisce una forma lineare ε_ϕ su $\mathbb{R}^I$, limitata sui limitati e nulla su $\mathbb{R}^{(I)}$.[40]

d) Si mostri che le forme ε_ϕ così costruite sono linearmente indipendenti e che ogni forma lineare su $\mathbb{R}^I$ limitata sui limitati si scrive in modo unico come somma di un elemento di $\mathbb{R}^{(I)}$ e di una combinazione lineare di forme ε_ϕ.

e) Lo spazio $\mathbb{R}^I$ è bornologico se e soltanto se non esiste alcun ultrafiltro di Ulam–Mackey su I. In tal caso diremo bornologico il cardinale di I. Si mostri che, se esiste un cardinale non bornologico, esiste un minimo cardinale non bornologico K, e allora un cardinale è bornologico se e soltanto se è strettamente minore di K.

f) Si mostri che la somma di una famiglia di cardinali bornologici è un cardinale bornologico se anche il cardinale dell'insieme degli indici è bornologico (si usi il capitolo 3, § 4, esercizio 2). Ulam ha mostrato che, se α è bornologico, anche 2^α è bornologico. Il cardinale K di e), se esiste, è dunque un cardinale limite.

g) Un cardinale C si dice *fortemente inaccessibile* se è maggiore di $\aleph_0$, se non è somma di una famiglia di cardinali strettamente minori indicizzata da un insieme di cardinalità strettamente minore di C e se inoltre $\alpha < C$ implica $2^\alpha < C$ (il che implica che C è un cardinale limite). Il cardinale K di e), se esiste, è fortemente inaccessibile. Non sappiamo se esistano cardinali fortemente inaccessibili e quasi certamente si può aggiungere agli assiomi della teoria degli insiemi la non esistenza di tali cardinali senza incontrare contraddizioni. In un tale sistema di assiomi si avrebbe il teorema: ogni spazio $\mathbb{R}^I$ è bornologico (quindi, per l'esercizio del capitolo 3, § 4 sopra richiamato, ogni prodotto di spazi bornologici è bornologico).

h) Sia z' una forma lineare su $\mathbb{R}^I$ limitata sui sottoinsiemi limitati e sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^I$ di cardinalità bornologica. Si mostri che la restrizione di z' a E è continua. Vale un enunciato analogo per i filtri convergenti su $\mathbb{R}^I$ che ammettono una base di cardinalità bornologica.

In questo ordine di idee si veda anche Bourbaki, *Intégration*, capitolo IV, § 4, esercizio 18.

Parte II Spazi localmente convessi metrizzabili

1 Preliminari

Ricordiamo che uno spazio $(\mathcal{F})$ è uno spazio localmente convesso metrizzabile e completo. Se E è uno spazio localmente convesso metrizzabile e F un suo sottospazio vettoriale chiuso, allora E/F è metrizzabile e, se E è completo, anche E/F è completo (capitolo 1, § 4, proposizione 6). Evidentemente un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio $(\mathcal{F})$ è uno spazio $(\mathcal{F})$, e lo stesso vale per il prodotto vettoriale topologico di una successione di spazi $(\mathcal{F})$.

Uno spazio E di tipo $(\mathcal{F})$ è uno spazio di Baire, e da ciò derivano alcune delle sue proprietà particolari. Esso è quindi tonnelé: se F è uno spazio localmente convesso, ogni sottoinsieme di $L(E, F)$ limitato per la convergenza puntuale è equicontinuo (teorema

[40] Nel seguito sono sottintesi ultrafiltri non principali, come richiede l'annullamento sulle famiglie a supporto finito. Nel secondo spazio che compare nell'ipotesi di c) si legge il complementare di J, in accordo con b).

di Banach–Steinhaus; in realtà la convessità locale è qui inessenziale, cfr. capitolo 1, § 15, teorema 11). Ne segue che, se E e F sono spazi $(\mathcal{F})$, ogni applicazione bilineare separatamente continua di $E \times F$ in uno spazio localmente convesso G è continua e ogni insieme di tali applicazioni bilineari limitato per la convergenza puntuale è equicontinuo (capitolo 1, § 15, teorema 12). Fra le proprietà che dipendono dal fatto che gli spazi metrizzabili considerati sono completi, segnaliamo il teorema del grafico chiuso. In pratica esso significa che tutte le applicazioni lineari di uno spazio $(\mathcal{F})$ in uno spazio $(\mathcal{F})$ che incontreremo sono continue. Segnaliamo anche il teorema degli omomorfismi, che ne è un'utile variante (capitolo 1, § 14).

Uno spazio localmente convesso metrizzabile E, completo o meno, è bornologico. In particolare la sua topologia è la topologia di Mackey associata $\tau(E, E')$ (capitolo 3, § 4, teorema 3). Ne segue, in particolare, che per ogni spazio localmente convesso F le applicazioni lineari continue di E in F coincidono con quelle debolmente continue. Analogamente, gli omomorfismi coincidono con gli omomorfismi deboli (capitolo 2, § 16, proposizione 28, corollario 2, e proposizione 29, corollario 3; si usa il fatto che un sottospazio immagine $u(F)$ di E, essendo metrizzabile, ha la topologia di Mackey).

Segnaliamo infine la seguente proposizione di topologia generale, applicabile in particolare ai quozienti di spazi $(\mathcal{F})$.

Proposizione 1. Sia E uno spazio metrico completo e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza separata e aperta in E. Ogni sottoinsieme compatto di $E/\mathcal{R}$ è contenuto nell'immagine canonica di un sottoinsieme compatto di E. Ogni successione convergente in $E/\mathcal{R}$ è l'immagine canonica di una successione convergente in E.

Dimostrazione. Entrambe le asserzioni seguono dal corollario seguente.

Corollario 1. Nelle ipotesi della proposizione 1 siano K uno spazio compatto totalmente discontinuo e u un'applicazione continua di K in $E/\mathcal{R}$. Esiste allora un'applicazione continua v di K in E tale che

$$u = \phi \circ v,$$

dove ϕ è l'applicazione canonica di E su $E/\mathcal{R}$.

La prima parte della proposizione segue dal fatto che ogni compatto A di $E/\mathcal{R}$ è immagine di un compatto totalmente discontinuo K mediante un'applicazione continua di K su A. Si può prendere per K la compattificazione di Čech–Stone di A considerato come spazio discreto oppure, poiché A è metrizzabile, l'insieme ternario di Cantor. Analogamente si ottiene la seconda parte considerando una successione convergente in $E/\mathcal{R}$ come immagine, mediante un'applicazione continua di K in $E/\mathcal{R}$, del compatto K costituito dai punti $0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Dimostrazione del corollario 1. Costruiamo per induzione una successione di partizioni finite $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n, \ldots$ di K in insiemi simultaneamente aperti e chiusi, ciascuna più fine della precedente. A ogni $U_{n,i} \in \mathcal{V}_n$ associamo una palla aperta $B_{n,i}$ in E, di raggio $\leq 1/n$, in modo che $u(U_{n,i}) \subset \phi(B_{n,i})$ e che $U_{n+1,j} \subset U_{n,i}$ implichi $B_{n+1,j} \subset B_{n,i}$. La costruzione è immediata. Supponiamola eseguita fino al rango n. Per ciascun $U_{n,i} \in \mathcal{V}_n$ consideriamo il ricoprimento formato dalle immagini inverse mediante u, ristrette a $U_{n,i}$, delle immagini mediante ϕ delle palle aperte di raggio $< 1/n$ contenute in $B_{n,i}$. Poiché ϕ è aperta, si ottiene un ricoprimento aperto del compatto totalmente discontinuo $U_{n,i}$. Esiste quindi un ricoprimento finito più fine costituito da una partizione di $U_{n,i}$ in insiemi aperti e chiusi $U_{n+1,j}$. Si può associare a ciascuno di essi una palla aperta $B_{n+1,j}$ di raggio $\leq 1/(n+1)$, contenuta in $B_{n,i}$, tale che $u(U_{n+1,j}) \subset \phi(B_{n+1,j})$ (basta usare sin dall'inizio palle di

questo raggio). Procedendo così per ogni $U_{n,i} \in \mathcal{V}_n$, otteniamo il ricoprimento cercato $\mathcal{V}_{n+1} = (U_{n+1,j})$ e la corrispondenza $U_{n+1,j} \mapsto B_{n+1,j}$.

Per $x \in K$ sia ora $U_n(x)$ l'elemento di $\mathcal{V}_n$ che contiene x e sia $B_n(x)$ la palla corrispondente in E. Si ottiene una successione decrescente di palle i cui raggi tendono a zero, quindi, per la completezza di E, un punto limite $v(x)$. Poiché $u(x) \in \phi(B_n(x))$ per ogni n, concludiamo che $\phi(v(x)) = u(x)$. D'altra parte l'oscillazione di v in ciascun elemento di $\mathcal{V}_n$ è al più $2/n$, dunque v è continua.

Si osservi che, quando $E/\mathcal{R}$ è il quoziente di uno spazio $(\mathcal{F})$ per un sottospazio vettoriale chiuso F, la proposizione 1 è un caso particolare di un risultato più forte (capitolo 1, § 14, esercizio 2).

Esercizio. Sia E uno spazio metrizzabile e compatto e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza separata in E tale che ogni successione convergente in $E/\mathcal{R}$ sia immagine di una successione convergente in E. Si mostri che $\mathcal{R}$ è aperta.

2 Sottoinsiemi limitati di uno spazio localmente convesso metrizzabile

Teorema 1. Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile.
1) Per ogni successione (A_i) di sottoinsiemi limitati di E esiste una successione (λ_i) di numeri positivi tale che $\bigcup_i \lambda_i A_i$ sia limitato. Esiste inoltre un disco chiuso e limitato A in E tale che gli A_i siano sottoinsiemi limitati dello spazio normato E_A.
2) Sia A un sottoinsieme limitato di E. Esiste un disco chiuso e limitato B di E contenente A tale che la topologia e la struttura uniforme indotte su A dallo spazio normato E_B coincidano con quelle indotte da E.

È immediato che le due asserzioni di 1) sono equivalenti. Sia (p_n) una successione fondamentale di seminorme su E. Posto

$$M_i^n = \sup_{x \in A_i} p_n(x),$$

per $x \in \bigcup_i \lambda_i A_i$ avremo $p_n(x) \leq \sup_i \lambda_i M_i^n$. Basta dunque scegliere gli λ_i in modo che per ogni n si abbia

$$\sup_i \lambda_i M_i^n < +\infty,$$

o, equivalentemente, in modo che, per ogni n, la successione $(\lambda_i)_i$ sia maggiorata da un multiplo di $(1/M_i^n)_i$. Basta infatti scegliere, per $i \geq 1$,

$$\lambda_i = \inf\left(\frac{1}{M_i^1}, \ldots, \frac{1}{M_i^i}\right).$$

Qui si possono maggiorare preventivamente tutti gli M_i^n con $\max(1, M_i^n)$ per evitare denominatori nulli.[41]

Per dimostrare la seconda parte possiamo supporre che A sia un disco. Basta allora che E_B induca su A lo stesso sistema di intorni di zero indotto da E (capitolo 2, § 14, lemma), ossia che per ogni $\lambda > 0$ esista un indice n tale che $A \cap V_n \subset \lambda B$, dove (V_n) è una successione fondamentale di intorni di zero in E. Ora $A \subset \bigcap_i \lambda_i V_i$ per un'opportuna successione di numeri $\lambda_i > 0$. Sia (μ_i) una successione di numeri positivi tale che $\lambda_i/\mu_i \to 0$. Affermiamo che $B = \bigcap_i \mu_i V_i$ soddisfa la condizione richiesta (si prendano per V_i dischi chiusi e $\mu_i \geq \lambda_i$). Infatti si ha $A \subset \lambda\mu_i V_i$ per i abbastanza grande, cioè per $\lambda_i < \lambda\mu_i$. Scegliendo ora n in

[41] Nell'ultimo denominatore l'edizione inglese stampa M_i^n. La scelta diagonale prende, per ciascun i, i primi i termini.

modo che V_n sia contenuto nell'intersezione degli $\lambda\mu_i V_i$ per i rimanenti indici i, si ha $A \cap V_n \subset \lambda\mu_i V_i$ per ogni i, cioè $A \cap V_n \subset \lambda B$. Le due parti del teorema danno il corollario seguente.

Corollario 1. Siano E uno spazio localmente convesso metrizzabile e (A_i) una successione di sottoinsiemi limitati di E. Esiste un disco chiuso e limitato A in E tale che gli A_i siano limitati nello spazio normato E_A e quest'ultimo induca su ciascuno di essi la stessa topologia e la stessa struttura uniforme indotte da E.

Corollario 2. Sia A un sottoinsieme precompatto (rispettivamente compatto, debolmente compatto e convesso) dello spazio localmente convesso metrizzabile E. Esiste un disco chiuso e limitato B in E tale che A sia anche un sottoinsieme precompatto (rispettivamente compatto, debolmente compatto) dello spazio normato E_B.

Per A precompatto o compatto ciò segue immediatamente dal punto 2) del teorema 1. Per la compattezza debole si usa il fatto che, per un sottoinsieme convesso A di uno spazio localmente convesso F (qui $F = E_B$), la compattezza debole dipende soltanto dalla topologia indotta su A da F, munito della sua topologia originaria (capitolo 2, § 9, esercizio 2). Vedremo nel capitolo 5 che, in uno spazio localmente convesso completo, l'inviluppo convesso chiuso di un insieme debolmente compatto è debolmente compatto. Se dunque E è uno spazio $(\mathcal{F})$, nel corollario precedente si può eliminare l'ipotesi di convessità di A.

Corollario 3. Sia f un'applicazione continua di uno spazio localmente compatto e numerabile all'infinito M in uno spazio localmente convesso metrizzabile E. Esiste un disco chiuso e limitato A in E tale che f sia continua come applicazione di M nello spazio normato E_A.

L'osservazione che segue il corollario 2 mostra che il corollario 3 resta valido sostituendo la continuità con la continuità debole.

Esercizio 1. Si dimostri l'analogo del corollario 3 per le funzioni continue che si annullano all'infinito (si può omettere l'ipotesi che M sia numerabile all'infinito). Che cosa si ottiene quando M è l'insieme dei numeri naturali con la topologia discreta?

Esercizio 2. Sia M uno spazio localmente compatto munito di una misura positiva μ e si supponga che M sia unione di una successione di insiemi integrabili. Sia f un'applicazione misurabile di M in uno spazio localmente convesso metrizzabile E. Si mostri che f coincide quasi ovunque con un'applicazione misurabile di M in uno spazio normato E_A, dove A è un disco chiuso e limitato di E.

Esercizio 3. Sia $\lambda^n = (\lambda_i^n)_i$ una successione di successioni di numeri positivi. Siano E uno spazio localmente convesso metrizzabile e (x_i) una successione in E tale che per ogni $x' \in E'$ e per ogni n la successione $(\lambda_i^n \langle x_i, x' \rangle)_i$ sia limitata. Si mostri che esiste un disco chiuso e limitato A in E tale che gli x_i appartengano allo spazio normato E_A e che, denotando con $\|x_i\|_A$ le loro norme, la successione $(\lambda_i^n \|x_i\|_A)_i$ sia limitata per ogni n.

Esercizio 4. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff. Si mostri che le condizioni seguenti sono equivalenti.
a) Per ogni applicazione lineare compatta di uno spazio localmente convesso F in E, la trasposta è un'applicazione lineare compatta di E' forte in F' forte.
b) Vale a) quando F è uno spazio di Banach.

c) Per ogni disco compatto A in E esiste un disco chiuso e limitato $B \supset A$ tale che A sia un sottoinsieme compatto dello spazio normato E_B. Ciò significa persino che la trasposta di un'applicazione lineare compatta di uno spazio localmente convesso F in E è un'applicazione compatta di E'_c (E' con la topologia della convergenza sui precompatti) in F' forte. Si applichi il risultato al caso in cui E sia metrizzabile.

3 La topologia T_c sul duale

Sia E uno spazio localmente convesso. Sui sottoinsiemi equicontinui di E' (che sono anche uniformemente equicontinui), la topologia T_c della convergenza uniforme sui precompatti coincide con la topologia debole. Pertanto T_c è a priori meno fine della più fine topologia T_0 su E' (localmente convessa o meno) che induca la topologia debole sui sottoinsiemi equicontinui (capitolo 0, § 1). Vedremo che esse coincidono se E è metrizzabile. Insieme al teorema di Hahn–Banach, a quello di Banach–Steinhaus e al teorema degli omomorfismi o del grafico chiuso, questo è uno dei risultati più profondi della teoria, benché lo si utilizzi meno frequentemente degli altri.

Teorema 2 (Banach–Dieudonné). Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Sul duale E' la topologia della convergenza sui precompatti coincide con la più fine topologia che induce sui sottoinsiemi equicontinui la topologia debole.

Diamo anzitutto i corollari. Il teorema equivale al seguente enunciato.

Corollario 1. Un sottoinsieme H di E' è chiuso per T_c se e soltanto se, per ogni sottoinsieme equicontinuo debolmente chiuso A di E', l'intersezione $A \cap H$ è debolmente chiusa. Equivalentemente, un sottoinsieme U di E' è aperto per T_c se e soltanto se, per ogni sottoinsieme equicontinuo A di E', l'intersezione $U \cap A$ è relativamente aperta in A per la topologia debole.

O ancora, in forma equivalente:

Corollario 2. Sia u un'applicazione di E' in uno spazio topologico F. Essa è continua per la topologia T_c su E' se e soltanto se la sua restrizione a ogni sottoinsieme equicontinuo di E' è debolmente continua.

I corollari 1 e 2 sono utili, ad esempio, quando E è uno spazio metrizzabile di tipo $(\mathcal{M})$, poiché allora T_c coincide con la topologia forte, che ha interesse di per sé. Nel caso generale l'applicazione più importante è la seguente.

Corollario 3. Siano E uno spazio $(\mathcal{F})$ e H un sottoinsieme convesso di E'. L'insieme H è debolmente chiuso se e soltanto se la sua intersezione con ogni sottoinsieme equicontinuo debolmente chiuso di E' è debolmente chiusa.

Poiché il duale di E' munito di T_c è E (teorema di Mackey), per un sottoinsieme convesso H di E' la chiusura per T_c equivale alla chiusura debole. La conclusione segue dal corollario 1.

Mostreremo inoltre che la topologia più fine T_c di cui si è detto coincide con la topologia della convergenza uniforme sulle successioni di E convergenti a zero. Ne risulta il seguente corollario.

Corollario 4. Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Su E' coincidono le topologie della convergenza uniforme sui precompatti, sui compatti e sulle successioni di E tendenti a zero. In altri termini, per ogni sottoinsieme precompatto K di E esiste una

successione (x_i) in E tendente a zero tale che K sia contenuto nell'inviluppo discoidale chiuso degli x_i.

Dimostrazione del teorema 2. Mostreremo che, per ogni insieme $U \subset E'$ aperto per T_0, ossia tale che l'intersezione del suo complementare con ogni sottoinsieme equicontinuo debolmente chiuso di E' sia debolmente chiusa, e per ogni $x' \in U$, esiste un intorno di x' per la convergenza uniforme sulle successioni convergenti a zero contenuto in U. Possiamo evidentemente supporre $x' = 0$. Cerchiamo in E un insieme K costituito dai termini di una successione convergente a zero e tale che $K^0 \subset U$. Sia (V_n) una successione fondamentale decrescente di intorni di zero in E. Costruiamo per induzione una successione $K_0, \dots, K_n, \dots$ di sottoinsiemi finiti di E tali che

$$\begin{cases} K_n \subset V_n & (n \geq 1), \\ (K'_n)^0 \cap (V_{n+1})^0 \subset U & (n \geq 0), \end{cases} \qquad K'_n = \bigcup_{i \leq n} K_i. \tag{1}$$

Allora $K = \bigcup_n K_n$ soddisfa le condizioni richieste, poiché E' è l'unione dei polari dei V_n. La costruzione di K_0 è immediata: basta scegliere un insieme finito il cui polare non incontri $V_1^0 \cap (E' \setminus U)$, il che è possibile poiché quest'ultimo insieme è debolmente chiuso e non contiene zero. Per costruire K_{n+1} occorre trovare un sottoinsieme finito $A = K_{n+1}$ di V_{n+1} tale che $(K'_n \cup A)^0$ non incontri $(V_{n+2})^0 \cap (E' \setminus U)$. Ora quest'ultimo insieme è debolmente compatto e le sue intersezioni con gli insiemi $(K'_n \cup A)^0$ formano una base di filtro di insiemi debolmente chiusi, la cui intersezione è vuota. Un punto dell'intersezione apparterrebbe infatti a

$$(K'_n \cup V_{n+1})^0 = (K'_n)^0 \cap (V_{n+1})^0,$$

che per l'ipotesi induttiva è contenuto in U. Almeno uno degli insiemi

$$(K'_n \cup A)^0 \cap (V_{n+2})^0 \cap (E' \setminus U)$$

è dunque vuoto, e la conclusione segue.

Esercizio 1. Sia E uno spazio localmente convesso. Si considerino le condizioni seguenti.
a) Ogni sottospazio vettoriale di E' le cui intersezioni con i sottoinsiemi equicontinui debolmente chiusi sono debolmente chiuse è debolmente chiuso.
b) Ogni applicazione lineare continua di E su uno spazio localmente convesso tonnelé F è un omomorfismo.
1) Si mostri che a) implica b) e che, se E è tonnelé, b) implica a).[42] Come applicazione, si deduca il teorema degli omomorfismi per gli spazi $(\mathcal{F})$ dal corollario 3 del teorema 2.
2) Si mostri che le proprietà a) e b) si conservano passando al quoziente per un sottospazio vettoriale chiuso. Si mostri che a) implica che E sia completo (e quindi che sia completo ogni suo quoziente per un sottospazio vettoriale chiuso).
3) Se ne deduca che le proprietà a) e b) possono venir meno quando E è la somma diretta topologica di una successione di spazi isomorfi a c_0 o a ℓ^1 (si usi l'esempio della parte I, § 4, esercizio 6).[43] A maggior ragione il teorema 2 può non valere per queste somme dirette.
4) In 1) abbiamo visto che il teorema degli omomorfismi vale per un'applicazione lineare continua di uno spazio di tipo $(\mathcal{F})$ su uno spazio localmente convesso tonnelé. Non vale più se si suppone tonnelé lo spazio di partenza E e di tipo $(\mathcal{F})$ lo spazio di arrivo F.

[42] L'edizione inglese stampa «if F is barrelled» anche nel viceversa. In b) si suppone già tonnelé lo spazio di arrivo. L'ipotesi aggiuntiva per il viceversa riguarda lo spazio di partenza E.

[43] L'originale rinvia all'esercizio 5. Il quoziente incompleto utilizzato qui è costruito nell'esercizio 6.

Sia infatti E uno spazio normato di codimensione 1 nel proprio completamento $\widehat{E}$ (quindi tonnelé, cfr. capitolo 3, § 2, esercizio 7, punto 2)). Sia D una retta supplementare di E in $\widehat{E}$, sia $F = \widehat{E}/D$ e sia u la biiezione lineare continua di E su F indotta dall'applicazione canonica di $\widehat{E}$ su F. L'applicazione u non è un isomorfismo poiché E non è completo.

Esercizio 2. Siano E uno spazio localmente convesso tonnelé e u un'applicazione lineare di E in uno spazio localmente convesso F.
1) Sia H il sottospazio di F' costituito dagli y' tali che $y' \circ u$ sia continua. Si mostri che, se un sottoinsieme debolmente limitato A di F' è contenuto in H, anche la sua chiusura debole è contenuta in H. Se ne deduca che, se F soddisfa la condizione a) dell'esercizio 1 (in particolare se F è uno spazio $(\mathcal{F})$), H è un sottospazio vettoriale debolmente chiuso di F'.
2) Si deduca da 1) che, se F è uno spazio $(\mathcal{F})$, u è continua qualora si possa trovare in F' un sottoinsieme totale formato da elementi y' tali che $y' \circ u$ sia continua. (Basta verificare che u è debolmente continua.)[44]
3) Sia u un'applicazione lineare di uno spazio localmente convesso tonnelé E in uno spazio F di tipo $(\mathcal{F})$. Si mostri che u è continua se si può trovare su F una topologia localmente convessa di Hausdorff meno fine di quella assegnata, per la quale u sia continua (conseguenza immediata di 2)).
4) L'applicazione u è continua se ogni $y' \in F'$ appartiene alla chiusura debole di un sottoinsieme debolmente limitato di F' formato da elementi y' tali che $y' \circ u$ sia continua.

Esercizio 3. Siano E uno spazio $(\mathcal{F})$, $(x_i)_{i\in I}$ una famiglia di elementi di E e H un sottoinsieme totale di E'. Si supponga che per ogni famiglia $\lambda = (\lambda_i)$ di scalari uguali a $+1$ o -1 esista un elemento $x = u(\lambda)$ in E, evidentemente unico, tale che

$$\langle x, x' \rangle = \sum_i \lambda_i \langle x_i, x' \rangle \qquad (x' \in H).$$

Si mostri che u si prolunga in un'applicazione lineare continua di $\ell^\infty(I)$ in E. (Sia F il sottospazio di $\ell^\infty(I)$ formato dalle combinazioni lineari delle famiglie $\lambda = (\lambda_i)$. Si estenda u per linearità da F in E e se ne provi la continuità mediante l'esercizio 2 e il fatto che F è tonnelé, stabilito nel capitolo 3, § 3, esercizio 7.) Che cosa si può dire della sommabilità della famiglia $(x_i)_{i\in I}$? (Cfr. capitolo 2, § 18, esercizio 3.)

Teorema 3. Siano E, F spazi $(\mathcal{F})$ e u un'applicazione lineare continua di E in F. Le condizioni seguenti sono equivalenti.
1) u è un omomorfismo.
2) u è un omomorfismo debole.
3) $u(E)$ è chiuso.
4) u' è un omomorfismo debole.
5) $u'(F')$ è debolmente chiuso.
6) $u'(F')$ è fortemente chiuso.
Affinché valgano queste condizioni è sufficiente che valga la seguente:
7) u' è un omomorfismo forte.

Quest'ultima condizione è anche necessaria se E e F sono spazi di Banach.

Dimostrazione. La 1) equivale alla 2) perché la topologia di $u(E)$ è quella di Mackey (cfr. § 1). La 1) implica la 3) poiché ogni quoziente separato di E è completo. D'altra

[44] In questo punto l'edizione inglese indica E come spazio $(\mathcal{F})$. Il punto 1) e l'applicazione nel punto 3) si riferiscono a F.

parte, che la 3) implichi la 1) è il teorema degli omomorfismi (capitolo 1, § 14). Inoltre la 3) equivale alla 4), e la 2) alla 5) (capitolo 2, § 16, proposizione 27). Dunque le condizioni da 1) a 5) sono equivalenti e la 5) implica evidentemente la 6). Mostriamo che anche la 6) implica la 5) mediante il risultato più forte che segue.

Lemma. Si supponga che, per ogni disco equicontinuo debolmente chiuso A di E', l'intersezione $u'(F') \cap A$ sia chiusa nello spazio di Banach E'_A. Allora $u'(F')$ è debolmente chiuso (ossia u è un omomorfismo).

Si osservi che l'ipotesi del lemma esprime la chiusura di $u'(F')$ rispetto ai limiti delle successioni convergenti nel senso di Mackey (per traslazione ci si riconduce alla convergenza a zero). Applicando il teorema 2 del presente paragrafo, basta mostrare che per ogni A l'insieme $B = A \cap u'(F')$ è debolmente chiuso. Mostreremo anzi che è debolmente compatto. Poiché B è un disco chiuso dello spazio di Banach E'_A, lo spazio $E'_B = (E'_A)_B$ è di Banach e quindi di Baire. D'altra parte F' è l'unione di una successione (C_n) di dischi debolmente compatti. Allora

$$B_n = A \cap u'(C_n)$$

è un disco di E'_B debolmente compatto in E' e quindi chiuso in E'_B. L'unione degli nB_n è E'_B (si prendano i C_n crescenti). Ne segue che uno dei B_n è un intorno di zero in E'_B. Si avrà allora, moltiplicando se necessario C_n per uno scalare, $B \subset B_n = u'(C_n) \cap A$, e quindi $B = B_n$. Ora B_n è debolmente compatto e così pure B, onde la conclusione. (Questo lemma è dovuto a G. Köthe.)

Le condizioni da 1) a 6) sono dunque equivalenti. Mostriamo ora che la 7) implica la 6). Sia G la chiusura di $u(E)$ e si scriva $u = w \circ v$, dove v è l'applicazione di E in G dedotta da u e w è l'inclusione di G in F. Si ha $u' = v' \circ w'$ e, poiché u' è un omomorfismo forte, lo è anche v'. Infatti, dato un intorno forte U di zero in G', si ha $U = w'(V)$ con $V = (w')^{-1}(U)$ intorno forte di zero in F', essendo w' suriettiva. Allora $v'(U) = u'(V)$ e, poiché per ipotesi $u'(V)$ è un intorno forte di zero in $u'(F')$, anche $v'(U)$ è un intorno forte di zero in $v'(G') = u'(F')$. Dunque v' è un omomorfismo forte. Essendo iniettiva, v' è un isomorfismo forte di G' sulla propria immagine in E'. Poiché G' forte è completo, il sottospazio $v'(G') = u'(F')$ è fortemente completo e quindi fortemente chiuso in E'.

Infine abbiamo visto (capitolo 2, § 17, proposizione 32, corollario 2) che, se E, F sono spazi di Banach, la 1) implica la 7). Ciò termina la dimostrazione del teorema 3. Possiamo ora enunciare il viceversa del risultato appena richiamato.

Corollario 1. Siano E, F spazi di Banach e u un'applicazione lineare continua di E in F. L'applicazione u è un omomorfismo (rispettivamente un omomorfismo metrico) di E in F se e soltanto se u' è un omomorfismo (rispettivamente un omomorfismo metrico) dello spazio di Banach F' nello spazio di Banach E'.

Il caso degli omomorfismi segue dall'equivalenza di 1) e 7) nel teorema 3. Resta da provare che, se u' è un omomorfismo metrico, lo è anche u. Ora u è un omomorfismo e, per la proposizione 32 del capitolo 2, § 17, basta considerare il caso in cui u è un isomorfismo topologico suriettivo. L'asserzione è allora immediata, poiché la norma di uno spazio normato è determinata dalla palla unitaria del suo duale. Si hanno i seguenti casi particolari.

Corollario 2. Siano E, F spazi di Banach e u un'applicazione lineare continua di E in F. L'applicazione u è un isomorfismo (rispettivamente un isomorfismo metrico) sulla sua immagine se e soltanto se u' è un omomorfismo (rispettivamente metrico) su un sottospazio debolmente denso di E'. L'applicazione u è un omomorfismo suriettivo (rispettivamente

un omomorfismo metrico suriettivo) se e soltanto se u' è un isomorfismo (rispettivamente metrico) di F' sulla sua immagine in E'.

Infine, dalla proposizione 1 del § 1 segue, indipendentemente dal teorema 3, il corollario seguente.

Corollario 3. Siano E, F spazi $(\mathcal{F})$ e u un'applicazione lineare continua di E in F. Essa è un omomorfismo se e soltanto se per ogni successione (y_i) in $u(E)$ tendente a zero esiste una successione (x_i) in E tendente a zero tale che $y_i = ux_i$ per ogni i.

Si osservi che, in generale, se u è un omomorfismo di E in F, con E, F di tipo $(\mathcal{F})$, la trasposta u' può non essere un omomorfismo forte, anche se u è un isomorfismo di E in F oppure un omomorfismo di E su F. In altri termini, come già osservato nel capitolo 2, § 15, il duale forte di un sottospazio chiuso di uno spazio E di tipo $(\mathcal{F})$ può non identificarsi con un quoziente del duale forte di E, e il duale forte di un quoziente di E può non identificarsi con un sottospazio del duale forte di E, se si richiede che le identificazioni rispettino le topologie. Ricordiamo tuttavia che, se u è un isomorfismo di uno spazio localmente convesso riflessivo in uno spazio localmente convesso F, la sua trasposta è un omomorfismo forte (capitolo 2, § 15, proposizione 21, punto 2)).

Esercizio 1. Sia u un omomorfismo di uno spazio di Banach E in uno spazio localmente convesso F. Si mostri che u' è un omomorfismo forte.

Esercizio 2. Sia P l'insieme dei multiindici di derivazione in $\mathbb{R}^n$. Si mostri che l'applicazione lineare

$$u\colon f \longmapsto (D^p f(0))_{p\in P}$$

di $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}^P$ è un omomorfismo del primo spazio su tutto il secondo (si mostri che $u'(F')$ è il sottospazio debolmente chiuso di E' formato dalle distribuzioni con supporto contenuto in $\{0\}$). Si mostri che il nucleo di questo omomorfismo non ha supplementare topologico. (Se v fosse un'inversa destra continua di u, si mostri che si potrebbe supporre che tutte le $v(y) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ abbiano supporto in un compatto fisso K. Si concluda per assurdo osservando che lo spazio delle $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ con supporto in K ammette una vera norma continua, mentre $\mathbb{R}^P$ non ne ammette alcuna.)

Parte III Spazi $(\mathcal{DF})$

1 Generalità

Definizione 1. Uno spazio localmente convesso H si chiama spazio $(\mathcal{DF})$ se soddisfa le condizioni seguenti.
1) H ammette una successione fondamentale di sottoinsiemi limitati.
2) Se (U_i) è una successione di intorni di zero chiusi e discoidali la cui intersezione U è bornivora, allora U è un intorno di zero.

Per polarità la condizione 2) equivale alla seguente:
2′) Ogni sottoinsieme limitato M del duale forte H' di H che sia unione di una successione di sottoinsiemi equicontinui è equicontinuo.

La condizione 2) è soddisfatta se H è quasi-tonnelé (in tal caso H è di tipo $(\mathcal{DF})$ appena ammetta una successione fondamentale di limitati). Nel caso generale essa può sostituire l'ipotesi che uno spazio sia quasi-tonnelé. Uno spazio normato soddisfa la condizione 1) ed è quasi-tonnelé, quindi è uno spazio $(\mathcal{DF})$. Altri esempi saranno studiati nel § 4. Per ora il più importante, che giustifica l'introduzione di questi spazi, è dato dal teorema seguente.

Teorema 1. Il duale forte E' di uno spazio localmente convesso metrizzabile E è di tipo $(\mathcal{DF})$.

Infatti i limitati di E' forte sono i suoi sottoinsiemi equicontinui e ne esiste una successione fondamentale, poiché E ammette una successione fondamentale di intorni di zero. Resta da verificare la condizione 2). Osserviamo che i dischi assorbenti debolmente chiusi (polari dei limitati di E) formano un sistema fondamentale di intorni di zero in E'. Occorre trovare un tale disco V contenuto in U. Sia (A_i) una successione fondamentale di dischi limitati di E', che possiamo supporre debolmente compatti. Costruiamo per induzione una successione di intorni di zero discoidali debolmente chiusi V_i e di scalari $\lambda_i > 0$ in modo che, al rango n, valgano

$$\lambda_i A_i \subset \tfrac{1}{2}U, \qquad \lambda_i A_i \subset V_j, \qquad V_i \subset U_i \qquad (i, j \leq n).$$

Basterà porre $V = \bigcap_i V_i$. Mostriamo che l'induzione è possibile. Si può scegliere λ_{n+1} abbastanza piccolo perché

$$\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset V_i \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \lambda_{n+1} A_{n+1} \subset \tfrac{1}{2}U.$$

Allora l'inviluppo discoidale

$$A = \Gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i\Big)$$

è un disco debolmente compatto contenuto in $\frac{1}{2}U$. Sia W un intorno di zero discoidale debolmente chiuso contenuto in $\frac{1}{2}U_{n+1}$. Allora $V_{n+1} = A + W$ è un disco debolmente chiuso, contenuto in $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U_{n+1}$ e quindi in U_{n+1}, che contiene A e dunque gli $\lambda_i A_i$ per $i = 1, \ldots, n+1$.

Proposizione 1. Siano H uno spazio $(\mathcal{DF})$ ed E uno spazio localmente convesso. Ogni sottoinsieme limitato di $L_b(H, E)$ che sia unione di una successione di sottoinsiemi equicontinui è equicontinuo.

È una conseguenza della condizione $2'$) della definizione 1. Infatti un sottoinsieme M di $L_b(H, E)$ è limitato (rispettivamente equicontinuo) se e soltanto se, per ogni sottoinsieme equicontinuo A di E', l'insieme $M'(A)$, unione degli $u'(A)$ al variare di u in M, è un sottoinsieme limitato (rispettivamente equicontinuo) del duale forte di H.

Corollario 1. Ogni successione limitata in $L_b(H, E)$ è equicontinua. Lo è quindi anche ogni sottoinsieme limitato M che ammetta un sottoinsieme numerabile denso (basta che sia denso per la convergenza puntuale).

In particolare si ha il seguente corollario.

Corollario 2. Sia H uno spazio $(\mathcal{DF})$ completo. Sia (u_i) una successione di applicazioni lineari continue di H in E, con E di Hausdorff, convergente puntualmente a un limite $u(x)$. Allora (u_i) è equicontinua, u è lineare e continua e u_i converge a u uniformemente su ogni compatto.

Infatti, poiché H è completo e (u_i) è limitata per la convergenza puntuale, essa è limitata anche per la convergenza uniforme sui limitati e dunque equicontinua per il corollario 1.

Corollario 3. Se H è uno spazio $(\mathcal{DF})$ ed E uno spazio $(\mathcal{F})$, allora $L_b(H, E)$ è uno spazio $(\mathcal{F})$.

Infatti H ammette una successione fondamentale di limitati ed E è metrizzabile, per cui $L_b(H, E)$ è metrizzabile. Per la completezza basta vedere che ogni successione di Cauchy converge. A questo scopo basta verificarne la convergenza puntuale e applicare l'equicontinuità della successione limitata (cfr. corollari 1 e 2; per un risultato più generale e meno immediato si veda anche il § 5, teorema 6, corollario 1). In particolare:

Corollario 4. Il duale forte di uno spazio $(\mathcal{DF})$ è di tipo $(\mathcal{F})$.

Dal teorema 1 segue dunque che il biduale di uno spazio metrizzabile E è uno spazio $(\mathcal{F})$. Infatti, poiché E è quasi-tonnelé, la topologia naturale del suo biduale, quella della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui, coincide con la topologia di duale forte di E' forte.

Esercizio 1. Sia u un'applicazione lineare debolmente continua di uno spazio $(\mathcal{DF})$ H in uno spazio localmente convesso separabile E. Si mostri che u è continua (si proceda per trasposizione, osservando che i sottoinsiemi equicontinui di E' sono debolmente separabili).

Esercizio 2. Sia E uno spazio di Banach riflessivo non separabile e sia H lo spazio E munito della topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati separabili di E'. Si mostri che H è uno spazio $(\mathcal{DF})$ riflessivo la cui topologia è diversa dalla topologia di Mackey.[45] Si mostri che la conclusione dell'esercizio 1 può venir meno se lo spazio di arrivo E non è separabile.

Esercizio 3. Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Si mostri che ogni sottoinsieme limitato e debolmente limitato di E'' è contenuto nella chiusura debole di un sottoinsieme limitato di E. In particolare, ogni sottoinsieme limitato separabile del completamento di E è contenuto nella chiusura di un sottoinsieme limitato di E.

Esercizio 4. Siano E uno spazio localmente convesso metrizzabile e $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E stabile per unioni finite. Si mostri che E', munito della $\mathfrak{S}$-topologia, è uno spazio $(\mathcal{DF})$. Come applicazione, il biduale di uno spazio $(\mathcal{DF})$ H, munito della sua topologia naturale (convergenza uniforme sugli equicontinui), è uno spazio $(\mathcal{DF})$.

2 Applicazioni bilineari sul prodotto di due spazi $(\mathcal{DF})$

Proposizione 2. Siano H uno spazio $(\mathcal{DF})$ e (U_i) una successione di intorni di 0 in H. Esiste un intorno U di 0 assorbito da ciascun U_i (ossia, per ogni i, un opportuno dilatato di U_i contiene U).

Per polarità, ciò significa che, per ogni successione di sottoinsiemi equicontinui A_i di H', esistono scalari $\lambda_i > 0$ tali che $\bigcup_i \lambda_i A_i$ sia equicontinuo. Ora, poiché H' è metrizzabile e gli A_i sono limitati, possiamo scegliere i λ_i in modo che $\bigcup_i \lambda_i A_i$ sia limitato (parte I, § 2, teorema 1). Questo insieme è equicontinuo per la condizione $2'$ della definizione 1.

[45] Qui l'edizione inglese scrive E. La topologia appena definita è quella di H; lo spazio di Banach E ha già la topologia di Mackey.

Corollario 1. Ogni applicazione lineare continua da uno spazio H di tipo $(\mathcal{DF})$ in uno spazio localmente convesso metrizzabile E è limitata (ossia trasforma un opportuno intorno di 0 in un insieme limitato). Ogni insieme equicontinuo M di applicazioni lineari da H in E è equilimitato, ossia esiste un intorno U di 0 in H tale che

$$M(U) = \bigcup_{u \in M} u(U)$$

sia un sottoinsieme limitato di E.

Basta dimostrare la seconda asserzione. Sia (V_n) un sistema fondamentale numerabile di intorni di 0 in E. Per ogni n,

$$M^{-1}(V_n) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(V_n)$$

è un intorno U_n di 0 in H. Se U è un intorno di 0 in H assorbito da tutti gli U_n, allora $M(U)$ è assorbito da tutti i V_n, ossia è limitato. Nello stesso ordine di idee osserviamo quanto segue.

Corollario 2. Siano E uno spazio $(\mathcal{F})$ e H uno spazio $(\mathcal{DF})$. Ogni applicazione lineare continua da E in H è limitata e ogni insieme limitato di applicazioni lineari continue da E in H è equilimitato.

Basta considerare le applicazioni lineari continue da E in H come forme bilineari su $E \times H'$ (prodotto di due spazi $(\mathcal{F})$) e applicare il teorema 12 del capitolo 1, § 15.

Teorema 2. Siano H_1, H_2 spazi $(\mathcal{DF})$, E uno spazio localmente convesso e u un'applicazione bilineare da $H_1 \times H_2$ in E. L'applicazione u è continua se e solo se è ipocontinua (capitolo 3, § 5, definizione). Più in generale, una famiglia M di tali applicazioni bilineari è equicontinua se e solo se è equi-ipocontinua.

La famiglia M è equicontinua (risp. equi-ipocontinua) se e solo se, per ogni sottoinsieme equicontinuo A di E', è tale la famiglia $M'(A)$ delle forme bilineari $\langle u(x,y), z' \rangle$ su $H_1 \times H_2$, al variare di u in M e di z' in A. La verifica è immediata (capitolo 3, § 5, esercizio 1). Siamo dunque ricondotti al caso in cui E è il corpo degli scalari. Possiamo identificare M con una famiglia equicontinua di applicazioni lineari da H_1 nel duale forte H_2' di H_2 (per l'equi-ipocontinuità in H_2). Poiché H_2' è uno spazio $(\mathcal{F})$, esiste un intorno U di 0 in H_1 tale che $M(U)$ sia limitato in H_2' (proposizione 2, corollario 1). Ora H_1 è unione di una successione di insiemi limitati, dunque anche U è unione di una successione di insiemi limitati A_i. Si ha pertanto

$$M(U) = \bigcup_i M(A_i).$$

I sottoinsiemi $M(A_i)$ di H_2' sono equicontinui per l'equi-ipocontinuità in H_1. Quindi $M(U)$, sottoinsieme limitato di H_2' e unione di una successione di sottoinsiemi equicontinui, è equicontinuo. Ciò significa che M è una famiglia equicontinua di forme bilineari.

Corollario 1. Siano H_1, H_2 spazi $(\mathcal{DF})$ tonnelés, E uno spazio localmente convesso e u un'applicazione bilineare separatamente continua da $H_1 \times H_2$ in E. Allora u è continua. Più in generale, ogni famiglia puntualmente limitata M di applicazioni bilineari separatamente continue da $H_1 \times H_2$ in E è equicontinua.

Quando H_1 e H_2 sono tonnelés, l'ipotesi su M implica l'equi-ipocontinuità (capitolo 3, § 5, proposizione 9, corollario 1).

Corollario 2. Siano E_1, E_2 spazi localmente convessi metrizzabili, E uno spazio localmente convesso e u un'applicazione bilineare da $E_1' \times E_2'$ in E, separatamente continua per le topologie deboli. Allora u è continua per il prodotto delle topologie forti. Più in generale, se M è una famiglia di applicazioni bilineari da $E_1' \times E_2'$ in E, separatamente continue per le topologie deboli, e se M è limitata per la convergenza puntuale, allora M è equicontinua per il prodotto delle topologie forti.

Basta considerare il caso in cui E è il corpo degli scalari. L'ipotesi su M implica che M è limitata per la convergenza uniforme sui prodotti di insiemi limitati (i duali E_1' ed E_2' sono fortemente completi). In altri termini, per ogni sottoinsieme limitato A di E_1', $M(A)$ è un sottoinsieme limitato di E_2, quindi un sottoinsieme equicontinuo del duale di E_2' forte. Ciò esprime l'equi-ipocontinuità di M in E_1' forte. Allo stesso modo si ha l'equi-ipocontinuità in E_2' forte. Per il teorema 2, M è dunque equicontinua per il prodotto delle topologie forti (per il teorema 1, E_1' ed E_2' sono spazi $(\mathcal{DF})$).

Proposizione 3. Siano H_1, H_2 spazi $(\mathcal{DF})$, E uno spazio localmente convesso e M un sottoinsieme dello spazio $B_b(H_1, H_2; E)$ delle applicazioni bilineari continue da $H_1 \times H_2$ in E, munito della topologia della convergenza uniforme sui prodotti di insiemi limitati. Se M è limitato ed è unione di una successione di sottoinsiemi equicontinui, allora M è equicontinuo.

Possiamo ancora supporre che E sia il corpo degli scalari. Si identifica M con un insieme limitato in $L_b(H_1, H_2')$, dove H_2' ha la topologia forte. Esso è unione di una successione di sottoinsiemi equicontinui ed è quindi equicontinuo in $L_b(H_1, H_2')$ (proposizione 1). Analogamente M definisce un insieme equicontinuo di applicazioni lineari da H_2 in H_1'. A maggior ragione M è equi-ipocontinuo come insieme di forme bilineari e quindi equicontinuo per il teorema 2. Lasciamo al lettore la formulazione degli enunciati corrispondenti ai corollari della proposizione 1.

Esercizio 1. Estendere i risultati precedenti alle applicazioni multilineari sui prodotti di spazi $(\mathcal{DF})$.

Esercizio 2. Sia E uno spazio localmente convesso che non sia quasi-tonnelé. Mostrare che esistono uno spazio normato F (che si può prendere completo se si suppone completo il duale forte di E) e una forma bilineare separatamente continua su $E \times F$ che non è continua. Si scelga in E' un disco A chiuso e fortemente limitato che non sia equicontinuo e si ponga $F = (E')_A$. Dedurne che nel corollario 1 del teorema 2 non basta supporre tonnelé uno solo dei due spazi H_1, H_2.

Esercizio 3. Uno spazio localmente convesso che sia al tempo stesso metrizzabile e di tipo $(\mathcal{DF})$ è normabile (applicare la proposizione 2, corollario 1).

3 Proprietà di stabilità

Proposizione 4. Siano E uno spazio localmente convesso e F un suo sottospazio vettoriale.

1) Se F è uno spazio $(\mathcal{DF})$, il suo duale forte si identifica con il quoziente del duale forte E' di E per l'ortogonale F^0 di F.

2) Se E è uno spazio $(\mathcal{DF})$, anche E/F è uno spazio $(\mathcal{DF})$ e il suo duale forte si identifica con il sottospazio F^0 del duale forte E' di E.

Per 1) dobbiamo mostrare che l'applicazione naturale

$$F'_b \longrightarrow E'_b/F^0$$

è continua. Ora F'_b è metrizzabile, dunque bornologico, e basta verificare che le successioni convergenti a zero vengono trasformate in successioni limitate. Poiché F è uno spazio $(\mathcal{DF})$, una successione fortemente limitata del suo duale è equicontinua. Essa proviene perciò da una successione equicontinua (a maggior ragione fortemente limitata) di E', la cui immagine in E'_b/F^0 è quindi limitata. Per 2) mostriamo nello stesso modo che l'applicazione naturale da F^0, munito della topologia metrizzabile indotta da E'_b, nel duale forte di E/F trasforma le successioni convergenti a zero in successioni limitate ed è quindi continua, dunque un isomorfismo. Ciò equivale a dire che ogni sottoinsieme limitato di E/F è contenuto nella chiusura dell'immagine canonica di un sottoinsieme limitato di E. Ne segue l'esistenza di una successione fondamentale di limitati in E/F, poiché ne esiste una nello spazio $(\mathcal{DF})$ E. Infine, la seconda condizione che definisce gli spazi $(\mathcal{DF})$ si verifica immediatamente in E/F per il fatto che vale in E.

Corollario 1. Siano E uno spazio localmente convesso e F un suo sottospazio vettoriale di tipo $(\mathcal{DF})$. Ogni sottoinsieme limitato della chiusura di F è contenuto nella chiusura di un sottoinsieme limitato di F.

Possiamo supporre F denso in E. I duali di E e F si identificano allora algebricamente e la proposizione 4, 1), dice che tale identificazione rispetta le topologie. Questo è precisamente il significato del corollario. In particolare:

Corollario 2. Sia F uno spazio $(\mathcal{DF})$. Lo spazio F è completo se e solo se è quasi-completo. In particolare, se F è riflessivo, è completo.

Osserviamo che un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio $(\mathcal{DF})$, anche di tipo $(\mathcal{M})$, non è sempre di tipo $(\mathcal{DF})$. Si verifica invece immediatamente che il prodotto di un numero finito di spazi $(\mathcal{DF})$ è uno spazio $(\mathcal{DF})$. Se E è uno spazio $(\mathcal{DF})$, il suo duale forte E' è uno spazio $(\mathcal{F})$. Il suo biduale, munito della topologia di duale forte di E', è dunque uno spazio $(\mathcal{DF})$ (teorema 1). Anche per la sua topologia «naturale» E'' è uno spazio $(\mathcal{DF})$ (§ 1, esercizio 4). Si ha infine la proposizione seguente.

Proposizione 5. Sia E uno spazio localmente convesso, limite induttivo di una successione di spazi $(\mathcal{DF})$ E_i mediante applicazioni lineari u_i tali che l'unione delle immagini degli E_i generi E. Allora E è uno spazio $(\mathcal{DF})$. La topologia forte del suo duale è la meno fine fra quelle che rendono continue le trasposte u'_i da E' nei duali forti E'_i. I sottoinsiemi limitati di E sono precisamente quelli contenuti nella chiusura della somma di un numero finito di immagini, mediante le u_i, di sottoinsiemi limitati degli E_i.

Le ultime due asserzioni sono equivalenti. Basta verificare la continuità dell'identità da E', munito della topologia meno fine T che rende continue le u'_i a valori negli E'_i forti, in E' forte. Poiché T è metrizzabile, basta verificare che una successione convergente a 0 per T è fortemente limitata. Essa è addirittura equicontinua, poiché la sua immagine mediante ciascuna u'_i è una successione fortemente limitata e quindi equicontinua di E'_i. Abbiamo mostrato al tempo stesso che E ammette una successione fondamentale di sottoinsiemi limitati. Infine, la seconda condizione relativa agli spazi $(\mathcal{DF})$ si verifica immediatamente poiché vale in ciascun E_i. Si potrebbe anche dimostrare la proposizione 5 per le somme dirette topologiche di una successione di spazi $(\mathcal{DF})$ e servirsi della proposizione 4, 2), per passare al caso generale.

Corollario 1. Se gli E_i sono spazi $(\mathcal{DF})$ riflessivi (risp. di tipo $(\mathcal{M})$) ed E è separato, allora E è riflessivo (risp. di tipo $(\mathcal{M})$).

Si verifica che i suoi sottoinsiemi limitati sono relativamente debolmente compatti (risp. relativamente compatti).[46]

Corollario 2. Sia (E_i) una successione di spazi localmente convessi. Per ogni i, siano u_i un'applicazione lineare da E_i in uno spazio vettoriale E e v_i un'applicazione lineare da E_i in E_{i+1}, con $u_i = u_{i+1} \circ v_i$. Supponiamo che E sia l'unione delle immagini degli E_i e muniamolo della topologia di limite induttivo. Se le v_i sono limitate, E è uno spazio $(\mathcal{DF})$ quasi-tonnelé e bornologico. Se le v_i sono debolmente compatte (risp. compatte) ed E è separato, E è riflessivo (risp. di tipo $(\mathcal{M})$), tonnelé e bornologico.

Per ogni i, sia U_i un intorno discato di 0 in E_i la cui immagine mediante v_i sia limitata e sia F_i lo spazio E_i munito della seminorma associata al disco U_i. Si verifica immediatamente che la topologia di E è anche la topologia di limite induttivo degli spazi seminormati F_i mediante le u_i. Pertanto E è uno spazio $(\mathcal{DF})$, quasi-tonnelé e bornologico perché tali sono gli F_i. Inoltre ogni sottoinsieme limitato di E è contenuto nella chiusura di un dilatato di un insieme $u_i(U_i)$ (le somme finite sono superflue poiché si ha già un sistema transitivo). Ora $u_i(U_i) = u_{i+1}(A_{i+1})$, dove $A_{i+1} = v_i(U_i)$. Se le v_i sono compatte (risp. debolmente compatte) ed E è separato, gli $u_{i+1}(A_{i+1})$ sono sottoinsiemi relativamente compatti (risp. relativamente debolmente compatti) di E, che è dunque di tipo $(\mathcal{M})$ (risp. riflessivo). A maggior ragione E è completo (proposizione 4, corollario 2), quindi tonnelé poiché è quasi-tonnelé.

Esercizio 1. Nelle ipotesi del corollario 2 della proposizione 5, con le v_i limitate, mostrare che se gli E_i sono quasi-completi, oppure se le v_i sono debolmente compatte, E è uno spazio $(\mathcal{LF})$ (quindi tonnelé).

Esercizio 2. Sia E uno spazio $(\mathcal{DF})$. Mostrare che il suo completamento è di tipo $(\mathcal{DF})$. Lo spazio E è quasi-tonnelé se e solo se il suo completamento è tonnelé.

Esercizio 3. Mostrare che gli spazi $(\mathcal{DF})$ bornologici sono precisamente i limiti induttivi di successioni di spazi normati le cui immagini generano lo spazio. Uno spazio $(\mathcal{DF})$ completo è bornologico se e solo se è uno spazio $(\mathcal{LF})$.

Esempi. a) Poiché i duali forti degli spazi $(\mathcal{F})$ sono di tipo $(\mathcal{DF})$, gli spazi di distribuzioni $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}_{L^p}$, ecc. (cfr. L. Schwartz, *Théorie des distributions*) sono spazi $(\mathcal{DF})$.

Altri importanti spazi $(\mathcal{DF})$ vengono spesso definiti come limiti induttivi.

b) Sia K un compatto di $\mathbb{C}^n$. Sia $H(K)$ lo spazio dei germi di funzioni olomorfe in un intorno di K, munito della topologia di limite induttivo degli spazi $H(U)$, dove U percorre gli intorni aperti di K (parte I, § 2, esempio f)). Basta che U percorra una successione fondamentale (U_n) di intorni di K. Possiamo supporre U_{n+1} relativamente compatto in U_n. L'applicazione canonica di restrizione v_n da $H(U_n)$ in $H(U_{n+1})$ è allora compatta (teorema di Montel).[47] Valgono dunque le condizioni del corollario 2 della proposizione 5 e $H(K)$ è uno spazio $(\mathcal{DF})$ completo, tonnelé, bornologico e di tipo $(\mathcal{M})$.

c) Sia (ϕ_n) una successione crescente di funzioni continue positive su uno spazio localmente compatto M. Per ogni n, sia E_n lo spazio delle funzioni continue f su M il cui

[46] Nella giustificazione l'edizione inglese inverte l'ordine dei due casi rispetto all'enunciato.

[47] Nell'edizione inglese il dominio e il codominio della restrizione sono scambiati.

valore assoluto è maggiorato da un multiplo di ϕ_n. Lo si munisca della norma naturale che associa a f il più piccolo m tale che $|f| \leq m\phi_n$. Si verifica subito che E_n è uno spazio di Banach. Lo spazio E delle funzioni continue su M maggiorate in valore assoluto da un multiplo di una delle ϕ_n è allora l'unione della successione crescente degli E_n e lo muniamo della corrispondente topologia di limite induttivo, per la quale è uno spazio $(\mathcal{DF})$ (proposizione 5) bornologico e tonnelé. Se, per esempio, M è l'unione di una successione di compatti K_n e si prende una successione crescente di funzioni continue positive a supporto compatto ϕ_n, tali che ϕ_n valga 1 su K_n, si ottiene per E lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto su M (parte I, § 2, esempio d)). Se $M = \mathbb{R}^p$ e $\phi_n = (1 + r^2)^n$, dove r è la distanza dall'origine, si trova per E lo spazio delle funzioni continue a crescita lenta, cioè maggiorate in valore assoluto da un polinomio.

d) Si possono ottenere varianti supponendo, per esempio, le ϕ_n definite su $\mathbb{C}^p$ e prendendo per H_n il sottospazio di E_n formato dalle funzioni olomorfe. È un sottospazio chiuso, poiché il limite uniforme sui compatti di funzioni olomorfe è olomorfo per il teorema di Weierstrass. Il limite induttivo degli H_n, ossia lo spazio delle funzioni olomorfe maggiorate in valore assoluto da un multiplo di una delle ϕ_n, ha dunque la topologia di uno spazio $(\mathcal{DF})$ bornologico e tonnelé. Scegliendo, per esempio, $\phi_n = \exp(nr)$, dove r è la distanza dall'origine, si trova lo spazio delle funzioni intere di tipo esponenziale. Scegliendo $\phi_n = \exp(r^n)$ si trova lo spazio delle funzioni intere di ordine finito, e così via.

e) Resta aperta la questione delle condizioni affinché uno spazio $L_b(E, H)$, con E di tipo $(\mathcal{F})$ e H di tipo $(\mathcal{DF})$, sia di tipo $(\mathcal{DF})$. Sappiamo che $L_b(E, H)$ ammette una successione fondamentale di sottoinsiemi limitati, conseguenza immediata del § 2, proposizione 2, corollario 2. In particolare, quando H è il duale forte di uno spazio $(\mathcal{F})$ F, il problema è sapere se lo spazio $B(E, F)$ delle forme bilineari continue sul prodotto di due spazi $(\mathcal{F})$, munito della topologia della convergenza uniforme sui prodotti di limitati, sia uno spazio $(\mathcal{DF})$.

Esercizio. Mostrare che lo spazio delle funzioni intere di tipo esponenziale, oppure di ordine finito, su $\mathbb{C}^p$ è uno spazio $(\mathcal{DF})$ di tipo $(\mathcal{M})$ (utilizzare la proposizione 5, corollario 2). Mostrare che il primo di questi due spazi è isomorfo allo spazio $H(\{0\})$ dei germi di funzioni olomorfe nell'intorno dell'origine (rappresentare una funzione olomorfa nell'origine mediante la successione dei suoi coefficienti di Taylor).

4 Risultati complementari

Come indica il titolo, diamo in questo paragrafo alcuni ulteriori risultati sugli spazi $(\mathcal{DF})$, omettendo le dimostrazioni del teorema 3, del teorema 4 e del lemma. Il lettore può cercarle da sé oppure consultare il lavoro di Grothendieck, *Sur les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{DF})$, in *Summa Brasiliensis Mathematicae*, dove si trovano anche vari controesempi relativi agli spazi $(\mathcal{F})$ e $(\mathcal{DF})$ e alcune questioni aperte.

Teorema 3. Siano H uno spazio $(\mathcal{DF})$ e U un disco in H. Il disco U è un intorno di 0 se e solo se induce su ciascun insieme limitato un intorno di 0.

Si verifica che tale enunciato equivale al seguente.

Corollario 1. Sia u un'applicazione lineare da H in uno spazio localmente convesso E. L'applicazione u è continua se e solo se sono continue le sue restrizioni ai sottoinsiemi limitati di H.

Con la stessa dimostrazione si ottiene l'enunciato analogo che caratterizza gli insiemi equicontinui di applicazioni lineari da H in E. Si può così rafforzare il teorema 2 del § 2. Un'altra applicazione è la seguente.

Corollario 2. Siano H uno spazio $(\mathcal{DF})$ ed E uno spazio localmente convesso separato e completo. Allora $L_b(H, E)$ è completo.

Ogni limite, per la convergenza uniforme sui limitati, di applicazioni lineari continue ha restrizioni continue ai sottoinsiemi limitati ed è quindi continuo per il corollario 1. Pertanto $L_b(H, E)$ è un sottospazio chiuso dello spazio completo di tutte le applicazioni da H in E, munito della convergenza uniforme sui limitati, ed è quindi completo. Questo risultato generalizza il corollario 3 della proposizione 1. Si confronti con il capitolo 3, proposizione 2.

Teorema 4. Siano H uno spazio $(\mathcal{DF})$ e M un sottoinsieme separabile di H. Su M coincidono la topologia data T di H e la topologia T_0 della convergenza uniforme sui sottoinsiemi fortemente limitati di H'.[48]

Poiché $T = T_0$ se e solo se H è quasi-tonnelé, si ha il seguente corollario.

Corollario 1. Uno spazio $(\mathcal{DF})$ separabile è quasi-tonnelé.

Un'altra conseguenza immediata è la seguente.

Corollario 2. In H le successioni convergenti per T e per T_0 sono le stesse. Equivalentemente, un'applicazione da uno spazio topologico metrizzabile in H è continua per T se e solo se è continua per T_0.

Servendosi del teorema 3 si ottiene il teorema seguente.

Teorema 5. Uno spazio $(\mathcal{DF})$ i cui sottoinsiemi limitati sono metrizzabili è quasi-tonnelé.

Per verificare che l'applicazione identica da H munito di T in H munito di T_0 è continua basta, per il corollario 1 del teorema 3, verificare che è continua la sua restrizione a ciascun sottoinsieme limitato. Questo segue dal corollario 2 del teorema 4.

Si può anche dimostrare il seguente lemma.

Lemma. Sia (A_i) una successione crescente di dischi limitati nello spazio H di tipo $(\mathcal{DF})$, tale che i loro omotetici formino un sistema fondamentale numerabile di sottoinsiemi limitati di H. Posto $U = \bigcup_i A_i$, la chiusura di U coincide con la palla unitaria chiusa associata alla funzione di Minkowski di U, ossia con l'unione delle chiusure dei segmenti che U stacca sulle rette reali passanti per l'origine.

Con un argomento di compattezza debole si ottiene il teorema seguente.

Teorema 6. Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Ogni disco bornivoro U nel duale forte E' contiene un disco chiuso e bornivoro.

Per polarità si ottiene il seguente corollario.

[48] Per il duale, nell'edizione inglese manca il segno di primo.

Corollario 1. Ogni famiglia di forme lineari su E' uniformemente limitata su ciascun sottoinsieme limitato è contenuta nella chiusura debole, nel duale algebrico di E', di un sottoinsieme limitato di E''.

Il caso particolare più importante è il seguente.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Il suo duale forte E' è bornologico se e solo se è quasi-tonnelé (o tonnelé, il che è equivalente, poiché lo spazio è completo).

La quasi-tonnelatura di E' forte si può verificare mediante il teorema 5. Essa è immediata se E è riflessivo. Dunque:

Corollario 3. Il duale forte di uno spazio $(\mathcal{F})$ riflessivo è bornologico.

Il fatto che un duale forte sia bornologico può servire in teoremi di dualità come quello che segue.

Proposizione 6. Siano E uno spazio localmente convesso e F un suo sottospazio vettoriale quasi-tonnelé il cui duale forte sia bornologico. Tale duale forte si identifica con il quoziente del duale forte E' per il sottospazio F^0 ortogonale a F.

Per verificare che l'applicazione canonica $F'_b \longrightarrow E'_b/F^0$ è continua basta, poiché F'_b è bornologico, verificare che essa trasforma un sottoinsieme limitato in un sottoinsieme limitato. Ora F è quasi-tonnelé, quindi ogni sottoinsieme limitato di F' forte è equicontinuo. Esso proviene pertanto da un sottoinsieme equicontinuo di E', a maggior ragione fortemente limitato, la cui immagine canonica in E'_b/F^0 è dunque limitata.

Esercizio. Dedurre dal teorema 4 che l'enunciato resta valido se si sostituiscono T e T_0 con le topologie deboli associate. Formulare l'analogo del corollario 2 del teorema 4. Mostrare che i sottoinsiemi di H compatti per la topologia debole associata a T sono gli stessi che per la topologia debole associata a T_0. Si consideri il caso in cui H è completo e si utilizzi il teorema di Eberlein, che sarà dimostrato nel capitolo 5: in uno spazio localmente convesso separato e completo un sottoinsieme è relativamente debolmente compatto se e solo se ogni successione che se ne estrae ammette un punto di aderenza per la topologia debole. Dedurne che ogni forma lineare su H continua per T_0 appartiene al completamento di H' per $\tau(H', H)$. Mostrare che, se H è completo, ogni forma lineare su H appartenente al completamento di H' per $\tau(H', H)$ è limitata sui sottoinsiemi limitati e che, viceversa, se H è il duale forte di uno spazio localmente convesso metrizzabile, ogni forma lineare su H limitata sui sottoinsiemi limitati è continua per T_0.

Parte IV Spazi quasi-normabili e spazi di Schwartz

1 Definizione degli spazi quasi-normabili

Definizione 1. Uno spazio localmente convesso E si dice *quasi-normabile* se, per ogni disco equicontinuo A di E', esiste un disco equicontinuo $B \supset A$ tale che su A coincidano le topologie indotte dal duale forte E' e dallo spazio normato E'_B.

Per il capitolo 2, § 14, ciò equivale a dire che le strutture uniformi indotte su A da E' forte e da E'_B coincidono, o ancora che le due topologie in questione inducono su A lo stesso sistema di intorni di 0. Ciò significa che, per ogni $\lambda > 0$, esiste in E' un intorno forte W di 0, che possiamo supporre discato e debolmente chiuso, tale che $A \cap W \subset \lambda B$. Supponiamo A e B debolmente chiusi, indichiamo con U e V i loro polari e con M il polare di W. La condizione di quasi-normabilità diviene la seguente: per ogni intorno

discato chiuso U di 0 in E, ne esiste un altro V tale che, per ogni $\lambda > 0$, si possa trovare un disco chiuso e limitato M per cui $V \subset \lambda\overline{\Gamma}(U \cup M)$. Indicando ora con M l'insieme λM e osservando che

$$\tfrac{1}{2}(U + M) \subset \overline{\Gamma}(U \cup M) \subset 2(U + M)$$

(la seconda inclusione vale perché U è un intorno di 0), si verifica che l'inclusione precedente può essere sostituita dalla seguente:

$$V \subset \lambda U + M. \tag{1}$$

Dunque E è quasi-normabile se e solo se, per ogni intorno U di 0, esiste un intorno V di 0 tale che, per ogni $\lambda > 0$, esista un insieme limitato M per cui valga la (1). È in questa forma che verificheremo la quasi-normabilità nei casi concreti.

Uno spazio $(\mathcal{DF})$ quasi-tonnelé è quasi-normabile. Ciò segue immediatamente dalla definizione e dalla parte II, § 2, teorema 1, 2). Uno spazio $(\mathcal{F})$, anche di tipo $(\mathcal{M})$ (capitolo 2, § 18, definizione 13), può non essere quasi-normabile. Tuttavia gli spazi $(\mathcal{M})$ che si incontrano in pratica sono quasi-normabili. Il lettore potrà verificare che la classe degli spazi quasi-normabili è stabile per passaggio ai quozienti e alle somme dirette topologiche. Inoltre il limite induttivo di una successione di spazi quasi-normabili è quasi-normabile, essendo un quoziente della somma diretta topologica. Lo stesso vale per il prodotto vettoriale topologico. (Basta servirsi della definizione. Soltanto il caso della somma diretta richiede una dimostrazione, nella quale si procede come nella parte II, § 2, teorema 1, 2).) Un sottospazio vettoriale di uno spazio quasi-normabile non è in generale quasi-normabile. Infatti ogni spazio $(\mathcal{F})$ è isomorfo a un sottospazio del prodotto di una successione di spazi di Banach, prodotto quasi-normabile per quanto precede, e sappiamo che esistono spazi $(\mathcal{F})$ non quasi-normabili.

Dalla definizione segue che, se E è quasi-normabile, i sottoinsiemi equicontinui del suo duale forte sono metrizzabili. Nel caso in cui E sia di tipo $(\mathcal{F})$, e dunque E' forte di tipo $(\mathcal{DF})$ (parte III, teorema 1), il teorema 5 e il corollario 2 del teorema 6 della parte III mostrano che, se E è quasi-normabile, E' forte è uno spazio $(\mathcal{DF})$ bornologico.

Esercizio 1. Mostrare che il biduale di uno spazio quasi-normabile è quasi-normabile (utilizzare la condizione espressa dalla formula (1)).

Esercizio 2. Sia E uno spazio localmente convesso. Diremo che E soddisfa la *condizione di convergenza di Mackey* se ogni successione tendente a 0 in E tende a 0 nel senso di Mackey (capitolo 3, § 4, definizione 4). Diremo che E soddisfa la *condizione stretta di convergenza di Mackey* se, per ogni disco limitato A in E, esiste un disco limitato $B \supset A$ tale che le topologie indotte su A da E e da E_B coincidano. Ne sono un esempio gli spazi metrizzabili, per la parte II, § 2, teorema 1, 2).

1) Sia E uno spazio localmente convesso quasi-tonnelé. Allora E è quasi-normabile se e solo se il suo duale forte soddisfa la condizione stretta di convergenza di Mackey.

2) Un sottospazio di uno spazio che soddisfa una delle due condizioni di convergenza di Mackey soddisfa la stessa condizione. Ciò vale anche per il prodotto vettoriale topologico di una successione di spazi o per la somma diretta topologica di una famiglia di spazi che soddisfano la condizione considerata.

3) Sia E uno spazio localmente convesso che ammette una successione fondamentale di insiemi limitati.

a) Se E soddisfa la condizione di convergenza di Mackey, mostrare che, per ogni filtro ϕ a base numerabile su E convergente a un punto $x \in E$, si può trovare un disco chiuso e

limitato A tale che $A \in \phi$ e che la traccia di ϕ su A tenda a x nello spazio normato E_A. In particolare, ogni disco limitato metrizzabile B di E è contenuto in un disco limitato A tale che su B coincidano le topologie indotte da E e da E_A.

b) Dedurne che E soddisfa la condizione stretta di convergenza di Mackey se e solo se i suoi sottoinsiemi limitati sono metrizzabili ed E soddisfa la condizione di convergenza di Mackey per le successioni.

2 Prolungamento di successioni fortemente convergenti di forme lineari su un sottospazio

Una conseguenza immediata della definizione 1 è la seguente.

Proposizione 1. Siano E uno spazio localmente convesso quasi-normabile e (x'_i) una successione equicontinua in E' fortemente convergente a x'. Esiste allora un disco equicontinuo A in E' tale che x'_i tenda a x' nello spazio normato E'_A. Equivalentemente, posto $V = A^0$, esiste un intorno V di 0 in E sul quale x'_i tende uniformemente a x'.

Supponendo $x' = 0$, ciò significa anche che esiste una successione di numeri $\lambda_i > 0$ tendente a 0 tale che $x'_i \in \lambda_i A$. Se supponiamo che E sia un sottospazio vettoriale topologico di uno spazio localmente convesso F, sappiamo per Hahn–Banach che un sottoinsieme equicontinuo A di E' è l'immagine canonica di un sottoinsieme equicontinuo B di F'. Nelle condizioni precedenti possiamo dunque trovare, per ogni i, un prolungamento y'_i di x'_i a F tale che $y'_i \in \lambda_i B$. Pertanto:

Teorema 1. Siano F uno spazio localmente convesso, E un suo sottospazio vettoriale e (x'_i) una successione equicontinua e fortemente convergente in E'. Se E è quasi-normabile, si possono trovare prolungamenti y'_i delle x'_i a F tali che (y'_i) sia una successione equicontinua e fortemente convergente in F'.

Il teorema 1 si applica spesso nella forma del seguente corollario.

Corollario. Sia E uno spazio localmente convesso quasi-normabile la cui topologia sia la meno fine fra quelle che rendono continue certe applicazioni lineari u_i da E in spazi localmente convessi E_i. Allora le successioni equicontinue e fortemente convergenti in E' si ottengono come somme finite di successioni risultanti dalla composizione con u_i dei termini di una successione equicontinua e fortemente convergente in uno spazio E'_i.

Ci si può ricondurre al caso in cui E è separato e si identifica quindi con un sottospazio vettoriale topologico del prodotto vettoriale topologico degli E_i. Si applica allora il teorema 1, osservando che il duale forte del prodotto degli E_i si identifica con la somma diretta topologica dei duali forti degli E_i (parte I, § 4, proposizione 7) e che i suoi sottoinsiemi equicontinui sono quelli contenuti nella somma di un numero finito di sottoinsiemi equicontinui degli spazi E'_i (capitolo 2, § 15, proposizione 22, corollario 1).

Osserviamo di passaggio che il teorema 1 e il suo corollario si potrebbero enunciare anche per filtri fortemente convergenti su un sottoinsieme equicontinuo del duale di E. Supponiamo viceversa che E sia uno spazio localmente convesso tale che, qualunque sia la sua immersione in uno spazio localmente convesso F, valga l'enunciato così rafforzato del teorema 1. Allora E è quasi-normabile: lo si vede subito scegliendo come F uno spazio localmente convesso quasi-normabile, per esempio un prodotto di spazi di Banach, il che è sempre possibile.[49]

[49] Nell'ultima frase della scansione sono scambiate le lettere dello spazio immerso e dello spazio ambiente.

Esercizio 1. Siano E uno spazio localmente convesso separabile, F un suo sottospazio vettoriale e (x'_i) una successione equicontinua e debolmente convergente in F'. Mostrare che esistono prolungamenti y'_i delle x'_i a E tali che (y'_i) sia una successione equicontinua e debolmente convergente in E'. Mostrare che, anche se E è uno spazio di Banach, l'ipotesi di separabilità di E è necessaria nell'enunciato precedente (cfr. capitolo 3, § 7, esercizio 2, d)).

3 Quasi-normabilità e compattezza

Teorema 2. Siano E uno spazio localmente convesso quasi-normabile e A un disco equicontinuo di E' compatto per $\sigma(E', E'')$ (risp. per la topologia forte). Esiste allora un disco equicontinuo debolmente chiuso B in E' tale che A sia un sottoinsieme debolmente compatto (risp. compatto) dello spazio di Banach E'_B.

Scegliamo B in modo che su A coincidano le topologie indotte da E' forte e da E'_B. Se A è fortemente compatto, è compatto anche in E'_B. Analogamente, se A è compatto per la topologia debole $\sigma(E', E'')$ associata alla topologia forte, A è debolmente compatto nello spazio di Banach E'_B. Infatti, per un sottoinsieme discato A di uno spazio localmente convesso F (qui E'_B), la compattezza debole dipende soltanto dalla topologia indotta da F su A (cfr. capitolo 2, § 9, esercizio 2).[50]

Corollario. Sia u un'applicazione lineare continua da uno spazio localmente convesso quasi-normabile E in uno spazio di Banach F che trasformi gli insiemi limitati in sottoinsiemi relativamente debolmente compatti (risp. relativamente compatti). Allora u è debolmente compatta (risp. compatta).

Sia A l'immagine mediante u' della palla unitaria di F'. Per i teoremi 12 e 13 del capitolo 2, § 18, A è compatto per $\sigma(E', E'')$, rispettivamente per la topologia forte. Prendiamo B come nell'enunciato del teorema 2 e poniamo $U = B^0$. Poiché $u(U)$ è evidentemente limitato (infatti $u(A^0)$ è contenuto nella palla unitaria di F), u è un'applicazione lineare continua da E, munito della seminorma associata a U, in F. Il duale di questo spazio seminormato è evidentemente E'_B e la trasposta di u, considerata come applicazione da E_U in F, è ancora u', considerata come applicazione da F' in E'_B. Poiché quest'ultima è debolmente compatta (risp. compatta), tale è anche u considerata come applicazione da E_U (stesso riferimento). Dunque $u(U)$ è relativamente debolmente compatto (risp. relativamente compatto). In particolare si ottiene quanto segue.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso quasi-normabile. Se E è riflessivo (risp. se i suoi sottoinsiemi limitati sono precompatti, in particolare se E è di tipo $(\mathcal{M})$), ogni applicazione lineare continua da E in uno spazio di Banach F è debolmente compatta (risp. compatta).

Quest'ultima proprietà può venir meno se E non è quasi-normabile, anche se è di tipo $(\mathcal{F})$ e $(\mathcal{M})$. Si può trovare uno spazio E di tipo $(\mathcal{F})$ e $(\mathcal{M})$ che ammette come quoziente uno spazio di Banach non riflessivo. L'applicazione canonica di E sul suo quoziente non è allora neppure debolmente compatta! (Si vede al tempo stesso che esistono nel quoziente insiemi limitati che non sono contenuti nella chiusura dell'immagine canonica di alcun sottoinsieme limitato di E: basta scegliere un intorno di 0 limitato nello spazio quoziente. Il duale forte del quoziente di E non può dunque identificarsi con un sottospazio vettoriale

[50] Nel secondo caso della dimostrazione l'edizione inglese indica con B il disco di cui si verifica la compattezza, indicato con A nell'enunciato.

topologico del duale forte di E.) Vi è una classe più ampia di quella degli spazi quasi-normabili riflessivi per la quale vale la conclusione del corollario 2.

Proposizione 2. Sia E uno spazio localmente convesso. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1) Ogni applicazione lineare continua da E in uno spazio di Banach F è debolmente compatta (risp. compatta).

2) Per ogni intorno discato U di 0 in E esiste un intorno discato $V \subset U$ tale che l'applicazione naturale da $\widehat{E}_V$ in $\widehat{E}_U$ sia debolmente compatta (risp. compatta).

3) Per ogni disco equicontinuo A in E' esiste un disco equicontinuo $B \supset A$ tale che A sia relativamente debolmente compatto (risp. relativamente compatto) nello spazio normato E'_B.

Se E soddisfa queste proprietà ed è inoltre quasi-completo, allora è riflessivo (risp. di tipo $(\mathcal{M})$).

Osserviamo che, se U è un intorno discato di 0 in E, $\widehat{E}_U$ indica lo spazio di Banach associato alla seminorma di Minkowski di U. L'equivalenza di 1) e 2) è immediata. Per vedere che 1) implica 2) basta prendere $F = \widehat{E}_U$. Per l'implicazione inversa si consideri l'immagine inversa U della palla unitaria di F mediante u. D'altra parte, 3) significa che l'applicazione identica da E'_A in E'_B è debolmente compatta (risp. compatta). Supponiamo A e B debolmente chiusi, il che non cambia nulla, e indichiamo con U e V i loro polari. L'applicazione identica $E'_A \to E'_B$ è la trasposta dell'applicazione canonica $\widehat{E}_V \to \widehat{E}_U$. Essa è dunque debolmente compatta (risp. compatta) se e solo se lo è quest'ultima. È così stabilita l'equivalenza di 2) e 3). Infine, se E soddisfa queste condizioni ed è quasi-completo, mostriamo che è riflessivo (risp. uno spazio di Montel), ossia che l'identità $E \to E$ trasforma i sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi relativamente debolmente compatti (risp. relativamente compatti). Sappiamo (capitolo 2, § 18, teoremi 12 e 13) che ciò equivale a dire che la trasposta, ossia l'identità di E' su E', trasforma i sottoinsiemi equicontinui in sottoinsiemi relativamente compatti per $\sigma(E', E'')$ (risp. relativamente compatti per la topologia forte), come segue dalla condizione 3).

È evidente che ogni quoziente di uno spazio E che soddisfa le condizioni della proposizione 2 soddisfa anch'esso tali condizioni.

Dal corollario 2 del teorema 2 si ottiene il seguente risultato.

Corollario 1. Sia E uno spazio quasi-normabile riflessivo (risp. di tipo $(\mathcal{M})$). Allora ogni quoziente separato e quasi-completo di E è anch'esso quasi-normabile e riflessivo (risp. di tipo $(\mathcal{M})$).

Dalla condizione 2) o dalla condizione 3) della proposizione 2 si vede che la proprietà considerata in tale proposizione si conserva per passaggio a sottospazi vettoriali arbitrari. In particolare:

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso quasi-normabile e riflessivo (risp. di tipo $(\mathcal{M})$). Allora ogni sottospazio vettoriale di E soddisfa le condizioni della proposizione 2.

Osserviamo che tale sottospazio può non essere quasi-normabile. Troviamo, per esempio, che ogni sottospazio vettoriale del prodotto vettoriale topologico di una famiglia di spazi di Banach riflessivi soddisfa le condizioni della proposizione 2 relative alla compattezza debole, ossia quelle che figurano fuori parentesi. È il caso degli spazi $\mathcal{D}_{L^p}$ di L. Schwartz per $1 < p < \infty$, che per definizione sono isomorfi a sottospazi vettoriali topologici del prodotto di una successione di spazi L^p (spazi di Banach riflessivi). In effetti

non è difficile vedere che gli $\mathcal{D}_{L^p}$ sono addirittura quasi-normabili. Ciò non vale però in generale, per esempio per i loro sottospazi vettoriali, che pure soddisfano le condizioni della proposizione 2.

4 Spazi di Schwartz

Uno *spazio di Schwartz* è uno spazio localmente convesso separato che soddisfa la seconda serie di condizioni equivalenti della proposizione 2. Possiamo, per esempio, formulare la condizione 2) come segue.

Definizione 2. Sia E uno spazio localmente convesso separato. Diremo che E è uno spazio di Schwartz, in breve uno spazio (S), se per ogni intorno discato U di 0 ne esiste un altro, V, precompatto per la topologia seminormata definita da U.

Oltre alle condizioni equivalenti della proposizione 2 abbiamo un'altra caratterizzazione degli spazi (S).

Proposizione 3. Sia E uno spazio localmente convesso separato. Allora E è uno spazio (S) se e solo se è quasi-normabile e ogni suo sottoinsieme limitato è precompatto.

La condizione è sufficiente per il corollario 2 del teorema 2. Supponiamo, viceversa, che E sia uno spazio (S) e sia A un sottoinsieme limitato di E. Per mostrare che A è precompatto basta mostrare che è precompatto per ogni seminorma continua associata a un intorno discato U di 0, e ciò è chiaro per la definizione 2. Sia infine A un disco equicontinuo debolmente chiuso in E'. Per la condizione 3) della proposizione 2 esiste un disco equicontinuo debolmente chiuso B tale che A sia compatto in E'_B. Pertanto su A la topologia indotta da E'_B coincide con quella indotta dal duale forte E', che è separata e meno fine. Ne segue che E è quasi-normabile.

L'interesse degli spazi (S) deriva soprattutto dalle loro proprietà di stabilità e dal fatto che, nel caso degli spazi $(\mathcal{F})$, essi consentono di completare la teoria della dualità forte, come ora mostreremo.

Proposizione 4. La classe degli spazi (S) è stabile per passaggio ai sottospazi, ai quozienti separati, ai prodotti vettoriali topologici e alle somme dirette topologiche di successioni di tali spazi.

Abbiamo già osservato che le condizioni della proposizione 2 si conservano per passaggio a sottospazi vettoriali e a quozienti. Per la stabilità rispetto ai prodotti si usi la condizione 2) della proposizione 2 (un'applicazione lineare continua del prodotto in uno spazio di Banach equivale a un'applicazione lineare continua di un prodotto parziale finito nello stesso spazio). Per la somma diretta topologica di una successione di spazi si veda l'esercizio 1. Nel caso che qui ci interessa, quello degli spazi (S), basta osservare che una somma diretta topologica di spazi quasi-normabili è quasi-normabile e che, se i limitati dei fattori sono precompatti, tali sono anche i limitati della somma diretta. Questi ultimi sono infatti contenuti in somme di un numero finito di limitati dei fattori. La conclusione segue dalla proposizione 3.

Corollario 1. Uno spazio localmente convesso separato che sia limite induttivo di una successione di spazi (S) è uno spazio (S).

Corollario 2. Uno spazio localmente convesso separato la cui topologia sia la meno fine fra quelle che rendono continue certe applicazioni lineari u_i da E in spazi (S) E_i è uno spazio (S).

Nel primo caso si ha il quoziente della somma diretta topologica di una successione di spazi (S), nel secondo un sottospazio del prodotto di una famiglia di spazi (S). Osserviamo che, se E è uno spazio $(\mathcal{F})$ e $(\mathcal{M})$ che non è uno spazio (S) (abbiamo detto nel § 3 che ne esistono), E è il duale forte del suo duale forte E'. Quest'ultimo è di tipo (S), poiché è quasi-normabile, in quanto spazio $(\mathcal{DF})$ quasi-tonnelé, ed è di tipo $(\mathcal{M})$, in quanto duale di uno spazio $(\mathcal{M})$ quasi-tonnelé. Dunque il duale forte di uno spazio (S) può non essere di tipo (S).

Teorema 3. Sia E uno spazio $(\mathcal{F})$ e (S) e sia F un sottospazio vettoriale chiuso. Allora F ed E/F sono spazi $(\mathcal{F})$ e (S). Il duale forte di F si identifica con il quoziente E'/F^0 del duale forte E' di E, e il duale forte di E/F con il sottospazio vettoriale topologico F^0 dello stesso duale forte.

Sappiamo già (proposizione 4) che F ed E/F sono di tipo (S) e sono anche spazi $(\mathcal{F})$. In particolare F è riflessivo, da cui segue il risultato sul suo duale forte (capitolo 2, § 15, proposizione 21, corollario 2). Per l'asserzione relativa al duale di E/F basta mostrare che ogni limitato di E/F è contenuto nella chiusura dell'immagine canonica di un limitato di E. Ora, poiché i limitati di E/F sono relativamente compatti, basta applicare la proposizione 1 della parte II, § 1.

Corollario. Sia E uno spazio $(\mathcal{F})$ e (S). Allora i sottospazi vettoriali chiusi del suo duale forte e i quozienti del duale per tali sottospazi sono spazi $(\mathcal{DF})$ e (S), bornologici e completi.

Sono infatti duali forti di spazi $(\mathcal{F})$ e (S), quindi spazi $(\mathcal{DF})$ completi e bornologici (parte III, teorema 6, corollario 3). Poiché sono anche di tipo $(\mathcal{M})$, sono di tipo (S), come abbiamo osservato sopra per gli spazi $(\mathcal{DF})$ tonnelés.

Proposizione 5. Siano U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e K un cubo compatto di $\mathbb{R}^n$. Gli spazi $\mathcal{E}(U)$ ed $\mathcal{E}(K)$ delle funzioni indefinitamente differenziabili su U e su K (cfr. capitolo 1, § 10) sono spazi (S).

Infatti, la topologia di $\mathcal{E}(K)$, per esempio, è la meno fine fra quelle che rendono continue le applicazioni identiche da $\mathcal{E}(K)$ negli spazi $\mathcal{E}^{(m)}(K)$. Ora abbiamo visto (capitolo 1, § 10) che l'applicazione identica da $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ in $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ è compatta, sicché la condizione della definizione 2 è verificata. Per $\mathcal{E}(U)$ si procede analogamente.

Corollario 1. Lo spazio $\mathcal{D}(U)$ delle funzioni indefinitamente differenziabili a supporto compatto in U è uno spazio (S).

Per ogni compatto $K \subset U$, lo spazio $\mathcal{D}_K(U)$ delle $f \in \mathcal{E}(U)$ con supporto contenuto in K è un sottospazio vettoriale topologico di $\mathcal{E}(U)$, dunque uno spazio (S). Poiché $\mathcal{D}(U)$ è il limite induttivo di una successione di tali spazi $\mathcal{D}_K(U)$ di tipo (S), è esso stesso uno spazio (S).

Corollario 2. Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$. Lo spazio $\mathcal{H}(U)$ delle funzioni olomorfe in U, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, è uno spazio (S). Lo stesso vale per lo spazio $\mathcal{H}(K)$ dei germi di funzioni olomorfe in un intorno del compatto K di $\mathbb{C}^n$ (parte I, § 2, esempio f)).

Sappiamo che $\mathcal{H}(U)$ è un sottospazio vettoriale topologico di $\mathcal{E}(U)$ (si usino il teorema del grafico chiuso e il fatto che i limiti uniformi sui compatti di funzioni olomorfe sono olomorfi, da cui segue anche che $\mathcal{H}(U)$ è chiuso in $\mathcal{E}(U)$). Poiché $\mathcal{E}(U)$ è di tipo (S), lo è anche $\mathcal{H}(U)$. Infine $\mathcal{H}(K)$ è limite induttivo di una successione di spazi $\mathcal{H}(U)$ di tipo (S) e quindi è uno spazio (S).

Esercizio 1. Siano E uno spazio $(\mathcal{F})$ e (A_i) una successione di dischi debolmente compatti (risp. compatti) in E. Mostrare che si può trovare una successione di scalari $\lambda_i > 0$ tale che l'inviluppo discato chiuso di $\bigcup_i \lambda_i A_i$ sia debolmente compatto (risp. compatto). Dedurne che, se F è uno spazio localmente convesso, limite induttivo di una successione di spazi localmente convessi F_i mediante applicazioni lineari u_i le cui immagini generano F, e u è un'applicazione lineare da F in E (di tipo $(\mathcal{F})$), allora u è debolmente compatta (risp. compatta, risp. limitata) se e solo se le applicazioni $u \circ u_i$ sono debolmente compatte (risp. compatte, risp. limitate). Dedurne che le condizioni della proposizione 2 si conservano nel passaggio al limite induttivo di una successione di spazi.

Esercizio 2. Si consideri la situazione della parte III, § 3, proposizione 5, corollario 2. Mostrare che, se le applicazioni v_i sono debolmente compatte (risp. compatte), il duale forte di E è uno spazio $(\mathcal{F})$ che soddisfa la prima (risp. la seconda) serie di condizioni della proposizione 2 di questa parte. Allora E è il duale forte di uno spazio $(\mathcal{F})$ riflessivo (risp. di uno spazio $(\mathcal{F})$ e (S)).

Capitolo 5 Compattezza negli spazi vettoriali topologici localmente convessi

Le proprietà più elementari della compattezza (e anche le più importanti) legate alle tecniche di dualità sono state esaminate nel capitolo 2, § 18. Qui presentiamo proprietà più fini. Le parti I e II sono importanti per alcune applicazioni che vanno oltre la teoria stessa degli spazi vettoriali topologici. Sono indipendenti l'una dall'altra e dalle parti III e IV.

Parte I Il teorema di Krein–Milman

1 Punti estremi

Gli spazi vettoriali qui considerati sono reali. Il segmento di estremi a e b è l'insieme dei punti $\lambda a + (1-\lambda)b$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Per comodità chiameremo *interno* del segmento il segmento privato dei suoi estremi.

Definizione 1. Sia A un sottoinsieme di uno spazio vettoriale E. Una sottovarietà affine V di E è una *varietà di appoggio* di A se $V \cap A \neq \varnothing$ e se ogni segmento aperto contenuto in A il cui interno incontri V è contenuto in V. Una varietà di appoggio di dimensione zero si chiama *punto estremo* di A: è un punto di A che è estremo di ogni segmento contenuto in A al quale appartenga.

Proposizione 1. Un'intersezione di varietà di appoggio di A è una varietà di appoggio se e solo se incontra A.

La dimostrazione è immediata.

Corollario. Se A è un sottoinsieme compatto di uno spazio vettoriale topologico E, l'insieme delle varietà di appoggio chiuse di A è induttivo per la relazione $\supset$.

Per compattezza, l'intersezione di una famiglia totalmente ordinata di varietà di appoggio chiuse incontra A. È dunque una varietà di appoggio chiusa ed è l'estremo superiore della famiglia per l'ordine considerato.

Proposizione 2. Sia A un sottoinsieme dello spazio vettoriale E, sia x' una forma lineare non nulla su E e sia V un iperpiano di equazione

$$\langle x, x' \rangle = a.$$

L'iperpiano V è una varietà di appoggio di A se incontra A e lo «lascia da una sola parte», ossia se a è un minimo o un massimo della forma x' su A. Se A è convesso, la condizione è anche necessaria.

La dimostrazione è immediata.

Corollario. Se A è un sottoinsieme compatto non vuoto di uno spazio vettoriale topologico E, per ogni iperpiano chiuso V in E esiste un iperpiano di appoggio di A parallelo a V.

L'iperpiano vettoriale V ha equazione $\langle x, x' \rangle = 0$, dove x' è una forma lineare continua su E e quindi ammette un massimo a su A. L'iperpiano di equazione $\langle x, x' \rangle = a$ soddisfa la condizione richiesta.

Proposizione 3. Siano A un sottoinsieme di E, V una varietà di appoggio di A e W una varietà contenuta in V. Allora W è una varietà di appoggio di A se e solo se è una varietà di appoggio di $V \cap A$.

La necessità segue dal fatto immediato che ogni varietà di appoggio W di A è anche una varietà di appoggio di ogni sottoinsieme di A che incontri W. Per la sufficienza, un segmento in A il cui interno incontri W è contenuto in V, dunque in $V \cap A$, e quindi in W, che è una varietà di appoggio di $V \cap A$.

Dalle proposizioni 2 e 3 segue il corollario.

Corollario. Sia A un sottoinsieme compatto di uno spazio localmente convesso separato E. I punti estremi di A sono le varietà di appoggio chiuse minimali.

Sia V una varietà di appoggio chiusa non ridotta a un punto. Mostriamo che esiste una varietà di appoggio chiusa strettamente più piccola. Mediante una traslazione, se necessario, possiamo supporre $0 \in V$. Allora $V \cap A$ è un sottoinsieme compatto non vuoto dello spazio localmente convesso separato non nullo V. In V esiste un iperpiano chiuso (Hahn–Banach) e dunque un iperpiano a esso parallelo di appoggio ad $A \cap V$ (proposizione 2, corollario), che è anche una varietà di appoggio di A (proposizione 3).

Dal corollario precedente e dal corollario della proposizione 1, che permette di applicare il lemma di Zorn, si ottiene la proposizione seguente.

Proposizione 4. Sia A un sottoinsieme compatto di uno spazio localmente convesso separato E. Ogni varietà di appoggio chiusa di A contiene almeno un punto estremo.

Poiché E è una varietà di appoggio di A quando A è non vuoto, A ha almeno un punto estremo. Vale anzi il seguente risultato.

Teorema 1 (Krein–Milman). Sia A un sottoinsieme compatto di uno spazio localmente convesso separato E. L'insieme dei punti estremi di A ha lo stesso inviluppo convesso chiuso di A.

Nel caso in cui A sia convesso, che appare il più interessante, l'enunciato diventa il seguente.

Corollario. Un sottoinsieme compatto convesso di uno spazio localmente convesso separato coincide con l'inviluppo convesso chiuso dell'insieme dei suoi punti estremi.

Dimostrazione del teorema 1. Per il capitolo 2, teorema 3, corollario 1, basta mostrare che, se $x' \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\langle x, x' \rangle \leq a$$

per ogni punto estremo x di A, la stessa disuguaglianza vale per ogni $x \in A$. Se così non fosse, il massimo di x' sul compatto A sarebbe un numero $b > a$. Ora, l'iperpiano $\langle x, x' \rangle = b$ sarebbe un iperpiano di appoggio di A (proposizione 2), dunque conterrebbe un punto estremo (proposizione 4). Ciò è assurdo perché in tale punto x' avrebbe valore $b > a$.

2 Generatrici estreme

Per lo studio elementare dei coni si veda il capitolo 2, § 3. Qui consideriamo soltanto coni contenenti 0. Sia V una varietà di appoggio del cono C. Se contiene un punto x di C, contiene la generatrice passante per x, poiché contiene un segmento di tale generatrice che ha x nel suo interno (per $x \neq 0$). Dunque, poiché $V \cap C$ è non vuoto, una varietà

di appoggio del cono C contiene sempre 0, ossia è omogenea. Ci interessano le varietà di appoggio che contengono almeno una generatrice, ossia la cui intersezione con C non si riduce a zero.

Definizione 2. Sia C un cono nello spazio vettoriale E. Una generatrice di C è una *generatrice estrema* se la retta che essa genera è una varietà di appoggio.

Se x è un punto non nullo di C, la sua generatrice è estrema se e solo se ogni segmento di C il cui interno contenga x è contenuto nella generatrice di x, ossia se da $y, z \in C$, $0 < \lambda < 1$ e $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ segue che y e z sono proporzionali a x. La necessità è chiara per definizione. Anche la sufficienza è chiara se si osserva che, quando la condizione vale per x, vale anche per i punti di C proporzionali a x.

Sia C un cono nello spazio vettoriale E e sia H un iperpiano non omogeneo di E tale che C sia il cono, contenente l'origine, generato da $A = C \cap H$. Allora i sottospazi vettoriali W di E tali che $W \cap C$ non si riduca a zero sono in corrispondenza biunivoca con le sottovarietà affini V di H che incontrano A. A W si associa $V = W \cap H$ e a V il sottospazio vettoriale W generato da V.

Proposizione 5. In questa corrispondenza, alle varietà di appoggio W di C con $W \cap C \neq \{0\}$ corrispondono le varietà di appoggio V di $A = H \cap C$.

Supponiamo che W sia una varietà di appoggio di C. Un segmento di A il cui interno incontri V è contenuto in C e incontra W nel proprio interno, quindi è contenuto in W e di conseguenza in $V = W \cap H$. Dunque V è una varietà di appoggio di A. Supponiamo ora che V sia una varietà di appoggio di A e consideriamo un segmento di C il cui interno contenga un punto $x \in W$, $x \neq 0$ (si tenga presente come è generato C). O il segmento giace sulla retta generata da x, che è contenuta in W, oppure la sua proiezione centrale su H è un segmento contenuto in A il cui interno contiene la proiezione di x su H, e quindi incontra $V = W \cap H$. Quest'ultimo segmento è allora contenuto in V, e il segmento iniziale in W. Ciò prova che W è una varietà di appoggio di C.

Corollario. Sia C il cono convesso contenente 0 generato da un sottoinsieme A di un iperpiano non omogeneo H, con $A = C \cap H$. Le generatrici estreme di C sono in corrispondenza biunivoca con i punti estremi di A: a un punto estremo di A corrisponde la generatrice di C generata da tale punto.

Abbiamo visto nel capitolo 2, § 3, che darsi un cono convesso contenente l'origine in uno spazio vettoriale E equivale a darsi un preordine su E compatibile con la struttura vettoriale (il cono è l'insieme degli elementi ≥ 0 di E).

Proposizione 6. Sia E uno spazio reale preordinato e sia C il cono dei suoi elementi positivi. Sia $x \in E$, $x > 0$. La generatrice di x è una generatrice estrema di C se e solo se ogni elemento positivo di E maggiorato da x è proporzionale a x.

Se la generatrice di x non è estrema, si ha

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b$$

con $a, b \in C$, $0 < \lambda < 1$, e a, b non proporzionali a x (si veda l'osservazione dopo la definizione 2). Allora λa è un elemento positivo di E maggiorato da x e non proporzionale a x. Supponiamo che esista un tale elemento y di E, con $0 \leq y \leq x$ e y non proporzionale a x. Si ha

$$x = \tfrac{1}{2}(2y + 2(x-y)),$$

e si ritrovano le condizioni iniziali con $a = 2y$, $b = 2(x - y)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, sicché la generatrice di x non è estrema. È soprattutto nella forma della proposizione 6 che le generatrici estreme dei coni convessi intervengono nelle applicazioni.

Finora in questo paragrafo non è intervenuta alcuna topologia su E. Introduciamola ora.

Teorema 2. Siano E uno spazio localmente convesso separato, A un sottoinsieme compatto convesso che non contenga 0, e C il cono contenente l'origine generato da A. Allora C è chiuso e coincide con l'inviluppo convesso chiuso dell'unione delle sue generatrici estreme.

Si può trovare un iperpiano vettoriale chiuso H_0 che non incontri A e che quindi lasci A strettamente da una parte. Sia H un iperpiano parallelo a H_0, di equazione $\langle x, x' \rangle = 1$, situato dalla stessa parte di H_0 di A. Per ogni $x \notin H_0$, sia

$$p(x) = \frac{x}{\langle x, x' \rangle}$$

la sua proiezione centrale su H. Il cono contenente 0 generato da A coincide con quello generato da $K = p(A)$ e, a meno dell'origine, è l'insieme dei punti x del semispazio aperto U definito da $\langle x, x' \rangle > 0$ tali che $p(x) \in K$. Poiché p è continua sul complementare di H_0, K è compatto in quanto immagine del compatto A. A maggior ragione K è chiuso, e la sua immagine inversa in U mediante p, ossia C privato dell'origine, è relativamente chiusa in U. Un punto della chiusura di $C \cap U$ che non appartenga a $C \cap U$ non appartiene dunque a U e giace perciò in H_0. Mostriamo che è necessariamente zero. Infatti ogni punto non nullo x di H_0 può essere strettamente separato da A mediante un iperpiano vettoriale chiuso, onde x non appartiene alla chiusura del cono generato da A. Abbiamo dunque provato che C è chiuso. Per il teorema 1 il compatto convesso K è l'inviluppo convesso chiuso dei suoi punti estremi. Tenendo conto del corollario della proposizione 5, K è dunque contenuto nell'inviluppo convesso chiuso dell'unione delle generatrici estreme di C. Lo stesso vale per C, il che conclude la dimostrazione.

Esercizio 1. 1) Sia M uno spazio localmente compatto. Indichiamo con $\mathcal{K}(M)$ lo spazio vettoriale ordinato delle funzioni reali continue a supporto compatto in M, e con $\mathcal{M}^+(M)$ il cono delle forme lineari positive su $\mathcal{K}(M)$. Mostrare che le generatrici estreme sono generate dalle forme lineari ε_s ($s \in M$) definite da $\langle f, \varepsilon_s \rangle = f(s)$.

2) Sia $\mathcal{M}^1(M)$ il duale dello spazio di Banach $C_0(M)$. Sia A l'insieme degli elementi della palla unitaria di $\mathcal{M}^1(M)$ che sono forme lineari positive sullo spazio vettoriale ordinato $C_0(M)$. Mostrare che i punti estremi di A sono 0 e le ε_s.

3) Se M è compatto, mostrare che l'insieme K degli elementi di A di norma 1 coincide con l'insieme delle forme lineari positive μ su $C(M)$ tali che $\mu(1) = 1$. Dedurne che K è debolmente compatto. Mostrare che i suoi punti estremi sono le ε_s e che il cono contenente 0 generato da K coincide con $\mathcal{M}^+(M)$.

4) Applicare il teorema di Krein–Milman alle situazioni di 2) e 3) e osservare che qui gli stessi risultati si ottengono più rapidamente applicando direttamente il teorema bipolare (cfr. capitolo 2, § 9, esercizio).

5) Si consideri ancora $C_0(M)$, con M localmente compatto e con scalari reali oppure complessi. Mostrare che i punti estremi della palla unitaria del duale $\mathcal{M}^1(M)$ sono le $\lambda\varepsilon_s$, con $s \in M$ e $|\lambda| = 1$.

Esercizio 2. Gli scalari siano reali oppure complessi.

1) Sia M uno spazio topologico. Mostrare che i punti estremi della palla unitaria di $C^\infty(M)$ sono le f tali che $|f(s)| = 1$ per ogni $s \in M$. Dimostrare l'enunciato analogo per uno spazio L^∞ costruito su una misura μ.[51]

2) Mostrare che, in quest'ultimo caso, la palla unitaria di L^∞ è l'inviluppo convesso chiuso dell'insieme dei suoi punti estremi. Mostrare che ciò vale anche per $C(M)$ quando M è compatto e totalmente sconnesso. (In questo caso il teorema di Krein–Milman non è applicabile! Si consideri dapprima lo spazio $C(M)$ per M compatto finito. Si può osservare che, come è noto, L^∞ è isomorfo a uno spazio $C(M)$ costruito su un opportuno compatto totalmente sconnesso M. In realtà, dunque, l'asserzione su L^∞ si può considerare come un caso particolare di quella relativa a $C(M)$.)

3) Sia M uno spazio topologico connesso. Mostrare che, scegliendo scalari reali, la palla unitaria di $C^\infty(M)$ ha soltanto due punti estremi e non è in generale l'inviluppo convesso chiuso dell'insieme dei suoi punti estremi.

Esercizio 3. Sia u un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale E in un altro spazio vettoriale F. Siano A un sottoinsieme di E e $B = u(A)$. Mostrare che l'immagine inversa mediante u di una varietà di appoggio di B è una varietà di appoggio di A. Dedurne che, se E, F sono spazi localmente convessi separati, u è continua e A è compatto, ogni punto estremo di B è l'immagine mediante u di un punto estremo di A. Se A è il cono contenente l'origine generato da un compatto convesso che non contiene 0, ogni generatrice estrema di B è l'immagine mediante u di una generatrice estrema di A.[52]

Esercizio 4. Siano E uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e K un sottoinsieme compatto convesso di E. Mostrare che K è l'inviluppo convesso dei suoi punti estremi (per mostrare che ogni $x \in K$ appartiene a tale inviluppo, si prenda x nell'interno di K e si ragioni per induzione sulla dimensione).

Esercizio 5. Siano E uno spazio localmente convesso separato su $\mathbb{R}$ e A un sottoinsieme di E.

a) Mostrare che le seguenti condizioni su $x \in E$ sono equivalenti.

1. Per ogni applicazione lineare continua u da E in uno spazio vettoriale di dimensione finita, $u(x)$ appartiene all'inviluppo convesso di $u(A)$.

2. Per ogni sottovarietà affine chiusa H di E, di codimensione finita $n > 0$, contenente x, esiste un sottoinsieme di A con al più $n + 1$ elementi il cui inviluppo convesso incontra H (utilizzare il capitolo 2, § 5, esercizio 2). Sia $\widetilde{A}$ l'insieme degli $x \in E$ che soddisfano queste proprietà. L'insieme $\widetilde{A}$ è convesso, vale $A \subset \widetilde{A} = \widetilde{\widetilde{A}}$ e $\widetilde{A}$ è contenuto nell'inviluppo convesso chiuso di A. Se E ha dimensione finita, $\widetilde{A}$ coincide con l'inviluppo convesso di A.

b) Siano (x_i) una famiglia di elementi di A e (λ_i) una famiglia di numeri positivi tali che $\sum_i \lambda_i = 1$, e si supponga sommabile in E la famiglia $(\lambda_i x_i)$. Mostrare che la sua somma x appartiene a $\widetilde{A}$. (Ricondursi al caso in cui E ha dimensione finita ed è generato affinemente dai $\lambda_i x_i$.) Più in generale, siano M uno spazio localmente compatto munito di una misura positiva μ di massa totale 1 e $t \mapsto f(t)$ un'applicazione scalarmente sommabile da M in E tale che

$$x = \int f(t)\, d\mu(t) \in E.$$

[51] Qui $C^\infty(M)$ indica lo spazio delle funzioni continue limitate, con la norma uniforme.

[52] Nella deduzione topologica si è esplicitata l'ipotesi di continuità di u, implicita nel passaggio alle varietà di appoggio chiuse.

Se $f(M) \subset A$, allora $x \in \widetilde{A}$. (Ricondursi al caso in cui E ha dimensione finita, quindi al caso precedente, scrivendo $M = N \cup \bigcup_i M_i$, dove N è trascurabile e (M_i) è una successione di compatti a due a due disgiunti, su ciascuno dei quali f ha restrizione continua. Si utilizzi il capitolo 2, § 5, esercizio 2.)

c) Se A è compatto, $\widetilde{A}$ coincide con l'inviluppo convesso chiuso di A (utilizzare il capitolo 2, § 5, esercizio 2).

d) Se K è un sottoinsieme compatto convesso di E e A è l'insieme dei suoi punti estremi, si ha $K = \widetilde{A}$ (utilizzare gli esercizi 3 e 4).

e) Se A è un sottoinsieme di E che è unione di semirette chiuse di origine 0, la condizione 1 di a) si può sostituire con la seguente: per ogni varietà affine chiusa H di codimensione finita n contenente x, esiste un sottoinsieme finito di A con al più n elementi il cui inviluppo convesso incontra H (o, equivalentemente, la cui somma è x).[53] Inoltre la somma di ogni famiglia sommabile estratta da A appartiene a $\widetilde{A}$. Generalizzare poi, come in b), agli integrali di funzioni debolmente sommabili. Se A è l'unione delle generatrici estreme di un cono C generato da un compatto convesso K che non contiene l'origine, si ha $\widetilde{A} = C$.

Parte II Teoria degli operatori compatti

1 Generalità

In questa parte considereremo soltanto spazi localmente convessi separati.

Ricordiamo (capitolo 2, § 18, definizione 14) che un'applicazione lineare da uno spazio localmente convesso E in un altro spazio localmente convesso F è compatta (risp. precompatta) se trasforma un opportuno intorno V di 0 in un insieme relativamente compatto (risp. precompatto). A maggior ragione essa è continua. Quando E è normato, nella definizione si può prendere per V la palla unitaria. Se F è quasi-completo, le nozioni di applicazione compatta e di applicazione precompatta coincidono. Tenuto conto del capitolo 0, § 4, proposizione 6′, ne segue che, se E è normabile e F quasi-completo, lo spazio delle applicazioni lineari compatte da E in F è un sottospazio vettoriale chiuso di $L_b(E, F)$. Ricordiamo anche che la trasposta di un'applicazione lineare compatta da uno spazio di Banach in un altro è compatta (capitolo 2, § 18, teorema 12, corollario 3). Questo vale più in generale per la trasposta di un'applicazione lineare compatta da uno spazio localmente convesso in uno spazio $(\mathcal{F})$, quando si muniscono i duali della topologia forte (cfr. capitolo 4, parte II, esercizio 4).

Segnaliamo anche il risultato seguente.

Proposizione 1. Sia u un'applicazione lineare continua da uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Siano E'_c e F'_c i duali di E e di F muniti della topologia della convergenza uniforme sui dischi compatti. Se u è compatta, anche la sua trasposta u' è compatta.

Sia V un intorno discato dell'origine in E tale che $K = u(V)$ sia relativamente compatto. Allora u' manda K^0 in V^0 (capitolo 2, proposizione 25). Ora K^0 è un intorno di 0 in F'_c, mentre V^0 è un insieme equicontinuo di E', dunque relativamente compatto per la topologia debole e, per equicontinuità, anche per la convergenza uniforme sui compatti (e a maggior ragione sui dischi compatti). Ciò conclude la dimostrazione. Si osservi che l'implicazione inversa è evidentemente vera se ogni disco compatto in E'_c è equicontinuo, in particolare se la topologia di E è $\tau(E, E')$.

[53] Così nell'edizione inglese. Per l'equivalenza con la condizione sulle immagini di dimensione finita, l'uguaglianza a x si intende nel quoziente per la direzione di H, ossia si richiede che la somma appartenga a H.

2 Teoremi generali di finitezza

Seguiamo qui quasi parola per parola una recente nota di L. Schwartz.

Teorema 1. Siano u, v due applicazioni lineari da uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Supponiamo che u sia un isomorfismo di E su un sottospazio chiuso di F e che v sia compatta. Allora $w = u + v$ è un omomorfismo con immagine chiusa e nucleo di dimensione finita.

Sia V un intorno discato di 0 tale che $v(V)$ sia relativamente compatto, sia N il nucleo di w e poniamo $W = V \cap N$. Allora

$$u(W) = -v(W) \subset v(V).$$

Dunque $u(W)$ è relativamente compatto e perciò precompatto. Ne segue che W è precompatto, poiché u è un isomorfismo. Lo spazio N possiede quindi un intorno precompatto W di 0 e ha perciò dimensione finita (capitolo 1, § 13, teorema 8). Per dimostrare le altre asserzioni possiamo evidentemente restringere u, v, w a un supplementare topologico di N, che esiste perché N ha dimensione finita (capitolo 2, § 5, teorema di Hahn–Banach, corollario 4). Siamo così ricondotti al caso in cui w è iniettiva. Dobbiamo provare che w è un isomorfismo su un sottospazio chiuso di F. Ciò equivale manifestamente a mostrare che, se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro in E tale che $\lim_{\mathcal{U}} wx$ esista in F, allora $\mathcal{U}$ converge in E.

Sia p la seminorma di Minkowski di V e sia $a = \lim_{\mathcal{U}} p(x)$, con $0 \leq a \leq +\infty$. Se a è finito esiste $A \in \mathcal{U}$ contenuto nel dilatato $(a+1)V$. Allora $v(A)$ è relativamente compatto, dunque esiste $\lim_{\mathcal{U}} vx$ ed esiste pure $\lim_{\mathcal{U}} ux = z$, perché $ux = wx - vx$. Essendo $u(E)$ chiuso, si ha $z = ux_0$ con $x_0 \in E$, e poiché u è un isomorfismo segue $\lim_{\mathcal{U}} x = x_0$. Mostriamo che $a = +\infty$ è impossibile. Altrimenti avremmo

$$\lim_{\mathcal{U}} \frac{wx}{p(x)} = \lim_{\mathcal{U}} w\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 0.$$

Per l'argomento precedente $x/p(x)$ tenderebbe a un punto x_0 e avremmo

$$p(x_0) = \lim_{\mathcal{U}} p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 1, \qquad w(x_0) = 0,$$

in contraddizione con l'iniettività di w.

Teorema 2. Siano u, v due applicazioni lineari da uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Supponiamo che u sia un omomorfismo debole di E su F, che ogni disco compatto di F sia contenuto nell'immagine mediante u di un disco compatto di E e che v sia compatta. Allora $w = u + v$ è un omomorfismo debole di E su un sottospazio chiuso di codimensione finita in F.[54]

Muniamo E' e F' della topologia della convergenza uniforme sui dischi compatti (i loro duali sono allora E e F). La trasposta v' è compatta (proposizione 1). Il sottospazio $u'(F')$ è debolmente chiuso, poiché u è un omomorfismo debole (capitolo 2, § 16, proposizione 27), e quindi è chiuso. Infine u' è continua (capitolo 2, proposizione 28) ed è anzi un isomorfismo sulla propria immagine. Infatti ogni disco equicontinuo del duale F di F', ossia ogni disco compatto di F (o suo sottoinsieme), è per ipotesi contenuto nell'immagine mediante $(u')' = u$ di un insieme equicontinuo del duale di E', precisamente di un disco compatto

[54] Nell'ultima riga dell'enunciato inglese si legge E per lo spazio di arrivo. La dimostrazione riguarda $w(E) \subset F$.

di E. Basta dunque applicare il capitolo 1, proposizione 29, corollario 1. Pertanto u' e v' soddisfano le ipotesi del teorema 1, sicché $w' = u' + v'$ è un omomorfismo di F' su un sottospazio chiuso di E', con nucleo di dimensione finita. Dunque w è un omomorfismo debole (perché $w'(F')$ è debolmente chiuso), e $w(E)$ è chiuso (poiché w' è un omomorfismo, e quindi un omomorfismo debole). Precisamente $w(E)$ coincide con l'ortogonale del nucleo di w', dunque ha codimensione finita. La dimostrazione è conclusa.

Corollario 1. Siano u, v due applicazioni lineari continue da uno spazio E di tipo $(\mathcal{F})$ in un altro spazio dello stesso tipo, F. Supponiamo che u sia suriettiva e v compatta. Allora $w = u + v$ è un omomorfismo di E su un sottospazio chiuso di codimensione finita in F.

L'applicazione u è un omomorfismo (teorema degli omomorfismi di Banach, capitolo 1, § 14, teorema 9), a maggior ragione un omomorfismo debole. La condizione sul sollevamento dei compatti nell'enunciato del teorema 2 è automaticamente soddisfatta (capitolo 4, parte II, § 1, proposizione 1). Si può applicare il teorema 2 e dal fatto che w è un omomorfismo debole segue che è addirittura un omomorfismo (capitolo 4, parte II, § 4, teorema 3).

Corollario 2. Siano E, F, G spazi $(\mathcal{F})$, u un'applicazione lineare continua da E in G e v un'applicazione lineare compatta da F in G, tali che $u(E) + v(F) = G$. Allora u è un omomorfismo di E su un sottospazio chiuso di codimensione finita in G.

Poniamo $H = E \times F$ e siano $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ le applicazioni lineari da H in G definite rispettivamente da $\widetilde{u}(x, y) = ux$ e $\widetilde{v}(x, y) = vy$. Poniamo $\widetilde{w} = \widetilde{u} + \widetilde{v}$, onde $\widetilde{u} = \widetilde{w} + (-\widetilde{v})$. Ora $\widetilde{w}$ è suriettiva, poiché $u(E) + v(F) = G$, e $-\widetilde{v}$ è compatta. Per il corollario 1, $\widetilde{u}$ è dunque un omomorfismo di H su un sottospazio chiuso di codimensione finita in G. La stessa conclusione vale evidentemente per u.

Combinando i teoremi 1 e 2 otteniamo quanto segue.

Corollario 3. Siano u, v applicazioni lineari da uno spazio localmente convesso E in un altro, F. Supponiamo che u sia un isomorfismo di E su F e v sia compatta. Allora $w = u + v$ è un omomorfismo di E su un sottospazio chiuso di codimensione finita in F e il suo nucleo ha dimensione finita.

Nel § 4 vedremo che la dimensione del nucleo di w è uguale alla codimensione della sua immagine (supporremo $E = F$ e u uguale all'applicazione identica di E su F, ipotesi che non limita la generalità).

3 Generalità sullo spettro di un operatore

Cominciamo con alcune generalità di natura algebrica, valide per spazi vettoriali su un corpo arbitrario.

Proposizione 2. Sia v un endomorfismo di uno spazio vettoriale E. Indichiamo con E_n il nucleo e con F_n l'immagine di v^n, per ogni intero $n \geq 0$. In particolare

$$E_0 = 0, \qquad F_0 = E.$$

1) La successione (E_n) è strettamente crescente oppure cresce strettamente fino a un indice finito $n = \nu$, a partire dal quale è costante.

2) La successione (F_n) è strettamente decrescente oppure decresce strettamente fino a un indice finito μ, a partire dal quale è costante.

3) Se entrambe le successioni (E_n) e (F_n) sono definitivamente stazionarie, allora $\nu = \mu$ con le notazioni di 1) e 2), ossia esse sono costanti a partire dallo stesso indice. Poniamo allora $E_\infty = E_\nu$, $F_\infty = F_\nu$. Lo spazio E è somma diretta di E_∞ e F_∞, e v induce un endomorfismo nilpotente nel primo fattore e un automorfismo nel secondo.

Dimostrazione. Si ha

$$(v^p)^{-1}(E_q) = E_{p+q}, \qquad v^p(F_q) = F_{p+q}.$$

D'altra parte, poiché v^n commuta con v, il suo nucleo E_n e la sua immagine F_n sono stabili per v. Pertanto

$$E_{n+1} = v^{-1}(E_n) \supset E_n, \qquad F_{n+1} = v(F_n) \subset F_n,$$

onde (E_n) è crescente e (F_n) decrescente. Se $E_n = E_{n+1}$, si ha

$$(v^p)^{-1}(E_n) = (v^p)^{-1}(E_{n+1}),$$

ossia $E_{n+p} = E_{n+p+1}$, e la successione (E_n) è stazionaria a partire da n. Allo stesso modo, se $F_n = F_{n+1}$ la successione (F_n) è stazionaria a partire da n. Ciò prova 1) e 2). Con le notazioni di 3), avremo provato $\mu \leq \nu$ se mostriamo che $E_n = E_{n+1}$ e $F_n \neq F_{n+1}$ implicano $F_{n+1} \neq F_{n+2}$. Infatti, essendo anche $E_{n+1} = E_{n+2}$, ne seguirebbe che (F_n) continua a decrescere strettamente. Se invece fosse $F_{n+1} = F_{n+2}$, preso un elemento $v^n x$ di F_n, si avrebbe

$$v^{n+1}x \in F_{n+1} = F_{n+2},$$

perciò $v^{n+1}x$ sarebbe della forma $v^{n+2}y$. Allora $v^{n+1}(x - vy) = 0$ e, poiché $E_n = E_{n+1}$, anche $v^n(x - vy) = 0$, ossia

$$v^n x = v^{n+1}y \in F_{n+1}.$$

Avremmo dunque $F_n = F_{n+1}$ contro l'ipotesi. Si prova analogamente che da $F_n = F_{n+1}$ e $E_n \neq E_{n+1}$ segue $E_{n+1} \neq E_{n+2}$, onde $\nu \leq \mu$ e quindi $\mu = \nu$.

Si ha $E_\infty \cap F_\infty = 0$. Infatti, se x appartiene all'intersezione, si ha $x = v^\nu y$ e $v^\nu x = 0$, onde $v^{2\nu}y = 0$ e quindi $v^\nu y = 0$, poiché $E_\nu = E_{2\nu}$. Dunque $x = 0$. Sia $\widetilde{v}$ l'operatore su E/E_∞ indotto da v per passaggio al quoziente. Esso è evidentemente iniettivo, poiché $E_\nu = E_{\nu+1}$. Mostriamo che è suriettivo. Infatti, applicando a $\widetilde{v}$ il ragionamento precedente, in cui l'indice corrispondente a ν è ora zero, se $\widetilde{v}$ non fosse suriettivo la successione degli $\widetilde{v}^n(E/E_\infty)$ sarebbe strettamente decrescente. Sarebbe dunque strettamente decrescente la successione delle loro immagini inverse

$$v^n(E) + E_\infty,$$

e la successione dei $v^n(E)$ non potrebbe essere definitivamente stazionaria, contro l'ipotesi. Dunque $\widetilde{v}$ è un automorfismo, e tale è anche $\widetilde{v}^\nu$. In particolare

$$\widetilde{v}^\nu(E/E_\infty) = E/E_\infty,$$

il che si può anche scrivere $v^\nu(E) + E_\infty = E$, ossia $F_\infty + E_\infty = E$. Abbiamo così provato che E è somma diretta di F_∞ ed E_∞. Dire che $\widetilde{v}$ è un automorfismo equivale allora a dire che v induce un automorfismo di F_∞. D'altra parte v^ν è nullo su E_∞, e la restrizione di v a E_∞ è dunque nilpotente. Ne segue il corollario.

Corollario. Supponiamo che valgano le condizioni di 3) e che E_∞ abbia dimensione finita. La dimensione del nucleo di v è allora uguale alla codimensione della sua immagine.

Basta verificarlo separatamente per le restrizioni di v a E_∞ e a F_∞. Nello spazio di dimensione finita E_∞ il fatto è ben noto. Quanto a F_∞, v vi induce un automorfismo, sicché la dimensione del suo nucleo e la codimensione della sua immagine sono entrambe nulle.

Ricordiamo che lo *spettro* di un elemento u di un'algebra A con unità 1 è l'insieme degli scalari λ per i quali $\lambda 1 - u$ non è invertibile. In particolare, quando u è un operatore lineare in uno spazio vettoriale E, per suo spettro intendiamo lo spettro di u nell'algebra degli endomorfismi di E, oppure, quando E è uno spazio vettoriale topologico, in quella degli endomorfismi continui di E. Se E è uno spazio $(\mathcal{F})$, lo spettro di u è lo stesso nelle due algebre: sappiamo infatti che, se un operatore continuo $v = \lambda 1 - u$ è invertibile fra gli endomorfismi lineari, ossia se è biiettivo, anche il suo inverso è continuo (teorema degli omomorfismi, capitolo 1, § 14, teorema 9). Dato un endomorfismo u di uno spazio vettoriale, uno scalare λ è un *autovalore* di u se esiste $x \neq 0$ in E tale che $ux = \lambda x$. Poiché ciò si scrive $(\lambda 1 - u)x = 0$, l'operatore $\lambda 1 - u$ non è iniettivo, dunque non è invertibile: ogni autovalore è un valore spettrale. In dimensione infinita l'implicazione inversa è in generale falsa. Gli $x \neq 0$ tali che $ux = \lambda x$ si chiamano *autovettori* associati all'autovalore λ. L'autospazio relativo a λ è dunque il nucleo di

$$\lambda 1 - u = v_\lambda.$$

Più in generale, per ogni scalare λ, posto $v_\lambda = \lambda 1 - u$, poniamo

$$E_{\lambda,n} = (v_\lambda^n)^{-1}(0), \qquad F_{\lambda,n} = v_\lambda^n(E), \qquad E_\lambda = \bigcup_n E_{\lambda,n}, \quad F_\lambda = \bigcap_n F_{\lambda,n}.$$

La successione $(E_{\lambda,n})$ è crescente, la $(F_{\lambda,n})$ decrescente. Per $\lambda = 0$ si ritrovano le successioni di spazi della proposizione 2 relative all'operatore u. Lo spazio E_λ si chiama anche *sottospazio spettrale* di E relativo a λ e la sua dimensione si chiama *molteplicità spettrale* di λ.[55]

Proposizione 3. Se λ e λ' sono scalari distinti, allora $E_\lambda \subset F_{\lambda'}$.

Sia $x \in E_\lambda$, ossia $(\lambda 1 - u)^n x = 0$ per un certo n. Dobbiamo mostrare che, per ogni m, si può scrivere $x = (\lambda' 1 - u)^m y$. Ora, il sottospazio G generato da x per l'azione di u (o, equivalentemente, di $\lambda 1 - u$) ha dimensione finita $\leq n$. La restrizione di u a G ha come unico possibile autovalore λ. Pertanto la restrizione di $\lambda' 1 - u$ a G è invertibile e altrettanto vale per $(\lambda' 1 - u)^m$. Di conseguenza

$$x \in (\lambda' 1 - u)^m G = G,$$

il che conclude la dimostrazione.

Ricordiamo che, se E ha dimensione finita e il corpo degli scalari è algebricamente chiuso (per esempio il corpo dei numeri complessi), E è somma diretta dei sottospazi spettrali E_λ corrispondenti agli autovalori di u, che sono le radici del polinomio caratteristico

$$P_u(\lambda) = \det(\lambda 1 - u),$$

di grado $n = \dim E$. L'ordine di molteplicità di una radice coincide con la sua molteplicità spettrale.

[55] Per F_λ l'edizione inglese stampa un'unione. Si intende l'intersezione della successione decrescente delle immagini, come mostra anche la dimostrazione seguente.

Proposizione 4. Sia E uno spazio di Banach. L'insieme degli elementi invertibili di $L(E)$ è aperto e contiene gli elementi $1-u$ con $\|u\|<1$.

Dimostrazione. Se $\|u\|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ converge assolutamente e si verifica subito che la sua somma è l'inverso di $1-u$. Sia v un elemento invertibile di $L(E)$. Allora, per $w \in L(E)$,

$$v+w = v\big(1-(-v^{-1}w)\big)$$

è invertibile se $\|v^{-1}w\|<1$, a maggior ragione se $\|v^{-1}\|\,\|w\|<1$, dunque in ogni caso per w sufficientemente piccolo. Ciò conclude la dimostrazione.

Corollario. Per ogni $u \in L(E)$ lo spettro $\sigma(u)$ di u è un sottoinsieme compatto del corpo degli scalari. Da $\lambda \in \sigma(u)$ segue $|\lambda| \le \|u\|$.

Per definizione $\sigma(u)$ è l'immagine inversa, mediante $\lambda \mapsto \lambda 1-u$, dell'insieme degli elementi non invertibili di $L(E)$. Poiché quest'ultimo è chiuso per la proposizione precedente, lo è anche $\sigma(u)$. Inoltre, se $|\lambda|>\|u\|$, per la stessa proposizione $1-(1/\lambda)u$ è invertibile. Tale è quindi anche $\lambda 1-u$, e λ non appartiene a $\sigma(u)$. In altri termini, $\lambda \in \sigma(u)$ implica $|\lambda| \le \|u\|$. Dunque lo spettro di u è limitato e quindi compatto, essendo chiuso. Si osservi che la proposizione e il suo corollario restano validi per un'algebra normata completa con unità.

Se u è un operatore continuo in uno spazio localmente convesso non normabile, il suo spettro in generale non è né chiuso né limitato (cfr. esercizio 1). In certi casi tuttavia ci si può ricondurre a uno spazio di Banach grazie alla proposizione seguente.

Proposizione 5. Siano E uno spazio localmente convesso, F un suo sottospazio vettoriale munito di una topologia localmente convessa più fine di quella indotta da E, u un'applicazione lineare continua da E in F, e sia ϕ l'inclusione di F in E. Allora, fatta eccezione per lo scalare 0, lo spettro di ϕu in $L(E)$ coincide con lo spettro di $u\phi$ in $L(F)$. Se λ è un elemento non nullo dello spettro, l'autospazio e il corrispondente sottospazio spettrale sono gli stessi per $u\phi$ e per ϕu.

Dobbiamo anzitutto mostrare che, per uno scalare non nullo λ, dire che $\lambda 1-\phi u$ è invertibile in $L(E)$ equivale a dire che $\lambda 1-u\phi$ è invertibile in $L(F)$. Dividendo per λ e scrivendo u al posto di $-(1/\lambda)u$, basta provarlo per $1+\phi u$ e $1+u\phi$. Supponiamo che $1+\phi u$ abbia in $L(E)$ un inverso, che scriviamo $1+v$, con $v \in L(E)$. Allora

$$\phi u + v + \phi u v = \phi u + v + v\phi u = 0. \tag{1}$$

Dalla prima relazione in (1) si ricava $v=\phi w$, dove $w=-u(1+v) \in L(E,F)$. Sostituendo v in (1) si ottiene

$$\phi(u+w+u\phi w) = \phi(u+w+w\phi u) = 0.$$

Sopprimendo a sinistra il fattore ϕ, il che è possibile perché ϕ è iniettiva, e moltiplicando a destra per ϕ le relazioni ottenute, si ha

$$u\phi + w\phi + (u\phi)(w\phi) = u\phi + w\phi + (w\phi)(u\phi) = 0.$$

Ciò significa precisamente che $1+w\phi \in L(F)$ è inverso di $1+u\phi$ in $L(F)$. Analogamente si mostra che, se $1+u\phi$ è invertibile, anche $1+\phi u$ è invertibile. Sia λ un valore spettrale non nullo di $u\phi$ e ϕu. È evidente che l'autospazio in F relativo a $u\phi$ è l'intersezione di F con l'autospazio in E relativo a ϕu. Ma quest'ultimo è già contenuto in F, poiché $\phi u x = \lambda x$ implica $x=(1/\lambda)\phi u x \in F$. Ne segue l'identità degli autospazi. Più in generale, per ogni

n i nuclei di $(\lambda 1 - \phi u)^n$ in E e di $(\lambda 1 - u\phi)^n$ in F coincidono: si vede infatti subito che, a meno del fattore λ^n, i due operatori si scrivono rispettivamente

$$1 + \phi u_n \qquad \text{e} \qquad 1 + u_n \phi$$

per un opportuno $u_n \in L(E, F)$. Ne segue l'identità dei sottospazi spettrali di ϕu e $u\phi$.

Corollario. Sia u un operatore limitato su uno spazio localmente convesso quasi-completo E. Più in generale, supponiamo che esistano un intorno V di 0 e un disco limitato B in E tali che $u(V) \subset B$ e che lo spazio E_B generato da B, munito della norma di Minkowski di B, sia completo. Allora lo spettro di u è un sottoinsieme compatto del corpo degli scalari.

Dimostrazione. Possiamo considerare u come un'applicazione continua di E in E_B. Per la proposizione precedente, salvo eventualmente lo zero, il suo spettro in $L(E)$ coincide con lo spettro di un operatore continuo nello spazio di Banach E_B, che è compatto per il corollario della proposizione 4. Ciò conclude la dimostrazione: se 0 non appartiene allo spettro di u in $L(E)$, allora u è un isomorfismo di E su E e B è un intorno limitato di zero. Pertanto E è isomorfo a E_B e si può applicare direttamente lo stesso corollario.

Esercizio 1. Sia M uno spazio localmente compatto e sia $E = C(M)$. Per $f \in E$ si indichi con u_f l'operatore

$$g \longmapsto fg$$

in E. Mostrare che lo spettro di u_f coincide con $f(M)$. Dedurne che ogni sottoinsieme non vuoto del corpo degli scalari può essere lo spettro di un operatore continuo in un opportuno spazio localmente convesso. Se il sottoinsieme dato è unione di una successione di compatti, è addirittura lo spettro di un operatore continuo in uno spazio di Fréchet. Se è compatto, è lo spettro di un operatore continuo in uno spazio di Banach E (prendere $E = C(M)$, dove M è il compatto considerato).

Esercizio 2. Siano E uno spazio di Banach complesso e $u \in L(E)$. Si consideri la funzione

$$\phi(\lambda) = (\lambda 1 - u)^{-1},$$

definita nel complementare dello spettro di u e a valori in $L(E)$. Mostrare che $\phi(\lambda)$ tende a 0 quando $|\lambda|$ tende all'infinito e che, per ogni forma lineare continua w su $L(E)$, $\langle \phi(\lambda), w \rangle$ è una funzione olomorfa di λ. Dedurne che lo spettro di u non è vuoto (altrimenti applicare il teorema di Liouville alla funzione intera $\langle \phi(\lambda), w \rangle$, nulla all'infinito).

Esercizio 3. Sia E lo spazio delle funzioni continue f su $\mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{t \to -\infty} f(t)e^t = 0.$$

Munire E di una topologia naturale che ne faccia uno spazio di Fréchet. Sia u l'operatore di traslazione $(uf)(t) = f(t - h)$, dove $h > 0$. Mostrare che u è un operatore continuo il cui spettro è vuoto (mostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u^n$ converge in $L_b(E)$ per ogni λ). Sia ora u un operatore limitato in uno spazio localmente convesso E. Mostrare che lo spettro di u non è vuoto (utilizzare l'esercizio 2).[56]

[56] L'esponente t e il limite per $t \to -\infty$ riproducono la formula stampata. Con questa sola condizione l'affermazione sullo spettro della traslazione non vale: la funzione costante 1 appartiene a E ed è un autovettore di autovalore 1.

Esercizio 4. Sia u un operatore lineare in uno spazio vettoriale E. Con le notazioni della proposizione 3, mostrare che i sottospazi spettrali E_λ sono linearmente indipendenti.

4 La teoria di Riesz degli operatori compatti

Lemma. Sia u un operatore compatto in uno spazio localmente convesso E e sia $v = 1 + u$. La successione dei nuclei di v^n è definitivamente stazionaria.

Dimostrazione. Sia V un intorno di 0 in E e sia A un disco compatto tale che $u(V) \subset A$. Lo spazio E_A generato da A, munito della norma di Minkowski di A, è uno spazio di Banach. L'inclusione ϕ di E_A in E è compatta e u definisce un'applicazione lineare continua u_0 da E in E_A. D'altra parte l'operatore $u_0\phi$ indotto da u in E_A è compatto, per la compattezza di ϕ. Per la proposizione 5, per dimostrare il lemma basta provarlo per l'operatore compatto $u_0\phi$ nello spazio di Banach E_A. Possiamo dunque supporre che E sia uno spazio di Banach. Procediamo per assurdo. Se la successione dei nuclei E_n di v^n fosse strettamente crescente, potremmo trovare una successione infinita (y_n) con $y_n \in E_{n+1}$, $\|y_n\| \leq 1$ e distanza di y_n da E_n almeno uguale a $\frac{1}{2}$ (cfr. capitolo 1, § 13, lemma). Avremmo allora, per $m > n$,

$$uy_n - uy_m = (1 - v)y_m - (1 - v)y_n = y_m - x,$$

dove $x = vy_m + (1 - v)y_n \in E_m$. Pertanto

$$\|uy_n - uy_m\| \geq \tfrac{1}{2}.$$

Ora la successione (uy_n) è relativamente compatta, poiché è immagine di una successione estratta dalla palla unitaria, e dovrebbe avere un punto di aderenza. Ciò è assurdo e conclude la dimostrazione.

Applichiamo il lemma a $v' = 1 + u'$ in E', con la topologia della convergenza uniforme sui dischi compatti, per la quale u' è compatto in virtù della proposizione 1. Ne segue che la successione dei nuclei di $(v')^n$ è definitivamente stazionaria. Ora $(v')^n = (v^n)'$ e si può scrivere

$$v^n = (1 + u)^n = 1 + u_n, \qquad u_n = nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + \cdots + u^n,$$

dove u_n è un operatore compatto in E. Dunque, per il corollario 3 del § 2, v^n è un omomorfismo di E su un sottospazio chiuso di codimensione finita in E, che è pertanto l'ortogonale del nucleo di $(v^n)'$. Poiché quest'ultimo resta costante per n abbastanza grande, la successione dei $v^n(E)$ è definitivamente stazionaria e la sua intersezione è un sottospazio chiuso F_∞ di codimensione finita. Applicando la proposizione 2, 3), si vede che le successioni $v^{-n}(0)$ e $v^n(E)$ sono stazionarie a partire dallo stesso indice ν e che E è somma diretta algebrica di

$$E_\infty = v^{-\nu}(0) \qquad \text{e} \qquad F_\infty = v^\nu(E).$$

La somma è anche diretta topologica, poiché F_∞ è chiuso e di codimensione finita (capitolo 1, § 12, teorema 7, corollario 3). Inoltre v è nilpotente in E_∞ e in F_∞ è un automorfismo in senso algebrico (proposizione 2, 3)), ossia un'applicazione biiettiva di F_∞ su se stesso. Poiché è anche un omomorfismo in F_∞, per il risultato del § 2 applicato all'operatore $1 + u|_{F_\infty}$ indotto da v in F_∞, si vede che è addirittura un isomorfismo di F_∞ su se stesso. Riassumendo, possiamo ora enunciare il teorema fondamentale della teoria di Riesz.

Teorema 5. Sia u un operatore compatto in uno spazio localmente convesso E e sia $v = 1 + u$. Allora v è un omomorfismo di E su un sottospazio chiuso di E di codimensione finita, uguale alla dimensione del nucleo. Posto

$$E_\infty = \bigcup_n v^{-n}(0), \qquad F_\infty = \bigcap_n v^n(E),$$

gli spazi E_∞ e F_∞ sono supplementari topologici, stabili per u e per v, ed E_∞ ha dimensione finita. L'operatore v induce un operatore nilpotente in E_∞ e un automorfismo di spazio vettoriale topologico in F_∞.

(La prima asserzione è contenuta nel corollario 3 del § 2 e nel corollario della proposizione 2.)

Corollario 1. L'immagine $v(E)$ è l'ortogonale del nucleo di v' e l'immagine $v'(E')$ è l'ortogonale del nucleo di v.

La prima asserzione segue dal fatto che $v(E)$ è chiuso. La seconda segue dal fatto che $v'(E')$ è chiuso in E' munito della topologia della convergenza uniforme sui dischi compatti (per la proposizione 1, che consente di applicare il teorema a $v' = 1 + u'$) e quindi anche in E' debole.

Corollario 2. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

a) v è iniettivo,	a′) v' è iniettivo,
b) v è suriettivo,	b′) v' è suriettivo,
c) v è un automorfismo,	c′) v' è un automorfismo.

Qui v' è considerato come operatore su E' con la topologia della convergenza uniforme sui dischi compatti.[57]

L'equivalenza di a) e b) segue dall'uguaglianza fra la dimensione del nucleo e la codimensione dell'immagine di v. Inoltre, poiché v è un omomorfismo, a) e b) implicano c) e le sono quindi equivalenti. Ciò prova anche l'equivalenza di a′), b′) e c′). Infine l'equivalenza di b) e a′) segue dal corollario 1, che implica più in generale il corollario seguente.

Corollario 3. La dimensione del nucleo di v, la dimensione del nucleo di v', la codimensione dell'immagine di v e quella dell'immagine di v' sono uguali.

Corollario 4. Poniamo

$$E'_\infty = \bigcup_n (v')^{-n}(0), \qquad F'_\infty = \bigcap_n (v')^n(E').$$

Allora E'_∞ è l'ortogonale di F_∞ e F'_∞ è l'ortogonale di E_∞. In particolare E_∞ ed E'_∞ hanno la stessa dimensione.

Introdotto l'intero ν a partire dal quale le quattro successioni $v^{-n}(0)$, ecc., diventano costanti, basta applicare il corollario 1 a $v^\nu = 1 + u_\nu$, dove u_ν è un operatore compatto in E.

[57] Nell'edizione inglese a) e a′) recano «bijective», mentre b′) reca «onto». Si esplicita qui l'iniettività che interviene nella dimostrazione dell'equivalenza.

Proposizione 6. Sia u un operatore compatto in uno spazio localmente convesso E. Per ogni $\lambda \neq 0$ dello spettro di u esiste un autovettore non nullo, ossia λ è un autovalore di u. Il corrispondente sottospazio spettrale E_λ di E ha dimensione finita, uguale alla dimensione del sottospazio spettrale E'_λ corrispondente alla trasposta u' di u. Gli operatori u e u' hanno gli stessi autovalori non nulli con le stesse molteplicità.

Basta applicare i corollari precedenti all'operatore compatto $-(1/\lambda)u$ e al corrispondente operatore

$$1 - \frac{1}{\lambda}u = \frac{1}{\lambda}(\lambda 1 - u).$$

Corollario. I sottospazi E_λ, per $\lambda \neq 0$, sono topologicamente indipendenti.

Con ciò intendiamo che, per ogni $\lambda \neq 0$, esiste un sottospazio vettoriale chiuso di E che contiene gli $E_{\lambda'}$ con λ' diverso da λ e da 0 e la cui intersezione con E_λ è zero. Basta scegliere F_λ, con le notazioni della proposizione 3.

Teorema 4. Sia u un operatore compatto in uno spazio localmente convesso E. Lo spettro di u è un insieme compatto e ogni suo punto non nullo è isolato.

Enunciato equivalente. Lo spettro di u è finito oppure è costituito da 0 e dai punti di una successione convergente a 0.

Dimostrazione. Sappiamo che lo spettro di u è compatto (proposizione 5, corollario). Sia ora λ un suo elemento non nullo. Mostriamo che è un punto isolato. Con le notazioni della proposizione 3, E è somma diretta topologica dei sottospazi chiusi E_λ e F_λ, stabili per u. Se u_1 e u_2 sono gli operatori indotti da u, si ha evidentemente $\sigma(u) = \sigma(u_1) \cup \sigma(u_2)$. Ora $\sigma(u_1)$ si riduce a λ, mentre $\sigma(u_2)$ è compatto (per quanto precede) e non contiene λ: altrimenti F_λ conterrebbe un autovettore non nullo relativo a λ. Ne segue la conclusione.

Esercizio 1. Sia E uno spazio localmente convesso.

a) Se u è un operatore lineare compatto (risp. limitato) in E e $v = 1 + u$ è invertibile in $L(E)$, mostrare che l'inverso di v ha la stessa forma di v (utilizzare il fatto che gli operatori compatti, risp. limitati, formano un ideale bilatero in $L(E)$).

b) Dedurne che è equivalente dire che v è invertibile in $L(E)$ oppure nell'algebra $L(E_0)$ degli operatori lineari continui per una topologia localmente convessa su E più fine di quella data, con gli stessi sottoinsiemi limitati e tale che $L(E_0) \subset L(E)$.

c) Sia u un operatore compatto in E. Indichiamo con E_0 lo spazio E munito di una topologia localmente convessa tale che ogni operatore compatto in E sia continuo in E_0. Mostrare che è equivalente dire che $1 + u$ è invertibile in $L(E)$ oppure in $L(E_0)$.

Esercizio 2. Sia (λ_i) una successione tendente a zero, sia E lo spazio ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$ oppure lo spazio c_0, e sia u l'operatore di moltiplicazione per (λ_i) in E. Mostrare che lo spettro di u è costituito da 0 e dall'insieme dei λ_i. Dedurne che ogni sottoinsieme compatto non vuoto del corpo degli scalari, in cui ogni punto non nullo sia isolato, è lo spettro di un opportuno operatore compatto in uno spazio E. Mostrare che la proposizione 6 e il suo corollario sono falsi se non si esclude il valore spettrale 0.

Esercizio 3. a) Sviluppare la nozione di funzione olomorfa, o meromorfa, su un aperto del piano complesso a valori in uno spazio localmente convesso E.

b) Mostrare che, se u è un operatore lineare continuo in uno spazio di Banach complesso E, la funzione $\lambda \mapsto (\lambda 1 - u)^{-1}$, definita nel complementare dello spettro di u e a valori nello spazio di Banach $L(E)$, è olomorfa. Generalizzare al caso in cui u è un operatore limitato

in uno spazio localmente convesso E, munendo $L(E)$ della topologia della convergenza uniforme sui limitati (cfr. § 3, esercizio 2).

c) Sia u un operatore compatto nello spazio localmente convesso complesso E. Mostrare che la funzione $(1-zu)^{-1}$, a valori in $L_b(E)$, è meromorfa su tutto il piano complesso. Per b) basta provare la meromorfia in un punto z tale che $1/z$ sia un autovalore. Si utilizzi a questo scopo la decomposizione spettrale $E = E_{1/z} + F_{1/z}$.

Parte III Criteri generali di compattezza

1 Il teorema di Šmulian

Proposizione 1. Siano E uno spazio compatto, F uno spazio metrico, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E che ricopre E e (f_i) una successione relativamente compatta in $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Esiste allora una sottosuccessione convergente in $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Sia A la chiusura compatta dell'insieme delle f_i. Su A la $\mathfrak{S}$-convergenza coincide con la convergenza puntuale e persino con la convergenza puntuale su un sottoinsieme denso di E. Basta dunque trovare una sottosuccessione delle f_i convergente in ciascun punto di E o anche solo di un suo sottoinsieme denso. Ciò ci riconduce al caso in cui $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei sottoinsiemi di E ridotti a un punto. Se E è metrizzabile, essendo compatto ammette una successione densa (x_i). Allora A è metrizzabile per la convergenza puntuale sull'insieme degli x_i, da cui la conclusione in questo caso. Se non supponiamo E metrizzabile, consideriamo lo spazio compatto $\widetilde{E}$ quoziente di E per la relazione di equivalenza «$f_i(x) = f_i(y)$ per ogni i». Allora $C_s(\widetilde{E},F)$ si identifica con un sottospazio chiuso di $C_s(E,F)$. D'altra parte $\widetilde{E}$ è metrizzabile, poiché per compattezza la sua topologia è la meno fine fra quelle che rendono continue le applicazioni f_i a valori nello spazio metrico F. Siamo così ricondotti al caso precedente.

Corollario 1. Nella proposizione 1, invece di supporre E compatto, basta supporre che esista una successione di sottoinsiemi compatti di E la cui unione sia densa.

Infatti dalla proposizione 1 segue che da (f_i) si può estrarre una sottosuccessione convergente in ogni punto di E_1, da questa una sottosuccessione convergente in ogni punto di E_2, e così via. Il procedimento diagonale dà infine una sottosuccessione di (f_i) convergente in ogni punto di $\bigcup_i E_i$. Ciò conclude la dimostrazione, poiché quest'ultimo insieme è denso.

Corollario 2. Sia E uno spazio localmente convesso separato tale che in E' esista una successione di sottoinsiemi debolmente compatti la cui unione sia totale. Da ogni successione relativamente compatta in E si può allora estrarre una sottosuccessione convergente.

Possiamo evidentemente supporre che l'unione dei compatti deboli di E' sia addirittura debolmente densa. Interpretando, come al solito, E come spazio di funzioni scalari continue su E' debole, munito di una $\mathfrak{S}$-topologia, basta applicare il corollario 1. In particolare supponiamo che in E esista una successione di intorni di 0 per una topologia compatibile con la dualità (E,E'), dunque di intorni per $\tau(E,E')$, la cui intersezione sia $\{0\}$. Per polarità si vede subito che esiste in E' una successione di dischi debolmente compatti la cui unione è densa. Si può allora applicare il corollario 2. In particolare, prendendo per E lo spazio debole associato a uno spazio localmente convesso metrizzabile, troviamo il teorema seguente.

Teorema 1 (Šmulian). Sia E uno spazio localmente convesso metrizzabile. Da ogni successione relativamente debolmente compatta di E si può estrarre una sottosuccessione

debolmente convergente.

Esercizio 1. Mostrare che la proposizione 1 è falsa senza l'ipotesi che F sia metrizzabile (si prenda per E uno spazio ridotto a un punto).

Esercizio 2. Siano E uno spazio compatto, F uno spazio metrico, A un sottoinsieme di $C_s(E,F)$ e f un punto della chiusura di A. Mostrare che f appartiene alla chiusura di un sottoinsieme numerabile di A. (Per ogni intero $n>0$, mostrare che esiste un sottoinsieme finito F_n di A tale che per ogni $x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ esista $f_x\in F_n$ con

$$d(f_x(x_i),f(x_i))\leq 1/n \qquad (1\leq i\leq n).$$

)

Esercizio 3. Sia E uno spazio localmente convesso separabile. I sottoinsiemi debolmente compatti del duale sono allora metrizzabili, e quindi da ogni successione relativamente debolmente compatta di E' si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente. Mostrare che l'enunciato è falso se E non è separabile (esempio: $E=\ell^\infty$ e la successione delle forme coordinate su E).

2 Il teorema di Eberlein

Proposizione 2. Siano E uno spazio compatto, F uno spazio metrico, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E che ricopre E e A un sottoinsieme di $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Allora A è relativamente compatto se e solo se ogni successione in A ammette un punto di aderenza in $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Dobbiamo provare soltanto la sufficienza. Poiché la condizione enunciata implica che A è precompatto (criterio di Weil, capitolo 0), basta mostrare che la chiusura di A in $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ è completa. A questo scopo mostriamo che la sua chiusura per la convergenza puntuale è completa per la convergenza puntuale e quindi, a maggior ragione, per la $\mathfrak{S}$-convergenza (capitolo 0, § 4, proposizione 6, corollario). Siamo così ricondotti al caso della convergenza puntuale. Per ogni $x\in E$, $A(x)$ è un sottoinsieme di F in cui ogni successione ammette un punto di aderenza. Quindi $A(x)$ è relativamente compatto in F, poiché F è metrico. Per il teorema di Tychonoff, A è relativamente compatto in $\mathcal{F}_s(E,F)=F^E$ con la convergenza puntuale. Resta da provare che la chiusura di A in $\mathcal{F}_s(E,F)$ è contenuta in $C_s(E,F)$, ossia che un'applicazione f da E in F appartenente alla chiusura puntuale di A è continua. Ragioniamo per assurdo. In caso contrario esisterebbe un punto $a\in E$ in cui f non è continua, e quindi un $\varepsilon>0$ tale che in ogni intorno V di a si trovi $x\in V$ con

$$d(f(x),f(a))\geq\varepsilon.$$

Potremmo costruire per induzione una successione (f_i) in A e una successione (x_i) in E, con $x_0=a$, tali che, per $n\geq 1$,

$$\begin{array}{ll} 1) & d(f_n(x_i),f(x_i))\leq 1/n \quad (0\leq i\leq n-1),\\ 2) & d(f_i(x_n),f_i(x_0))\leq 1/n \quad (0\leq i\leq n),\\ 3) & d(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon. \end{array}$$

Supponiamo costruite le due successioni fino all'indice $n-1$. Determiniamo f_n in modo da ottenere 1), il che è possibile perché f appartiene alla chiusura di A. Costruiamo poi x_n in modo che valgano 2) e 3), servendoci del fatto che l'insieme degli $x_n\in E$ che soddisfano 2) è un intorno di $x_0=a$. Sia g un punto di aderenza della successione (f_n) in $C_s(E,F)$,

che esiste per l'ipotesi su A, e sia x un punto di aderenza di (x_n) in E. Per 1) si ha $f(x_i) = g(x_i)$ per ogni i. Per 2) si ha $f_i(x) = f_i(x_0)$ per ogni i e, tenendo conto di 1),

$$d(f_n(x), f(x_0)) \leq 1/n$$

per ogni n, onde $g(x) = f(x_0)$. Poiché g è continua, $g(x)$ è un punto di aderenza di $(g(x_i))$. Dunque $f(x_0)$ è un punto di aderenza di $(f(x_i))$, contro la condizione 3). Ciò conclude la dimostrazione.

Teorema 2 (Eberlein). Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme. Supponiamo che ogni successione estratta da A ammetta un punto di aderenza e che l'inviluppo convesso chiuso di A sia completo per $\tau(E, E')$. Allora A è relativamente compatto.

Poiché A è precompatto, basta mostrare che la sua chiusura è completa. Basta, a maggior ragione, che la sua chiusura debole sia debolmente completa, e ciò ci riconduce al caso in cui E abbia la topologia debole. Poiché l'inviluppo convesso chiuso di A è completo per $\tau(E, E')$, è chiuso nel completamento $\widehat{E}$ di E per $\tau(E, E')$, e quindi è debolmente chiuso in tale spazio, essendo convesso. Basta allora mostrare che la chiusura debole di A in $\widehat{E}$ è debolmente compatta, poiché questa chiusura è contenuta in E. Possiamo quindi supporre E completo per $\tau(E, E')$. Poiché A è evidentemente limitato e pertanto relativamente compatto nel duale algebrico di E' munito della topologia debole, basta mostrare che ogni forma X su E' appartenente alla chiusura di A per la convergenza puntuale appartiene a E. Ora, per ogni sottoinsieme debolmente compatto K di E', la restrizione X_K di X a K appartiene alla chiusura, per la convergenza puntuale, dell'insieme A_K delle restrizioni a K degli $x \in A$. È chiaro che ogni successione estratta da A_K ha un punto di aderenza in $C_s(K)$. Per la proposizione 2, A_K è dunque relativamente compatto in $C_s(K)$ e X_K è continua. Poiché ciò vale per ogni disco debolmente compatto K di E', ne segue che X appartiene a E, essendo E completo per $\tau(E, E')$ (capitolo 2, § 14, teorema 10, corollario 3). Applicando il teorema 2 a una topologia debole si ottiene il risultato seguente, equivalente a uno già noto.

Corollario. Sia E uno spazio localmente convesso quasi-completo. Un sottoinsieme di E è relativamente debolmente compatto se e solo se ogni successione che se ne estrae ammette un punto di aderenza debole.

Teorema 3. Sia K uno spazio compatto e sia A un sottoinsieme di $C(K)$. Allora A è relativamente debolmente compatto se e solo se è limitato e relativamente compatto in $C_s(K)$.

La necessità è immediata. Per la sufficienza, in virtù del teorema sulla chiusura debole in $C(K)$, oppure del § 1, proposizione 1, da ogni successione in A possiamo estrarre una sottosuccessione che converge puntualmente a una funzione continua. La conclusione segue dalla proposizione seguente.

Proposizione 3. Una successione (f_i) in $C(K)$, con K compatto, converge debolmente a $f \in C(K)$ se e solo se è limitata e converge puntualmente a f.

La necessità è immediata. Poiché le forme lineari continue su $C(K)$ sono le misure su K, la sufficienza segue dal teorema di Lebesgue.

Esercizio 1. Diremo che uno spazio ha la proprietà (E) se ogni suo sottoinsieme dal quale si possano estrarre soltanto successioni dotate di un punto di aderenza è relativamente compatto. Siano E uno spazio localmente compatto oppure metrizzabile, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi di E che ricopre E, e F uno spazio uniforme. Mostrare che $C_{\mathfrak{S}}(E, F)$ ha la proprietà (E) se e solo se la possiede F. (Esaminare il caso in cui E è compatto, poi quello della convergenza puntuale e infine quello in cui F è il corpo dei reali, considerando la topologia di F come la meno fine fra quelle che rendono continua una certa famiglia di funzioni reali su F.)

Esercizio 2. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme convesso.

a) A è relativamente debolmente compatto se e solo se $\overline{A}$ è completo e la sua immagine mediante ogni applicazione lineare continua da E in uno spazio di Banach arbitrario F è relativamente debolmente compatta. (Si osservi che E è isomorfo a un sottospazio vettoriale topologico di un prodotto di spazi di Banach.)

b) Mostrare che nell'enunciato precedente si può prendere per F lo spazio ℓ^∞ delle successioni limitate. (Per a) si può supporre che E sia uno spazio di Banach e, inoltre, che A sia discato. Dobbiamo mostrare che l'applicazione identica da $G = E_A$ in E è debolmente compatta o, equivalentemente, che la sua trasposta manda la palla unitaria di E' in un sottoinsieme di G' relativamente compatto per $\sigma(G', G'')$ (capitolo 2, § 18, teorema 13, corollario 3). Mostrare che basta verificare che l'immagine di ogni successione (x'_i) estratta dalla palla unitaria di E' è relativamente compatta per $\sigma(G', G'')$, ed esaminare l'applicazione $ux = (\langle x, x'_i\rangle)_i$ da E in ℓ^∞.)

c) Supponiamo E separabile. Nell'enunciato a) si può allora prendere per F lo spazio c_0. (Con le notazioni di b), si osservi che basta provare che la restrizione alla palla unitaria di E' dell'applicazione $E' \to G'$ è continua per $\sigma(E', E)$ e $\sigma(G', G'')$, e basta verificarne la continuità nell'origine. Poiché la palla unitaria di E' è debolmente metrizzabile, basta mostrare che per ogni successione (x'_i) di E' tendente a zero per $\sigma(E', E)$, la sua immagine in G' tende a zero per $\sigma(G', G'')$.) L'ipotesi di separabilità di E è essenziale: in sua assenza un sottoinsieme A di E può non essere relativamente debolmente compatto, pur avendo immagine compatta in c_0 mediante ogni applicazione lineare continua.[58]

Esempio. Si prenda $E = \ell^\infty$ e per A un sottoinsieme limitato di ℓ^∞, debolmente metrizzabile e non relativamente debolmente compatto, per esempio una successione debolmente di Cauchy che non converga debolmente (cfr. § 3, esercizio supplementare 4).

Esercizio 3. Provare l'analogo dell'esercizio 2 sostituendo la compattezza debole con la compattezza. La dimostrazione è simile, ma non richiede il teorema di Eberlein.

Esercizio 4. Siano E uno spazio localmente convesso e A un sottoinsieme convesso di E. Allora A è relativamente debolmente compatto se e solo se la sua chiusura è completa e, per ogni successione decrescente di sottoinsiemi convessi non vuoti A_i di A, si ha

$$\bigcap_i \overline{A_i} \neq \varnothing.$$

(Utilizzando l'esercizio 2, a), ricondursi al caso in cui E è uno spazio di Banach. Basta allora mostrare che ogni successione (x_i) estratta da A ha un punto di aderenza debole. Ciò ci riconduce al caso in cui E è separabile, quindi al caso in cui esiste una successione

[58] Nell'esempio seguente, per «immagine compatta» si intende relativamente compatta.

debolmente densa (x'_j) in E'. Estraendo, se necessario, una sottosuccessione di (x_i), si può supporre che per ogni j esista

$$\lim_i \langle x_i, x'_j \rangle.$$

Sia A_n l'inviluppo convesso dell'insieme degli x_i con $i \geq n$ e sia $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$. Mostrare che x_i tende debolmente a x servendosi del capitolo 2, § 18, esercizio 1.)

Esercizio 5. Sia E uno spazio completamente regolare la cui topologia T sia più fine di una certa topologia metrizzabile T_0, e sia A un sottoinsieme di E. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

a) A è relativamente compatto.

b) Ogni successione estratta da A ammette un punto di aderenza.

c) Da ogni successione estratta da A si può estrarre una sottosuccessione convergente.

(Mostrare che b) implica c) considerando la topologia T come l'estremo superiore di una famiglia di topologie metrizzabili T_i più fini di T_0. Mostrare poi che a) implica che la chiusura di A è metrizzabile.)

Esercizio 6. Sia K uno spazio compatto e siano A, B due sottoinsiemi relativamente debolmente compatti di $C(K)$. Mostrare che l'insieme AB delle funzioni fg, con $f \in A$ e $g \in B$, è relativamente debolmente compatto. (Utilizzare il teorema 3.) Per un risultato più profondo e più generale, si veda la parte IV, § 2, corollario 1.

Esercizio 7. Sia M uno spazio localmente compatto e sia (f_i) una successione in $C_0(M)$. Essa è debolmente di Cauchy se e solo se è limitata e converge in ogni punto di M. (Utilizzare il teorema di Lebesgue.)

3 Il teorema di Krein

Teorema 4 (Krein). Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme debolmente compatto. Il suo inviluppo convesso chiuso $\overline{\Gamma}(A)$ è debolmente compatto se e solo se è completo per la topologia data.

Applicando lo stesso enunciato a E munito di $\tau(E, E')$, il che non cambia la topologia debole corrispondente, si vede che basta che $\overline{\Gamma}(A)$ sia completo per $\tau(E, E')$, condizione a priori meno restrittiva.

Corollario 1. In uno spazio localmente convesso quasi-completo E l'inviluppo convesso chiuso di un sottoinsieme debolmente compatto è debolmente compatto.

Il teorema 4 è contenuto nel seguente enunciato, in apparenza più generale.

Corollario 2. Siano E uno spazio localmente convesso e A un suo sottoinsieme compatto. Il suo inviluppo convesso chiuso $\overline{\Gamma}(A)$ è compatto se e solo se è completo per $\tau(E, E')$.

(Il teorema 4 si ottiene applicando questo enunciato allo spazio E munito della topologia debole.)

La condizione è necessaria poiché un sottoinsieme compatto di E è completo e quindi completo per $\tau(E, E')$. Viceversa, supponiamo $\overline{\Gamma}(A)$ completo per $\tau(E, E')$. Poiché $\overline{\Gamma}(A)$ è precompatto per la topologia data, basta mostrare che è completo per questa topologia, e a maggior ragione basta mostrarne la compattezza debole. Siamo così ricondotti al caso in cui la topologia data di E sia la topologia debole. Come nella dimostrazione del

teorema 2, possiamo supporre E completo per $\tau(E, E')$. Basterà mostrare che l'inviluppo discato B di A è relativamente debolmente compatto, ossia che l'applicazione identica u dallo spazio normato $E_B = F$ generato da B, con la norma di Minkowski di B, in E è debolmente compatta. Per il capitolo 2, § 18, teorema 13, corollario 1, ciò significa che u' trasforma i sottoinsiemi equicontinui A' di E' in sottoinsiemi di F' relativamente compatti per $\sigma(F', F'')$.

Consideriamo ora il sottospazio H degli elementi di F' la cui restrizione ad A è continua per $\sigma(E, E')$. Si tratta evidentemente di un sottospazio vettoriale chiuso, dunque completo, di F'. La norma indotta su H da F' coincide con quella indotta dallo spazio $C(A)$ delle funzioni continue sul compatto A munito di $\sigma(E, E')$, poiché B è l'inviluppo discato di A. Pertanto H è un sottospazio chiuso, e quindi debolmente chiuso, di $C(A)$. Affinché un sottoinsieme di H sia relativamente compatto in F' per $\sigma(F', F'')$ è necessario e sufficiente che sia relativamente debolmente compatto in $C(A)$: per continuità lo sarà allora nello spazio di Banach F', ossia per $\sigma(F', F'')$. Ora evidentemente $u'(E') \subset H$ e dobbiamo soltanto provare che u' manda ogni sottoinsieme equicontinuo di E' in un sottoinsieme relativamente debolmente compatto di $C(A)$. Ma u' associa a $x' \in E'$ la sua restrizione ad A. Dobbiamo dunque mostrare che, al variare di x' in un insieme equicontinuo di E', tale restrizione percorre un sottoinsieme relativamente debolmente compatto di $C(A)$. Per il teorema 3 ciò è chiaro: $u'\colon E' \to C(A)$ è continua da E' debole in $C_s(A)$ e trasforma quindi un sottoinsieme equicontinuo, e perciò relativamente debolmente compatto, di E' in un sottoinsieme relativamente compatto di $C_s(A)$. Si verifica inoltre che quest'ultimo è limitato per la norma di $C(A)$. La dimostrazione è conclusa. Si noti che, tramite il teorema 3, essa utilizza in modo essenziale il teorema di Eberlein e il teorema di Lebesgue della teoria dell'integrazione.

Proposizione 4. Sia K uno spazio compatto munito di una misura μ e sia f un'applicazione debolmente continua da K in uno spazio localmente convesso quasi-completo E. Allora f è debolmente integrabile in E.

Ricordiamo che ciò significa, da un lato, che f è scalarmente integrabile, il che è immediato perché è scalarmente continua, e, dall'altro, che appartiene a E la forma lineare x su E' definita da

$$\langle x, x' \rangle = \int \langle f(t), x' \rangle \, d\mu(t).$$

Possiamo supporre $\|\mu\| \leq 1$. Si vede allora che x appartiene al polare, nel duale algebrico di E', del polare di $f(K)$, ossia al bipolare di $f(K)$, cioè all'inviluppo discato debolmente chiuso di $f(K)$ nel completamento debole di E. Basta dunque mostrare che tale inviluppo è contenuto in E, e a tal fine basta che l'inviluppo discato debolmente chiuso di $f(K)$ in E sia già debolmente compatto. Poiché $f(K)$ è debolmente compatto per continuità, basta applicare il corollario 1 del teorema 4. Questo vale anche per l'inviluppo discato chiuso, come risulta dalla dimostrazione data oppure come corollario immediato dell'enunciato.

Esercizio 1. Mostrare che la conclusione della proposizione 4 resta valida supponendo soltanto K localmente compatto, la misura μ limitata e f debolmente continua e limitata. (Esaminare prima, mediante la proposizione 4, il caso in cui μ abbia supporto compatto, quindi passare al limite per una misura μ arbitraria.)

Esercizio 2. Sia K un sottoinsieme compatto di uno spazio localmente convesso completo. Mostrare che l'inviluppo convesso chiuso di K è l'insieme degli integrali deboli

$$\int_K x \, d\mu(x),$$

dove μ percorre l'insieme delle misure positive di norma 1 su K. Mostrare che il teorema 4 sarebbe una facile conseguenza della proposizione 4.

Esercizi supplementari

Gli esercizi seguenti sulla compattezza si sarebbero potuti proporre già a partire dal capitolo 2, a eccezione dell'esercizio 3, punto 3), e degli esercizi 4 e 5, che utilizzano il teorema di Šmulian.

Esercizio 1. Sia (x_i) una successione di Cauchy in uno spazio localmente convesso E. Mostrare che il suo inviluppo discato chiuso A è metrizzabile. (Ricondursi al caso in cui E è completo e separato, quindi (x_i) convergente, e poi al caso in cui il limite è zero, osservando che la somma di due compatti metrizzabili A e B è un compatto metrizzabile, poiché è omeomorfa a un quoziente separato di $A \times B$. Utilizzando poi il capitolo 2, § 13, esercizio 2, osservare che A è omeomorfo a un quoziente della palla unitaria di ℓ^1 munita di $\sigma(\ell^1, c_0)$ e che tale palla è un compatto metrizzabile.)

Esercizio 2. Sia E uno spazio localmente convesso e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi A di E tali che da ogni successione in A si possa estrarre una sottosuccessione di Cauchy ($\mathfrak{S}$ contiene dunque gli insiemi precompatti metrizzabili).

1) Sia u un'applicazione lineare da E in uno spazio localmente convesso F. Mostrare che, se u trasforma successioni convergenti in successioni convergenti, trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy e gli $A \in \mathfrak{S}$ in insiemi precompatti. (Per la prima affermazione, sia A l'inviluppo discato chiuso della successione di Cauchy (x_i). Mostrare che la restrizione di u ad A è uniformemente continua, osservando che, per il lemma del capitolo 2, § 14, basta mostrarne la continuità nell'origine e che, per l'esercizio 1, basta a tal fine verificare la continuità sulle successioni di A tendenti a 0. La seconda affermazione segue dalla prima per via puramente topologica, mediante il criterio di Weil.)

2) Sia A' un insieme di forme lineari su E continue sulle successioni. Le seguenti condizioni su A' sono equivalenti:

a) A' è precompatto per la convergenza uniforme sulle successioni convergenti di E.

b) A' è precompatto per la $\mathfrak{S}$-convergenza.

c) Ogni successione convergente (o anche ogni successione di Cauchy) in E converge uniformemente su A'.

(Mostrare che questo enunciato equivale al primo servendosi del capitolo 2, § 13, teorema 12.)

Esercizio 3. Sia E uno spazio localmente convesso e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi A di E tali che da ogni successione estratta da A si possa estrarre una sottosuccessione debolmente di Cauchy. Allora $\mathfrak{S}$ contiene gli insiemi limitati metrizzabili per la struttura uniforme debole, poiché «limitato» equivale a «debolmente precompatto».

1) Sia u un'applicazione lineare da E in uno spazio localmente convesso F. Se trasforma le successioni debolmente convergenti in successioni convergenti, essa trasforma le successioni debolmente di Cauchy in successioni di Cauchy e gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi precompatti. (È un caso particolare dell'esercizio precedente applicato a E debole. Lo stesso vale per la dimostrazione di 2).)

2) Sia A' un sottoinsieme di E'. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) A' è precompatto per la convergenza uniforme sulle successioni debolmente convergenti di E.

b) A' è precompatto per la $\mathfrak{S}$-convergenza.

c) Ogni successione debolmente convergente (o anche ogni successione debolmente di Cauchy) in E converge uniformemente su A'.

Seguendo G. Köthe, chiamiamo un tale sottoinsieme di E' *limitato nel senso di Köthe* («begrenzt»). Questa nozione dipende soltanto dal sistema duale (E, E'), sicché al tempo stesso si definiscono gli insiemi limitati nel senso di Köthe in E.

3) Se $A' \subset E'$ è precompatto per $\tau(E', E)$, esso è limitato nel senso di Köthe. La condizione è anche necessaria se E è separabile o metrizzabile (più generalmente, ogni volta che in E vale il teorema di Šmulian, poiché ciò significa che i sottoinsiemi debolmente compatti di E appartengono a $\mathfrak{S}$).

4) Un'applicazione lineare debolmente continua (qui contano soltanto i sistemi duali) da uno spazio localmente convesso in un altro trasforma insiemi limitati nel senso di Köthe in insiemi dello stesso tipo. Mostrare che per un sottoinsieme A di E le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) A è limitato nel senso di Köthe.

b) Ogni applicazione lineare debolmente continua da E in uno spazio localmente convesso separabile F trasforma A in un insieme precompatto.

c) Ogni applicazione lineare debolmente continua da E in c_0 trasforma A in un sottoinsieme precompatto di c_0.

(L'implicazione a) $\Rightarrow$ b) segue da 3), e b) $\Rightarrow$ c) è immediata. Per c) $\Rightarrow$ a) si usi la corrispondenza biunivoca canonica tra le applicazioni lineari debolmente continue da E in c_0 e le successioni in E' debolmente convergenti a 0. Si confronti con il § 2, esercizio 2, c).)

Esercizio 4. Sia (E, E') un sistema duale. Sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi A di E tali che da ogni successione in A si possa estrarre una sottosuccessione debolmente di Cauchy. Sia $\mathfrak{S}'$ la famiglia analoga in E' e siano $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ le famiglie degli insiemi limitati nel senso di Köthe rispettivamente in E e in E' (cfr. esercizio 3).

1) Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) $\mathfrak{S} \subset \mathcal{L}$; a') $\mathfrak{S}' \subset \mathcal{L}'$.

b) Le successioni debolmente convergenti in E sono limitate nel senso di Köthe.

c) Le successioni debolmente di Cauchy in E sono limitate nel senso di Köthe.

b'), c') Gli stessi enunciati per E'.

d) Per ogni coppia di successioni (x_i) in E e (x'_i) in E', entrambe debolmente convergenti a 0, si ha $\lim_i \langle x_i, x'_i \rangle = 0$.

2) Se E è separabile, esso non può avere la proprietà precedente se i suoi limitati non sono precompatti per $\tau(E, E')$. In particolare, se E è normabile, deve avere dimensione finita. La stessa conclusione vale se E è uno spazio di Banach riflessivo, anche non separabile (utilizzare l'esercizio 3, punto 3)).

3) Sia K un compatto stoniano e si ponga $E = C(K)$. Mostrare che (E, E') soddisfa le condizioni di 1). (Utilizzare la parte IV, § 1, esercizio 12, punto 2), secondo cui una successione di E' debolmente convergente converge per $\sigma(E', E'')$. Utilizzare anche l'esercizio 11 dello stesso paragrafo, secondo cui nel duale di uno spazio $C(K)$ una successione convergente per $\sigma(E', E'')$ converge per $\tau(E', E)$.)

4) Osservare che, se nel punto 3) K è infinito (per esempio $C(K) = \ell^\infty$ quando K è la compattificazione di Stone degli interi), esistono successioni debolmente di Cauchy che non convergono debolmente in $E = C(K)$ (cfr. per esempio parte IV, § 2, esercizio 3, punto 2). Dedurne che esistono in E insiemi limitati nel senso di Köthe che non sono neppure relativamente debolmente compatti. (Si confronti con il § 2, esercizi 2 e 3.)

Esercizio 5. 1) Sia μ una misura positiva numerabile all'infinito su uno spazio localmente compatto M e sia $E = L^1(\mu)$. Mostrare che da ogni successione limitata del duale E' si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente. (Ricondursi al caso in cui μ è limitata sostituendola con una misura equivalente, operazione che sostituisce $L^1(\mu)$ con uno spazio isomorfo. In tal caso $L^\infty \subset L^1$ e l'inclusione è continua per $\sigma(L^\infty, L^1)$ e per la topologia debole $\sigma(L^1, L^\infty)$ di L^1. La palla unitaria di L^∞ è quindi un sottoinsieme debolmente compatto di L^1. Applicare poi il teorema di Šmulian in L^1.)

2) Sia μ una misura su uno spazio localmente compatto. Mostrare che i sottoinsiemi di $E = L^1(\mu)$ limitati nel senso di Köthe (cfr. esercizio 3) coincidono con i sottoinsiemi precompatti di E. (Per mostrare che un insieme limitato nel senso di Köthe è precompatto lo si può supporre ridotto a una successione in $E = L^1(\mu)$. Ricondursi al caso di una misura μ numerabile all'infinito. In tal caso l'asserzione segue immediatamente da 1).)

Esercizio 6. Sia E uno spazio localmente convesso il cui duale forte sia separabile. Un'applicazione lineare u da E in uno spazio localmente convesso F che trasformi le successioni debolmente convergenti in successioni convergenti trasforma i sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi precompatti, e viceversa. (Utilizzare l'esercizio 3, punto 1), osservando che in tal caso i limitati di E sono debolmente metrizzabili.)

Parte IV Compattezza debole in L^1

1 Il criterio di Dunford–Pettis e le sue prime conseguenze

Nel seguito M indica uno spazio localmente compatto e μ una misura positiva su M. Supponiamo nota la teoria generale dell'integrazione (Bourbaki, *Intégration*, capitoli da 1 a 5) e seguiamo in generale la terminologia di Bourbaki. Ricordiamo che $L^1(\mu) = L^1$ è lo spazio di Banach delle classi di equivalenza di funzioni sommabili, con la norma

$$\|f\| = \int |f(s)|\, d\mu(s),$$

e che il suo duale si identifica con $L^\infty(\mu) = L^\infty$, spazio delle classi di funzioni misurabili ed essenzialmente limitate con la norma

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_s |f(s)|.$$

La dualità è data da

$$\langle f, g\rangle = \int fg\, d\mu \qquad (f \in L^1,\ g \in L^\infty).$$

È talvolta comodo introdurre lo spazio $\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M}$ di tutte le classi di funzioni scalari misurabili (modulo l'uguaglianza localmente quasi ovunque), con la topologia della convergenza in misura su ogni compatto. Un sistema fondamentale di intorni di 0 è formato dagli insiemi $V(K, \varepsilon)$, per $K \subset M$ compatto ed $\varepsilon > 0$, costituiti dalle f per cui l'insieme dei punti s di K in cui $|f(s)| \geq \varepsilon$ ha misura al più ε.[59] Si ottiene così una topologia di spazio vettoriale topologico, in generale non localmente convessa. Le successioni convergenti per questa topologia si dicono convergenti in misura su ogni compatto. Gli spazi L^p si immergono canonicamente e con continuità in $\mathcal{M}$, il che spiega l'utilità di questo

[59] La scansione reca il verso opposto nell'ultima disuguaglianza sulla misura. La disuguaglianza qui riportata dà gli intorni di zero per la convergenza in misura.

spazio. Ricordiamo il teorema di Egorov: una successione (f_i) convergente quasi ovunque converge in misura su ogni compatto.

Se A è un sottoinsieme di M, indichiamo con ϕ_A la sua funzione caratteristica o, se A è misurabile, la sua classe in L^∞. Con questa notazione, per $f \in L^1$ si ha

$$\langle f, \phi_A \rangle = \int_A f \, d\mu.$$

Lemma 1. Sia (f_n) una successione in L^1 tale che $(\langle f_n, \phi_A \rangle)$ converga per ogni aperto A. Allora:

a) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, se A è misurabile e $\mu(A) \leq \eta$, si ha $\langle |f_n|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon$ per ogni n.

b) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset M$ tale che

$$\langle |f_n|, \phi_{M \setminus K} \rangle \leq \varepsilon$$

per ogni n.

Dimostrazione. a) È noto che, per una data $f \in L^1$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\eta > 0$ tale che, se A è misurabile e $\mu(A) \leq \eta$, si ha $\langle |f|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon$. Infatti, indicando con M_n l'insieme degli $s \in M$ per cui $|f(s)| > n$, si ha $\bigcap_n M_n = \varnothing$ (a meno di un insieme nullo). Per il teorema di Lebesgue

$$\langle |f|, \phi_{M_n} \rangle \longrightarrow 0,$$

sicché esiste n tale che $\langle |f|, \phi_{M_n} \rangle \leq \varepsilon/2$. Scegliamo $\eta = \varepsilon/(2n)$. Se A è misurabile e $\mu(A) \leq \eta$, allora

$$\langle |f|, \phi_A \rangle \leq \langle |f|, \phi_{A \setminus M_n} \rangle + \langle |f|, \phi_{M_n} \rangle \leq n\mu(A) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Supponiamo dapprima che per ogni aperto A si abbia $\langle f_n, \phi_A \rangle \to 0$. Per provare a) basta mostrare che si può trovare $\eta > 0$ tale che, per ogni A misurabile con $\mu(A) < \eta$, si abbia

$$|\langle f_n, \phi_A \rangle| \leq \varepsilon$$

per ogni n. Infatti, supponendo le f_n reali, avremo

$$\langle |f_n|, \phi_A \rangle = \langle f_n, \phi_{A_1} \rangle - \langle f_n, \phi_{A_2} \rangle,$$

dove A_1 e A_2 sono gli insiemi dei punti di A in cui f_n è rispettivamente positiva e negativa. Ne segue $\langle |f_n|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Ragioniamo per assurdo supponendo che per ogni $\eta > 0$ esistano un insieme misurabile A e un indice n tali che

$$\mu(A) < \eta, \qquad |\langle f_n, \phi_A \rangle| > \varepsilon.$$

Si può evidentemente supporre A aperto, sostituendolo con un aperto poco più grande, e n grande quanto si vuole. Costruiremo simultaneamente per induzione una successione strettamente crescente di indici (n_i) e una successione di aperti A_i in modo che, indicando con A_{ij} l'insieme dei punti di A_i che non appartengono né ad A_j né ad alcun A_k con $k < i$, valgano

$$|\langle f_{n_j}, \phi_{A_{ij}} \rangle| \leq 2^{-i-j} \qquad \text{per ogni } i, j, \tag{1}$$

$$|\langle f_{n_j}, \phi_{A_j} \rangle| > \varepsilon \qquad \text{per ogni } j. \tag{2}$$

Supponiamo eseguita la costruzione fino all'indice k. Per l'osservazione iniziale esiste $\eta > 0$ tale che

$$\langle |f_{n_j}|, \phi_A \rangle \leq 2^{-2k-1} \leq 2^{-j-(k+1)} \qquad \text{se } \mu(A) < \eta, \quad j \leq k.$$

Inoltre (f_n) tende a zero sulle funzioni caratteristiche degli aperti, quindi sulle loro combinazioni lineari, tra cui le $\phi_{A_{ij}}$. Possiamo dunque trovare un indice n tale che

$$|\langle f_m, \phi_{A_{ij}} \rangle| \leq 2^{-2k-1} \leq 2^{-i-(k+1)} \qquad (m \geq n,\ i, j \leq k).$$

Infine, per ipotesi, possiamo trovare un aperto $A = A_{k+1}$ e $m = n_{k+1}$ tali che

$$\mu(A) < \eta, \qquad m \geq n, \qquad |\langle f_m, \phi_A \rangle| > \varepsilon,$$

e si verifica subito che l'ipotesi induttiva continua a valere. Sia $A = \bigcup_k A_k$, che è aperto. Poiché per ogni j si ha l'unione disgiunta

$$A = A_j \cup \bigcup_i A_{ij},$$

si ottiene

$$\langle f_{n_j}, \phi_A \rangle = \langle f_{n_j}, \phi_{A_j} \rangle + \sum_i \langle f_{n_j}, \phi_{A_{ij}} \rangle.$$

Per (1) e (2) ne segue

$$|\langle f_{n_j}, \phi_A \rangle| \geq \varepsilon - \sum_{i \geq 1} 2^{-i-j} = \varepsilon - 2^{-j}.$$

D'altra parte dovremmo avere $\langle f_{n_j}, \phi_A \rangle \to 0$, il che è assurdo.

Consideriamo ora il caso generale. Affermiamo che esistono $n > 0$ e $\eta > 0$ tali che da $\mu(A) \leq \eta$ e $p, q \geq n$ segua

$$\langle |f_p - f_q|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon/2.$$

Altrimenti potremmo trovare due successioni di indici p_k, q_k e una successione di insiemi A_k tali che

$$\mu(A_k) \leq 1/k, \qquad p_k, q_k \geq k, \qquad \langle |f_{p_k} - f_{q_k}|, \phi_{A_k} \rangle > \varepsilon/2.$$

Ciò contraddice il risultato precedente, poiché la successione $(f_{p_k} - f_{q_k})$ tende a zero sulle ϕ_A per A aperto. Siano dunque n, η come sopra. Prendendo η sufficientemente piccolo possiamo inoltre supporre che $\mu(A) \leq \eta$ implichi $\langle |f_m|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon/2$ per $m \leq n$. Si ha allora, per $\mu(A) \leq \eta$ e $m \geq n$,

$$\langle |f_m|, \phi_A \rangle \leq \langle |f_n|, \phi_A \rangle + \langle |f_m - f_n|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Pertanto $\langle |f_m|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon$ per ogni m, e la prima parte del lemma è dimostrata.

b) Sia μ_n la misura di densità f_n rispetto a μ. Dall'ipotesi che $\mu_n(A)$ converga per ogni aperto A vogliamo dedurre che esiste un compatto K tale che

$$|\mu_n|(M \setminus K) \leq \varepsilon$$

per ogni n. Interpretiamo le μ_n come misure limitate sul compatto $\widehat{M}$ ottenuto aggiungendo a M un punto all'infinito ω. L'ipotesi resta valida in questa interpretazione e la conclusione significa che esiste un intorno V di ω in $\widehat{M}$ tale che $|\mu_n|(V) \leq \varepsilon$ per ogni n. Ora si può trovare una misura ν su $\widehat{M}$ tale che le μ_n appartengano a $L^1(\nu)$, identificato come al solito con uno spazio di misure. Per esempio si prenda la misura positiva

$$\nu = \sum_{\|\mu_n\| \neq 0} 2^{-n} \frac{|\mu_n|}{\|\mu_n\|}.$$

[60] Per la prima parte possiamo trovare $\eta > 0$ tale che per ogni sottoinsieme misurabile A di M da $\nu(A) \leq \eta$ segua $|\mu_n|(A) \leq \varepsilon$. In particolare possiamo scegliere un intorno V di ω tale che $\nu(V \setminus \{\omega\}) \leq \eta$. È questo l'intorno cercato.

Teorema 1 (Dunford–Pettis). Sia H un sottoinsieme di L^1. Affinché H sia relativamente debolmente compatto è necessario e sufficiente che soddisfi le due condizioni seguenti.

a) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, per ogni insieme misurabile A,

$$\mu(A) \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \langle |f|, \phi_A \rangle \leq \varepsilon \qquad (f \in H).$$

b) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset M$ tale che

$$\langle |f|, \phi_{M \setminus K} \rangle \leq \varepsilon \qquad (f \in H).$$

[61]

Supponiamo H relativamente debolmente compatto. Se a) fosse falsa, esisterebbero una successione (A_n) di sottoinsiemi misurabili di M e una successione (f_n) in H tali che

$$\langle |f_n|, \phi_{A_n} \rangle > \varepsilon, \qquad \mu(A_n) \leq 1/n.$$

Per il teorema di Šmulian da (f_n) si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente, in contraddizione con la prima parte del lemma precedente. Analogamente, se b) fosse falsa, potremmo trovare una successione di compatti $K_n \subset M$ a due a due disgiunti e una successione (f_n) in H tali che $\langle |f_n|, \phi_{K_n} \rangle > \varepsilon$. Sia (g_n) una sottosuccessione debolmente convergente di (f_n) (teorema di Šmulian), e sia K un compatto tale che

$$\langle |g_n|, \phi_{M \setminus K} \rangle \leq \varepsilon/2$$

per ogni n. Avremmo

$$\langle |g_n|, \phi_{K_m} \rangle \leq \varepsilon/2 + \langle |g_n|, \phi_{K \cap K_m} \rangle,$$

dove il secondo termine a destra tende a zero per $m \to \infty$, uniformemente rispetto a n, per il lemma 1, a). Dunque per $m \geq m_0$ si avrebbe $\langle |g_n|, \phi_{K_m} \rangle \leq \varepsilon$ per ogni n, il che è assurdo.

Supponiamo verificate a) e b) e mostriamo che H è relativamente debolmente compatto. Utilizziamo il lemma seguente.

Lemma 2. Sia H un sottoinsieme di uno spazio di Banach E tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un sottoinsieme debolmente compatto H' di E per cui ogni $x \in H$ disti da H' meno di ε. Allora H è relativamente debolmente compatto.

Sia B la palla unitaria di E, sia E'' il biduale di E e sia $\overline{B}$ la chiusura di B in E'' per la topologia debole $\sigma(E'', E')$. Poiché H è evidentemente limitato, basta mostrare che la sua chiusura debole $\overline{H}$ in E'' è contenuta in E. Ora, da

$$H \subset H' + \varepsilon B$$

[60] Al numeratore l'originale stampa μ_n. Per ottenere una misura positiva dominante si prende la variazione totale $|\mu_n|$.

[61] In a) l'edizione inglese scambia η ed ε nella frase introduttiva. Inoltre, per una misura positiva arbitraria, l'enunciato richiede che H sia limitato in norma. Su uno spazio costituito da un solo atomo di massa 1, ad esempio, le due condizioni valgono anche per l'insieme di tutte le funzioni costanti, che è illimitato.

si deduce

$$\overline{H} \subset H' + \varepsilon\overline{B},$$

poiché il membro di destra è debolmente chiuso in E'', essendo H' debolmente compatto ed $\varepsilon\overline{B}$ debolmente chiuso. A maggior ragione $\overline{H} \subset E + \varepsilon\overline{B}$ per ogni $\varepsilon > 0$, donde $\overline{H} \subset E$, poiché E è fortemente chiuso in E''. Segue la conclusione.

Torniamo alle condizioni del teorema 1. Per ogni compatto $K \subset M$ consideriamo l'insieme $H' = \phi_K H$ dei prodotti $\phi_K f$, $f \in H$. Per il lemma 2 e la condizione b) del teorema basta mostrare che gli insiemi H' sono relativamente debolmente compatti. Ciò ci riconduce al caso in cui tutte le $f \in H$ si annullano fuori da un compatto fisso K, dunque al caso in cui M stesso è un compatto K. Allora $L^\infty \subset L^1$. Il testo osserva dapprima che a) implica la limitatezza di H (si veda la nota all'enunciato). Sia A la palla unitaria di L^∞. Su A la convergenza a 0 per la topologia indotta da L^1 implica la convergenza uniforme su H. Infatti dalla condizione a) su H si vede facilmente che su A già la convergenza in misura implica la convergenza uniforme su H. Ora, su L^∞, la topologia indotta da L^1 è quella della convergenza uniforme sul sottoinsieme A di L^1. L'argomento precedente significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$A \cap \eta A^0 \subset \varepsilon H^0.$$

Per polarità ciò si può scrivere

$$\frac{1}{\varepsilon} H \subset \overline{\Gamma}\left(A^0 \cup \frac{1}{\eta} A\right),$$

dove A^0 è semplicemente la palla unitaria B di L^1. A maggior ragione

$$H \subset \frac{\varepsilon}{\eta} A + \varepsilon B.$$

Si hanno dunque le condizioni del lemma 2 con $H' = (\varepsilon/\eta)A$. Basta osservare che A è un sottoinsieme debolmente compatto di L^1. Questo è immediato poiché l'inclusione di L^∞ in L^1 è continua per la topologia debole $\sigma(L^\infty, L^1)$ di L^∞ e la topologia debole di L^1, e manda quindi il sottoinsieme debolmente compatto A di L^∞ in un sottoinsieme debolmente compatto di L^1.

Corollario 1. Sia $H \subset L^1$ e sia H' l'insieme delle $f \in L^1$ per le quali esiste $g \in H$ con $|f| \leq |g|$. Se H è relativamente debolmente compatto, tale è anche H' (e viceversa, poiché $H \subset H'$).[62]

In particolare:

Corollario 2. Un sottoinsieme di L^1 limitato per l'ordine è relativamente debolmente compatto.

(Nel corollario 1 si scelga H ridotto a un elemento.)

Corollario 3. In uno spazio L^1 ogni successione debolmente di Cauchy è debolmente convergente.

Per il lemma 1 sono verificate le due condizioni del teorema 1.

[62] L'edizione inglese formula esplicitamente l'implicazione inversa. L'implicazione qui enunciata segue dalle condizioni a) e b) e dà il corollario successivo.

Proposizione 1. Ogni successione limitata in L^∞ che converga a f in misura su ogni compatto converge a f uniformemente su ogni sottoinsieme debolmente compatto di L^1, ossia per la topologia di Mackey $\tau(L^\infty, L^1)$.

La dimostrazione segue immediatamente dalle condizioni a) e b) del teorema 1. È vera anche l'implicazione inversa (cfr. esercizio 1).

Corollario. Sia u un'applicazione lineare debolmente continua da L^∞ in uno spazio localmente convesso E. Essa trasforma le successioni limitate convergenti in misura in successioni convergenti di E.

Infatti la trasposta u' è un'applicazione lineare da E' in L^1, continua per $\sigma(E', E)$ e $\sigma(L^1, L^\infty)$. Essa trasforma quindi i sottoinsiemi debolmente compatti e, in particolare, i sottoinsiemi equicontinui debolmente chiusi di E' in sottoinsiemi debolmente compatti di L^1. La conclusione del corollario significa precisamente che le successioni (f_n) considerate convergono uniformemente sulle immagini, mediante u', degli insiemi equicontinui di E', il che segue dalla proposizione 1.

Proposizione 2. Sia $H \subset L^1(\mu)$. Affinché H sia relativamente compatto è necessario e sufficiente che sia relativamente debolmente compatto e relativamente compatto nello spazio $\mathcal{M}(\mu)$ per la topologia della convergenza in misura su ogni compatto.

La necessità è chiara. Per la sufficienza basta mostrare che da ogni successione (f_n) estratta da H si può estrarre una sottosuccessione convergente in L^1. Ora possiamo estrarne una sottosuccessione debolmente convergente (g_n) (Šmulian) e da questa una sottosuccessione convergente in misura. Infatti, supponendo M numerabile all'infinito, $\mathcal{M}(\mu)$ è metrizzabile, e ogni successione relativamente compatta di questo spazio ammette dunque una sottosuccessione convergente. Ci si riconduce al caso precedente osservando che le g_n sono nulle fuori dall'unione di una successione di compatti, poiché ciascuna g_n è integrabile. La proposizione segue dal corollario che segue.

Corollario. Sia (f_n) una successione in L^1. Essa converge fortemente a $f \in L^1$ se e solo se converge debolmente e converge a f in $\mathcal{M}(\mu)$, ossia in misura su ogni compatto.

La necessità è evidente. Per la sufficienza osserviamo che l'insieme delle f_n, essendo relativamente debolmente compatto in L^1, soddisfa le condizioni a) e b) del teorema 1. Da questo e dalla convergenza in misura a f su ogni compatto si deduce facilmente che

$$\int |f - f_n|\, d\mu \longrightarrow 0.$$

Corollario 2. Nello spazio ℓ^1 ogni sottoinsieme debolmente compatto è compatto e ogni successione debolmente convergente è convergente.

Esercizio 1. Un sottoinsieme di L^∞ è relativamente compatto per $\tau(L^\infty, L^1)$ se e soltanto se è limitato e relativamente compatto in $\mathcal{M}$ (lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni scalari misurabili, munito della convergenza in misura su ogni compatto). Una successione in L^∞ converge per $\tau(L^\infty, L^1)$ se e soltanto se è limitata e converge in misura su ogni compatto. (Ricondursi al secondo enunciato e usare la proposizione 1.)

Esercizio 2. Sia M uno spazio localmente compatto e sia $\mathcal{M}^1(M)$ lo spazio delle misure limitate su M, duale di $C_0(M)$.

a) Sia μ una misura positiva su M. Associando a ogni $f \in L^1(\mu)$ la misura $f\mu$ di «densità f» rispetto a μ, si ottiene un isomorfismo isometrico di $L^1(\mu)$ su un sottospazio

di $\mathcal{M}^1(M)$, che rispetta le strutture d'ordine naturali. Scriveremo $L^1(\mu) \subset \mathcal{M}^1(M)$. Mostrare che gli $L^1(\mu)$, al variare di μ fra le misure positive di $\mathcal{M}^1(M)$, formano una famiglia filtrante crescente di sottospazi vettoriali chiusi di $\mathcal{M}^1(M)$ la cui unione è $\mathcal{M}^1(M)$. Per ogni *successione* di tali sottospazi $L^1(\mu_i)$ esiste uno spazio $L^1(\mu)$ dello stesso tipo che li contiene tutti. (Scegliere, omettendo i termini nulli,

$$\mu = \sum_i \frac{1}{2^i} \frac{\mu_i}{\|\mu_i\|}$$

e applicare il teorema di Lebesgue–Nikodym.)

b) Mostrare che esistono uno spazio localmente compatto M' con una misura positiva μ e un isomorfismo di spazi di Banach ordinati di $\mathcal{M}^1(M)$ su $L^1(\mu)$. (Considerare una famiglia massimale (μ_i) di misure positive su M a due a due mutuamente singolari e prendere come (M', μ) la somma degli spazi (M_i, μ_i), dove M_i è il supporto di μ_i.)

c) Un sottoinsieme di $\mathcal{M}^1(M)$ limitato per l'ordine del reticolo è relativamente compatto per $\sigma(\mathcal{M}^1(M), (\mathcal{M}^1(M))')$.

Esercizio 3. a) Sia H un sottoinsieme debolmente compatto di uno spazio $L^1(\mu)$. Mostrare che esiste una successione (K_i) di compatti di M tale che ogni $f \in H$ sia nulla fuori di $\bigcup_i K_i$. Dedurne che esiste $f \in L^1$, $f \geq 0$, tale che per ogni $g \in H$ si abbia $g\mu \in L^1(f\mu)$.

b) Con le notazioni dell'esercizio 2, dedurne che ogni sottoinsieme debolmente compatto di $\mathcal{M}^1(M)$ è contenuto e debolmente compatto in un sottospazio $L^1(\mu)$. (Usare l'esercizio 2 b). Per topologia debole su $\mathcal{M}^1(M)$ si intende naturalmente quella definita dal duale dello spazio di Banach $\mathcal{M}^1(M)$ e non la topologia meno fine $\sigma(\mathcal{M}^1(M), C_0(M))$.)

c) Sia $A \subset \mathcal{M}^1(M)$. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

1) Esiste una misura positiva limitata μ su M tale che $A \subset L^1(\mu)$.

2) A è contenuto nel sottospazio vettoriale chiuso generato da un sottoinsieme di $\mathcal{M}^1(M)$ limitato per l'ordine.

3) A è contenuto nel sottospazio vettoriale chiuso generato da un sottoinsieme debolmente compatto di $\mathcal{M}^1(M)$.

Mostrare che la famiglia di tali insiemi A è stabile per unioni numerabili. Se μ è una misura positiva su M, il sottoinsieme $L^1(\mu)$ di $\mathcal{M}^1(M)$ soddisfa queste condizioni se e soltanto se μ è numerabile all'infinito.

d) Sia μ una misura positiva numerabile all'infinito sullo spazio localmente compatto M e sia u un'applicazione lineare continua di $L^1(\mu)$ in uno spazio $\mathcal{M}^1(M')$, con M' localmente compatto. Mostrare che l'immagine di $L^1(\mu)$ è contenuta in uno spazio $L^1(\nu)$, dove ν è una misura positiva limitata su M'. (Usare c).)

Esercizio 4. a) Siano K uno spazio compatto, F uno spazio localmente convesso quasi completo e u un'applicazione lineare continua di $C(K)$ in F. Per ogni quoziente di Hausdorff $\widetilde{K}$ di K identifichiamo $C(\widetilde{K})$ a un sottospazio normato di $C(K)$. Mostrare che u è debolmente compatta se e soltanto se, per ogni quoziente metrizzabile $\widetilde{K}$ di K, la restrizione di u a $C(\widetilde{K})$ è debolmente compatta. (Usare il teorema di Eberlein e osservare che ogni *successione* in $C(K)$ è contenuta in uno spazio $C(\widetilde{K})$ con $\widetilde{K}$ quoziente metrizzabile di K.)

b) Per ogni quoziente di Hausdorff $\widetilde{K}$ del compatto K consideriamo la trasposta dell'immersione canonica di $C(\widetilde{K})$ in $C(K)$. Otteniamo un omomorfismo metrico canonico $\mu \mapsto \phi(\mu)$ dello spazio $\mathcal{M}(K)$ delle misure su K sullo spazio $\mathcal{M}(\widetilde{K})$ delle misure su $\widetilde{K}$. Si dice che $\phi(\mu)$ è la *misura immagine* di μ mediante l'applicazione canonica ϕ di K

su $\widetilde{K}$. Sia $A \subset \mathcal{M}(K)$. Mostrare che A è relativamente debolmente compatto (per la topologia debole $\sigma(\mathcal{M}(K), (\mathcal{M}(K))')$, distinta da $\sigma(\mathcal{M}(K), C(K))$) se e soltanto se per ogni quoziente metrico $\widetilde{K}$ di K l'immagine canonica di A in $\mathcal{M}(\widetilde{K})$ è relativamente debolmente compatta. (Mostrare che A è limitato, quindi ricondursi al caso in cui è un disco chiuso per $\sigma(\mathcal{M}(K), C(K))$. Esso è allora l'immagine della palla unitaria di un duale F' mediante la trasposta di un'applicazione lineare continua u di $C(K)$ in uno spazio di Banach F. Mostrare che u è debolmente compatta usando a).)

Esercizio 5. Sia M localmente compatto e sia $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}^1(M)$ lo spazio delle misure limitate su M, duale di $C_0(M)$. Ogni funzione limitata f su M misurabile rispetto a ogni misura su M (per esempio una funzione boreliana) definisce su $\mathcal{M}^1$ una forma lineare continua $\mu \mapsto \int f\, d\mu$ di norma $\sup_t |f(t)|$. Possiamo così identificare lo spazio di queste funzioni, munito della norma uniforme, a un sottospazio normato del duale di $\mathcal{M}^1$. Indichiamo con E_1 (rispettivamente E_0) il sottospazio delle combinazioni lineari delle funzioni caratteristiche degli aperti (rispettivamente degli aperti unione di una successione di chiusi). Per topologia debole in $\mathcal{M}^1$ intendiamo $\sigma(\mathcal{M}^1, (\mathcal{M}^1)')$.

a) Una successione di Cauchy per $\sigma(\mathcal{M}^1, E_1)$ è già debolmente convergente. (Usare l'esercizio 2 a) per ricondursi al caso di una successione in uno spazio $L^1(\mu)$, quindi usare il lemma 1 e il teorema 1.)

b) Un sottoinsieme A di $\mathcal{M}^1$ è relativamente debolmente compatto se e soltanto se è relativamente compatto per $\sigma(\mathcal{M}^1, E_0)$. (Ricondursi al caso in cui M è compatto mediante la compattificazione a un punto, poi al caso in cui M è metrizzabile mediante l'esercizio 4 b). Osservare che A è limitato per il capitolo 3, §3, esercizio 7 c). Basta allora, per il teorema di Eberlein, estrarre da ogni successione (μ_i) in A una sottosuccessione debolmente convergente. Estrarne anzitutto una convergente per $\sigma(\mathcal{M}^1, C_0)$, usando il fatto che la palla unitaria di $\mathcal{M}^1$ è metrizzabile e compatta per questa topologia. Osservare poi che A è relativamente compatto anche per $\sigma(\mathcal{M}^1, \overline{E}_0)$, dove $\overline{E}_0$ è la chiusura di E_0 nella norma del duale di $\mathcal{M}^1$. Poiché $C_0 \subset \overline{E}_0$, per compattezza ogni successione in A convergente per $\sigma(\mathcal{M}^1, C_0)$ converge anche per $\sigma(\mathcal{M}^1, E_0)$ e dunque debolmente, per a).)

c) Sia u un'applicazione lineare continua di $C_0(M)$ in uno spazio localmente convesso quasi completo F. Mostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti.

1) u è debolmente compatta.

2) $u''(E_0) \subset F$.

3) u trasforma le successioni debolmente di Cauchy in successioni debolmente convergenti.

4) u trasforma ogni successione crescente e limitata in una successione debolmente di Cauchy.

(Le implicazioni 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) seguono subito dalla caratterizzazione delle successioni debolmente di Cauchy in $C_0(M)$ data nella parte III, §2, esercizio 8. Si ottiene inoltre facilmente 4) $\Rightarrow$ 2) e infine 2) $\Rightarrow$ 1) per b).)

Esercizio 6. Sia M localmente compatto e sia F uno spazio localmente convesso quasi completo in cui ogni successione debolmente di Cauchy converge debolmente. Mostrare che ogni applicazione lineare continua di $C_0(M)$ in F è debolmente compatta. (Usare l'esercizio 5 c).) Ogni applicazione lineare continua di $C_0(M)$ in uno spazio L^1 oppure $\mathcal{M}^1(M')$, con M' localmente compatto, è debolmente compatta. (Usare la prima asserzione e il corollario 3 del teorema 1. Usare infine l'isomorfismo fra $\mathcal{M}^1(M')$ e uno spazio L^1 dell'esercizio 2 b).)

Esercizio 7. Siano M uno spazio localmente compatto con una misura positiva μ, E uno spazio localmente convesso quasi completo e f un'applicazione scalarmente sommabile di M in E. Essa definisce un'applicazione lineare naturale u di E' in $L^1(\mu)$, dove ux' è la classe di equivalenza della funzione $\langle f(t), x'\rangle$. La trasposta di u è un'applicazione lineare di L^∞ nel duale algebrico di E'. Si scrive di solito

$$u'\phi = \int f\phi \, d\mu$$

(«integrale debole»). Mostrare che $\int f\phi \, d\mu$ appartiene a E per ogni $\phi \in L^\infty$ se e soltanto se vi appartiene per ogni ϕ caratteristica di un chiuso. (Considerare il caso in cui E è uno spazio di Banach. Mostrare allora, mediante il teorema del grafico chiuso, che u è un'applicazione lineare *continua* di E' in L^1, onde u' è un'applicazione lineare *continua* di L^∞ in E''. Dedurne che u' manda $C_0(M)$ in E, poi, mediante la condizione 2) dell'esercizio 5 c), che è un'applicazione lineare *debolmente compatta* di $C_0(M)$ in E. Concludere osservando che la palla unitaria di $C_0(M)$ è debolmente densa in quella di L^∞.)

Esercizio 8. Sia E uno spazio localmente convesso quasi completo in cui ogni successione debolmente di Cauchy converge debolmente (per esempio uno spazio riflessivo o L^1). Mostrare che in E ogni successione scalarmente sommabile è sommabile. (Usare il capitolo 2, §18, esercizio 3.)

Esercizio 9. Sia M localmente compatto e sia $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}^1(M)$ lo spazio delle misure limitate su M, duale di $C_0 = C_0(M)$. Sia $H \subset \mathcal{M}^1$. Mostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti.

a) H è relativamente compatto per $\sigma(\mathcal{M}^1, (\mathcal{M}^1)')$.

b) Esiste una misura positiva μ su M tale che $H \subset L^1(\mu)$, con l'identificazione di $L^1(\mu)$ a uno spazio di misure limitate dell'esercizio 2. Fissata così μ, H soddisfa in $L^1(\mu)$ le condizioni a) e b) del teorema 1.

c) Esiste una misura positiva μ su M tale che $H \subset L^1(\mu)$. Fissato così H, ogni successione limitata (f_n) di $L^\infty(\mu)$ che converge in misura converge uniformemente su H.

d) Ogni successione in C_0 debolmente convergente a zero (ossia limitata e convergente a zero in ogni punto di M) converge uniformemente su H.

e) Per ogni successione di aperti O_i di M a due a due disgiunti, $\mu(O_i) \to 0$ uniformemente per $\mu \in H$.

f) H soddisfa le due condizioni seguenti. (i) Per ogni compatto $K \subset M$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $U \supset K$ tale che $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$ per ogni $\mu \in H$. (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset M$ tale che $|\mu|(M \setminus K) < \varepsilon$ per ogni $\mu \in H$.

L'implicazione a) $\Rightarrow$ b) segue dall'esercizio 3 b) e dal teorema 1, b) $\Rightarrow$ c) dalla proposizione 1 e c) $\Rightarrow$ d) è immediata. Si verificano senza difficoltà d) $\Rightarrow$ e) ed e) $\Rightarrow$ f). Per f) $\Rightarrow$ a), mediante il teorema di Eberlein e l'esercizio 2 a), considerare il caso in cui H sia numerabile e contenuto in uno spazio $L^1(\mu)$. (Usare allora il teorema 1, del quale resta da verificare soltanto la condizione a). Ci si può a tal fine ricondurre al caso di M compatto. Si dimostra infine la conclusione per assurdo, con un ragionamento tutt'altro che immediato.)

Esercizio 10. Sia u un'applicazione lineare continua di $C_0(M)$, con M localmente compatto, in uno spazio di Banach E. Mostrare l'equivalenza delle condizioni seguenti.

a) u è debolmente compatta.

b) Esiste una misura positiva μ su M tale che $u'(E') \subset L^1(\mu)$. Fissata così μ, si hanno le proprietà seguenti.

α) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che per ogni boreliano A con $\mu(A) < \eta$ si ha $\|u''(\phi_A)\| < \varepsilon$.

β) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset M$ tale che per ogni boreliano $A \subset M \setminus K$ si ha $\|u''(\phi_A)\| < \varepsilon$.

c) Esiste una misura positiva μ su M tale che u si prolunga per continuità a un'applicazione di $L^\infty(\mu)$ in E continua per $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ e $\sigma(E, E')$.

d) u trasforma le successioni debolmente convergenti di $C_0(M)$ in successioni fortemente convergenti di E.

e) Per ogni successione (O_i) di aperti a due a due disgiunti di M si ha $\lim_i u''(\phi_{O_i}) = 0$ in E.

f) Valgono le due proprietà seguenti.

α) Per ogni compatto $K \subset M$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $U \supset K$ tale che per ogni compatto $K' \subset U \setminus K$ si ha $\|u''(\phi_{K'})\| < \varepsilon$.

β) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset M$ tale che per ogni compatto K' disgiunto da K si ha $\|u''(\phi_{K'})\| < \varepsilon$.

Negli enunciati si identificano, come nell'esercizio 5, le funzioni boreliane limitate su M a elementi del biduale di $C_0(M)$, e ϕ_A designa la funzione caratteristica di A. (Dimostrazione. A parte c), l'equivalenza di queste condizioni è una riformulazione dell'equivalenza delle corrispondenti condizioni dell'esercizio 9. L'implicazione a) $\Rightarrow$ c) segue direttamente dall'esercizio 3 b), e c) $\Rightarrow$ a) è immediata, essendo la palla unitaria di $L^\infty(\mu)$ compatta per la topologia debole qui considerata.) Estendere al caso in cui E sia uno spazio localmente convesso quasi completo l'equivalenza delle condizioni a), d), e), f), modificando opportunamente f).

Confrontare i risultati degli esercizi 9 e 10 con quelli dell'esercizio seguente e dell'esercizio 5.

Esercizio 11. Sia E uno spazio $(\mathcal{F})$. Un sottoinsieme H di E' è relativamente compatto per $\tau(E', E)$ se e soltanto se ogni successione debolmente convergente di E converge uniformemente su H. Un'applicazione lineare di E in uno spazio localmente convesso F trasforma i sottoinsiemi debolmente compatti in sottoinsiemi compatti se e soltanto se trasforma le successioni debolmente convergenti in successioni convergenti. (I due enunciati sono equivalenti per il capitolo 2, §18, teorema 12. La dimostrazione è immediata per il teorema di Šmulian.)

Sia $E = C_0(M)$. Un sottoinsieme di E' è relativamente compatto per $\tau(E', E)$ se e soltanto se lo è per $\sigma(E', E'')$. Un'applicazione lineare u di E in uno spazio localmente convesso quasi completo F è debolmente compatta se e soltanto se trasforma i sottoinsiemi debolmente compatti in sottoinsiemi compatti. (Usare il teorema 1 e l'esercizio 9. Confrontare con la proposizione 3 e i suoi corollari e con il teorema 2 del paragrafo seguente, nonché con il §2, esercizio 3, punti 3), 4), 5).)

Esercizio 12. 1) Sia E uno spazio di Banach. Mostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti.

a) Ogni applicazione lineare continua di E in uno spazio localmente convesso quasi completo *separabile* è debolmente compatta.

b) Ogni successione (x_i) di E' che converge debolmente a zero converge a zero per $\sigma(E', E'')$.

(Per a) $\Rightarrow$ b) considerare l'applicazione di E in c_0 definita dalla successione data,

$$x \longmapsto (\langle x, x_i \rangle)_i,$$

per mostrare che la successione è relativamente compatta per $\sigma(E', E'')$. Per b) $\Rightarrow$ a) basta mostrare che l'immagine mediante la trasposta u' di un sottoinsieme equicontinuo di F' è relativamente compatta per $\sigma(E', E'')$. Usare il teorema di Eberlein osservando che da una successione equicontinua del duale di F si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.)

2) Sia K uno spazio compatto stoniano, ossia tale che $C(K)$ sia un reticolo completo. Mostrare che $C(K)$ gode delle proprietà considerate in 1). (Si ammetta che $C(K)$ è un fattore diretto di $\ell^\infty(K)$. Confrontare con il capitolo 3, §3, esercizio 8 c). Ci si riconduce così al caso $E = \ell^\infty(K) = C(\widehat{K})$, con K insieme di indici e $\widehat{K}$ sua compattificazione di Stone. Basta mostrare che la successione (x_i) è relativamente compatta per $\sigma(E', E'')$. Applicare il criterio e) dell'esercizio 9, osservando che si possono supporre gli O_i simultaneamente aperti e chiusi, essendo $\widehat{K}$ totalmente discontinuo. Procedendo come nel capitolo 3, §3, esercizio 8 a), considerare il caso in cui l'insieme degli indici è quello degli interi e $O_i = \{i\}$, quindi concludere mediante il capitolo 3, §7, esercizio 2 c).)

3) Uno spazio di Banach separabile isomorfo a un quoziente di uno spazio $C(K)$, con K compatto stoniano, è riflessivo (usare 2)). Dedurne che se M è uno spazio localmente compatto infinito a base numerabile, $C_0(M)$ non è un fattore diretto del proprio biduale. (Osservare che il duale di $E = C_0(M)$ è isomorfo a uno spazio L^1 per l'esercizio 2. Il suo biduale è perciò isomorfo a uno spazio L^∞ e quindi a uno spazio $C(K)$ con K compatto stoniano. D'altra parte E è separabile e dunque non può essere isomorfo a un quoziente di E'', poiché non è riflessivo.) Ciò generalizza il capitolo 3, §7, esercizio 2 d).

Esercizio 13. Sia M localmente compatto con una misura positiva μ, sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff e sia E' il suo duale. Un'applicazione f di M in E si dice *strettamente debolmente sommabile* se è scalarmente sommabile e se per ogni $\phi \in L^\infty$ l'integrale debole $\int \phi f \, d\mu$, che a priori è una forma lineare su E', appartiene a E. Allora f definisce un'applicazione lineare u_f di L^∞ in E mediante $u_f(\phi) = \int \phi f \, d\mu$, continua per le topologie deboli $\sigma(L^\infty, L^1)$ e $\sigma(E, E')$. Essa trasforma dunque la palla unitaria di L^∞ in un sottoinsieme debolmente compatto di E.

1) Se f è un'applicazione strettamente debolmente sommabile di M in E, l'applicazione u_f trasforma la palla unitaria di L^∞ in un sottoinsieme limitato nel senso della parte III, §3, esercizio supplementare 3, punto 3). (Occorre mostrare che ogni successione (x'_i) debolmente convergente in E' converge uniformemente sul sottoinsieme di E in questione, ossia che la successione $u'_f x'_i$ converge fortemente in L^1. Per il corollario 1 della proposizione 2 basta provare che è relativamente debolmente compatta in L^1 e converge in ogni punto.)

2) Dedurne che u_f è un'applicazione compatta in ciascuno dei casi seguenti: E è separabile, E è uno spazio di Banach riflessivo o, più generalmente, il duale F' di uno spazio $(\mathcal{F})$ munito della topologia $\tau(F', F)$, E è uno spazio L^1, oppure f è fortemente misurabile. (Salvo nell'ultimo caso, in ciascuna di queste ipotesi i sottoinsiemi limitati nel senso sopra precisato sono precompatti, per la parte III, §3, esercizio supplementare 3 e) ed esercizio supplementare 5. Nell'ultimo caso ricondursi al caso in cui E è uno spazio di Banach mediante la parte III, §2, esercizio 3, poi al caso in cui M è numerabile all'infinito, infine al caso in cui E è separabile, osservando che si può supporre che f prenda valori in un sottospazio separabile di E.) Osservazione. Non sappiamo se u_f sia compatta in ogni caso. Ci si riconduce facilmente al caso di uno spazio di Banach E e di M compatto procedendo come sopra, quindi al caso di M metrizzabile o anche al caso

in cui M è l'intervallo $(0,1)$ munito della misura di Lebesgue. Infine si può supporre f limitata mediante il §2, esercizio supplementare 4, punto 3).

3) Sia f un'applicazione scalarmente sommabile di M nello spazio completo E. Mostrare che f è strettamente debolmente sommabile se e soltanto se l'applicazione di E' in $L^1(\mu)$ definita da f trasforma i sottoinsiemi equicontinui in sottoinsiemi relativamente debolmente compatti di L^1 ed esiste un sottoinsieme totale H del duale debole L^∞ di L^1 tale che $\int \phi f \, d\mu \in E$ per ogni $\phi \in H$. (Osservare che u_f è allora un'applicazione di L^∞ nel duale algebrico E'^* di E', continua per $\tau(L^\infty, L^1)$ e per la topologia della convergenza uniforme sui sottoinsiemi equicontinui di E'. Essa manda il sottospazio vettoriale denso generato da H nel sottospazio E di E'^*, completo e dunque chiuso.) Osservazione. Non sappiamo se la seconda condizione sia superflua. Ci si può ricondurre al caso in cui E è uno spazio di Banach, M è compatto e infine, mediante il §2, esercizio supplementare 4, punto 3), f è scalarmente essenzialmente limitata.

2 Applicazione del criterio di Dunford–Pettis

Proposizione 3. Siano E uno spazio localmente convesso, $\mathfrak{S}$ una famiglia di sottoinsiemi limitati di E e $\mathfrak{S}'$ la famiglia dei sottoinsiemi di E' che sono dischi equicontinui e compatti per $\sigma(E', E'')$. Le seguenti condizioni su $(E, \mathfrak{S})$ sono equivalenti.

a) Ogni applicazione lineare continua u di E in uno spazio localmente convesso di Hausdorff F che trasforma i limitati in insiemi relativamente debolmente compatti trasforma gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi relativamente compatti.

b) Gli $A \in \mathfrak{S}$ sono precompatti per la $\mathfrak{S}'$-topologia.

c) Gli $A' \in \mathfrak{S}'$ sono precompatti per la $\mathfrak{S}$-topologia.

Osserviamo subito che, per il teorema di Krein (parte III, §3), nella definizione di $\mathfrak{S}'$ si poteva omettere la condizione che gli A' fossero dischi.

La dimostrazione è quella consueta. Per a) $\Rightarrow$ b), prendiamo come F il completamento di E per la $\mathfrak{S}'$-convergenza e come u l'identità da E, con la topologia data, in F. Per il capitolo 2, §18, teorema 13, u soddisfa le ipotesi di a): la trasposta u' manda ogni sottoinsieme equicontinuo di F' in un insieme contenuto in un elemento di $\mathfrak{S}'$, dunque equicontinuo e relativamente compatto per $\sigma(E', E'')$. Pertanto u manda gli A in sottoinsiemi relativamente compatti di F, ossia gli $A \in \mathfrak{S}$ sono precompatti per la $\mathfrak{S}'$-convergenza. L'implicazione b) $\Rightarrow$ c) segue dal capitolo 2, §18, teorema 12 applicato all'applicazione u appena considerata. Infine c) $\Rightarrow$ a) segue dallo stesso teorema applicato all'applicazione u di a). Si trova che u manda gli $A \in \mathfrak{S}$ in sottoinsiemi precompatti di F. Per l'ipotesi su u, essendo A limitato, questi sono anche relativamente debolmente compatti, dunque relativamente compatti (capitolo 2, §18, proposizione 37, corollario 1).

Corollario 1. Sia E uno spazio quasi tonnelé e sia E' il suo duale forte. Supponiamo che E' soddisfi le condizioni della proposizione 3 quando si prende per $\mathfrak{S}'$ la famiglia dei sottoinsiemi di E' compatti per $\sigma(E', E'')$. Allora E soddisfa l'analoga condizione relativamente alla famiglia dei propri sottoinsiemi debolmente compatti.

Usiamo le notazioni della proposizione 3. L'ipotesi su E' significa anche, applicando la formulazione in termini di precompattezza a $(E', \mathfrak{S}')$, che gli $A' \in \mathfrak{S}'$ sono precompatti per la topologia della convergenza uniforme sulla famiglia $\mathfrak{S}''$ dei sottoinsiemi A'' di E'' equicontinui e compatti per $\sigma(E'', E''')$. Ma un $A \in \mathfrak{S}$, ossia un sottoinsieme debolmente compatto di E, appartiene evidentemente anche a $\mathfrak{S}''$, perché E, essendo quasi tonnelé, è un sottospazio vettoriale topologico del biduale forte E''. A maggior ragione dunque gli $A' \in \mathfrak{S}'$ sono precompatti per la $\mathfrak{S}$-convergenza. È una delle condizioni equivalenti della proposizione 3 per $(E, \mathfrak{S})$.

Corollario 2. Sia E uno spazio $(\mathcal{F})$ e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei suoi sottoinsiemi debolmente compatti. Affinché valgano le condizioni della proposizione 3 è necessario e sufficiente che ogni successione debolmente convergente a zero in E converga uniformemente su ogni $A' \in \mathfrak{S}'$.

Usiamo la condizione b) della proposizione 3. La necessità è immediata. Per la sufficienza dobbiamo mostrare che ogni disco debolmente compatto A di E è precompatto per la $\mathfrak{S}'$-convergenza. Ora, per il teorema di Šmulian, da ogni successione data in A possiamo estrarre una sottosuccessione debolmente convergente, che per ipotesi converge anche per la $\mathfrak{S}'$-topologia.

Corollario 3. Sia E uno spazio localmente convesso e sia $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi di E costituiti dai termini di una successione debolmente di Cauchy. Le condizioni della proposizione 3 equivalgono allora alle seguenti.

a′) Ogni applicazione lineare continua u di E in uno spazio localmente convesso di Hausdorff F che manda i limitati in sottoinsiemi relativamente debolmente compatti trasforma le successioni debolmente di Cauchy in successioni convergenti.

b′) Ogni successione debolmente di Cauchy in E è anche di Cauchy per la $\mathfrak{S}'$-convergenza.

Se valgono queste condizioni e E è di tipo $(\mathcal{F})$, valgono ancora le condizioni della proposizione 3 quando si prende per $\mathfrak{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi debolmente compatti di E.

È infatti immediato che a′) e b′) sono formulazioni equivalenti rispettivamente ad a) e b). L'ultima asserzione segue dal corollario 2.

Teorema 2. Sia E uno spazio $L^1(\mu)$ o $C_0(M)$ e sia u un'applicazione lineare continua di E in uno spazio localmente convesso di Hausdorff F che trasforma i limitati in insiemi relativamente debolmente compatti. Allora u trasforma gli insiemi debolmente compatti in insiemi relativamente compatti e le successioni debolmente di Cauchy in successioni convergenti.

La prima asserzione significa che E soddisfa le condizioni della proposizione 3 quando $\mathfrak{S}$ è la famiglia dei suoi sottoinsiemi debolmente compatti. Poiché il duale L^∞ di uno spazio L^1 è isomorfo a uno spazio $C(K)$ (Kakutani, Stone), per il corollario 1 della proposizione 3 la prima asserzione sarà dimostrata per gli spazi L^1 non appena lo sarà per gli spazi $C_0(M)$. Allora anche la seconda sarà dimostrata per $E = L^1$, poiché in L^1 una successione debolmente di Cauchy è debolmente convergente (teorema 1, corollario 3).

Siamo dunque ricondotti al caso $E = C_0(M)$. Per il corollario 3 della proposizione 3 basta dimostrare la seconda asserzione del teorema, che si può formulare così. Sia (f_i) una successione debolmente di Cauchy in $E = C_0(M)$ e sia A' un sottoinsieme di E' compatto per $\sigma(E', E'')$. Occorre mostrare che $\langle f_i, \mu\rangle$ converge uniformemente per $\mu \in A'$. In caso contrario esisterebbero $\varepsilon > 0$, una successione (μ_j) estratta da A' e una successione strettamente crescente (i_j) di indici tali che

$$|\langle f_{i_{j+1}} - f_{i_j}, \mu_j\rangle| \geq \varepsilon.$$

Ciò ci riconduce al caso in cui A' è una successione relativamente debolmente compatta. Sappiamo che esiste allora una misura positiva limitata μ rispetto alla quale tutte le μ_i sono assolutamente continue. Si prenda per esempio, omettendo i termini nulli,

$$\mu = \sum_i 2^{-i} \frac{|\mu_i|}{\|\mu_i\|}.$$

Le μ_i si possono così identificare a elementi di $L^1(\mu)$. Poiché $L^1(\mu)$ è un sottospazio normato di $\mathcal{M}^1(M) = E'$, lo spazio delle misure limitate su M, ed è chiuso in quanto completo, è anche chiuso per $\sigma(E', E'')$. La successione A' è quindi relativamente debolmente compatta anche in $L^1(\mu)$. D'altra parte (f_i), essendo debolmente di Cauchy, è limitata in $C_0(M)$ e converge in ogni punto, dunque converge in misura su ogni compatto rispetto a μ. Per la proposizione 1 segue che $\langle f_i, \mu\rangle$ converge uniformemente al variare di μ in A'. La dimostrazione è conclusa.

Corollario 1. Siano E, F, G spazi localmente convessi e sia u un'applicazione bilineare continua di $E \times F$ in G. Supponiamo che E sia isomorfo a uno spazio L^1 o $C_0(M)$. Per ogni sottoinsieme debolmente compatto A di E e B di F, la restrizione di u ad $A \times B$ è continua per il prodotto delle topologie deboli su $A \times B$ e la topologia debole su G. In particolare $u(A \times B)$ è debolmente compatto in G.

Ci si può ricondurre al caso in cui u è una forma bilineare continua. Per il capitolo 2, §18, teorema 12 basta mostrare che l'applicazione lineare v di E in F' definita da u trasforma gli insiemi debolmente compatti A in insiemi compatti per $\tau(F', F)$. Ora v è debolmente compatta quando si munisce F' della topologia $\tau(F', F)$. La conclusione segue quindi dal teorema 2. Si ha inoltre il seguente corollario.

Corollario 2. Nelle ipotesi del corollario 1, se (x_i) è debolmente di Cauchy in E e (y_i) è debolmente di Cauchy in F, allora $(u(x_i, y_i))$ è debolmente di Cauchy in G.

Ricondursi al caso di una forma bilineare u, interpretandola come applicazione lineare di F in E'. L'applicazione più importante del teorema 2 è la seguente.

Teorema 3 (Dunford–Pettis–Phillips). Sia M uno spazio localmente compatto munito di una misura positiva μ, sia E uno spazio di Banach e sia u un'applicazione lineare debolmente compatta di $L^1(\mu)$ in E. Esiste allora un'applicazione misurabile f di M in E tale che $\|f(t)\| \leq \|u\|$ per ogni t e tale che

$$u\phi = \int \phi(t) f(t)\, d\mu(t) \qquad (\phi \in L^1(\mu)). \tag{1}$$

(Il prodotto ϕf è automaticamente integrabile, il che dà senso alla formula. Si veda Bourbaki, *Intégration.*) La funzione f è unica a meno di funzioni localmente trascurabili.

L'unicità è immediata e ben nota in un contesto più generale. Ne segue che basta dimostrare il teorema per M compatto. Infatti a ogni compatto K si associa allora una classe F_K di funzioni limitate e misurabili f su K a valori in E, con $\|f(t)\| \leq \|u\|$ per quasi ogni $t \in K$, tali che (1) valga per le ϕ nulle sul complementare di K. Per l'unicità, se $K \subset K'$, F_K è la restrizione di $F_{K'}$. Per un noto lemma di Godement, concepito proprio per situazioni di questo genere, esiste un'applicazione f di M in E che induce su ciascun K la classe F_K. Si verifica subito che essa ha le proprietà richieste: la disuguaglianza $\|f(t)\| \leq \|u\|$ vale localmente quasi ovunque, e una modifica su un insieme localmente trascurabile permette di ottenerla ovunque.

Supponiamo dunque M compatto. Allora $L^\infty \subset L^1$, e la palla unitaria di L^∞ è una parte debolmente compatta di L^1 (per esempio per il corollario 2 del teorema 1). Il teorema 2 mostra che la sua immagine è relativamente compatta in E. Sia E_1 il sottospazio vettoriale chiuso generato da questa immagine. È uno spazio di Banach separabile. Poiché L^∞ è denso in L^1 e la sua immagine è in E_1, anche $u(L^1) \subset E_1$. Possiamo così supporre separabile anche E. Sia A la chiusura dell'immagine della palla unitaria di L^1. È un sottoinsieme debolmente compatto di E e, poiché E' è debolmente separabile (essendo E

separabile), A è metrizzabile per la sua topologia debole. Inoltre A è la palla unitaria del duale dello spazio di Banach F che si ottiene munendo E' della seminorma definita dal funzionale di Minkowski di A°, passando al quoziente e completando. Con questa identificazione le due topologie deboli coincidono. Dalla compattezza e metrizzabilità di A per la topologia debole segue che F è separabile. Pertanto u diventa un'applicazione lineare di norma uno da L^1 nel duale dello spazio di Banach separabile F (il caso $u = 0$ è immediato).

Per il teorema di Dunford–Pettis nella forma classica (come in Bourbaki), u è definita da un'applicazione scalarmente misurabile f di M nella palla unitaria di F' mediante l'integrale (1), ora inteso come integrale debole in F'. A maggior ragione f è scalarmente integrabile come applicazione di M in E e (1) vale come integrale debole in E. Resta da osservare che f è addirittura misurabile: per un'applicazione a valori in uno spazio di Banach *separabile* la misurabilità scalare implica, com'è noto, la misurabilità. Infine la disuguaglianza $\|f(t)\| \leq \|u\|$ segue dal risultato più preciso $f(M) \subset A$, valido anche senza supporre M compatto o E separabile. Per una prima applicazione si vedano gli esercizi 8 e 9. Il teorema 3 svolge un ruolo importante nella teoria dei prodotti tensoriali topologici.

Esercizio 1. Mostrare che si ottiene una condizione equivalente a quelle della proposizione 3 supponendo, nell'enunciato che riguarda le applicazioni in F, che F sia uno spazio di Banach o addirittura lo spazio di Banach ℓ^∞. (In quest'ultimo caso usare la parte III, §2, esercizio 3.)

Esercizio 2. Diremo che uno spazio localmente convesso E è uno *spazio DP* (Dunford–Pettis) se soddisfa le condizioni della proposizione 3 prendendo per $\mathfrak{S}$ la famiglia dei suoi sottoinsiemi debolmente compatti.

1) Se E è DP, ogni suo fattore diretto è DP. L'analogo risultato è falso per i sottospazi e per i quozienti. (Ricordare che ogni spazio di Banach è isomorfo tanto a un sottospazio di uno spazio $C(K)$ quanto a un quoziente di uno spazio L^1. Si vedano il capitolo 1, §14, esercizio 1, e il capitolo 2, §17, proposizione 30, corollario.)

2) Uno spazio di Banach riflessivo DP ha dimensione finita. (Mostrare che la sua palla unitaria è precompatta.)

3) Uno spazio di Banach riflessivo di dimensione infinita non è isomorfo a un fattore diretto di uno spazio L^1 o di uno spazio $C_0(M)$ (usare 1) e 2)). Mediante le osservazioni alla fine di 1) dedurne esempi di sottospazi vettoriali di $C(K)$ o di L^1 che non ammettono un supplementare topologico.

Esercizio 3. 1) Sia u un'applicazione di uno spazio uniforme E in uno spazio topologico di Hausdorff F. Se u trasforma le successioni di Cauchy in successioni convergenti, trasforma i sottoinsiemi precompatti metrizzabili in sottoinsiemi relativamente compatti di F. (Mostrare che u si prolunga per continuità al completamento del sottoinsieme precompatto metrizzabile considerato.) Corollario: se u è un'applicazione da uno spazio uniforme E in uno spazio uniforme F che manda le successioni di Cauchy in successioni di Cauchy, allora è uniformemente continua su ogni sottoinsieme precompatto metrizzabile e ne ha immagine precompatta. (Considerare il caso in cui F è di Hausdorff e completo. Per quanto precede, u si prolunga allora per continuità al completamento del sottoinsieme precompatto considerato, da cui la conclusione.)

2) Casi particolari di 1). Sia u un'applicazione lineare da uno spazio localmente convesso di Hausdorff che trasforma le successioni debolmente di Cauchy in successioni convergenti. Allora u trasforma i sottoinsiemi limitati debolmente metrizzabili in sottoinsiemi

relativamente compatti.

3) In particolare, se in F le successioni debolmente di Cauchy convergono debolmente, ogni applicazione lineare debolmente continua di E in F trasforma i sottoinsiemi limitati debolmente metrizzabili in sottoinsiemi relativamente debolmente compatti. Prendendo $E = F$ e u identica, ogni sottoinsieme limitato debolmente metrizzabile di F è relativamente debolmente compatto. Se il duale forte di E è separabile, ogni applicazione lineare debolmente continua di E in F trasforma i limitati in insiemi relativamente debolmente compatti.

Esercizio 4. 1) Un sottoinsieme limitato debolmente metrizzabile di uno spazio L^1 è relativamente debolmente compatto. (Usare il teorema 1, corollario 3, e l'esercizio 3, punto 3).)

2) Sia E uno spazio $C_0(M)$ di dimensione infinita. Mostrare che in E esistono successioni debolmente di Cauchy che non convergono debolmente (e perciò, a maggior ragione, sottoinsiemi limitati debolmente metrizzabili che non sono relativamente debolmente compatti) e successioni debolmente convergenti che non convergono nella norma. (Procedere per costruzione diretta, riconducendosi mediante passaggio al quoziente al caso di M metrizzabile, oppure osservare che, se l'asserzione fosse falsa, l'identità di E sarebbe debolmente compatta per il §1, esercizio 5 c), criterio 3), ed esercizio 10, criterio d). Allora E sarebbe riflessivo, il che richiede che sia di dimensione finita.)

3) Dedurre da 1) e 2) che uno spazio $C_0(M)$ di dimensione infinita non è isomorfo a un sottospazio vettoriale topologico di uno spazio $L^1(\mu)$, e che uno spazio L^1 di dimensione infinita non è isomorfo a un quoziente di uno spazio $C_0(M)$. (La seconda asserzione equivale alla prima per dualità. Si può anche dimostrare prima la seconda usando il §1, esercizio 6 b).)

Esercizio 5. 1) Siano E, F spazi di Banach con E isomorfo a uno spazio L^1 o $C_0(M)$, sia u una forma bilineare debolmente compatta su $E \times F$, sia A un sottoinsieme debolmente compatto di E e sia B la palla unitaria di F. Mostrare che la restrizione di u ad $A \times B$ è continua per il prodotto delle topologie deboli. (Considerare u come applicazione lineare debolmente compatta di E nel duale forte di Banach F' e applicare il teorema 2.) Si può anche sostituire l'ipotesi su A con la seguente: A è limitato e debolmente metrizzabile. (Usare l'esercizio 3, punto 3).) Esiste una variante in cui si suppone F localmente convesso. Quale ipotesi occorre fare su u?

2) Siano E e F spazi di Banach ciascuno isomorfo a uno spazio del tipo $C_0(M)$. Sia u una forma bilineare continua su $E \times F$. Mostrare che, se A è un sottoinsieme debolmente compatto oppure limitato e debolmente metrizzabile di E e B è la palla unitaria di F, la restrizione di u ad $A \times B$ è continua per il prodotto delle topologie deboli. (Usare 1) e il §1, esercizio 6 b).)

Esercizio 6. 1) Sia μ una misura positiva limitata su uno spazio localmente compatto M. Sia E un sottospazio vettoriale di $L^\infty(\mu)$ chiuso in uno spazio L^p con $1 \leq p < \infty$. Mostrare che E è di dimensione finita. (Mediante il teorema del grafico chiuso mostrare che le topologie indotte su E da L^∞ e L^p coincidono. Se $p = 1$, ciò permette di ricondursi al caso $p > 1$. Mostrare poi che la palla unitaria di E per la norma indotta da L^p è precompatta applicando il teorema 2 all'applicazione identica di L^∞ nello spazio riflessivo L^p.)

2) Sia μ una misura positiva su uno spazio M. Siano $1 \leq p < \infty$, E un sottospazio vettoriale chiuso di L^p e $f_0 \in L^p$, $f_0 \geq 0$, tale che ogni $f \in E$ sia maggiorata in modulo da

un multiplo di f_0. Mostrare che E è di dimensione finita. (Introdurre la misura limitata di densità $|f_0|^p$ rispetto a μ e ricondursi a 1).)[63]

Esercizio 7. Dimostrare il teorema 2 nel caso in cui E è uno spazio $(\mathcal{F})$. (Ricondursi al caso di uno spazio di Banach mediante il capitolo 4, parte II, §2, teorema 1, corollario 2.)

Esercizio 8. Sia M uno spazio localmente compatto con una misura positiva μ, sia f un'applicazione scalarmente misurabile di M in uno spazio di Banach E e sia g un'applicazione fortemente misurabile di M in E, scalarmente uguale a f localmente quasi ovunque.

1) Mostrare che f definisce un'applicazione lineare debolmente compatta di L^1 in E e applicare il teorema 3. In particolare ogni applicazione scalarmente misurabile e localmente limitata di M in uno spazio di Banach *riflessivo* E è scalarmente uguale, localmente quasi ovunque, a un'applicazione fortemente misurabile di M in E. (Osservazione. Uno studio più approfondito, basato sull'esercizio supplementare 4, punto 3), mostrerebbe che quest'ultimo risultato resta valido senza supporre l'applicazione localmente limitata e quando E è uno spazio $(\mathcal{F})$ riflessivo.)

2) Secondo le definizioni generali, un'applicazione f di M in E si dice *debolmente misurabile* se, per ogni compatto $K \subset M$ e ogni $\varepsilon > 0$, esiste un compatto $K' \subset K$ tale che $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ e la restrizione di f a K' sia debolmente continua. (Ne segue che f è scalarmente misurabile, ma il viceversa è falso.) Mostrare che un'applicazione debolmente misurabile di M in E è già fortemente misurabile. (Ricondursi al caso in cui f è debolmente continua e M compatto. Applicare poi 1), osservando che vale persino $f(t) = g(t)$ quasi ovunque e non solo scalarmente quasi ovunque. Per quest'ultimo punto ricondursi al caso in cui g stessa è continua.)

3) Caso particolare di 2). Se f è un'applicazione debolmente continua di uno spazio localmente compatto M in uno spazio di Banach E, allora f è misurabile rispetto a ogni misura μ su M.

Esercizio 9. Siano M, N spazi compatti e f una funzione numerica su $M \times N$. A ogni $s \in M$ associamo la funzione $F(s)$ su N data da $F(s)(t) = f(s,t)$.

1) L'applicazione $s \mapsto F(s)$ è debolmente continua da M nello spazio di Banach $C(N)$ se e soltanto se f è limitata e continua rispetto a ciascuna variabile. (La necessità è immediata. Per la sufficienza si mostra che $F(M)$ è un sottoinsieme debolmente compatto di $C(N)$ usando la parte III, §2, teorema 3.)

2) Supponiamo f continua rispetto a ciascuna variabile. Mostrare che per ogni misura positiva μ su M, ogni compatto $K \subset M$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K' \subset K$ tale che $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ e la restrizione di f a $K' \times N$ sia continua. (Ricondursi al caso in cui f prende valori nel segmento $[0,1]$ e dunque soddisfa le condizioni di 1). Basta allora applicare l'esercizio 10, punto 3), secondo il rinvio dell'edizione inglese.)[64]

3) Per f come in 2), mostrare che f è misurabile rispetto a ogni misura positiva μ su $M \times N$. (Sia ρ l'immagine di μ mediante la proiezione di $M \times N$ su M, e si applichi 2) a f e ρ.) Mostrare che 2) e 3) restano validi se f prende valori in uno spazio metrizzabile separabile P e se in 3) si suppongono M, N soltanto localmente compatti. (Immergere P nel prodotto di una successione di segmenti per ricondursi al caso di una funzione a valori

[63] A p. 238 l'edizione inglese reca $f \in L^p$. La formulazione con $f \in E$ dà l'enunciato relativo al sottospazio del punto 1).

[64] Il caso particolare di misurabilità qui utilizzato figura nell'esercizio 8, punto 3).

in un segmento. In 3), se M, N sono soltanto localmente compatti, la riduzione al caso compatto è immediata.)

4) Supponiamo la funzione numerica f sul prodotto dei compatti M, N limitata e continua rispetto a ciascuna variabile. Per ogni misura μ su M e ν su N, f è integrabile rispetto a $\mu \otimes \nu$ per 3). Poniamo

$$u_f(\mu, \nu) = \int_{M \times N} f \, d\mu \, d\nu.$$

Mostrare che si ottiene così una forma bilineare separatamente debolmente continua sul prodotto $\mathcal{M}(M) \times \mathcal{M}(N)$ dei duali di $C(M)$ e $C(N)$, e che la corrispondente applicazione da $\mathcal{M}(M)$ in $C(N)$ è

$$\mu \longmapsto \int_M F \, d\mu$$

(integrale debole in $C(N)$). Usare 1). Viceversa, ogni forma bilineare separatamente debolmente continua u su $\mathcal{M}(M) \times \mathcal{M}(N)$ è definita da una funzione f del tipo descritto, univocamente determinata da

$$f(s,t) = u(\varepsilon_s, \varepsilon_t), \qquad \|u\| = \sup_{s,t} |f(s,t)|,$$

dove ε_s è la misura di massa $+1$ nel punto s.

Esercizio 10. Sia U un aperto di $\mathbf{C}^n$ e sia $f(z_1, \ldots, z_n)$ una funzione definita su U, localmente sommabile o localmente limitata e olomorfa separatamente in ciascuna variabile. Nel caso localmente limitato, mostrare che, se f è definita sul prodotto di due aperti $U \subset \mathbf{C}^p$ e $V \subset \mathbf{C}^q$, è localmente limitata e separatamente olomorfa in U e V, allora f è olomorfa. Poiché è misurabile (si veda il rinvio dell'originale all'esercizio 11, punto 3), ossia l'esercizio 9, punto 3, qui sopra), essa è localmente sommabile. Esaminare questo caso. Considerare la distribuzione T definita da f e mostrare che soddisfa le equazioni

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}_i} = 0.$$

Dedurne l'esistenza di una funzione olomorfa g uguale quasi ovunque a f. Mostrare infine che $f = g$.[65]

Esercizi supplementari

Questi esercizi non si riferiscono direttamente al testo, ma ne utilizzano le tecniche.

Esercizio 1. 1) Sia $E = L^1(\mu)$, con μ numerabile all'infinito, e sia H un sottoinsieme convesso del duale $E' = L^\infty(\mu)$. Mostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) H è debolmente chiuso.

b) H è chiuso rispetto alle successioni debolmente convergenti.

c) H è chiuso rispetto alle successioni limitate che convergono quasi ovunque.

L'implicazione a) $\Rightarrow$ b) è immediata. Si ha b) $\Rightarrow$ c) perché, per il teorema di Lebesgue, le successioni considerate in c) sono debolmente convergenti. Per mostrare c) $\Rightarrow$ a), ricondursi al caso di H limitato mediante il teorema di Banach–Dieudonné (capitolo 4, parte II, §3, teorema 2), poi al caso di μ limitata sostituendola con una misura limitata equivalente,

[65] Nella scansione (p. 240) l'equazione è stampata con z_i al denominatore. Qui si esplicita la derivata rispetto alla variabile coniugata delle equazioni di Cauchy–Riemann.

e dunque al caso $L^\infty \subset L^1$. (Mostrare che H è allora un sottoinsieme convesso chiuso di L^1, quindi debolmente chiuso in L^1, e perciò debolmente compatto in L^1, essendo già relativamente debolmente compatto. Ne segue che H è debolmente compatto anche in L^∞.)

2) Sia E uno spazio separabile e sia A un sottoinsieme convesso di E'. Allora A è debolmente chiuso se e soltanto se è debolmente chiuso rispetto alle successioni. (Usare il teorema di Banach–Dieudonné.) Questo esercizio avrebbe potuto figurare nel capitolo 4, parte II, §3.

3) Sia f un'applicazione da uno spazio localmente compatto di Hausdorff M in uno spazio localmente convesso E. Mostrare che le $x' \in E'$ per cui $\langle f(t), x' \rangle$ è misurabile costituiscono un sottospazio vettoriale H di E' chiuso rispetto alle *successioni* debolmente convergenti. Dedurne che, se E è uno spazio $(\mathcal{F})$ separabile o uno spazio L^1 costruito su una misura numerabile all'infinito, f è scalarmente misurabile purché esista un sottoinsieme totale di E' costituito da forme x' per cui $\langle f(t), x' \rangle$ è misurabile. (Osservazione. Il risultato diventa falso se si prende, per esempio, $E = \ell^\infty$ o $E = \ell^1(I)$ con I non numerabile.)

4) Sia E uno spazio $C(K)$ costruito su un compatto stoniano (cfr. esercizio 12), per esempio ℓ^∞, e sia H un sottoinsieme convesso di E'. Allora H è chiuso rispetto alle successioni debolmente convergenti se e soltanto se è *fortemente* chiuso. (Usare l'esercizio 12, punto 2).) In particolare, se $\dim E = \infty$, esiste in E' un iperpiano chiuso rispetto alle successioni debolmente convergenti ma non debolmente chiuso, e dunque una forma lineare continua rispetto alle successioni debolmente convergenti ma non debolmente continua. (Infatti E non è riflessivo.)

5) Mostrare che 1) è falso se non si suppone μ numerabile all'infinito. (Prendere lo spazio E di 4) e ricordare che uno spazio di Banach è sempre isomorfo a un quoziente di uno spazio $\ell^1(I)$ per un opportuno insieme di indici I.)

Esercizio 2. 1) Sia $E = L^1(\mu)$ costruito su una misura μ numerabile all'infinito. Sia u una forma lineare su E'. Mostrare che sono equivalenti le condizioni seguenti.

a) u è debolmente continua.

b) u è continua rispetto alle successioni che tendono debolmente a zero.

c) u è continua rispetto alle successioni limitate in L^∞ che tendono a zero quasi ovunque. (Usare l'esercizio 1, punto 1).)

2) Sia $E = L^1(\mu)$ con μ su uno spazio localmente compatto M. Mostrare che esistono uno spazio localmente compatto $\widetilde{M}$, somma topologica di una famiglia di compatti $(M_i)_{i \in I}$, e una misura ρ di supporto $\widetilde{M}$ tali che $L^1(\rho)$ sia isomorfo a $L^1(\mu)$ come spazio di Banach ordinato. Si può supporre che I sia ridotto a un elemento oppure non sia numerabile. La cardinalità di I è allora ben determinata e si chiama *ordine all'infinito* di μ. (Procedere come nel §1, esercizio 2 b).)

3) Con le notazioni di 2), sia $p = \mathrm{card}(I)$ l'ordine all'infinito di μ. Mostrare che le condizioni seguenti sono equivalenti.

a) Ogni forma lineare sul duale di $L^1(\mu)$ continua rispetto alle successioni debolmente convergenti è debolmente continua.

b) Ogni forma continua sul duale $\ell^\infty(I)$ di $\ell^1(I)$, continua rispetto alle successioni debolmente convergenti, è debolmente continua.

c) Ogni forma lineare positiva su $\ell^\infty(I)$ che si annulla su $c_0(I)$ ed è continua rispetto alle successioni debolmente convergenti è nulla.

(L'implicazione a) $\Rightarrow$ b) è facile, e b) $\Rightarrow$ a) segue facilmente da 1) e 2). Per c) $\Rightarrow$ b), considerare la restrizione v di u a c_0 come elemento di ℓ^1, e quindi come forma lineare

debolmente continua su ℓ^∞. Mostrare che $u - v$ è nulla, il che riconduce b) al caso di una forma u nulla su c_0. Interpretando $\ell^\infty(I)$ come $C(\widehat{I})$, con $\widehat{I}$ compattificazione di Stone di I, mostrare che, se la misura μ su $\widehat{I}$ è una forma lineare su $\ell^\infty(I)$ continua rispetto alle successioni debolmente convergenti, lo è anche $|\mu|$. Ciò riconduce al caso $\mu \geq 0$. A questo fine interpretare le forme lineari continue su $\ell^\infty(I)$ come «funzioni additive d'insieme» limitate, definite sulla famiglia di tutti i sottoinsiemi di I. Le forme continue rispetto alle successioni debolmente convergenti diventano allora funzioni d'insieme «completamente additive». La nostra asserzione significa che la «variazione totale» di una funzione d'insieme completamente additiva è ancora completamente additiva: fatto ben noto, benché condannato da Bourbaki.)

4) Nel linguaggio delle funzioni d'insieme, l'ipotesi considerata in 3), che dipende soltanto dal cardinale p, significa che sulla famiglia di tutti i sottoinsiemi di I non esiste una funzione d'insieme positiva completamente additiva, non identicamente nulla, per la quale ogni punto abbia misura zero. Un tale cardinale si dice *di misura zero*. Se esiste un cardinale che non è di misura zero, ne esiste un primo p_0, e tutti i cardinali successivi non sono di misura zero. Mostrare che la somma di una famiglia di cardinali di misura zero è di misura zero se anche l'insieme degli indici ha cardinalità di misura zero. In particolare, il successore di un cardinale di misura zero è di misura zero, perciò p_0, se esiste, è un cardinale limite. Un cardinale è *inaccessibile* se è un cardinale limite e se, per ogni famiglia di cardinali strettamente inferiori indicizzata da un insieme di cardinalità strettamente inferiore, anche la somma è strettamente inferiore. Quindi p_0 sarebbe inaccessibile. Sembra plausibile che si possa aggiungere senza contraddizione agli assiomi della teoria degli insiemi l'inesistenza di cardinali inaccessibili e, a maggior ragione, l'asserzione che ogni cardinale sia di misura zero (cfr. capitolo 4, parte I, §6, esercizio 3 g)).

Esercizio 3. 1) Sia μ una misura positiva su uno spazio localmente compatto. Consideriamo $E = L^1(\mu)$ come spazio di Banach ordinato. Mostrare che, se H è un sottospazio vettoriale chiuso che è anche un sottoreticolo, esiste un'unica proiezione di E su H che manda gli elementi positivi in elementi positivi e conserva la norma degli elementi positivi. Tale proiezione ha norma uno se $H \neq 0$. (Ricondursi al caso in cui M è un compatto K, poi considerare lo spazio di Kakutani, ossia il compatto K tale che $L^\infty(\mu)$ sia isomorfo a $C(K)$. In tal caso l'applicazione naturale $C(K) \to L^\infty(\mu)$ è un isomorfismo suriettivo. Considerando

$$H \cap L^\infty = H \cap C(K),$$

mostrare che si può trovare un'applicazione ϕ di K su un quoziente di Hausdorff K' di K in modo tale che, detta μ' l'immagine di μ mediante ϕ (cfr. §1, esercizio 4 b)), H coincida con l'insieme delle classi delle funzioni $f' \circ \phi$, con $f' \in L^1(\mu')$. Identificando $L^1(\mu)$ allo spazio delle misure su K di base μ, mostrare che, se la misura ρ su K è in $L^1(\mu)$, la sua immagine su K' è in $L^1(\mu')$. La proiezione cercata si ottiene componendo le applicazioni $\rho \mapsto \phi(\rho)$ e $f' \mapsto f' \circ \phi$.)

2) Mostrare che ogni sottospazio separabile di $L^1(\mu)$ è contenuto in un fattore diretto separabile. (Considerare il sottoreticolo vettoriale chiuso generato dal sottospazio dato.) Osservazione. Questa proprietà degli spazi vettoriali topologici L^1 non è condivisa dagli spazi L^∞ (come al solito!).

Esercizio 4. Sia μ una misura positiva numerabile all'infinito sullo spazio localmente compatto M. Sia $\widetilde{\mathcal{M}}(\mu)$ l'insieme delle classi di funzioni reali misurabili su M, finite o meno. Esso ha dunque un massimo $+\infty$ e un minimo $-\infty$.

1) Sia H un sottoinsieme filtrante crescente di $\widetilde{\mathcal{M}}(\mu)$. Mostrare che il filtro delle sezioni crescenti di H converge, per la convergenza in misura su ogni compatto, e che il limite è l'estremo superiore di H in $\widetilde{\mathcal{M}}(\mu)$. Esiste in H una successione che converge quasi ovunque a questo estremo superiore. (Esaminare il caso in cui μ è limitata, onde $L^\infty \subset L^1$. Esaminare quindi le classiche proprietà analoghe per gli insiemi filtranti limitati in L^1, identificando $\widetilde{\mathcal{M}}$ all'insieme delle funzioni misurabili con valori tra 0 e 1 mediante un omeomorfismo strettamente crescente da $[-\infty, +\infty]$ su $[0, 1]$.)

2) Sia H un insieme di funzioni reali, finite e misurabili su M (funzioni, non classi di funzioni), tali che per ogni $t \in M$ si abbia $\sup_{f\in H} f(t) < +\infty$. Mostrare che esiste una funzione reale, finita e misurabile g su M tale che, per ogni $f \in H$, $f(t) \leq g(t)$ quasi ovunque. (Mostrare mediante l'ultima parte di 1) che l'estremo superiore in $\widetilde{\mathcal{M}}$ delle classi delle $f \in H$ è la classe di una funzione finita quasi ovunque.)

3) Sia f una funzione scalarmente misurabile di M in uno spazio localmente convesso E e sia A un sottoinsieme debolmente limitato di E'. Mostrare che esiste una funzione reale misurabile finita g su M tale che per ogni $x' \in A$ si abbia $|\langle f(t), x'\rangle| \leq g(t)$ quasi ovunque. Diciamo che f è *scalarmente essenzialmente limitata* se per ogni $x' \in E'$ la classe di $\langle f(t), x'\rangle$ appartiene a L^∞. Dedurre da quanto precede che, se E è uno spazio di Banach o, più generalmente, uno spazio $(\mathcal{F})$, per ogni compatto $K \subset M$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K' \subset K$ con $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$ tale che la restrizione di f a K' sia scalarmente limitata.

4) Sia E uno spazio di Banach. Supponiamo che per la coppia (μ, E) valga il teorema di Dunford–Pettis che caratterizza le applicazioni lineari continue di L^1 in E', o equivalentemente di E in L^∞. (È così se E è separabile o se M è uno spazio di Kakutani, ecc.) Sia u un'applicazione lineare continua di E in $\mathcal{M}(\mu)$. L'applicazione u è definibile mediante una funzione scalarmente misurabile f di M in E' per mezzo della formula usuale $ux =$ classe della funzione $\langle x, f(t)\rangle$, se e soltanto se l'immagine della palla unitaria di E in $\mathcal{M}(\mu)$ è limitata per l'ordine del reticolo. (Per la necessità usare 3). Per la sufficienza, mediante composizione con un opportuno operatore di moltiplicazione, ricondursi al caso in cui u manda la palla unitaria di E nella palla unitaria di L^∞.)

5) Si supponga μ non discreta (per esempio la misura di Lebesgue su $[0, 1]$). Mostrare che per $1 \leq p < \infty$ esistono applicazioni lineari continue da $E = L^1(\mu)$ in $L^p(\mu)$ che non si possono ottenere mediante un'applicazione di M in $E' = L^\infty(\mu)$, ossia mediante un nucleo misurabile su $M \times M$. (Sostituire E con ℓ^1, osservando che ℓ^1 è isomorfo a un quoziente di L^1. Mostrare quindi che in L^p esistono successioni limitate che non sono limitate per l'ordine di $\mathcal{M}(\mu)$ e che definiscono applicazioni di ℓ^1 del tipo cercato.)

Esercizio 5. Sia M uno spazio localmente compatto munito di una misura positiva μ, sia f un'applicazione strettamente debolmente sommabile di M in uno spazio E di tipo $(\mathcal{F})$ (cfr. §1, esercizio 13). Supponiamo che in E ogni sottoinsieme limitato nel senso della parte III, §3, esercizio supplementare 3 sia precompatto e che ogni sottospazio separabile di E sia contenuto in un fattore diretto separabile. Quest'ultima coppia di condizioni è verificata in particolare per uno spazio L^1 costruito su una misura qualsiasi, per l'esercizio 3, punto 2), e la parte III, §3, esercizio supplementare 5. Esiste allora un'applicazione *misurabile* g di M in E scalarmente uguale a f localmente quasi ovunque. (Per il §1, esercizio 13, punto 1), l'applicazione u_f di L^∞ in E definita da f è compatta. Sia F un fattore diretto separabile di E contenente l'immagine di L^∞ mediante u_f. Sia p una proiezione continua di E su F e poniamo $g = p \circ f$. Allora g è misurabile, poiché prende valori nello spazio $(\mathcal{F})$ separabile F. Si osservi che $u_f = u_g$, il che significa che f è scalarmente uguale a g localmente quasi ovunque.)

Esercizio 6. 1) Sia M uno spazio localmente compatto con una misura positiva μ. Sia E uno spazio localmente convesso di Hausdorff tale che ogni forma lineare su E' continua rispetto alle successioni equicontinue debolmente convergenti sia continua. (Per esempio, E separabile e completo: le restrizioni delle forme considerate ai sottoinsiemi equicontinui sono allora debolmente continue, essendo tali insiemi debolmente metrizzabili. Oppure E è uno spazio L^1 costruito su una misura μ' il cui ordine all'infinito ha misura zero: si veda l'esercizio 2.) Sia f un'applicazione limitata scalarmente misurabile di M in E e sia $\phi \in L^1(\mu)$. Mostrare che l'integrale debole $\int \phi f \, d\mu$ appartiene a E. (Basta mostrare che è una forma continua per le successioni equicontinue debolmente convergenti, e a questo fine si applica il teorema di Lebesgue.)

2) Supponiamo inoltre E metrizzabile e ogni successione debolmente di Cauchy in E debolmente convergente. Vale allora il risultato più forte: ogni applicazione scalarmente sommabile di M in E è strettamente debolmente sommabile. (Per il §1, esercizio 13, punto 3), basta mostrare che l'applicazione di E' in L^1 definita da f manda i sottoinsiemi equicontinui in insiemi relativamente debolmente compatti di L^1 e che $\int \phi f \, d\mu \in E$ per ogni funzione continua ϕ a supporto compatto su M. Mediante il teorema di Eberlein ricondursi al caso in cui M è numerabile all'infinito, quindi, mediante la seconda ipotesi su E e l'esercizio 4, punto 3), al caso in cui M è compatto e f è scalarmente essenzialmente limitata su M. Si è così ricondotti a 1).)

Esercizio 7. Siano M, M' spazi localmente compatti con misure positive μ, μ' e sia $E = L^1(\mu')$. Supponiamo che l'ordine all'infinito di μ' sia un cardinale di misura zero, oppure che per ogni compatto $K \subset M$ la cardinalità di K sia di misura zero (cfr. esercizio 2). Sia f un'applicazione scalarmente misurabile di M in E. Mostrare che esiste un'applicazione misurabile g di M in E scalarmente uguale a f quasi ovunque. Se f è debolmente sommabile, g è strettamente debolmente sommabile (§1, esercizio 13). (Mostrare che si può supporre M compatto, usando il lemma di Godement nel primo caso e procedendo come al punto 2) dell'esercizio precedente nel secondo caso. Si può così supporre di essere nel caso in cui l'ordine all'infinito di μ' ha misura zero, sostituendo se necessario μ' con

$$\mu'' = \sup_{t \in M} \inf(1, |f(t)|) \, \mu'.$$

La seconda asserzione segue dall'esercizio 6. Per la prima ricondursi, mediante l'esercizio 4, punto 3), al caso in cui f è scalarmente essenzialmente limitata. Allora f è scalarmente sommabile, dunque strettamente debolmente sommabile, e si può applicare l'esercizio 5.)

Corrispondenza delle pagine

La colonna *Orig.* indica la pagina stampata nell'edizione inglese del 1973. La colonna *It.* indica la pagina in cui ritrovare il passo corrispondente all'inizio di quella pagina. Nella scansione le pagine del testo sono spostate di dieci posizioni: la pagina stampata 1 corrisponde alla pagina 11 del PDF.

Le prime dieci pagine della scansione contengono l'occhiello, il catalogo della collana, il frontespizio, i dati editoriali, la prefazione, una pagina bianca e le quattro pagine dell'indice. I titoli del catalogo sono riportati in lingua originale.

Orig.	It.	Orig.	It.	Orig.	It.	Orig.	It.	Orig.	It.
1	7	26	25	51	45	76	64	101	83
2	7	27	26	52	46	77	65	102	84
3	8	28	27	53	47	78	65	103	84
4	9	29	28	54	47	79	66	104	85
5	10	30	29	55	48	80	67	105	86
6	11	31	30	56	49	81	68	106	87
7	11	32	30	57	50	82	69	107	88
8	12	33	31	58	50	83	69	108	88
9	13	34	32	59	51	84	70	109	89
10	14	35	33	60	52	85	71	110	90
11	14	36	33	61	53	86	72	111	91
12	15	37	34	62	53	87	72	112	91
13	16	38	35	63	54	88	73	113	92
14	17	39	36	64	55	89	74	114	93
15	17	40	37	65	56	90	75	115	94
16	18	41	37	66	56	91	75	116	94
17	19	42	38	67	57	92	76	117	95
18	19	43	39	68	58	93	77	118	96
19	20	44	40	69	59	94	78	119	97
20	21	45	41	70	59	95	78	120	97
21	22	46	42	71	60	96	79	121	98
22	22	47	42	72	61	97	80	122	99
23	23	48	43	73	62	98	81	123	100
24	24	49	44	74	63	99	82	124	100
25	25	50	44	75	63	100	82	125	101

Corrispondenza delle pagine (seguito)

Orig.	It.	Orig.	It.	Orig.	It.	Orig.	It.	Orig.	It.
126	102	150	120	174	138	198	157	222	175
127	103	151	121	175	139	199	157	223	176
128	103	152	121	176	140	200	158	224	177
129	104	153	122	177	141	201	159	225	177
130	105	154	123	178	141	202	160	226	178
131	106	155	124	179	142	203	160	227	179
132	106	156	124	180	143	204	161	228	179
133	107	157	125	181	144	205	162	229	180
134	108	158	126	182	144	206	163	230	181
135	109	159	127	183	145	207	163	231	181
136	110	160	127	184	146	208	164	232	182
137	110	161	128	185	147	209	165	233	183
138	111	162	129	186	148	210	166	234	184
139	112	163	130	187	148	211	167	235	184
140	112	164	130	188	149	212	167	236	185
141	113	165	131	189	150	213	168	237	186
142	114	166	132	190	151	214	169	238	186
143	115	167	133	191	151	215	170	239	187
144	115	168	134	192	152	216	170	240	188
145	116	169	135	193	153	217	171	241	189
146	117	170	135	194	154	218	172	242	189
147	118	171	136	195	154	219	173	243	190
148	119	172	137	196	155	220	173	244	191
149	119	173	138	197	156	221	174	245	192